

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчет по лабораторной работе №1
Дисциплина: Основы теории управления

Выполнил
студент гр. 43501/3

_____ Д. А. Зобков
(подпись)

Преподаватель

_____ С. А. Нестеров
(подпись)

“__” _____ 2017 г.

Санкт-Петербург
2017 г.

1 Цель работы

Получение навыков по построению всех форм математических моделей, временных и частотных характеристик.

2 Программа работы

- Получить передаточную функцию;
- Решить ДУ;
- Получить частотные характеристики Найквиста и Боде;
- Получить переходную и весовую временные характеристики;
- Получить фазовую траекторию.

3 Индивидуальное задание

$$x'' + 9x = u' + 9u, x(0) = 0, x'(0) = 0, u = 1(t)$$

4 Ход работы

4.1 Получение передаточной функции

Уравнение уже приведено в линейный вид, следовательно, можно сразу воспользоваться преобразованием Лапласа и получить передаточную функцию:

$$\begin{aligned}x'' + 9x &= u' + 9u \\xp^2 + 9x &= up + 9u \\x(p^2 + 9) &= u(p + 9) \\W(p) = \frac{x}{u} &= \frac{p + 9}{p^2 + 9}\end{aligned}$$

Добавим входное воздействие, передаточную функцию и выходное воздействие на ВВ модель:

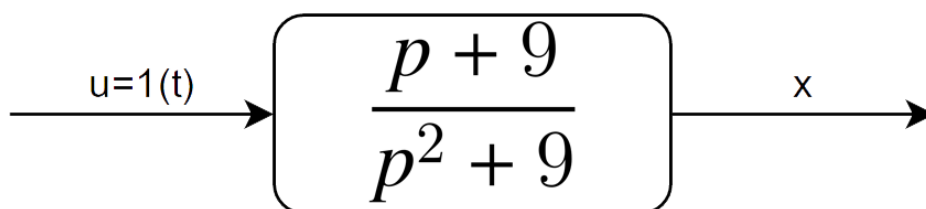


Рис. 4.1. ВВ модель

4.2 Решение дифференциального уравнения

$$u = 1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \implies u' = \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$x'' + 9x = \begin{cases} 0 + 9 \cdot 0, t < 0 \\ \infty + 9 \cdot 1, t = 0 \\ 0 + 9 \cdot 1, t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \infty, t = 0 \\ 9, t > 0 \end{cases}$$

Таким образом, имеется три участка кусочной функции для решения ДУ. При $t = 0$ ДУ уже решено (по начальным условиям $x(0) = 0, x'(0) = 0 \Rightarrow x''(0) = \infty$).

Решим ДУ для случая $t < 0$ с помощью Matlab функции *dsolve*:

```
1 syms x(t) dx(t)
2 x(t) = dsolve(diff(x, t, 2) + 9 * x == 0)
```

В результате было получено:

$$x(t < 0) = C1 \cos(3t) + C2 \sin(3t) \Rightarrow x'(t < 0) = 3C2 \cos(3t) - 3C1 \sin(3t)$$

Аналогичным образом решим ДУ для случая $t > 0$:

```
1 syms x(t) dx(t)
2 x(t) = dsolve(diff(x, t, 2) + 9 * x == 9)
```

В результате было получено:

$$x(t > 0) = C1 \cos(3t) + C2 \sin(3t) + 1 \Rightarrow x'(t > 0) = 3C2 \cos(3t) - 3C1 \sin(3t)$$

4.3 Частотные характеристики

$$W(j\omega) = \frac{j\omega + 9}{9 - \omega^2} = \frac{9}{9 - \omega^2} + j \frac{\omega}{9 - \omega^2}$$

$$u(\omega) = \text{real}(W(j\omega)) = \frac{9}{9 - \omega^2}$$

$$v(\omega) = \text{imag}(W(j\omega)) = j \frac{\omega}{9 - \omega^2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

$$\alpha(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

Построим диаграмму Найквиста с помощью Matlab функции *nyquist*:

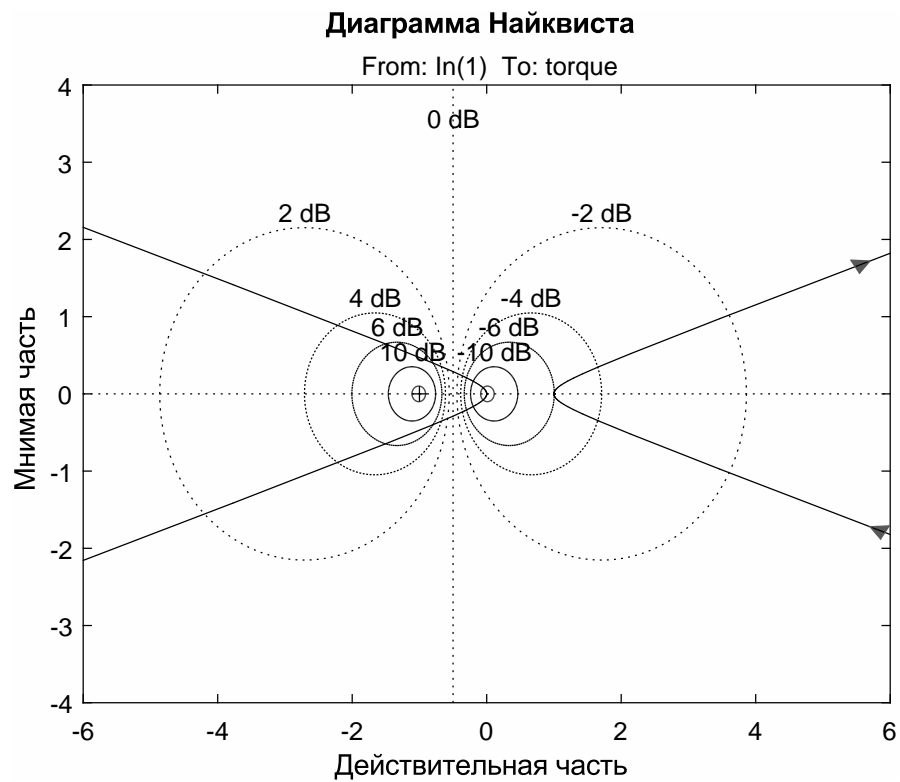


Рис. 4.2. Диаграмма Найквиста

Также построим диаграмму Найквиста с помощью функции *NyquistPlot* Wolfram Mathematica для более наглядного вида левой части диаграммы:

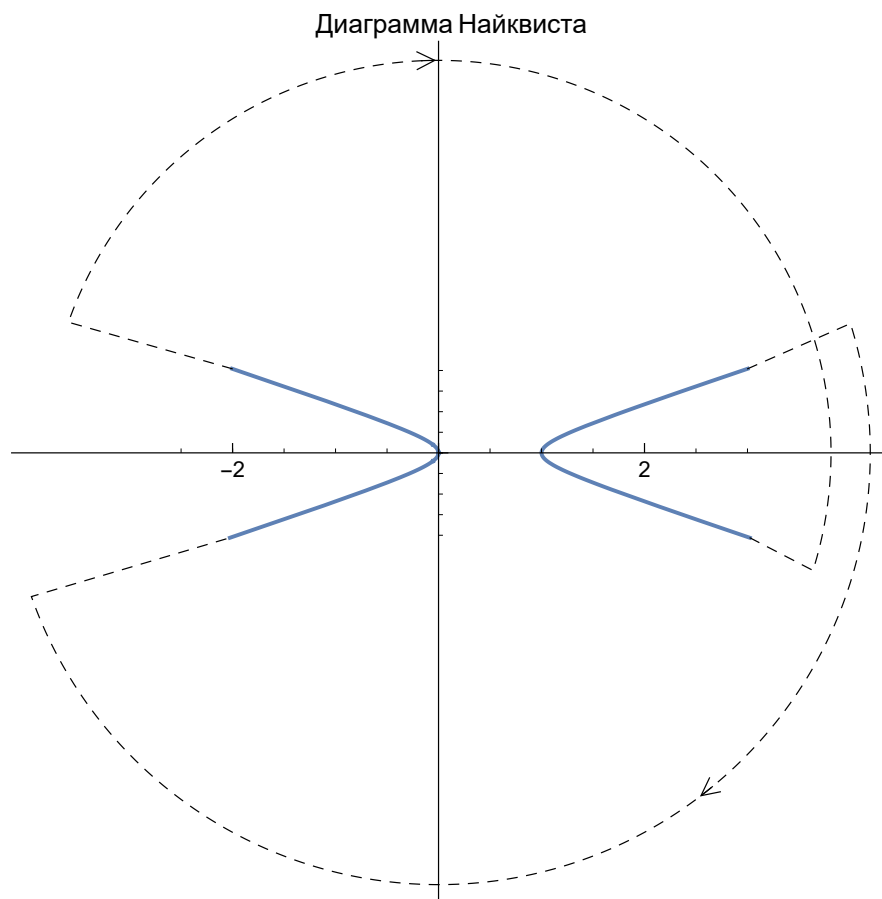


Рис. 4.3. Диаграмма Найквиста

Точка $(-1; j0)$ не охватывается, поэтому по критерию Найквиста данная система является устойчивой.

Построим диаграмму Боде с помощью Matlab функции *bode*:

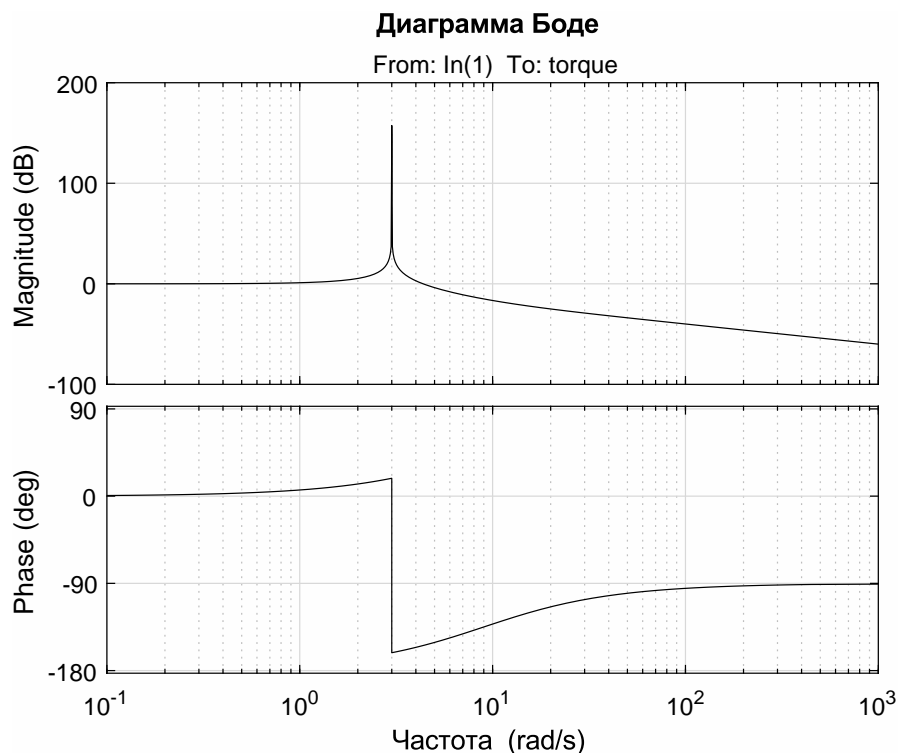


Рис. 4.4. Диаграмма Боде

Изначально наклон отсутствует, затем, после точки перегиба $\frac{1}{T} = 3$, наблюдается наклон в -20 дБ/декаду.

4.4 Временные характеристики

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\left(\frac{W(p)}{p}\right) = L^{-1}\left(\frac{p+9}{p(p^2+9)}\right) = \\ &= L^{-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+9} - \frac{p}{p^2+9}\right) = 1 + \frac{1}{3}\sin(3t) - \cos(3t) \end{aligned}$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 3\sin(3t) + \cos(3t)$$

Построим переходную характеристику с помощью Matlab функции *step*:

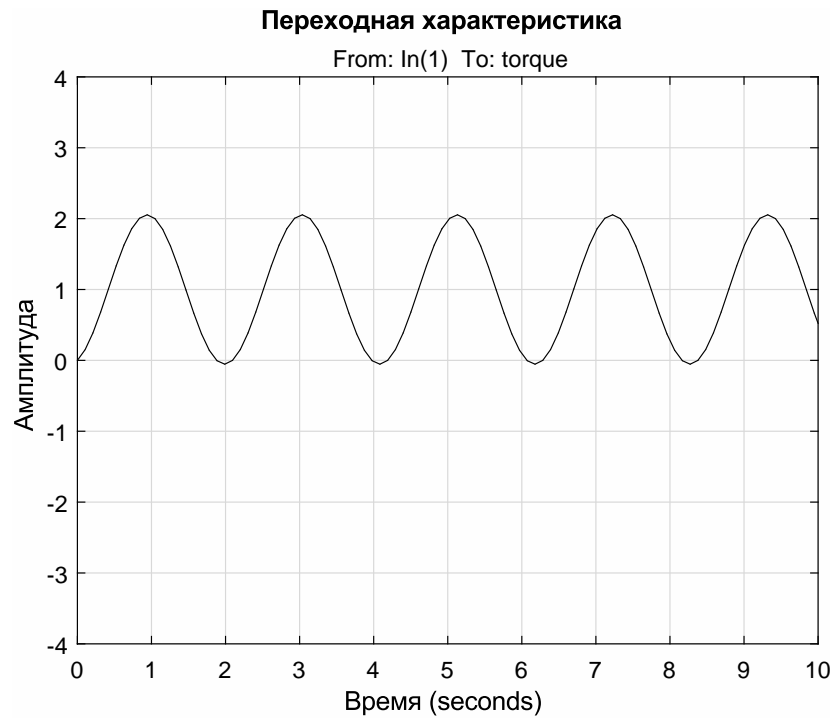


Рис. 4.5. Переходная характеристика

Построим весовую характеристику с помощью Matlab функции *impulse*:

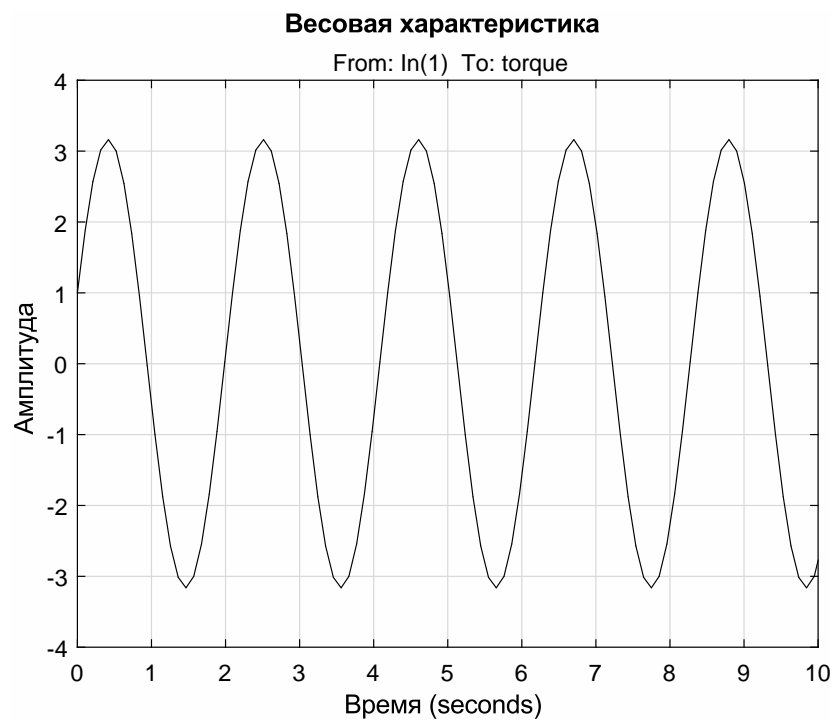


Рис. 4.6. Весовая характеристика

На данных характеристиках с незатухающими колебаниями можно заметить сходство с временными характеристиками, свойственным консервативному звену.

4.5 Фазовый портрет

Выполним замену переменных:

$$Y = x'(t), X = x(t)$$

Тогда ДУ преобразовывается к следующей системе: :

$$x'' + 9x = 0 \implies \begin{cases} Y' = -9X \\ X' = Y \end{cases}$$

После этого преобразования можно рассчитать фазовые траектории системы. Расчет численных значений $x(t)$ и $x'(t)$ производится с помощью функции *StreamDensityPlot* Wolfram Mathematica:

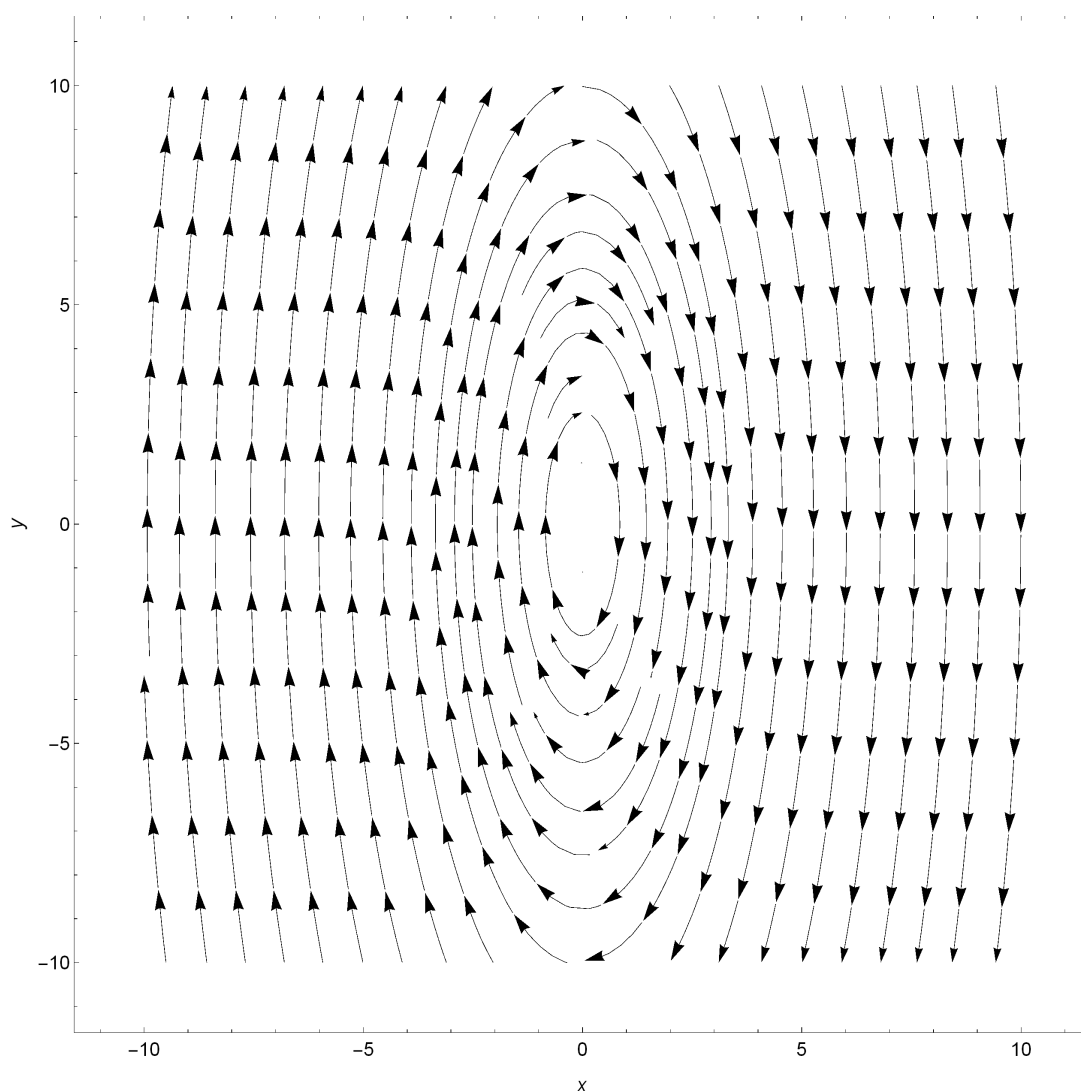


Рис. 4.7. Фазовые траектории системы

Можно заметить отсутствие демпфирования (что подтверждает отсутствие затухания колебаний на временных характеристиках), и особую точку типа центра в начале координат.

5 Вывод

В ходе данной работы были получены функции и характеристики для системы, заданной линейным ДУ и начальными условиями. С использованием функций

Matlab и Wolfram Mathematica были получены диаграммы Найквиста (АФЧХ) и Боде (ЛАФЧХ), переходная и весовая функции, а также фазовые траектории системы.

Из этих характеристик следует, что данная передаточная функция соответствует консервативному звену. Устойчивость системы подтверждается критерием Найквиста и диаграммой фазовых траекторий.