Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Теория автоматического управления»

Тема: «Изучение различных форм представления системы»

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич
Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

Лабораторная работа №2

1.1 Цель работы

Получить навыки работы с моделями ВСВ и каноническими представлениями.

1.2 Программа работы

- Представить систему в трех канонических формах.
- Получить структурные схемы для каждой формы.
- Получить матрицы управляемости и матрицы преобразования.
- Проверить систему на устойчивость, наблюдаемость и управляемость.

1.3 Индивидуальное задание

$a_0 = 0.75, a_1 = 2, b_0 = 0, b_1 = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0, u = 1(t)$
$x'' + 2x' + 0.75x = u'$

1.4 Ход работы

1.4.1 Построение канонических форм

Нормальная форма управления

$$W(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 0.75} = \frac{y}{u}$$

$$\frac{y}{p} = \frac{u}{p^2 + 2p + 0.75} = x_1 \Longrightarrow \begin{cases} u = x_1(p^2 + 2p + 0.75) \\ y = x_1(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} px_1 = x_2 \\ px_2 = u - 2p * x_2 - 0.75x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.75 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C:

$$det(A - \lambda) = 0 \Longrightarrow -\lambda(-2 - \lambda) + 0.75 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3/2 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме наблюдения и канонической форме, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0.75 & p + 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4 * (p + 2)}{4 * p^2 + 8 * p + 3} & \frac{4}{4 * p^2 + 8 * p + 3} \\ \frac{-3}{4 * p^2 + 8 * p + 3} & \frac{4p}{4 * p^2 + 8 * p + 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3}{4*p^2+8*p+3} & \frac{4p}{4*p^2+8*p+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{p}{p^2+2p+0.75}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

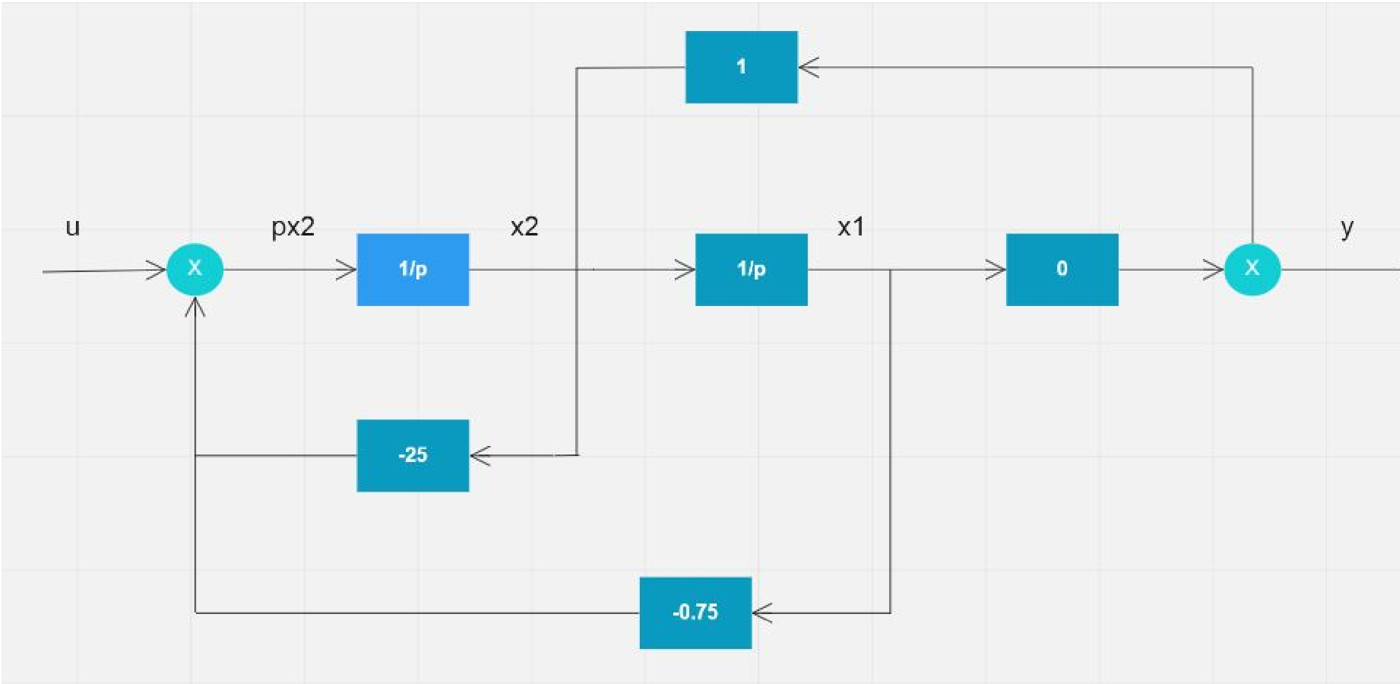

Рис. 1.1: Структурная схема НФУ

Нормальная форма наблюдения

$$W(p) = \frac{p}{p^2+2p+0.75} = \frac{y}{u} \Longrightarrow pu = (p^2+2p+0.75)y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p^2y + 2py + 0.75y - pu = 0 \Longrightarrow p(p(y) + 2y - u) + +0.75y = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = py + 2y - u \\ px_1 = -0.75y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = y \\ x_1 = px_2 + 2x_2 - u \\ px_1 = 0.75x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} px_1 = 0.75x_2 \\ px_2 = x_1 - 2x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C:

$$det(A - \lambda) = 0 \Longrightarrow -\lambda(-2-\lambda) + 3/4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1/2 \\ \lambda_2 = -3/2 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме управления и канонической форме, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 3/4 \\ -1 & p+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4*(p+2)}{4*p^2+8*p+3} & \frac{-3}{4*p^2+8*p+3} \\ \frac{4}{4*p^2+8*p+3} & \frac{4p}{4*p^2+8*p+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{4*p^2+8*p+3} & \frac{4p}{4*p^2+8*p+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{p}{p^2+2p+0.75}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

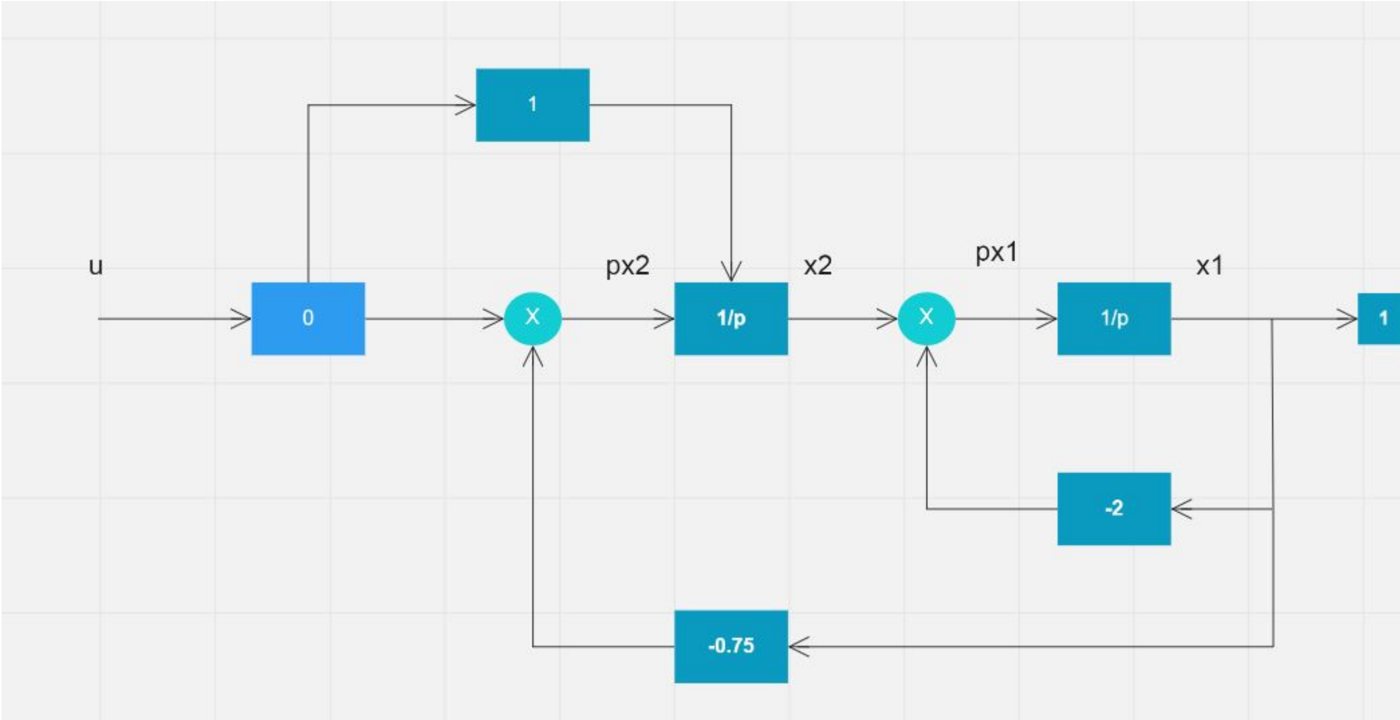

Рис. 1.2: Структурная схема НФН

Каноническая форма

$$W(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 0.75} = \frac{p}{(p+1/2)(p+3/2)} = \frac{1.5}{p+3/2} - \frac{0.5}{p+1/2} = \frac{y}{u}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{u} = \frac{1.5}{p+3/2} \\ \frac{x_2}{u} = \frac{-0.5}{p+1/2} \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} px_1 = 1.5 - 3/2x_1 \\ px_2 = -1/2x_2 - 1/2u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C:

$$det(A - \lambda) = 0 \Longrightarrow (-3/2 - \lambda)(-1/2 - \lambda) + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1/2 \\ \lambda_2 = -3/2 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме управления и нормальной форме наблюдения, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+3/2 & 0 \\ 0 & p+1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4*(p+2)}{4*p^2+8*p+3} & \frac{-3}{4*p^2+8*p+3} \\ \frac{4}{4*p^2+8*p+3} & \frac{4p}{4*p^2+8*p+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{2*p+3} & \frac{2}{2*p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{p}{p^2 + 2p + 0.75}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

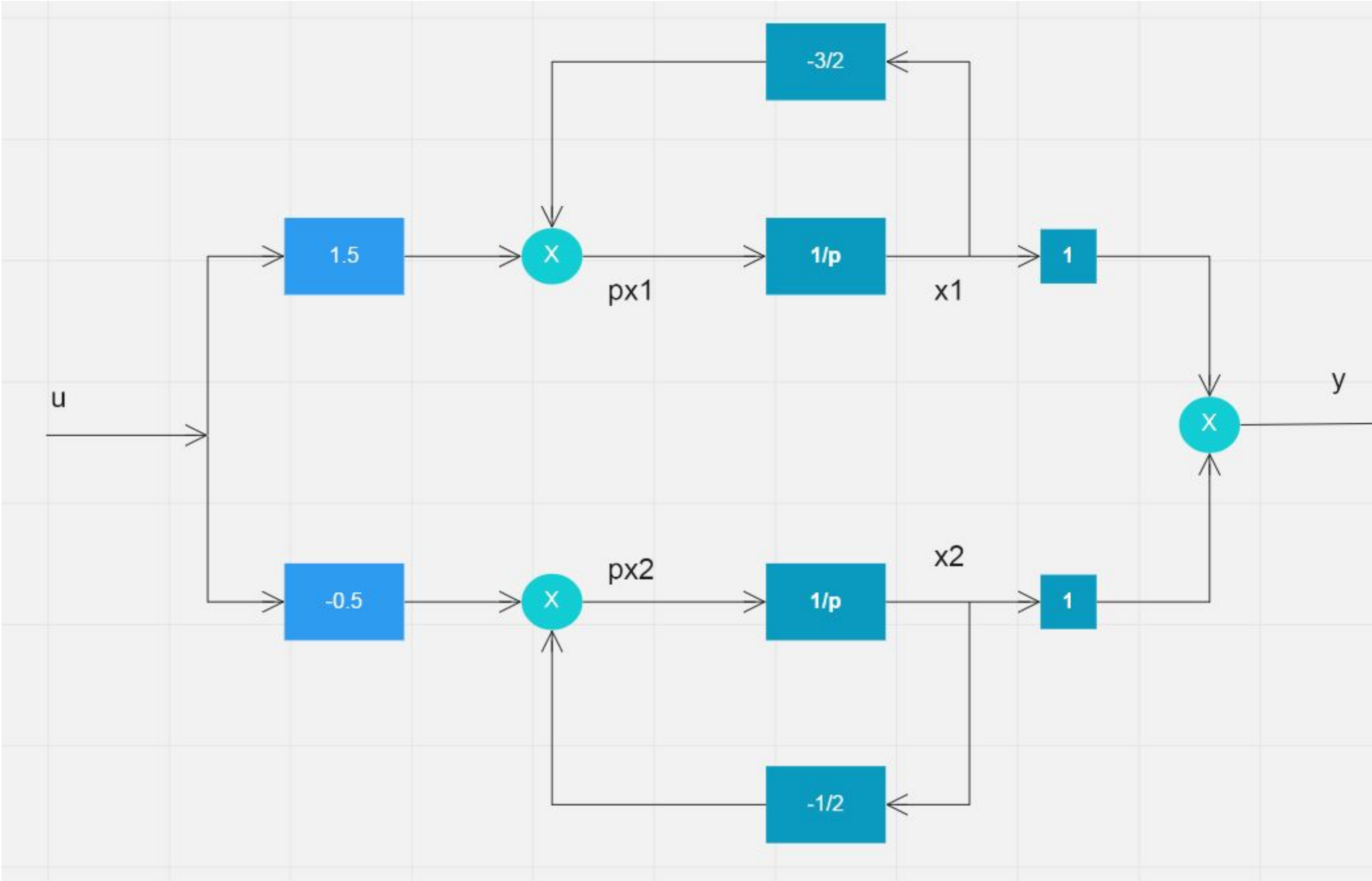

Рис. 1.3: Структурная схема КФ

1.4.2 Преобразования форм

Матрицы управляемости

Матрица управляемости находится как блочная матрица, где первый столбец равен матрице B, а второй столбец равен произведению AB:

$$U = [B, AB]$$

Матрицы управляемости нормальной формы управления (НФУ):

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости нормальной формы наблюдения (НФН):

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} -8/3 & 1 \\ -4/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости канонической формы (КФ):

$$U = \begin{bmatrix} 1.5 & -2.25 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -3 \\ -2/3 & -2 \end{bmatrix}$$

Матрицы преобразования

Матрица преобразования высчитывается по формуле:

$$P = U_* U^{-1}$$

- Матрица преобразования из НФУ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФУ в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -2.5 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 1.5 \\ -0.75 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 0.75 & 1.5 \\ -0.75 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8/3 & 1 \\ -4/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} -4/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -2.25 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8/3 & 1 \\ -4/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -3 \\ -2/3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} -2/3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -3 \\ -2/3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.4.3 Характеристики системы

Управляемость

Проверим управляемость системы по критерию Калмана:

$$detU = det\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

Определитель одной из матриц управляемости не нулевой, что означает, что система полностью управляема.

Наблюдаемость

Проверим наблюдаемость системы по критерию Калмана:

$$N = [C^T, A^TC^T] = [\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\-0.75 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}] = \begin{bmatrix}0 & -0.75\\1 & -2\end{bmatrix}$$

$$detN = det\begin{bmatrix}0 & -0.75\\1 & -2\end{bmatrix} = -1.25 \neq 0$$

Определитель одной из матриц наблюдаемости не нулевой, что означает, что система полностью наблюдаема.

Устойчивость

По теореме Ляпунова система является устойчивой тогда, когда вещественные части полюсов её передаточной функции отрицательны. В нашем случае полюса передаточной функции равны $p_1 = -1.5, p_2 = -0.5$, что означает, что система устойчива.

1.5 Вывод

!ДОДЕЛАТЬ