Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе № 2

Изучение различных форм представления системы

по предмету "Основы теории управления"

Выполнил студент гр. 43501/3
Намаконов Егор
Преподаватель
Нестеров С.А.

8 марта 2017 г.

Содержание

1. Цель работы

Для модели, заданной дифференциальным уравнением $y'' + 2y' - 3y = 3u' + 3u$:

- Представить систему в трёх канонических формах
- Нарисовать структуру системы
- Вычислить матрицы преобразования
- Выяснить, является ли система устойчивой, наблюдаемой и управляемой

2. Ход работы

2.1. Построение канонических форм

2.1.1. Нормальная форма управления

Для построения нормальной формы управления переменными пространства состояний выбирают выходную величину и $n-1$ её производных. В этом случае в блочной матрице A будет расположена единичная матрица, символизирующая уравнения $x_1' = x_2, ...x_{n-1}' = x_n$, а в последней строке будут указаны коэффициенты a_i уравнения $x_n' = -a_1x_1 - ... - a_nx_n + b_0u$.

В данной системе в правой части имеется производная от входной величины. Так как каноническая форма представляется как система, в которую входная величина входит без производных, нужно произвести дополнительное преобразование.

$y'' + 2y' - 3y = 3u' + 3u$, $(p^2 + 2p - 3)y = (3p + 3)u$, $(3p + 3)^{-1}y = (p^2 + 2p - 3)^{-1}u = x_1$, $u = p^2x_1 + 2px_1 - 3x_1$

Далее выражаем $px_1 = x_2, px_2 = 3x_1 - 2x_2 + u$, $y = 3x_1 + 3x_2$ и получаем следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Структурная схема для данной системы:

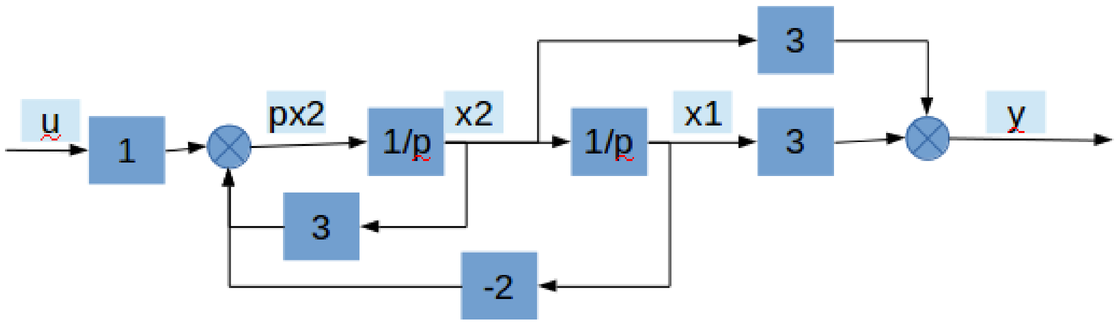

Рис. 1: Схема системы в нормальной форме управления

2.1.2. Нормальная форма наблюдения

Для представления системы в данной форме воспользуемся схемой Горнера:

$p^2y + 2py - 3y - 3pu - 3u = 0$, $p(p(y) + 2y - 3u) - 3y - 3u = 0$.

Зададим переменные состояния следующим образом:

$x_2 = y, x_1 = py + 2y - 3u = px_2 + 2y - 3u$, тогда $px_1 - 3y - 3u = 0$.

Отсюда $px_1 = 0x_1 + 3x_2 + 3u$, $px_2 = x_1 - 2x_2 + 3u$, $y = x_2$

Получаем матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Заметим, что при такой записи результирующие матрицы могут быть легко получены путём транспонирования матриц формы управления.

Структурная схема для данной системы:

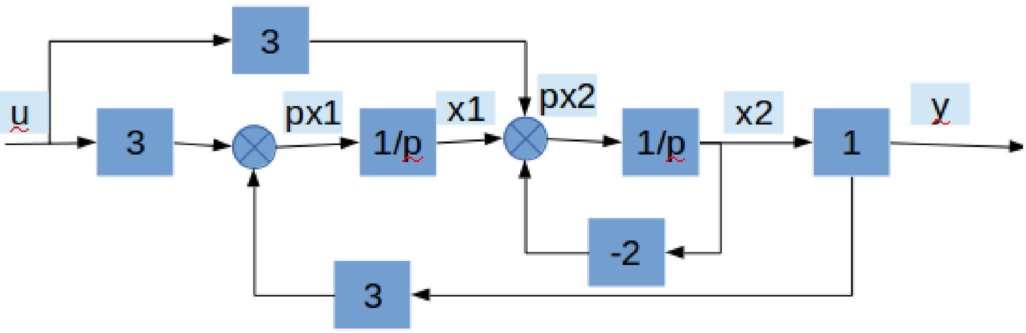

Рис. 2: Схема системы в нормальной форме наблюдения

2.1.3. Форма Лурье

$W(p) = \dfrac{3(p+1)}{(p-1)(p+3)} = \dfrac{R}{Q}$

Матрица A записывается как диагональная с элементами - полюсами ПФ ($p = 1, p = -3$):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Пусть $B = [1, 1]^t$. Тогда C представляется набором коэффициентов $c_i = R(p_i)/Q^i(p_i)$, где $Q^i = Q/(p - p_i)$

$c_1 = 3 * (1 + 1)/(1 + 4) = 1.5$, $c_2 = 3 * (-3 + 1)/(-3 - 1) = 1.5$

Итого $C = [1.5, 1.5]$
Структурная схема для данной системы:

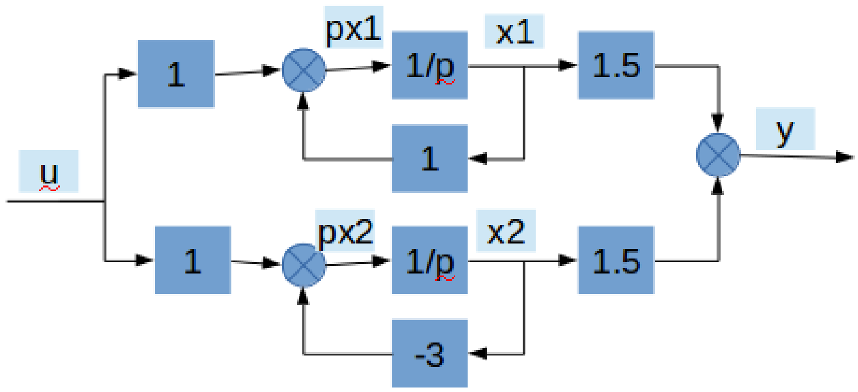

Рис. 3: Схема системы в форме Лурье

2.1.4. Сравнение различных форм представления системы

Проверим, что все полученные формы эквивалентны. Для этого промоделируем отклик системы на функцию Хевисайда в интервале t=0..5 и сравним полученные результаты:

```
function y = solve_eq(A,B,C,col)
          S=ss(A,B,C);
  t=linspace(0, 5);
  u=heaviside(t);
  y=lsim(S, u, t);
  plot(t, y, col);
  grid on;
endfunction

A1=[0 1; 3 -2];
B1=[0; 1];
C1=[3 3];

A2=[0 3; 1 -2];
B2=[3; 3];
C2=[0 1];

A3=[1 0; 0 -3];
B3=[1; 1];
C3=[1.5 1.5];

close all;
subplot(3,1,1);
solve_eq(A1,B1,C1,"r");
subplot(3,1,2);
solve_eq(A2,B2,C2,"g");
subplot(3,1,3);
solve_eq(A3,B3,C3,"b");
```

```
print -dpng comparison.png
```

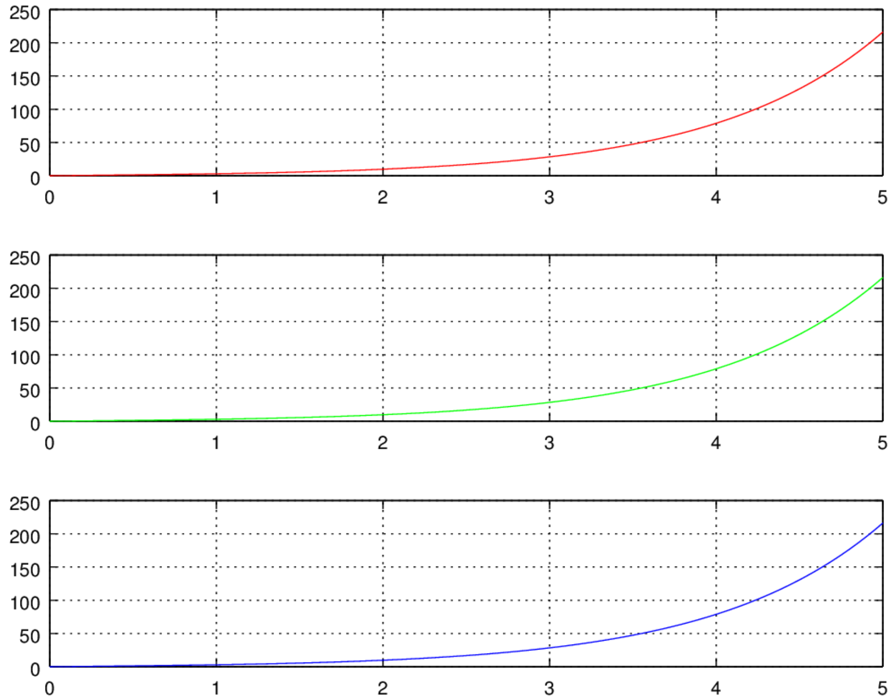

Рис. 4: Отклик системы, представленной в различных формах

Как видим, получен один и тот же результат моделирования, что подтверждает эквивалентность полученных форм.

2.2. Преобразования между формами

Как известно, матрица преобразования базиса может быть найдена следующим образом: $P_{12} = U_2 * U_1^{-1}$, где U_1, U_2 - матрицы управляемости соответствующих базисов. Так как матрицы A имеют размерность 2*2, то матрица управляемости имеет вид $U = [B|AB]$.

- Нормальная форма управления:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Нормальная форма наблюдения:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

- Форма Лурье:

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Отсюда найдём матрицы преобразований базисов:

- из формы управления в форму наблюдения:

$$P = U_2 * U_1^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15 & 3\\3 & 3\end{bmatrix} = 3 * \begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

- из формы управления в форму Лурье:

$$P = U_3 * U_1^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

- из формы наблюдения в форму управления:

$$P = U_1 * U_2^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} * 1/12 \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & -1\end{bmatrix} = 1/12 * \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix}$$

- из формы наблюдения в форму Лурье:

$$P = U_3 * U_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\end{bmatrix} * 1/12 \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & -1\end{bmatrix} = 1/6 * \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}$$

- из формы Лурье в форму управления:

$$P = U_1 * U_3^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} * 1/4 \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = 1/4 * \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

- из формы Лурье в форму наблюдения:

$$P = U_2 * U_3^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix} * 1/4 \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = 2/3 * \begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Проверим полученную матрицу преобразования для случая перехода из нормальной формы управления в нормальную форму наблюдения. Зная соотношения $A_2 = PA_1P^{-1}$, $B_2 = PB_1$, $C_2 = C_1P^{-1}$, запишем:

$$P = U_2 * U_1^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 9\\3 & -3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15 & 3\\3 & 3\end{bmatrix} = 3 * \begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}1/12 & -1/12\\-1/12 & 1/2.4\end{bmatrix} = 1/12 * \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix}$$

$$A_2 = P * A_1 * P^{-1} = 1/4 * \begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0 & 1\\3 & -2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix} = 1/4 * \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & -1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix} =$$

$$= 1/4 * \begin{bmatrix}0 & 12\\4 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}$$

$$B_2 = P * B_1 = 3 * \begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

$$C_2 = C_1 * P^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix} * 1/12 * \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

Полученные матрицы A,B,C совпали с рассчитанными ранее, что подтверждает правильность расчётов.

2.3. Характеристики системы

2.3.1. Управляемость

Согласно критерию Калмана, определитель матрицы управляемости должен быть ненулевым.

Матрица управляемости была рассчитана в предыдущем пункте. Вычислим её определитель:

$$det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

- система полностью управляема

2.3.2. Наблюдаемость

Согласно критерию Калмана, определитель матрицы наблюдаемости N должен быть ненулевым.

$$N = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$detN = -9 - 27 = -36 \neq 0$$

- система полностью наблюдаема.

2.3.3. Устойчивость

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, система является устойчивой тогда, когда вещественные части полюсов её передаточной функции отрицательны. В данном случае полюса равны 1 и -3, следовательно, система неустойчива.

Неустойчивость системы подтверждается тем, что на графике переходной функции (см. раздел с моделированием отклика системы) видна возрастающая экспонента, т.е. система не возвращается в исходное состояние с ходом времени.

3. Вывод

В ходе работы были построены различные модели системы: нормальные формы управления и наблюдения, а также форма Лурье.

Отличия между ними наиболее явно проявляются на структурных схемах. Система, представленная в форме управления, имеет два узла суммирования и n узлов размножения. В форме наблюдения - наоборот, два узла размножения и n узлов суммирования. Особенность обеих этих форм - сложные обратные связи между элементами схемы. Альтернатива - форма Лурье, которая требует (n+1) узлов размножения и столько же узлов суммирования. Её преимущество - обратные связи являются более простыми по сравнению с другими вариантами.

С помощью моделирования установлено, что полученные формы являются эквивалентными - отклики системы, представленной в каждой из форм, совпадают. Также показано, что система является неустойчивой, т.к. переходная функция представляет собой возрастающую экспоненту.

Переходы между формами выполняются с помощью матриц преобразования, которые, в свою очередь, могут быть рассчитаны на основе матриц управляемости системы. Кроме того, матрицы нормальной формы управления могут быть получены путём транспонирования матриц формы наблюдения и наоборот.

Для анализа управляемости и наблюдаемости использован критерий Калмана. С его помощью по определителю соответствующих матриц можно узнать, удовлетворяет ли система признаку. Установлено, что система является полностью наблюдаемой и управляемой. По теореме Ляпунова об устойчивости система является неустойчивой, т.к. один из полюсов передаточной функции - положительное вещественное число.