Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1

Курс: «Теория автоматического управления»

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич
Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

Лабораторная работа №1

1.1 Цель работы

Получение навыков по построению всех форм математических моделей, временных и частотных характеристик.

1.2 Программа работы

- Получить передаточную функцию.
- Решить ДУ.
- Получить частотные характеристики Найквиста и Боде.
- Получить переходную и весовую временные характеристики.
- Получить фазовую траекторию.

1.3 Индивидуальное задание

$x'' + 25x' = 5u' + 25u, x(0) = 0, x'(0) = 0, u = 1(t)$

1.4 Ход работы

1.4.1 Получение передаточной функции

Уравнение уже приведено в линейный вид, следовательно можно сразу воспользоваться преобразованием Лапласа и получить передаточную функцию:

$x'' + 25x' = 5u' + 25u$
$xp^2 + 25xp = 5up + 25u$
$x(p^2 + 25p) = u(5p + 25)$
$W(p) = \frac{x}{u} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$

Добавим входное воздействие, передаточную функцию и выходное воздействие на ВВ модель:

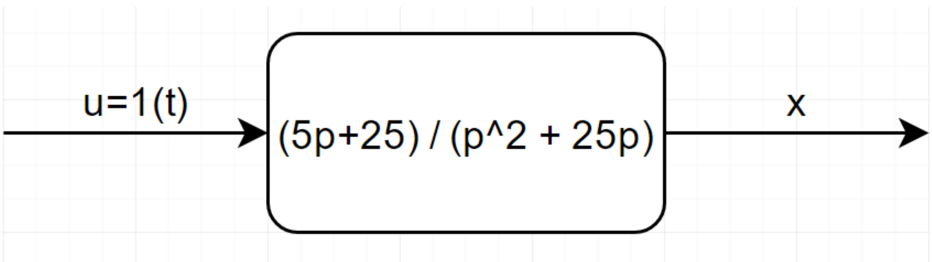

Рис. 1.1: ВВ модель

Подберем электрическую цепь, которая обеспечивает заданную передаточную характеристику:

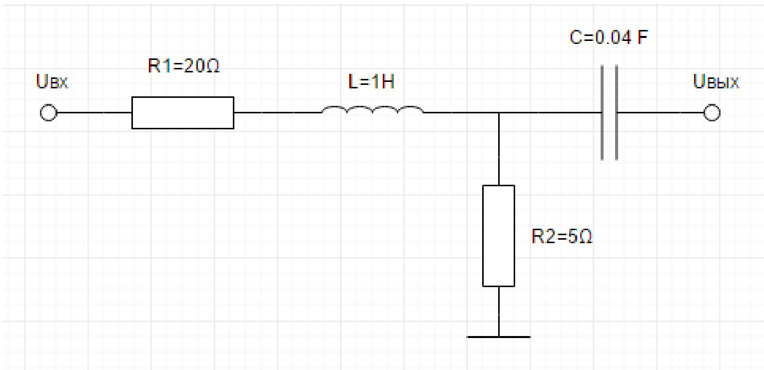

Рис. 1.2: Пример электрической цепи для заданной передаточной функции

$U = I(R_1 + Lp + R_2)$
$U = I(\frac{1}{Cp} + R_2)$
$W(p) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{I(\frac{1}{Cp}+R_2)}{I(R_1+Lp+R_2)} = \frac{\frac{1}{C}+R_2p}{R1p+Lp^2+R2p} = \frac{\frac{1}{0.04}+5p}{20p+1p^2+5p} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$

1.4.2 Решение дифференциального уравнения

$$u = 1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \implies u' = \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$x'' + 25x' = \begin{cases} 5 \cdot 0 + 25 \cdot 0, t < 0 \\ 5 \cdot \infty + 25 \cdot 1, t = 0 \\ 5 \cdot 0 + 25 \cdot 1, t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \infty, t = 0 \\ 25, t > 0 \end{cases}$$

Таким образом имеется три участка кусочной функции для решения ДУ. При $t = 0$ ДУ уже решено (по начальным условиям $x(0) = 0, x'(0) = 0 => x''(0) = \infty$).

Решим ДУ для случая $t < 0$ с помощью Matlab функции *dsolve*:

```
syms x(t) dx(t)
x(t) = dsolve(diff(x, t, 2) + 25 * diff(x, t) == 0)
```

В результате было получено:
$x(t < 0) = C_1e^{-25t} + C_2 => x'(t < 0) = -25C_1e^{-25t}$
Аналогичным образом решим ДУ для случая $t > 0$:

```
syms x(t) dx(t)
x(t) = dsolve(diff(x, t, 2) + 25 * diff(x, t) == 25)
```

В результате было получено:
$x(t > 0) = C_1e^{-25t} + C_2 + t => x'(t > 0) = 1 - 25C_1e^{-25t}$
Важно отметить, что пограничный случай $t = 0, x(0) = 0$ можно отнести как и к результату при $t < 0$, если $C_1 = 0, C_2 = 0$, так и к $t > 0$ при тех же константах. Это означает, что функция $x(t)$ непрерывна в этой точке.

1.4.3 Частотные характеристики

$W(jf) = \frac{5jf+25}{25jf-f^2} = \frac{(5jf+25)(25jf+f^2)}{(25jf-f^2)(25jf+f^2)} = \frac{-125f^2+625jf+5jf^3+25f^2}{-625f^2-f^4} = \frac{100f-(625+5f^2)j}{625f+f^3} = \frac{100}{625+f^2} - \frac{625+5f^2}{625f+f^3}j$

$u(f) = real(W(jf)) = \frac{100}{625+f^2}$
$v(f) = imagine(W(jf)) = -\frac{625+5f^2}{625f+f^3}$
$A(f) = \sqrt{u^2(f) + v^2(f)}$
$\alpha(f) = 20lgA(f)$

Построим диаграмму Найквиста с помощью Matlab функции *nyquist*:

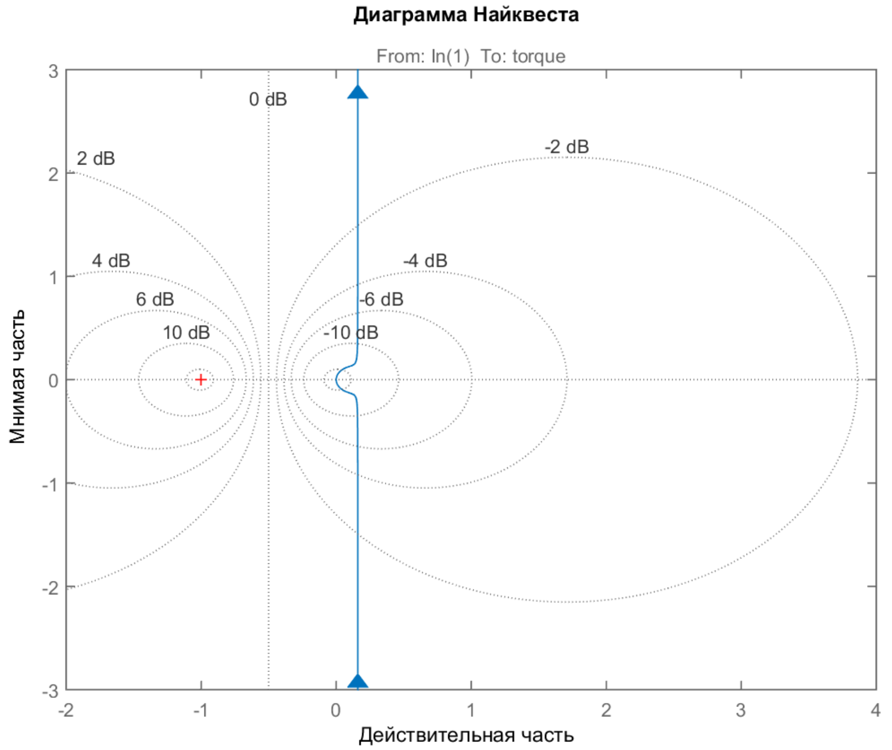

Рис. 1.3: Диаграмма Найквиста

Построим диаграмму Боде с помощью Matlab функции *bode*:

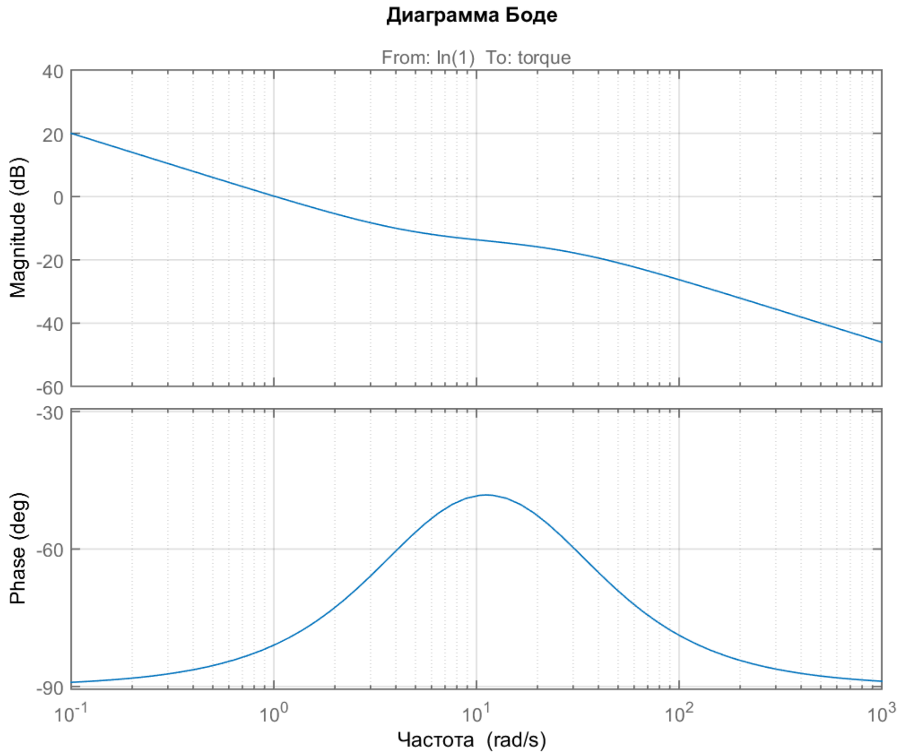

Рис. 1.4: Диаграмма Боде

1.4.4 Временные характеристики

$h(t) = L^{-1}(\frac{W(p)}{p}) = L^{-1}(\frac{5p+25}{p^2(p+25)}) = L^{-1}(\frac{1}{p^2} - \frac{0.16}{p+25} + \frac{0.16}{p}) = t + 0.16 - 0.16e^{-25t}$
$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 1 + 4e^{-25t}$

Построим переходную характеристика с помощью Matlab функции *step*:

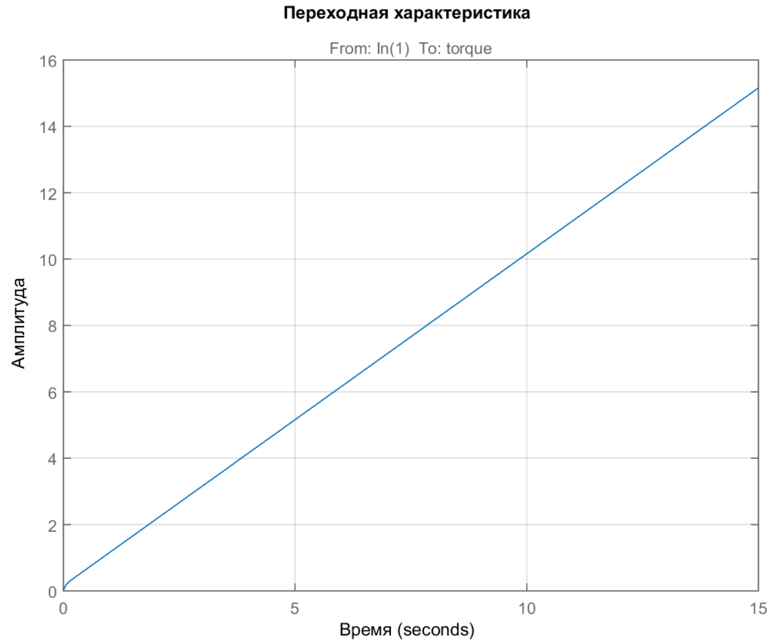

Рис. 1.5: Переходная характеристика

Построим весовую характеристика с помощью Matlab функции *impulse*:

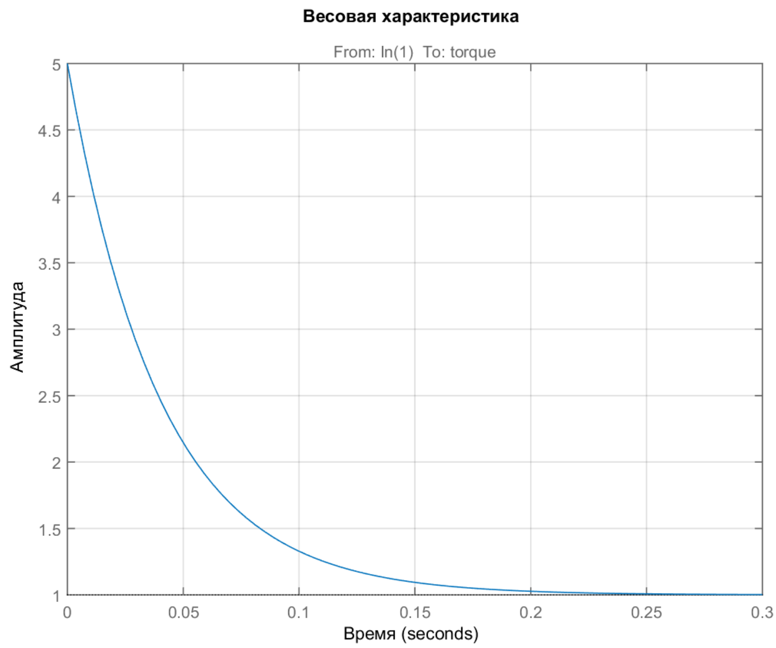

Рис. 1.6: Весовая характеристика

1.4.5 Фазовый портрет

Выполним замену переменной:
$Y = x'(t), X = x(t)$
Тогда ДУ преобразовывается к следующей системе:

$$x'' + 25x' = 0 \Longrightarrow \begin{cases} Y' = -25Y \\ X' = Y \end{cases}$$

После этого преобразования можно рассчитать фазовый портрет системы. Расчет численных значений $x(t)$ и $x'(t)$ производится с помощью Matlab функции $ode45$:

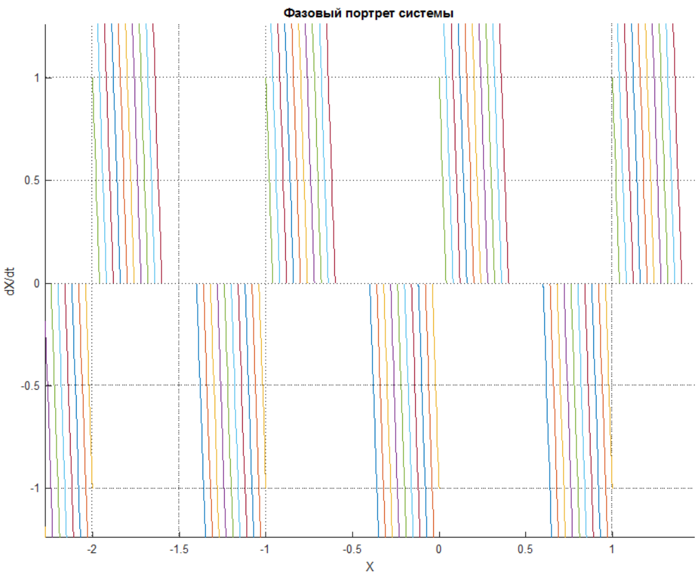

Рис. 1.7: Фазовый портрет системы

Из графика хорошо видно, что фазовые траектории представляют собой прямые линии, докажем это. Заметим, что $F(x'', x', x) = 0$ эквивалентно случаю $x(t \leq 0)$. В результате решения ДУ было получено:
$x(t \leq 0) = C_1e^{-25t} + C_2 => x'(t \leq 0) = -25C_1e^{-25t}$
Таким образом:
$x'(t \leq 0) = 25C_2 - 25x(t \leq 0)$
Тангенс наклона прямых линий равен $tg(k) = -25$.

1.5 Вывод

В ходе работы были получены важнейшие функции и характеристики для системы, заданной линейным ДУ и начальными условиями:

- *Диаграмма Найквиста (АФЧХ)* - представление частотного отклика линейной стационарной динамической системы в виде графика в комплексных координатах. АФЧХ применяется в основном для анализа систем, в частности исследования системы на устойчивость и её запасов.
- *Диаграмма Боде (ЛАФЧХ)* - представление частотного отклика линейной стационарной системы в логарифмическом масштабе.
- *Переходная функция* - реакция динамической системы на входное воздействие в виде функции Хевисайда. Знание того, как система реагирует на быстрое изменение входного сигнала, является важным, поскольку скачок во входном сигнале может оказать серьёзное влияние на поведение всей системы или каких-то её компонентов.
- *Весовая функция* - реакция динамической системы на входное воздействие в виде единичного импульса.
- *Фазовый портрет* - Построение фазового портрета позволяет сделать выводы о характере изменений переменных системы без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

Благодаря множеству плагинов, математических функций и методов симуляции, Matlab отлично подходит для решения задач, связанных с ТАУ.