Algoritma Branch & Bound

Algoritma Branch & Bound (B&B)

- **Digunakan untuk persoalan optimisasi → meminimalkan atau memaksimalkan suatu fungsi objektif, yang tidak melanggar batasan (*constraints*) persoalan**
- **B&B: BFS + least cost search**
  - **BFS murni: Simpul berikutnya yang akan diekspansi berdasarkan urutan pembangkitannya (FIFO)**
- **B&B:**
  - **Setiap simpul diberi sebuah nilai cost:**
    $\hat{c}(i)$ = nilai taksiran lintasan termurah ke simpul status tujuan yang melalui simpul status i.
  - **Simpul berikutnya yang akan di-expand tidak lagi berdasarkan urutan pembangkitannya, tetapi simpul yang memiliki *cost* yang paling kecil (least cost search) – pada kasus minimasi.**

Algoritma Global Branch & Bound

1. **Masukkan simpul akar ke dalam antrian Q. Jika simpul akar adalah simpul solusi (goal node), maka solusi telah ditemukan. Stop.**
2. **Jika Q kosong, tidak ada solusi. Stop.**
3. **Jika Q tidak kosong, pilih dari antrian Q simpul i yang mempunyai nilai 'cost' $\hat{c}(i)$ paling kecil. Jika terdapat beberapa simpul i yang memenuhi, pilih satu secara sembarang.**
4. **Jika simpul i adalah simpul solusi, berarti solusi sudah ditemukan, stop. Jika simpul i bukan simpul solusi, maka bangkitkan semua anak-anaknya. Jika i tidak mempunyai anak, kembali ke langkah 2.**
5. **Untuk setiap anak j dari simpul i, hitung $\hat{c}(j)$, dan masukkan semua anak-anak tersebut ke dalam Q.**
6. **Kembali ke langkah 2.**

Permainan 15-Puzzle

1	3	4	15
2		5	12
7	6	11	14
8	9	10	13

(a) Susunan awal

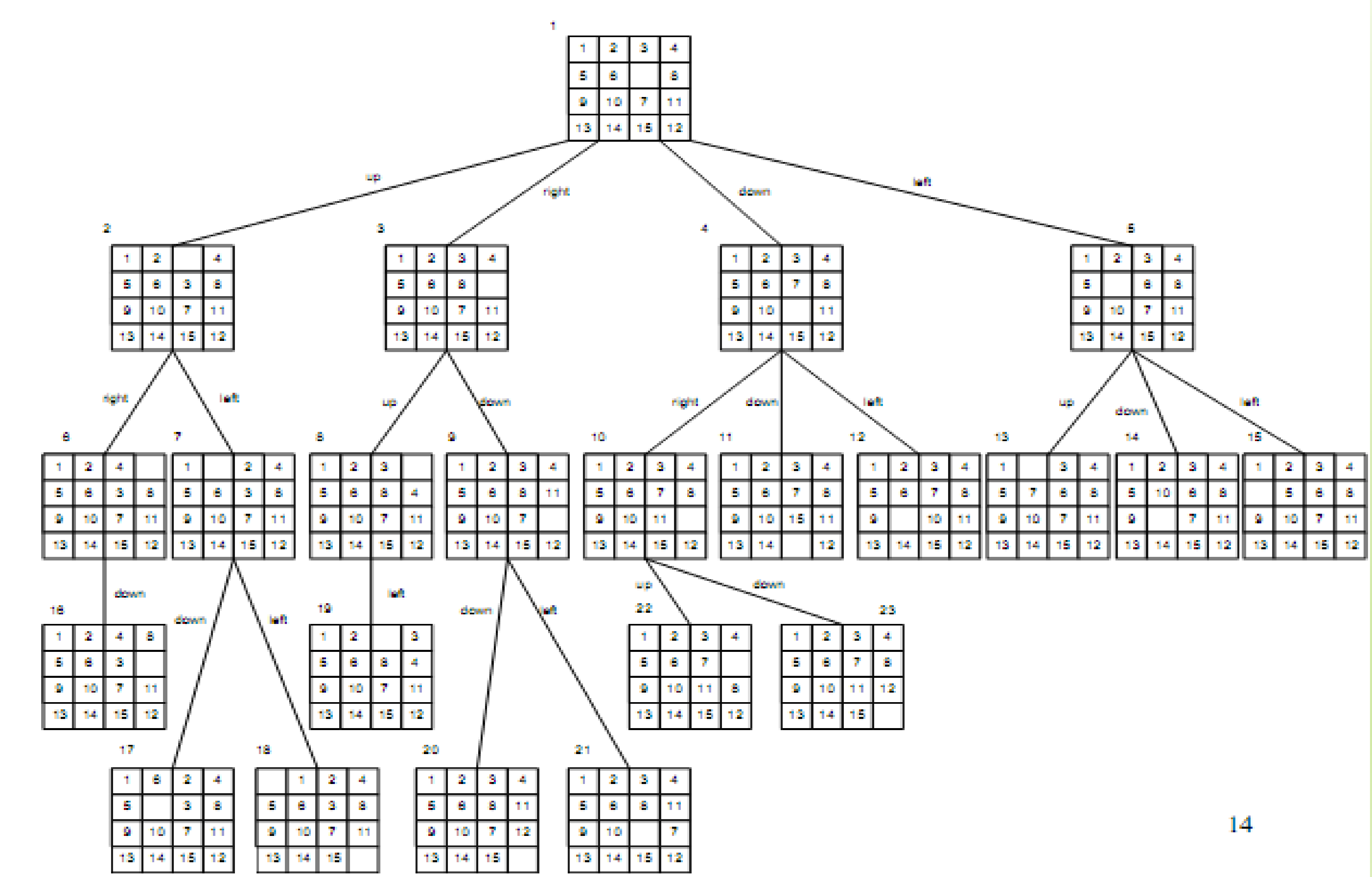
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(b) Susunan akhir

- **State berdasarkan ubin kosong (*blank*)**
- **Aksi: up, down, left, right**

Pohon Ruang Status untuk 15-Puzzle

- **Pohon ruang status B&B ketika jalur ke solusi sudah 'diketahui'**



Cost dari Simpul Hidup (2)

- **Pada umumnya, untuk kebanyakan persoalan, letak simpul solusi tidak diketahui.**
- ***Cost* setiap simpul umumnya berupa taksiran.**

$$\hat{c}(i) = \hat{f}(i) + \hat{g}(i)$$

$\hat{c}(i)$ = ongkos untuk simpul i

$\hat{f}(i)$ = ongkos mencapai simpul i dari akar

$\hat{g}(i)$ = ongkos mencapai simpul tujuan dari simpul i.

- **Cost simpul P pada 15-puzzle:**

$f(P)$ = adalah panjang lintasan dari simpul akar ke P

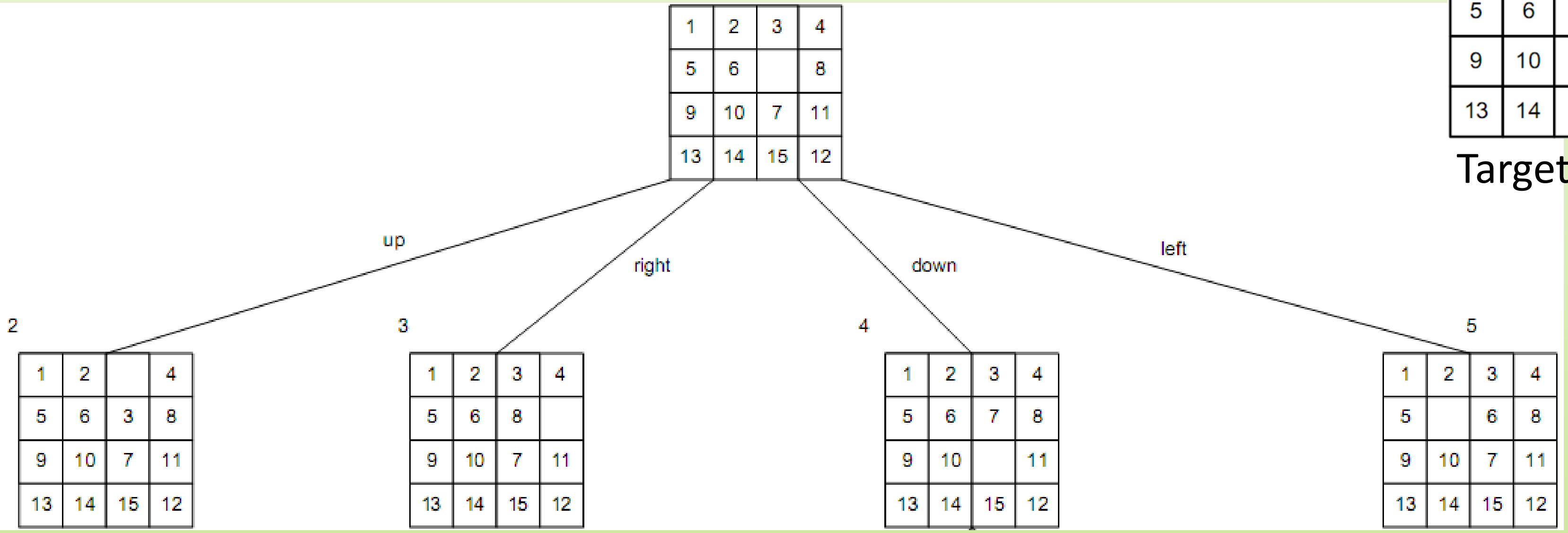
$\hat{g}(P)$ = taksiran panjang lintasan terpendek dari P ke simpul solusi pada upapohon yang akarnya P.

Cost dari Simpul Hidup 15-Puzzle

$\hat{g}(P)$ = jumlah ubin tidak kosong yang tidak terdapat pada susunan akhir

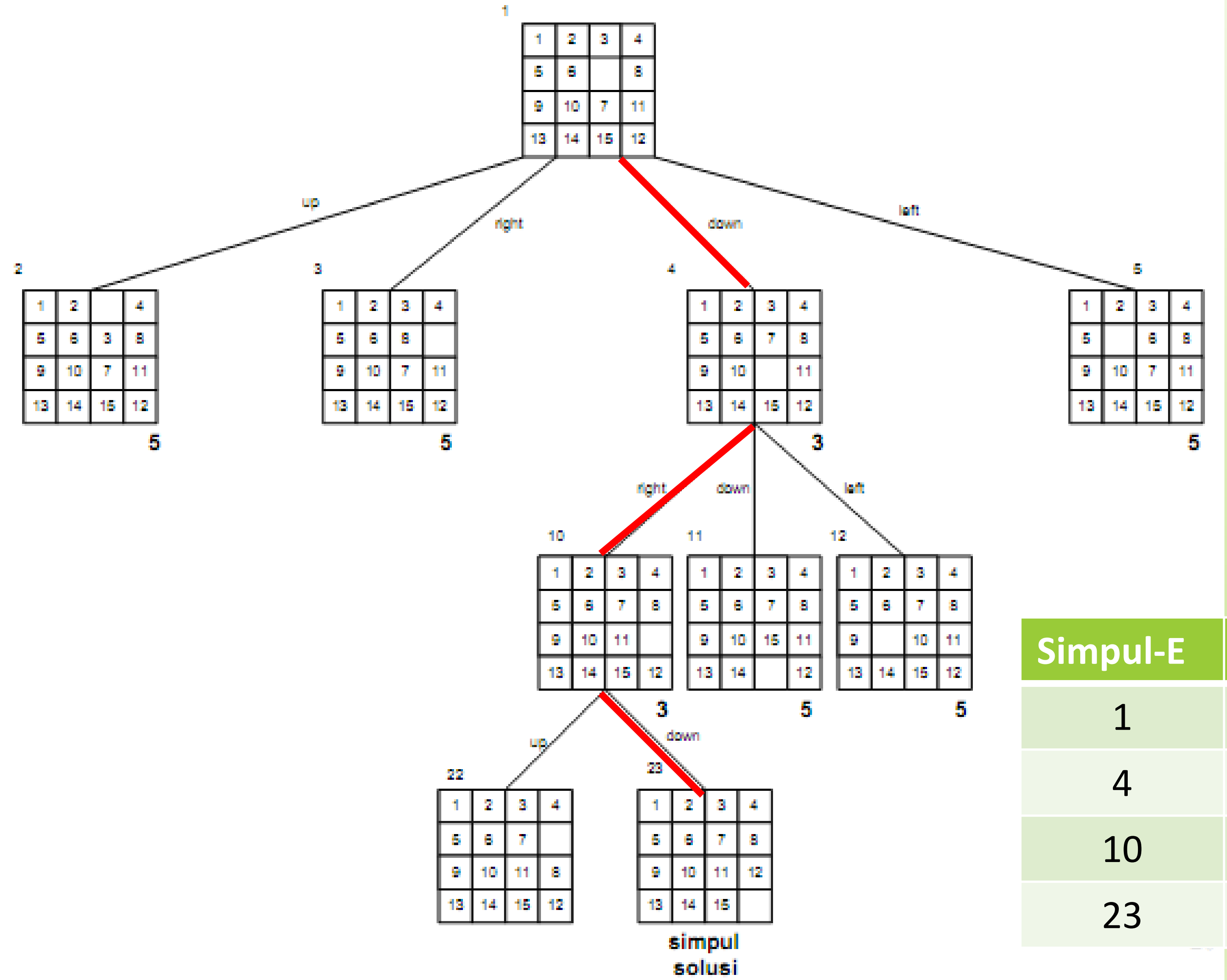
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Target



C(2)=1+4=5   C(3)=1+4=5   C(4)=1+2=3   C(5)=1+4=5

Pembentukan Pohon Ruang Status 15-Puzzle dengan Branch & Bound

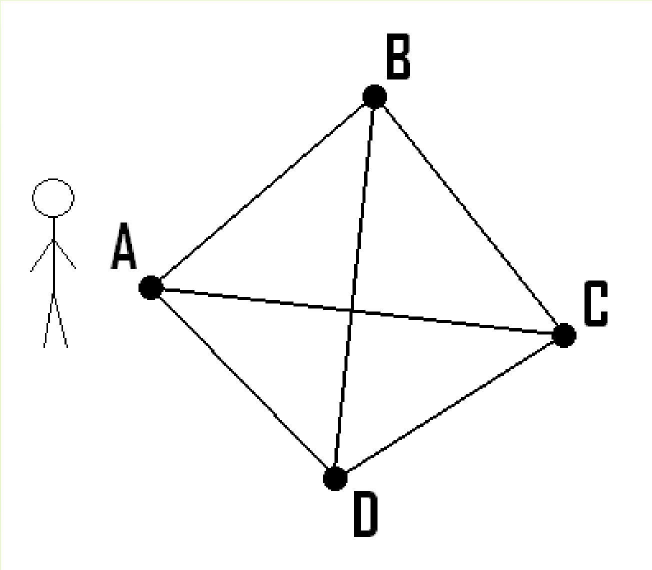


Simpul-E	Simpul Hidup
1	4,2,3,5
4	10,2,3,5,11,12
10	23,2,3,5,11,12,22
23	Solusi ketemu

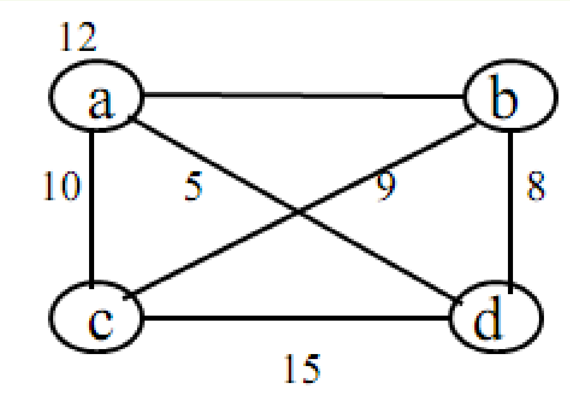
Travelling Salesperson Problem

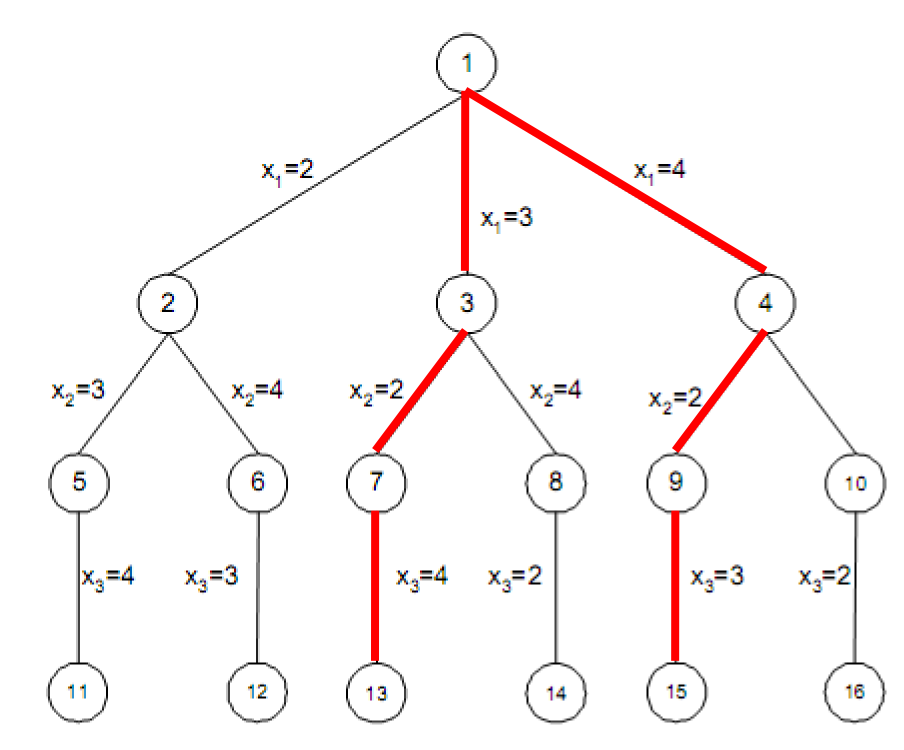
Persoalan: Diberikan *n* buah kota serta diketahui jarak antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) <u>terpendek</u> yang melalui setiap kota lainnya hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

(n-1)! sirkuit hamilton



Pohon Ruang Status TSP 4 Simpul





A=1; B=2; C=3; D=4
Simpul awal=1

Solusi: 1-3-2-4-1 atau 1-4-2-3-1
Bobot=5+8+9+10=32
(lihat diktat: TSP-Brute Force hal 20)

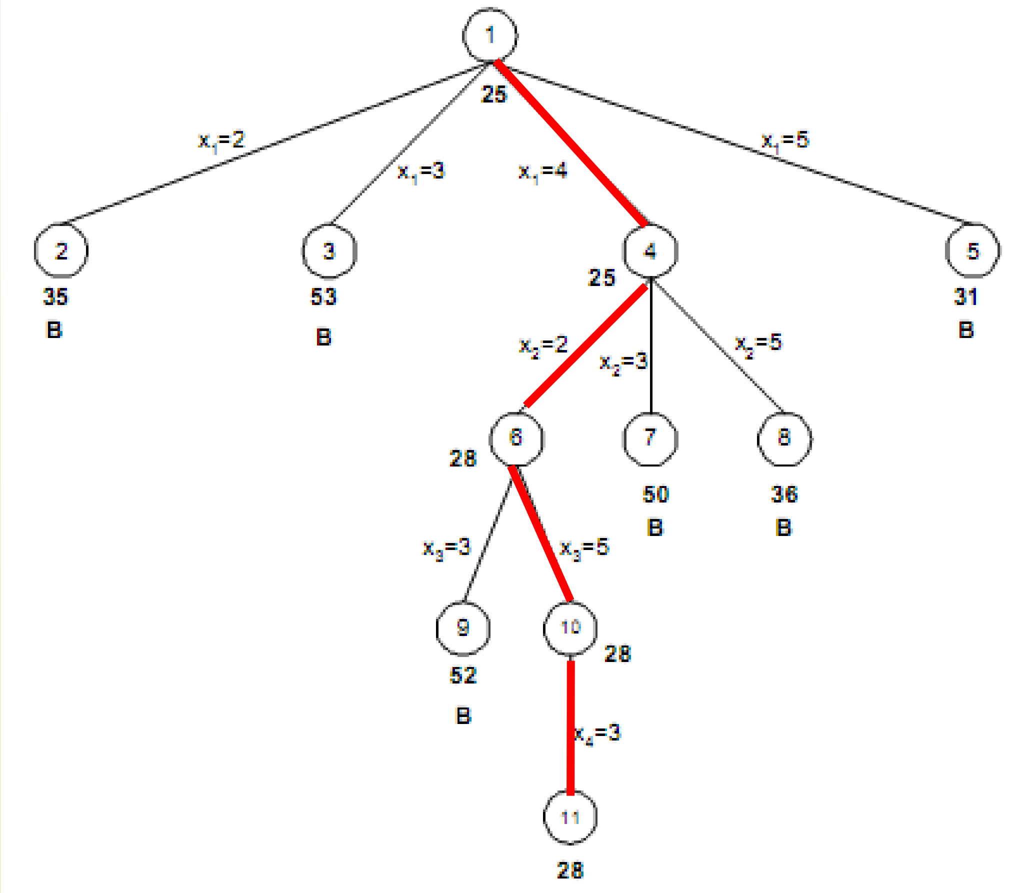
TSP dengan B & B

Contoh lain TSP 5 simpul (matriks bobot/cost matrix):

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Brute Force:
- 4!=24 sirkuit hamilton
- Solusi: 1-4-2-5-3-1
- Bobot: 10+6+2+7+3=28

Greedy:
- Solusi: 1-4-5-2-3-1
- Bobot: 10+3+4+16+3=36



B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

$X_0=X_5=1$

Cost dari Simpul Hidup TSP

1. **Matriks ongkos-tereduksi (reduced cost matrix) dari graf**
   - **Sebuah matriks dikatakan tereduksi jika setiap kolom dan barisnya mengandung paling sedikit satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif.**
   - **Batas (*bound*): Jumlah total elemen pengurang dari semua baris dan kolom merupakan batas bawah dari total bobot minimum tur. (hal 159)**
2. **Bobot minimum tur lengkap**

Reduced Cost Matrix: Contoh

R

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Reduksi baris dan kolom

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Setiap kolom dan barisnya mengandung paling sedikit satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif

Reduced Cost Matrix

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = A$$

Total semua pengurang = 10 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 + 3 = 25 $\longrightarrow$ Cost simpul akar

B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

- **Misalkan:**
  - **A: matriks tereduksi untuk simpul R.**
  - **S: anak dari simpul R sehingga sisi (R, S) pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi (i, j) pada perjalanan.**
- **Jika S bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul S dapat dihitung sebagai berikut:**
  - **(a) ubah semua nilai pada baris i dan kolom j menjadi ∞. Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul i atau masuk pada simpul j;**
  - **(b) ubah A(j, 1) menjadi ∞. Ini untuk mencegah penggunaan sisi (j, 1);**
  - **(c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen ∞.**
  - **Jika r adalah total semua pengurang, maka nilai batas untuk simpul S adalah:**

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

  - **Hasil reduksi ini menghasilkan matriks B.**

B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix (1)

- **Misalkan:**

  A: matriks tereduksi untuk simpul R.

  Simpul awal (R) = 1

R

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

R1-10; R2-2; R3-2; R4-3; R5-4; C1-1; C3-3

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

S: anak dari simpul R sehingga sisi (R, S) pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi (i, j) pada perjalanan.

$S \in \{2,3,4,5\}$

B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix (2)

- A: matriks tereduksi R; S: anak dari simpul R
- **Jika S bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul S dapat dihitung sebagai berikut (dari slide 32):**
  - **(a) ubah semua nilai pada baris i dan kolom j menjadi ∞. Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul i atau masuk pada simpul j;**
  - **(b) ubah A(j, 1) menjadi ∞. Ini untuk mencegah penggunaan sisi (j, 1)**
  - **(c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen ∞.**

Contoh: R=1; S=2 (bukan daun)

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{Kolom j} \\ \text{Baris i} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

(a), (b)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

(c): tetap

Taksiran Cost dgn Reduced Cost Matrix

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

$\hat{c}(S) =$ bobot perjalanan minimum yang melalui simpul S (simpul di pohon ruang status)

$\hat{c}(R) =$ bobot perjalanan minimum yang melalui simpul R, yang dalam hal ini R adalah orangtua dari S.

$A(i, j) =$ bobot sisi (i, j) pada graf G yang berkoresponden dengan sisi (R, S) pada pohon ruang status.

$r =$ jumlah semua pengurang pada proses memperoleh matriks tereduksi untuk simpul S.

$\hat{c}(S)$:

(a) bobot perjalanan dari akar ke S (jika S daun)

(b) Bobot perjalanan minimum yang melalui simpul S (jika S bukan daun)

$\hat{c}(\text{akar}) = r$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(2) = \hat{c}(1) + A(1,2) + r = 25 + 10 + 0 = 35$$

$\hat{c}(1) = 25$

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

R=1

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

S=4

Sisi (1,4) yang sedang diperiksa, maka:

$$\hat{c}(4) = \hat{c}(1) + A(1,4) + r = 25 + 0 + 0 = 25$$

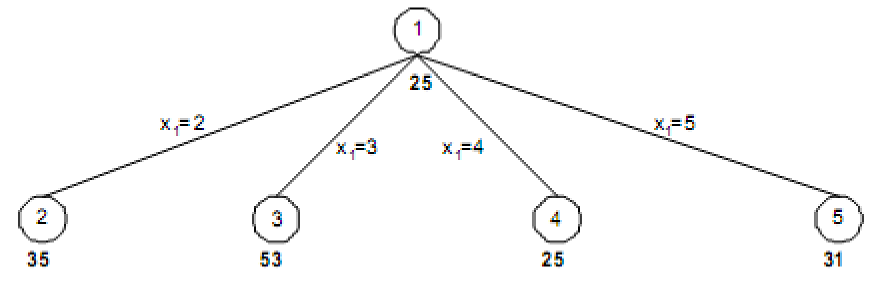
B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

R

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \Rightarrow$$

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$



$X_1=2$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(2)=35$

$X_1=3$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(3)=53$

$X_1=4$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(4)=25$

$X_1=5$

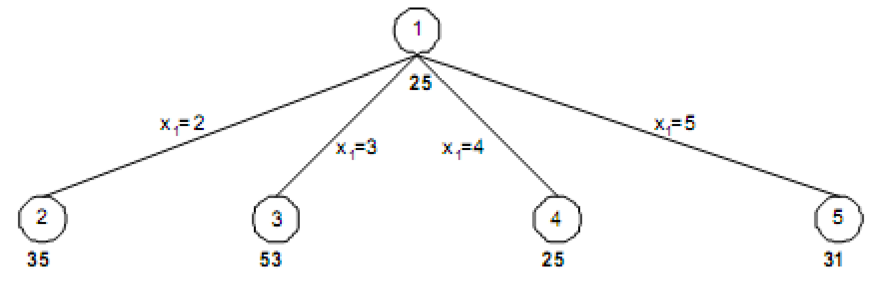
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(5)=31$

Simpul-E=1 → Simpul hidup={4,5,2,3}

B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

$$R = \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$



$X_1=2$:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(2) = \hat{c}(1) + A(1,2) + r = 25 + 10 + 0 = 35$$

$X_1=3$:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(3) = \hat{c}(1) + A(1,3) + r = 25 + 17 + 11 = 53$$

$X_1=4$:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(4) = \hat{c}(1) + A(1,4) + r = 25 + 0 + 0 = 25$$

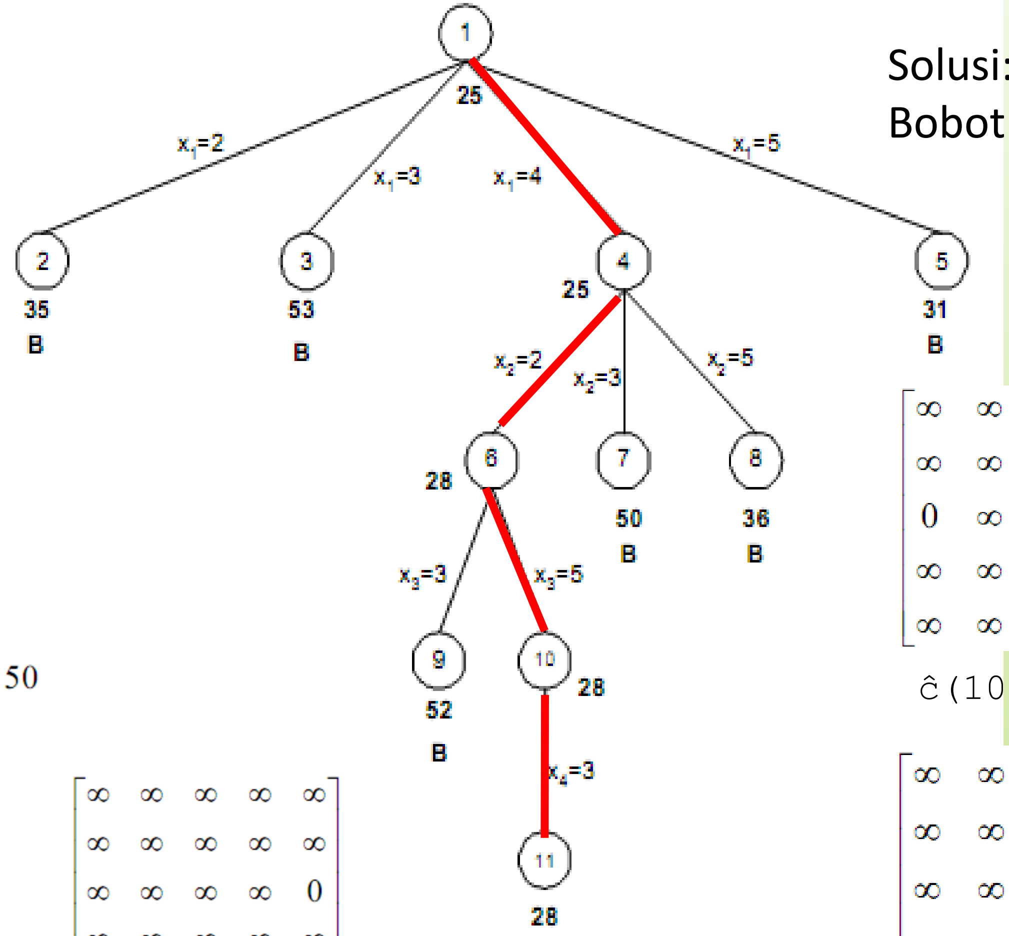
$X_1=5$:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(5) = \hat{c}(1) + A(1,5) + r = 25 + 1 + 5 = 31$$

```
Simpul-E=1 → Simpul hidup={4,5,2,3}
```

B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix



Solusi: 1,4,2,5,3,1

Bobot: 28

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(6) = \hat{c}(4) + B(4,2) + r = 25 + 3 + 0 = 28$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(7) = \hat{c}(4) + B(4,3) + r = 25 + 12 + 13 = 50$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(8) = \hat{c}(4) + B(4,5) + r = 25 + 0 + 11 = 36$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}(9) = \hat{c}(6) + C(2,3) + r = 28 + 11 + 13 = 52$$

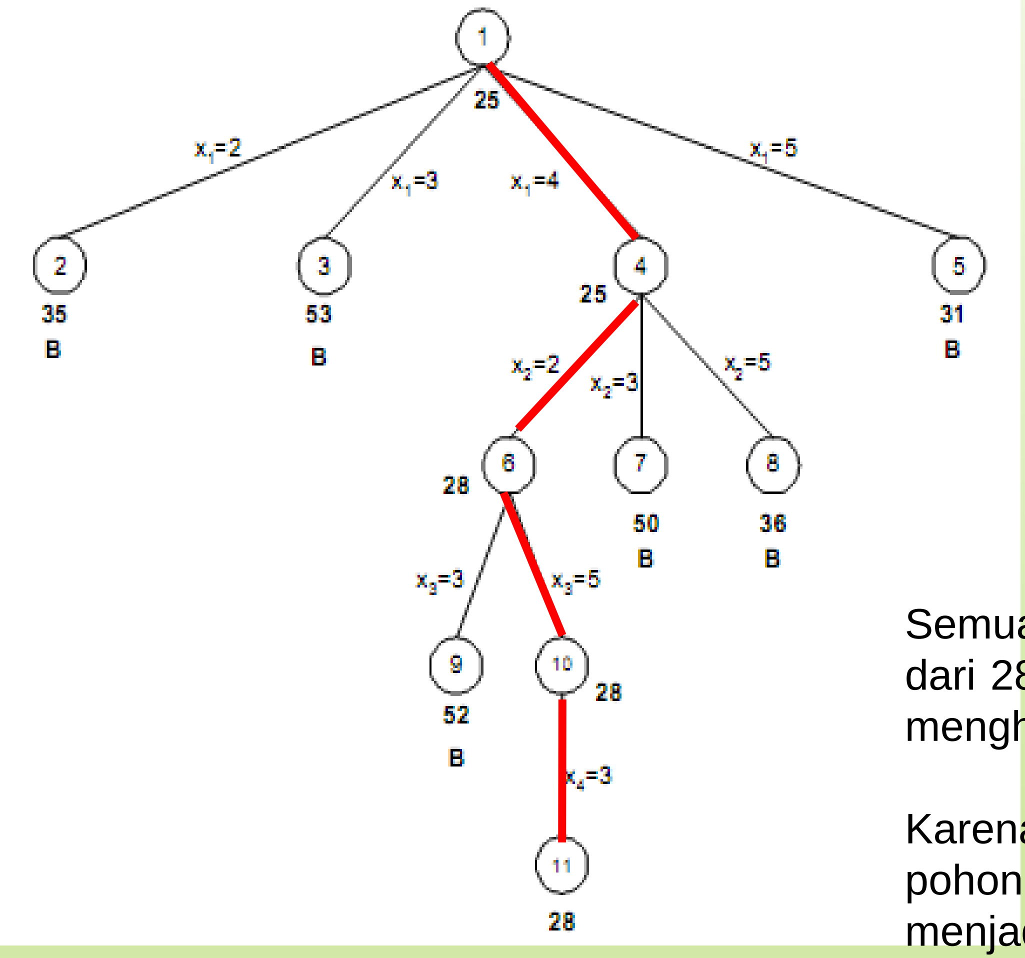
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(10)=28$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$\hat{c}(11)=28$

B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix



Simpul-E	Simpul Hidup
1	4,5,2,3
4	6,5,2,8,7,3
6	10,5,2,8,7,9,3
10	11,5,2,8,7,9,3
11	daun

Semua simpul hidup yang nilainya lebih besar dari 28 dibunuh (B) karena tidak mungkin lagi menghasilkan perjalanan dengan bobot < 28.

Karena tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka X = (1, 4, 2, 5, 3, 1) menjadi solusi persoalan TSP di atas dengan bobot 28.

Masih tentang *TSP*

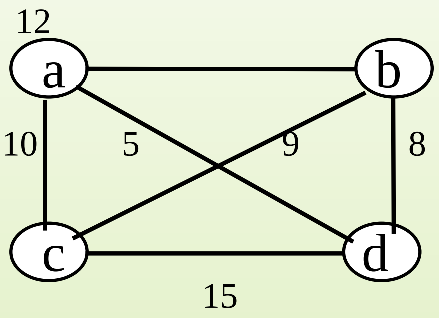
- **Akan ditunjukkan pendekatan heuristik lain dalam menentukan nilai bound (*cost*) untuk setiap simpul di dalam poho ruang status.**

- **Amati bahwa :**

$$\text{bobot tur lengkap} = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \text{bobot sisi } i_1 + \text{bobot sisi } i_2$$

- **sisi i_1 dan sisi i_2 adalah dua sisi yang bersisian dengan simpul i di dalam tur lengkap.**

- **Contoh:**



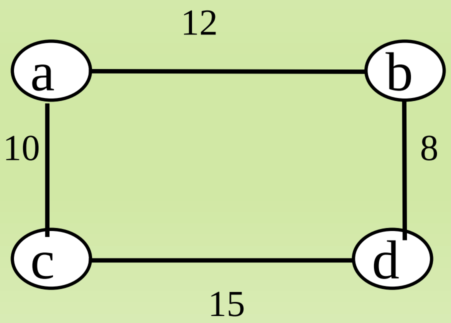
- **Tur lengkap a, c, d, b, a bobotnya:**

10 + 15 + 8 + 12 = 45

= 1/2 [(10 + 12) + (10 + 15) + (15 + 8) + (12 + 8)]

= 1/2 x 90

= 45



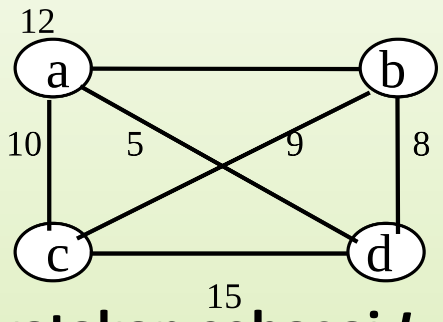
- $M \equiv cost$ = bobot minimum tur lengkap

  $\geq 1/2 \sum$ bobot sisi i_1 + bobot sisi i_2

- Yang dalam hal ini, sisi i_1 dan sisi i_2 adalah sisi yang bersisian dengan simpul i dengan bobot minimum.

- M dapat digunakan sebagai fungsi pembatas (*bound*) untuk menghitung cost setiap simpul di dalam pohon

- **Contoh: TSP dengan simpul asal = *a***

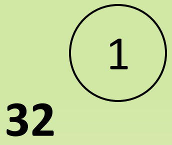


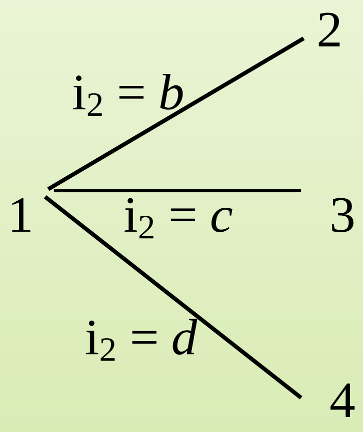
- **Solusi dinyatakan sebagai $I = (a, i_1, i_2, i_3, a)$, yang dalam hal ini i_1, i_2, dan i_3 adalah simpul lainnya.**

- ***Cost* untuk simpul akar (simpul 1)**

  $cost \geq 1/2$ [(5+10) + (9+8) + (9+10) + (8+5)]

  ≥ 32



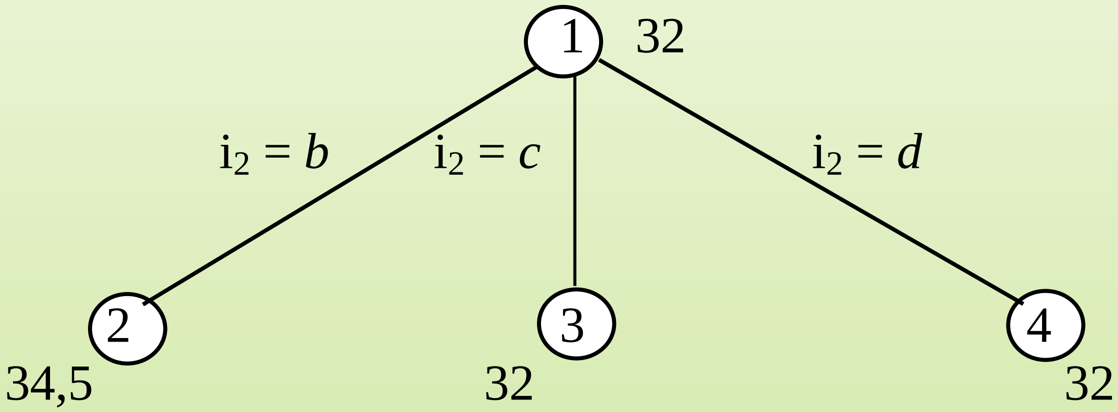


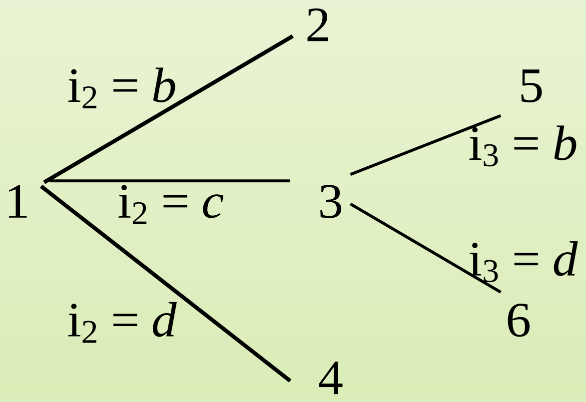
$$cost \geq 1/2\ [\ (12+5) + (12+8) + (9+10) + (8+5)\ ]$$
$$\geq 34{,}5$$

$$cost \geq 1/2\ [\ (10+5) + (9+8) + (10+9) + (8+5)\ ]$$
$$\geq 32$$

$$cost \geq 1/2\ [\ (5+10) + (9+8) + (10+9) + (8+5)\ ]$$
$$\geq 32$$

• **Pohon ruang status yang sudah terbentuk:**

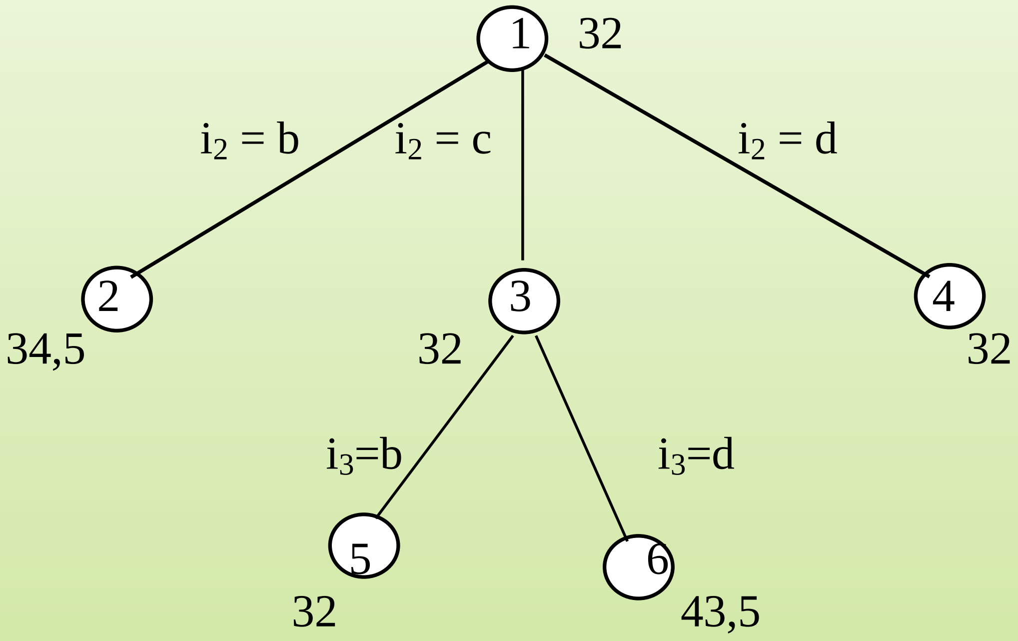




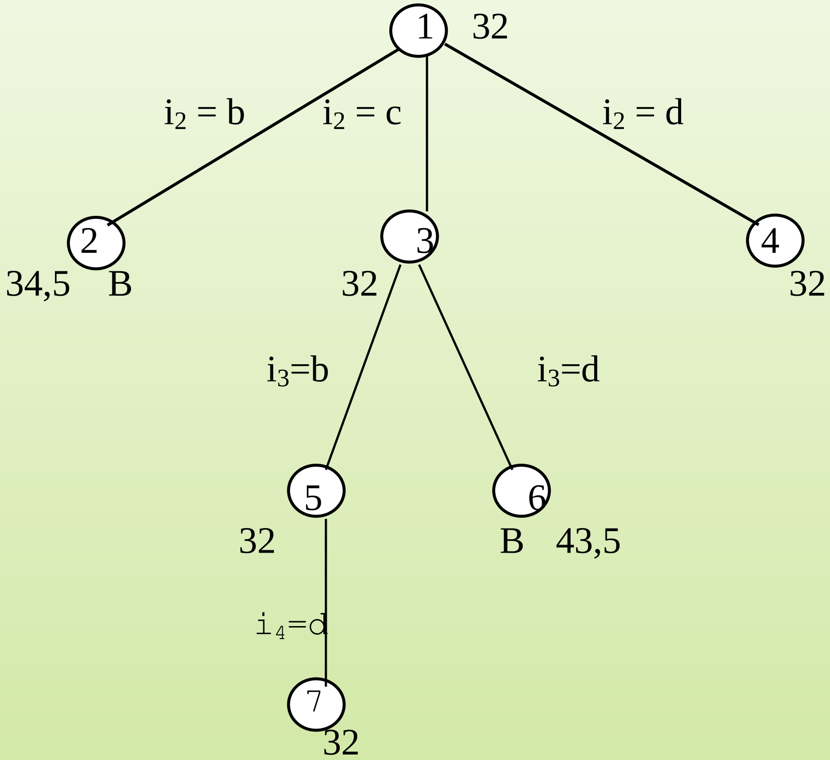
$cost \geq ½\,[\,(10+5) + (9+8) + (10+9) + (5+8)] = 32$

$cost \geq ½\,[(10+5) + (9+8) + (10+15) + (15+5)] = 43{,}5$

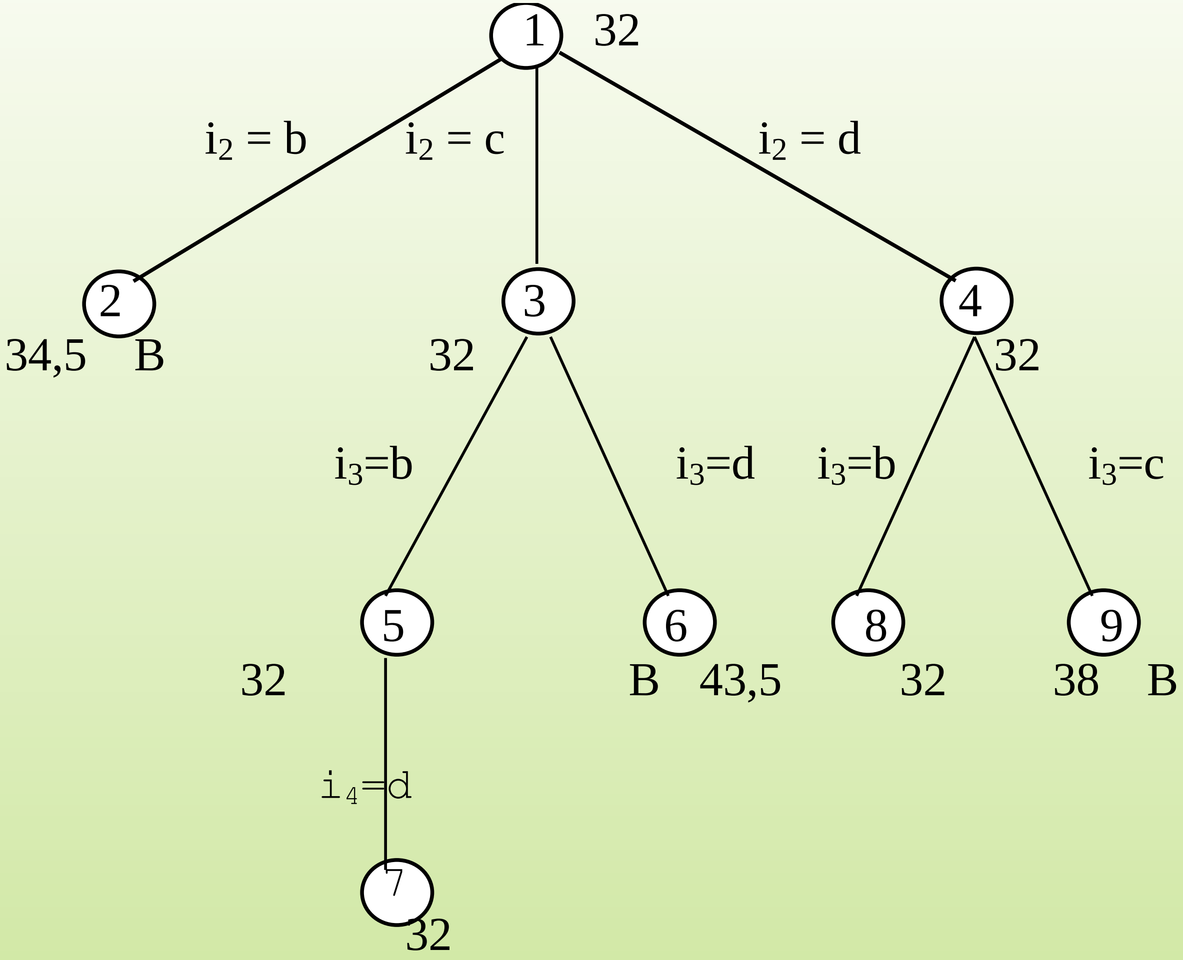
- **Pohon ruang status yang sudah terbentuk:**



- **Pohon ruang status yang terbentuk:**

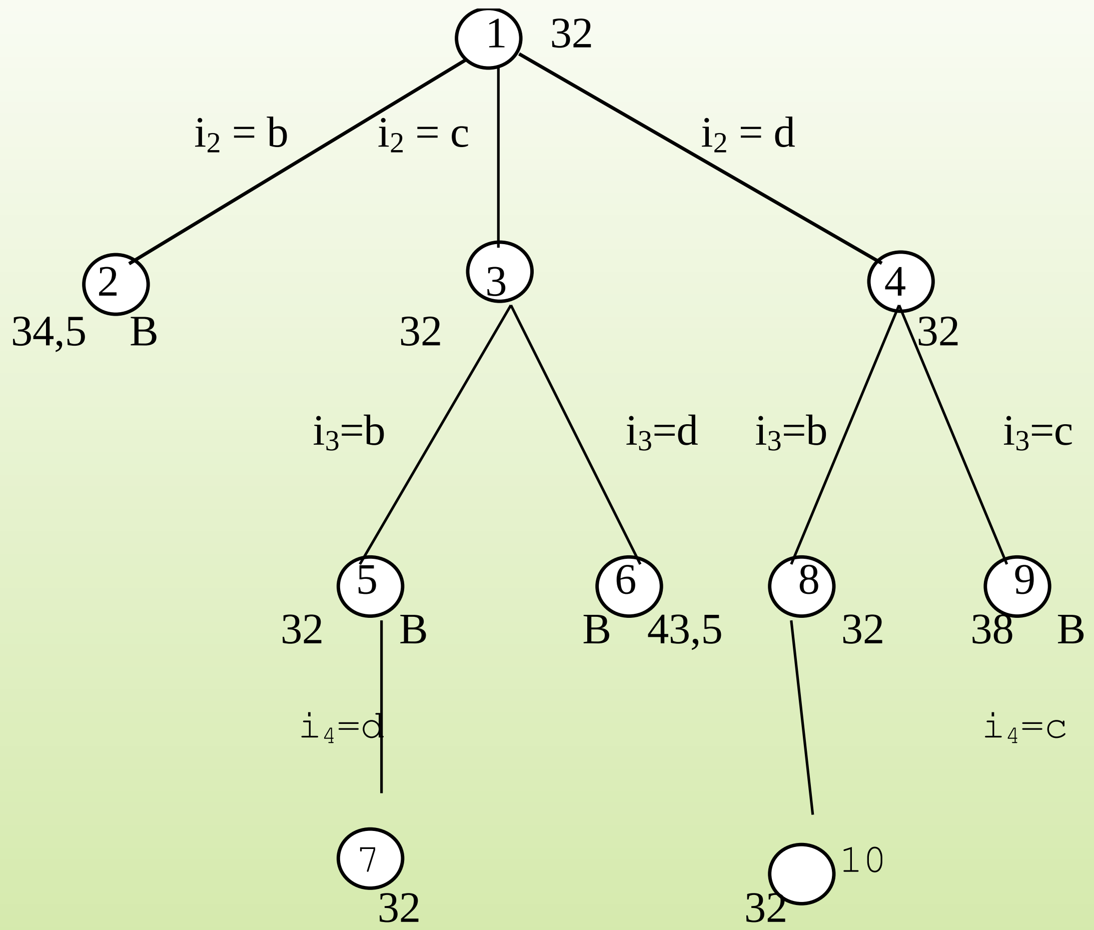


- **Solusi pertama: Tur a, c, b, d, a dengan bobot 32 (*the best solution so far*). Bunuh semua simpul dengan cost > 32. (ditandai dengan B)**



Cost **simpul 8 $\geq$ ½[(5+10)+(8+9)+(9+10)+(5+8)] = 32**

Cost **simpul 9 $\geq$ ½[(5+10)+(8+9)+(15+9)+(5+15)] = 38**



- *Cost* **simpul 10 ≥ ½[(5+10)+(9+8)+(9+10)+(5+8)] = 32**

- **Solusi ke-2: tur a, d, b, c, a dengan bobot 32**

- ***The best solution so far* tidak berubah**

- **Tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka *the best solution so far* menjadi solusi final.**

- **Solusi *TSP* tersebut adalah tur a, c, b, d, a dengan bobot = 32.**

Soal Latihan

Persoalan: Misalkan terdapat *n* orang dan *n* buah pekerjaan (*job*). Setiap orang akan di-*assign* dengan sebuah pekerjaan. Penugasan orang ke-*i* dengan pekerjaan ke-*j* membutuhkan biaya sebesar $c(i, j)$. Bagiamana melakukan penugasan sehingga total biaya penugasan adalah seminimal mungkin? Misalkan instansiasi persoalan dinyatakan sebagai matriks C sebagai berikut:

$$C = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

Selesaikan persoalan ini dengan algoritma *branch and bound*. Di dalam menjawab persoalan ini tentukan cara menghitung fungsi *bound*. Lalu gambarkan pohon ruang status yang terbentuk selama pencarian solusi.