# Algorytmy Optymalizacji Dyskretnej - Lista 2

Kamil Włodarski

13 kwietnia 2023

## Spis treści



# 1 Zadanie 1

## 1.1 Opis modelu

Model programowania liniowego dla problemu transportowego można opisać następującymi równaniami matematycznymi:

$$\begin{aligned}
\textbf{Minimize:} \quad & \sum_{c\in\text{Company}} \sum_{a\in\text{Airport}} \text{cost}_{a,c} \cdot x_{a,c} \\
\textbf{Subject to:} \quad & \sum_{a\in\text{Airport}} x_{a,c} \leqslant \text{supply}_c \qquad \forall c \in \text{Company} \\
& \sum_{c\in\text{Company}} x_{a,c} \geqslant \text{demand}_a \qquad \forall a \in \text{Airport} \\
& x_{a,c} \geqslant 0 \qquad \forall a \in \text{Airport},\ c \in \text{Company}
\end{aligned}$$

W powyższych równaniach matematycznych:

- $\text{supply}_c$ ilość paliwa jaki firma $c$ może dostarczyć,
- $\text{demand}_a$ zapotrzebowanie na paliwo na lotnisku $a$,
- $\text{cost}_{a,c}$ to koszt transportu jednostki paliwa $c$ do lotniska $a$,
- $x_{a,c}$ to ilość transportowanego paliwa od firmy $c$ do lotniska $a$.

Funkcja celu ma na celu minimalizację całkowitego kosztu transportu, czyli sumy iloczynu kosztu transportu i ilości transportowanego paliwa od każdej firmy do każdego lotniska.

Ograniczenie podaży wymaga, aby całkowita ilość transportowanego paliwa od każdej firmy nie przekroczyła jej podaży. Ograniczenie popytu wymaga, aby całkowita ilość transportowanego paliwa do każdego lotniska spełniła jego popyt.

### 1.2 Rozwiązanie

- Minimalny koszt dostaw dla zadanego przykładu wynosi: 8525000.
- Wszystkie firmy dostarczają paliwo dla zadanego przykładu.
- Dla zadanego przykładu możliwości dostaw Firmy 2 nie są wyczerpane.

## 2 Zadanie 2

### 2.1 Opis modelu

Model programowania liniowego dla problemu najkrótszej ścieżki z ograniczeniem można opisać następującymi równaniami matematycznymi:

$$\begin{aligned}
\textbf{Minimize:} \quad & \sum_{(i,j)\in A} \mathrm{c}_{i,j} \cdot x_{i,j} \\
\textbf{Subject to:} \quad & \sum_{(j,i)\in A} x_{j,i} + (i = s) = \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j} + (i = d) \qquad \forall i \in V \\
& \sum_{(j,i)\in A} \mathrm{t}_{j,i} \cdot x_{j,i} \leqslant T \qquad \forall i \in V \\
& x_{i,j} \geqslant 0 \qquad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

W powyższych równaniach matematycznych:

- $n$ to liczba węzłów,
- $V$ to zbiór węzłów,
- $A$ to zbiór krawędzi,
- $\mathrm{c}_{i,j}$ to koszt krawędzi $(i,j)$,
- $\mathrm{t}_{i,j}$ to czas przejścia krawędzi $(i,j)$,
- $s$ to węzeł źródłowy,
- $d$ to węzeł docelowy,
- $T$ to limit czasu podróży,
- $x_{i,j}$ to zmienna binarna określająca, czy krawędź $(i,j)$ należy do najkrótszej ścieżki.

Funkcja celu ma na celu minimalizację całkowitego kosztu najkrótszej ścieżki, czyli sumy iloczynu kosztu i zmiennych $x_{i,j}$ dla każdej krawędzi $(i,j)$.

Ograniczenie przepływu wymaga, aby ilość wychodzącego przepływu z każdego węzła była równa ilości wchodzącego przepływu do tego węzła, z wyjątkiem węzłów źródłowego i docelowego, gdzie ilość wychodzącego lub wchodzącego przepływu jest stała i wynosi 1.

Ograniczenie czasowe wymaga, aby całkowity czas przejścia po najkrótszej ścieżce nie przekroczył limitu czasu $T$.

## 2.2 Rozwiązanie

Założenie na całkowitoliczbowość jest potrzebne. Jeśli je usuniemy program znajduje rozwiązanie z liczbami zmienno przecinkowymi.

Po usunięciu ograniczenia czasowego rozwiązanie dla problemu bez założenia całkowitoliczbowości jest poprawnym rozwiązaniem

# 3 Zadanie 3

## 3.1 Opis modelu

Model programowania liniowego dla problemu minimalizacji liczby samochodów przydzielonych do danej dzielnicy na daną zmianę można opisać następującymi równaniami matematycznymi:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Minimize:} \quad & \sum_{d \in \text{Districts}} \sum_{s \in \text{Shifts}} x_{d,s} \\
\textbf{Subject to:} \quad & \sum_{d \in \text{Districts}} x_{d,s} \geqslant \text{min\_cars\_per\_shift}_s \qquad \forall s \in \text{Shifts} \\
& \sum_{s \in \text{Shifts}} x_{d,s} \geqslant \text{min\_cars\_per\_district}_d \qquad \forall d \in \text{Districts} \\
& x_{d,s} \leqslant \text{max\_cars}_{d,s} \qquad \forall d \in \text{Districts}, s \in \text{Shifts} \\
& x_{d,s} \geqslant \text{min\_cars}_{d,s} \qquad \forall d \in \text{Districts}, s \in \text{Shifts} \\
& x_{d,s} \geqslant 0 \qquad \forall d \in \text{Districts}, s \in \text{Shifts}
\end{aligned}
$$

W powyższych równaniach matematycznych:

- $\text{min\_cars\_per\_shift}_s$ to minimalna liczba samochodów wymagana na zmianę $s$,
- $\text{min\_cars\_per\_district}_d$ to minimalna liczba samochodów wymagana w dzielnicy $d$,
- $\text{max\_cars}_{d,s}$ to maksymalna liczba samochodów, które może pracować w dzielnicy $d$ na zmianę $s$,
- $\text{min\_cars}_{d,s}$ to minimalna liczba samochodów, które musi pracować w dzielnicy $d$ na zmianę $s$,
- $x_{d,s}$ to liczba pracujących samochodów w dzielnicy $d$ na zmianę $s$.

Funkcja celu ma na celu minimalizację całkowitej liczby pracujących samochodów, czyli sumy liczby pracujących samochodów w każdej dzielnicy na każdą zmianę.

Ograniczenie minimalnej liczby samochodów na zmianę wymaga, aby każda zmiana miała wystarczającą liczbę samochodów.

Ograniczenie minimalnej liczby samochodów w dzielnicy wymaga, aby każda dzielnica miała wystarczającą liczbę samochodów.

Ograniczenie maksymalnej liczby samochodów wymaga, aby nie przekroczyć dostępnej liczby samochodów w danej dzielnicy na daną zmianę.

Ograniczenie minimalnej liczby samochodów wymaga aby w danej dzielnicy na danej zmianie pracowała wystarczająca ilość samochodów.

## 3.2 Rozwiązanie

Optymalny przydział radiowozów to:

| | zmiana1 | zmiana2 | zmiana3 |
|---|---|---|---|
| p1 | 2 | 4 | 4 |
| p2 | 3 | 6 | 8 |
| p3 | 5 | 10 | 6 |

Tabela 1: Rozwiązanie zadania 3

Dla tego przydziału wykorzystujemy 48 samochodów.

# 4 Zadanie 4

## 4.1 Opis Modelu

Model programowania liniowego dla problemu monitorowania kontenerów na siatce można opisać następującymi równaniami matematycznymi:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Minimize:} \quad & \sum_{(i,j)\in \text{Grid}} cameras_{i,j} \\
\textbf{Subject to:} \quad & cameras_{i,j} \leqslant 1 - conteiners_{i,j} \qquad \forall (i,j) \in \text{Grid} \\
& \sum_{x\in 1,\dots,n:|x-i|\leqslant k} cameras_{x,j} + \sum_{y\in 1,\dots,m:|y-j|\leqslant k} cameras_{i,y} \geqslant conteiners_{i,j} \qquad \forall (i,j) \in \text{Grid} \\
& cameras_{i,j} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in \text{Grid} \\
& conteiners_{i,j} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in \text{Grid}
\end{aligned}
$$

W powyższych równaniach matematycznych:

- $n$ i $m$ to wymiary siatki,
- $k$ to zasięg kamery, czyli maksymalna odległość, na której kamera może wykryć kontener,
- $Grid$ to zbiór współrzędnych na siatce,
- $cameras_{i,j}$ to binarna zmienna decyzyjna określająca, czy na pozycji $(i, j)$ znajduje się kamera,
- $conteiners_{i,j}$ to binarna zmienna określająca, czy na pozycji $(i, j)$ znajduje się kontener.

Funkcja celu ma na celu minimalizację całkowitej liczby kamer potrzebnych do pokrycia wszystkich kontenerów.

Ograniczenie pierwsze wymaga, aby nie umieszczano kamer na pozycjach, gdzie znajdują się kontenery.

Ograniczenie drugie wymaga, aby każdy kontener był w zasięgu przynajmniej jednej kamery.

## 4.2 Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystano następujący egzemplarz:

- $n = 5$
- $m = 5$
- $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

dla kontenerów rozmieszczonych na siatce w następujący sposób:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Tabela 2: Rozkład kontenerów dla przykładu zadania 4

Dla powyższego egzemplarza potrzeba 5 kamer dla $k = 1$ oraz 3 kamer w pozostałych przypadkach.

# 5 Zadanie 5

## 5.1 Opis Modelu

Model programowania liniowego dla problemu planowania produkcji można opisać następującymi równaniami matematycznymi:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Maximize:} \quad & \sum_{p \in \text{Products}} \sum_{m \in \text{Machines}} x_{p,m} \cdot (\text{price}_p - \text{operation\_cost}_m \cdot \text{operation\_time}_{p,m} - \text{material\_cost}_p) \\
\textbf{Subject to:} \quad & \sum_{m \in \text{Machines}} x_{p,m} \leqslant \text{max\_demand}_p \qquad \forall p \in \text{Products} \\
& \sum_{p \in \text{Products}} x_{p,m} \cdot \text{operation\_time}_{p,m} \leqslant \text{max\_time} \qquad \forall m \in \text{Machines} \\
& x_{p,m} \geqslant 0 \qquad \forall p \in \text{Products},\ m \in \text{Machines}
\end{aligned}
$$

W powyższych równaniach matematycznych:

- $\text{max\_demand}_p$ to maksymalna ilość produktu $p$, którą można wyprodukować,
- max_time to maksymalny czas pracy dla każdej maszyny,
- $\text{price}_p$ to cena produktu $p$,
- $\text{operation\_cost}_m$ to koszt operacyjny maszyny $m$,
- $\text{material\_cost}_p$ to koszt materiałów do produkcji jednostki produktu $p$,
- $\text{operation\_time}_{p,m}$ to czas operacyjny maszyny $m$ potrzebny do wyprodukowania jednostki produktu $p$,
- $x_{p,m}$ to ilość produktu $p$ wyprodukowanego na maszynie $m$.

Funkcja celu ma na celu maksymalizację zysku, czyli sumy iloczynu ilości produktów wyprodukowanych na każdej maszynie i różnicy ceny produktu, kosztu operacyjnego i kosztu materiałów do jego produkcji.

Ograniczenie popytu wymaga, aby całkowita ilość wyprodukowanego produktu $p$ na wszystkich maszynach nie przekroczyła jego maksymalnego popytu.

Ograniczenie czasowe wymaga, aby całkowity czas operacyjny dla każdej maszyny nie przekroczył maksymalnego czasu pracy.

## 5.2 Rozwiązanie

Dla egzemplarza zadania z listy rozwiązaniem optymalnym jest:

| | M1 | M2 | M3 |
|---|---|---|---|
| P1 | 400 | 0 | 0 |
| P2 | 100 | 0 | 0 |
| P3 | 150 | 0 | 0 |
| P4 | 0 | 0 | 500 |

Tabela 3: Rozwiązanie egzemplarza dla zadania 5

Zysk ze sprzedaży tych produktów wynosi: 5303.33