Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1

Курс: «Теория автоматического управления»

Выполнил студент:

Раскин Андрей Романович
Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

Лабораторная работа №1

1.1 Цель работы

Получение навыков по построению всех форм математических моделей, временных и частотных характеристик.

1.2 Программа работы

- Получить передаточную функцию.
- Решить ДУ.
- Получить частотные характеристики Найквиста и Боде.
- Получить переходную и весовую временные характеристики.
- Получить фазовую траекторию.

1.3 Индивидуальное задание

$a_0 = 0.75, a_1 = 2, b_0 = 0, b_1 = 1$
$x'' + 2x' + 0.75x = u', x(0) = 0, x'(0) = 0, u = 1(t)$

1.4 Ход работы

1.4.1 Получение передаточной функции

Уравнение уже приведено в линейный вид, следовательно можно сразу воспользоваться преобразованием Лапласа и получить передаточную функцию:

$x'' + 2x' + 0.75x = u'$
$xp^2 + 2xp + 0.75x = up$
$x(p^2 + 2p + 0.75) = up$
$W(p) = \frac{x}{u} = \frac{p}{p^2+2p+0.75}$

1.4.2 Решение дифференциального уравнения

$$u = 1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \implies u' = \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$x'' + 2x' + 0.75x = \begin{cases} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0, t < 0 \\ 1 \cdot \infty + 2 \cdot 0 + 0.75 \cdot 1, t = 0 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0.75 \cdot 1, t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \infty, t = 0 \\ 0.75, t > 0 \end{cases}$$

Таким образом имеется три участка кусочной функции для решения ДУ. При $t = 0$ ДУ уже решено (по начальным условиям $x(0) = 0, x'(0) = 0 => x''(0) = \infty$).

Решим ДУ для случая $t < 0$ с помощью Matlab функции *dsolve*:

```
syms x(t) dx(t)
x(t) = dsolve(diff(x, t, 2) + 2 * diff(x, t) + 0.75 * x(t) == 0)
```

В результате было получено:

$x(t < 0) = C_1 e^{-t/2} + C_2 e^{-3*t/2} => x'(t < 0) = -t/2 C_1 e^{-3*t/2}$

Аналогичным образом решим ДУ для случая $t > 0$:

```
syms x(t) dx(t)
x(t) = dsolve(diff(x, t, 2) + 2 * diff(x, t) + 0.75 * x(t) == 0.75)
```

В результате было получено:

$x(t > 0) = C_1 e^{-t/2} + C_2 e^{-3*t/2} => x'(t > 0) = -t/2 C_1 e^{-3*t/2}$

Важно отметить, что пограничный случай $t = 0, x(0) = 0$ можно отнести как и к результату при $t < 0$, если $C_1 = 0, C_2 = 0$, так и к $t > 0$ при тех же константах. Это означает, что функция $x(t)$ непрерывна в этой точке.

1.4.3 Частотные характеристики

$W(j\omega) = \frac{p}{p^2+2p+0.75} = \frac{p}{(p+3/2)(p+1/2)} = \frac{j\omega}{(j\omega+3/2)(j\omega+1/2)} = \frac{j\omega(j\omega-3/2)(j\omega-1/2)}{(j^2\omega^2-9/4)(j^2\omega^2-1/4)} = \frac{j(3/4-\omega^2)+2\omega^2}{(\omega^2+9/4)(\omega^2+1/4)} = \frac{2\omega^2}{(\omega^2+9/4)(\omega^2+1/4)} + j\frac{(3/4-\omega^2)}{(\omega^2+9/4)(\omega^2+1/4)}$

$u(f) = real(W(jf)) = \frac{2\omega^2}{(\omega^2+9/4)(\omega^2+1/4)}$

$v(f) = imagine(W(jf)) = \frac{3/4-\omega^2}{(\omega^2+9/4)(\omega^2+1/4)}$

$A(f) = \sqrt{u^2(f) + v^2(f)}$

$\alpha(f) = 20lgA(f)$

Построим диаграмму Найквиста с помощью Matlab функции *nyquist*:

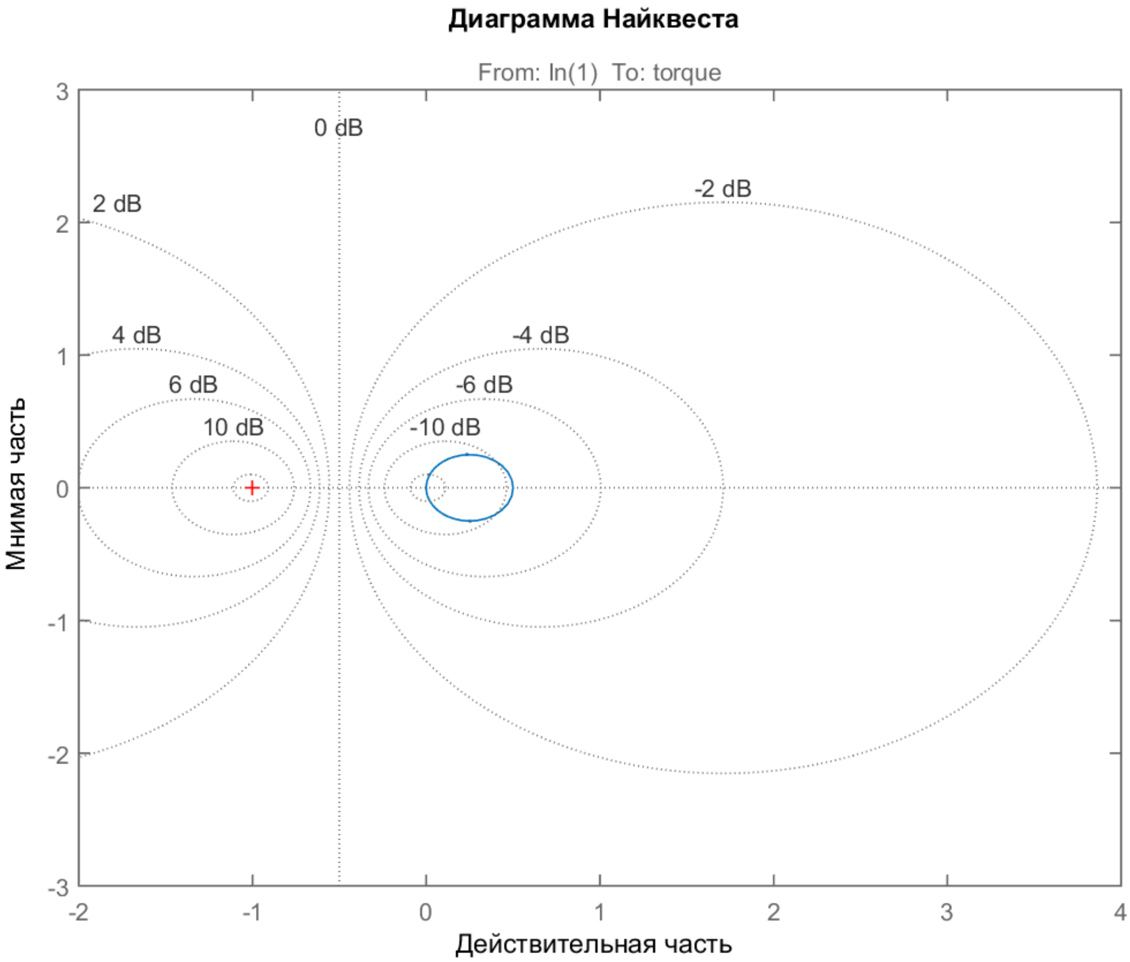

Рис. 1.1: Диаграмма Найквиста

Построим диаграмму Боде с помощью Matlab функции *bode*:

1.4.4 Временные характеристики

$h(t) = L^{-1}(\frac{W(p)}{p}) = L^{-1}(\frac{p}{p^2+2p+0.75}) = e^{-0.5t} - e^{-1.5t}$
$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 1.5e^{-1.5t} - 0.5e^{-0.5t}$

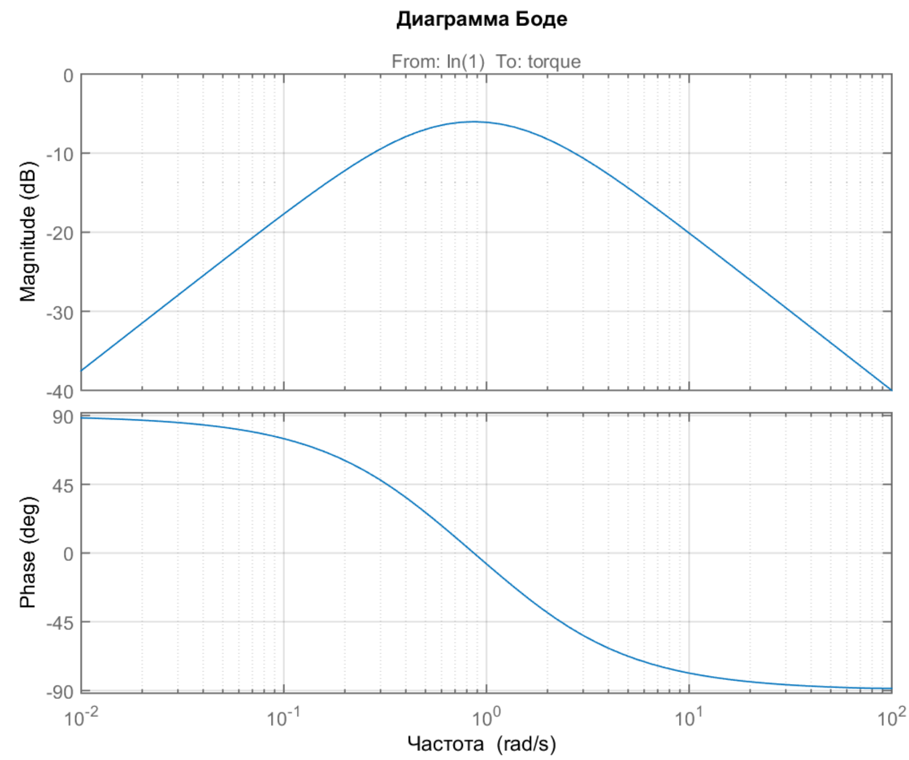

Рис. 1.2: Диаграмма Боде

Построим переходную характеристика с помощью Matlab функции *step*:

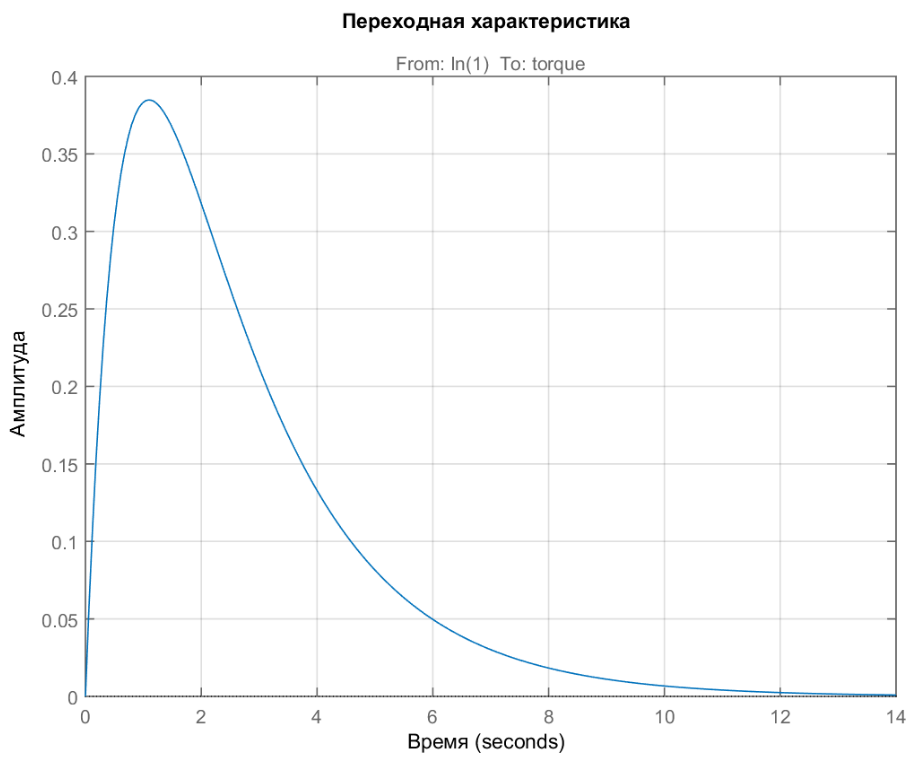

Рис. 1.3: Переходная характеристика системы

Построим весовую характеристика с помощью Matlab функции *impulse*:

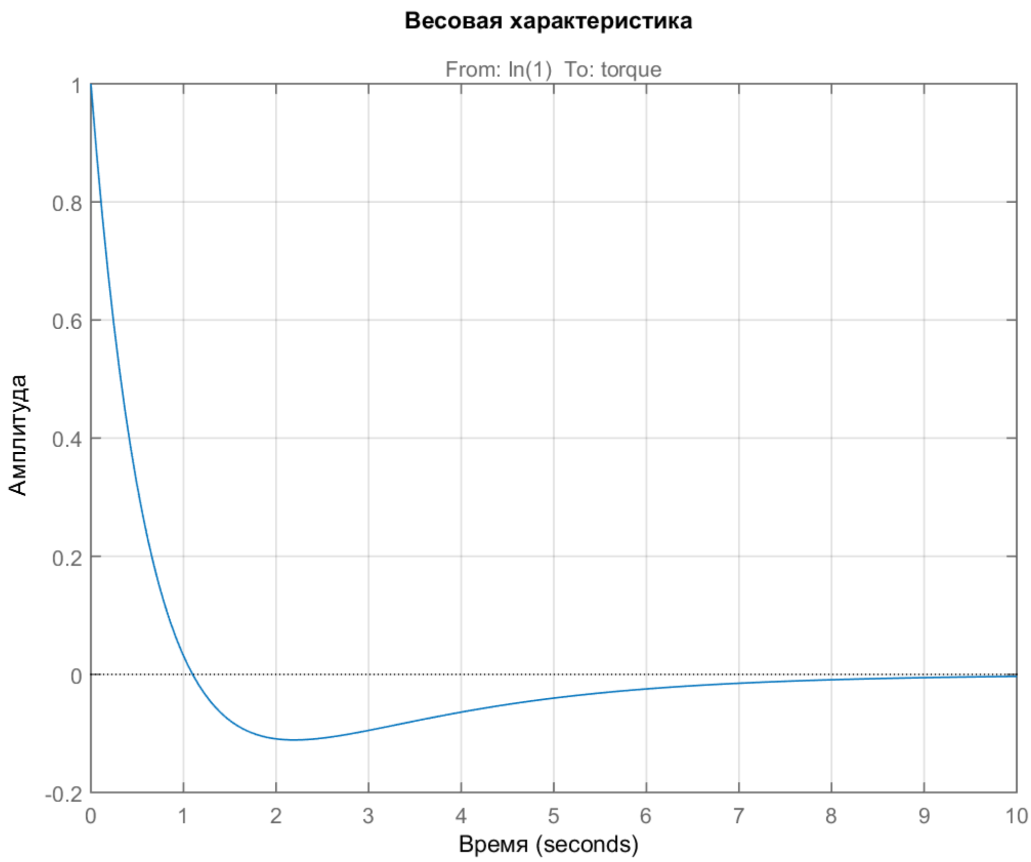

Рис. 1.4: Весовая характеристика системы

1.4.5 Фазовый портрет

Выполним замену переменной:
$Y = x'(t), X = x(t)$
Тогда ДУ преобразовывается к следующей системе:

$$x'' + 2x' + 0.75x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} Y' = -2Y\text{-0.75X} \\ X' = Y \end{cases}$$

После этого преобразования можно рассчитать фазовый портрет системы. Расчет численных значений $x(t)$ и $x'(t)$ производится с помощью Matlab функции $ode45$:

Из графика хорошо видно, что фазовые траектории представляют собой прямые линии, докажем это. Заметим, что $F(x'', x', x) = 0$ эквивалентно случаю $x(t \leq 0)$. В результате решения ДУ было получено:
$x(t \leq 0) = C_1 e^{-t/2} + C_2 e^{-3*t/2} => x'(t \leq 0) = -t/2C_1 e^{-3*t/2}$
Таким образом:
$x'(t \leq 0) = 25C_2 - 25x(t \leq 0)$
Тангенс наклона прямых линий равен $tg(k) = -25$.

1.5 Вывод

В ходе работы были получены важнейшие функции и характеристики для системы, заданной линейным ДУ и начальными условиями:

- *Диаграмма Найквиста (АФЧХ)* - представление частотного отклика линейной стационарной динамической системы в виде графика в комплексных координатах. АФЧХ применяется в основном для анализа систем, в частности исследования системы на устойчивость и её запасов.
- *Диаграмма Боде (ЛАФЧХ)* - представление частотного отклика линейной стационарной системы в логарифмическом масштабе.

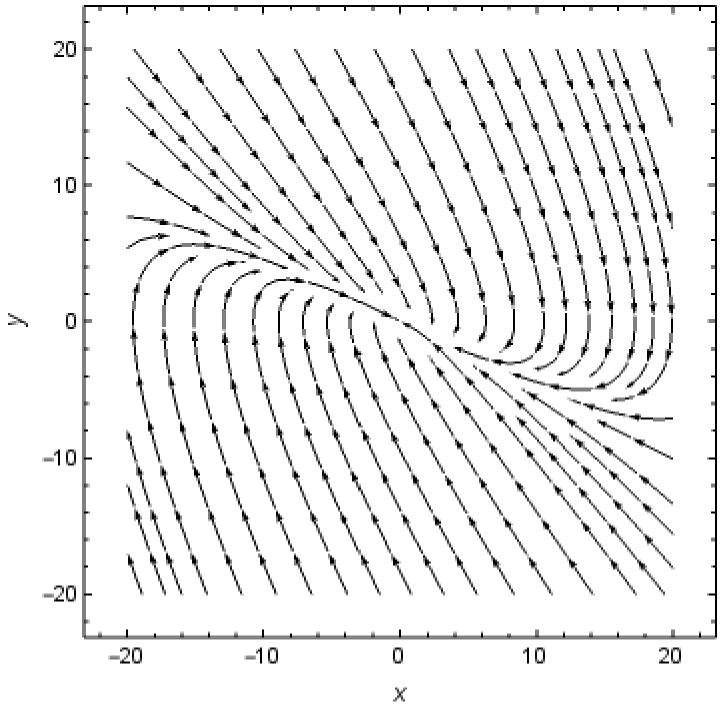

Рис. 1.5: Фазовый портрет системы

- *Переходная функция* - реакция динамической системы на входное воздействие в виде функции Хевисайда. Знание того, как система реагирует на быстрое изменение входного сигнала, является важным, поскольку скачок во входном сигнале может оказать серьёзное влияние на поведение всей системы или каких-то её компонентов.
- *Весовая функция* - реакция динамической системы на входное воздействие в виде единичного импульса.
- *Фазовый портрет* - Построение фазового портрета позволяет сделать выводы о характере изменений переменных системы без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

Было установлено, что система является устойчивой по критерию Найквиста, т.к. особая точка находится вне годографа. Matlab отлично подходит для решения задач, связанных с ТАУ.