Obliczenia Naukowe Lista 4

Kamil Włodarski

11 grudnia 2022

1 Zadanie 1

1.1 Opis Problemu

Zadanie pierwsze polegało na zaimplementowaniu zgodnie z zadaną sygnaturą funkcji obliczającej ilorazy różnicowe oparte na podanych węzłach. Dodatkowo funkcja nie powinna korzystać z tablic dwuwymiarowych.

1.2 Rozwiązanie

Ilorazy różnicowe możemy obliczyć korzystając z następującego wzoru rekurencyjnego:

$$\begin{aligned} fx_0 &= f(x_0) \\ f[x_i, x_j] &= \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_k - x_i} \end{aligned} \tag{1}$$

Opierając się na tym wzorze łatwo utworzyć algorytm obliczający ilorazy różnicowe korzystając z macierzy dwuwymiarowej. Do zrobienia tego korzystając jedynie z jednowymiarowych tablic możemy wykorzystać algorytm którego kod znajduje się w załączonych źródłach

2 Zadanie 2

2.1 Opis Problemu

Zadanie drugie polegało na napisaniu funkcji wyliczającej wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona w zadanym punkcie. Algorytm który należało do tego wykorzystać to uogólniony algorytm Hornera którego złożoność czasowa to O(n).

2.2 Rozwiązanie

Wartość w punkcie możemy wyliczyć ze wzoru:

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \tag{2}$$

gdzie q_i jest ilorazem różnicowym a x_j węzłem interpolacyjnym. Powyższą zależność można wyrazić w odniesieniu do ogólnionych wzorów Hornera jako:

$$\begin{aligned} &w_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n] \\ &w_k(x) = f[x_0, \ldots, x_k] + (x - x_k)w_{k+1}, k \in [n-1, 0] \\ &N_n(x) = w_0(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Na podstawie tego wzoru tworzymy algorytm którego implementacja znajduje się w źródłach.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Problemu

Zadanie trzecie polegało na stworzenie funkcji wyznaczającej współczynniki wielomianu w postaci normalnej znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona oraz węzły tego wielomianu. Funkcja ta powinna działać ze złożonością czasową O(n).

3.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie to polegało na implementacji algorytmu omawianego na ćwiczeniach w zadaniu 9 z listy 4. Kod algorytmu znajduje się w źródłach.

4 Zadanie 4

4.1 Opis Problemu

Zadanie czwarte polegało na zaimplementowaniu funkcji która rysowałaby wykres funkcji wraz z wielomianem interpolującym ją o zadanym stopniu n na przedziale $[a, b]$. Należało do tego wykorzystać wcześniej zaimplementowane funkcje.

4.2 Rozwiązanie

Do stworzenia tej funkcji użyto biblioteki *Plots*. Wykresy zapisywane są do folderu jako pliki .pdf (grafika wektorowa nie traci jakości wraz ze skalowaniem). Dodatkowo dodano parametry pozwalające modulować gęstość wyliczania punktów na wykresie (jakość wykresu) oraz parametr tytułu pozwalający nadać wykresowi odpowiednią nazwę. Kod tej funkcji znajduje się w źródłach.

5 Zadanie 5

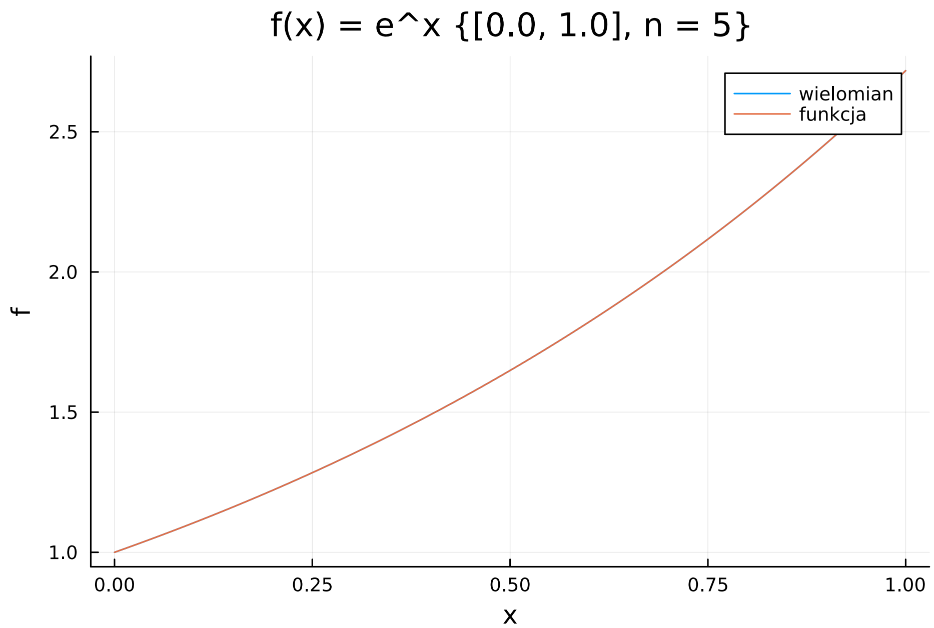
5.1 Opis Problemu

Zadanie polegało na przetestowaniu poprzednio utworzonych funkcji do narysowania wykresów funkcji i wielomianów interpolacyjnych dla następujących przykładów

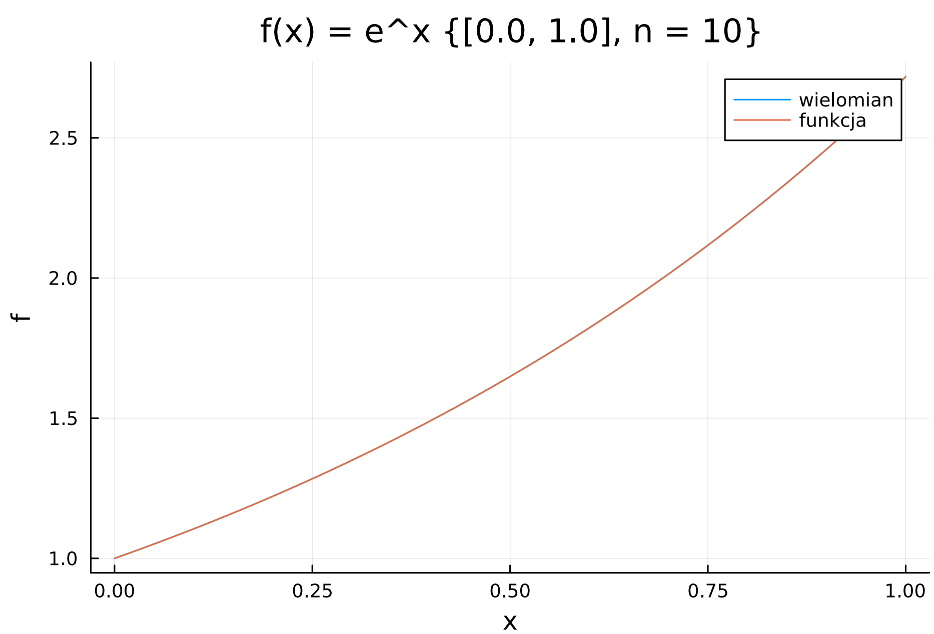
1. funkcja e^x na przedziale $[0, 1]$ dla $n = 5, 10, 15$
2. funkcja $x^2 sin(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ dla $n = 5, 10, 15$

5.2 Wyniki

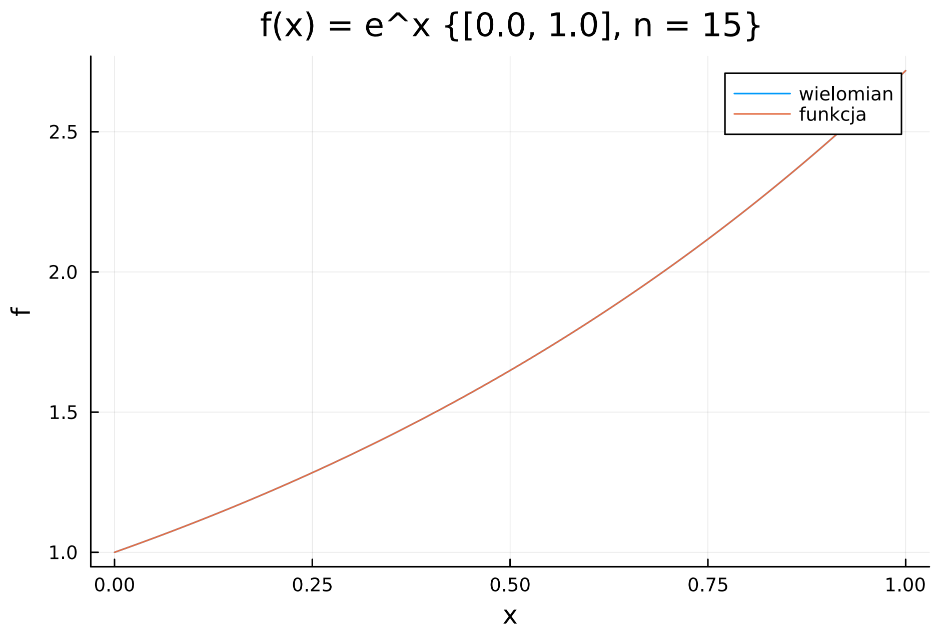
Wyniki znajdują się na poniższych wykresach:



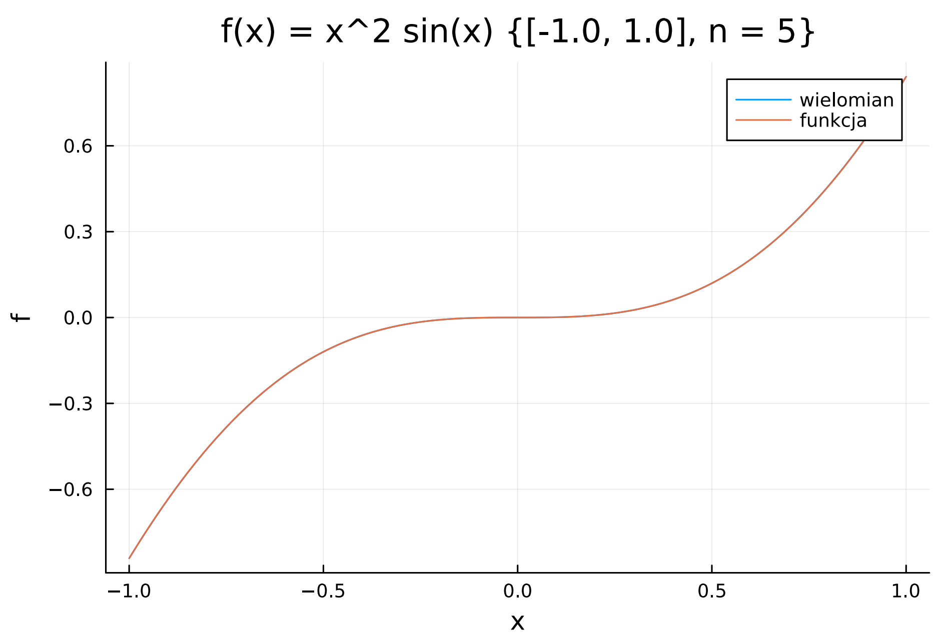
Rysunek 1: funkcja e^x dla $n = 5$



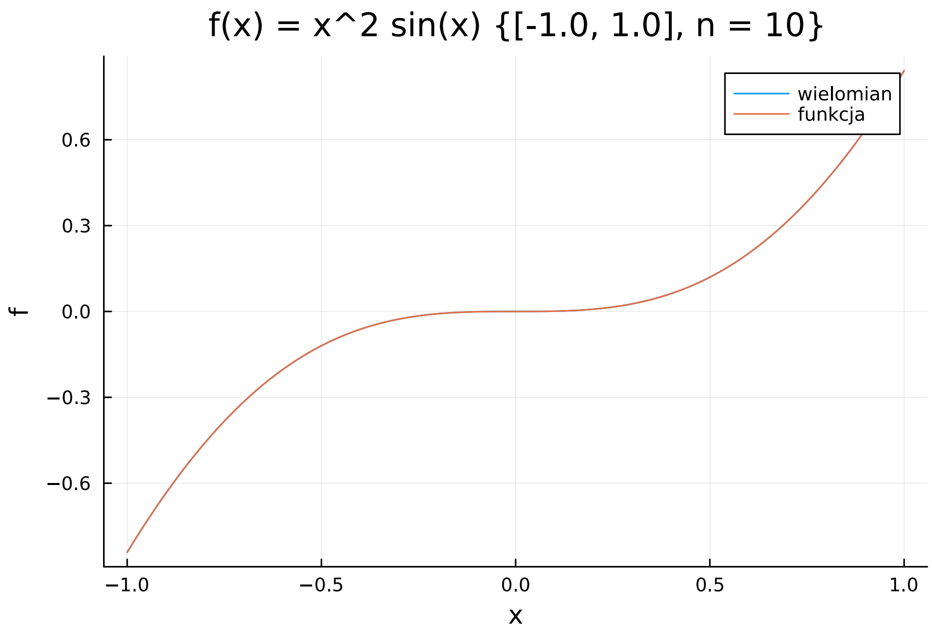
Rysunek 2: funkcja e^x dla $n = 10$



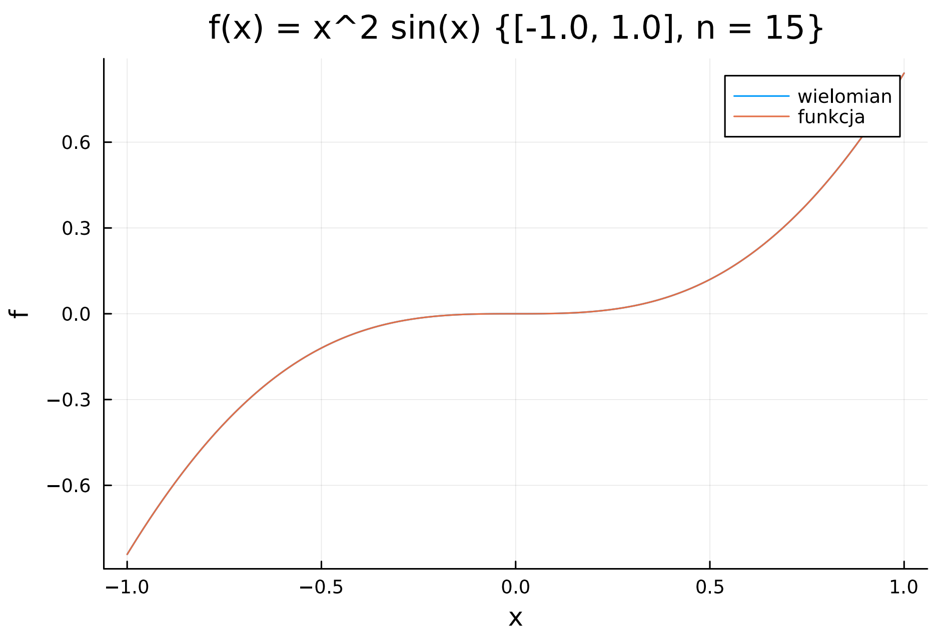
Rysunek 3: funkcja e^x dla $n = 15$



Rysunek 4: funkcja $x^2 sin(x)$ dla $n = 5$



Rysunek 5: funkcja $x^2 sin(x)$ dla $n = 10$



Rysunek 6: funkcja $x^2 sin(x)$ dla $n = 15$

5.3 Wnioski

Dobrze widać, że dla tych przykładów już dla małych stopni wielomianów ($n = 5$) wykresy pokrywają się bardzo dokładnie. Wynika to z tego że wartości funkcji w wybranych przez nas zakresach nie zmieniają się znacząco, a pochodne tych funkcji nie zmieniając znaku na zadanym zakresie.

6 Zadanie 6

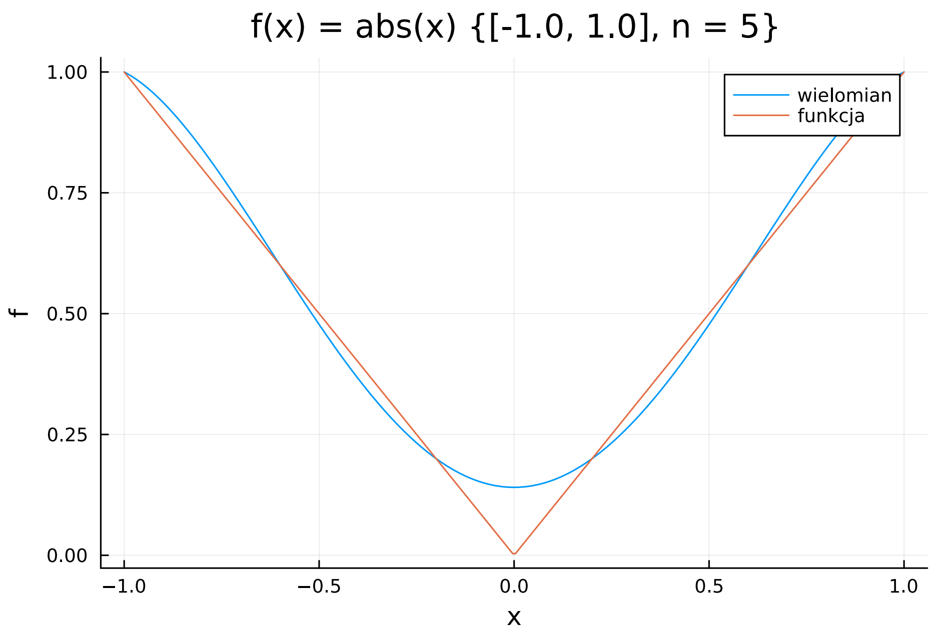
6.1 Opis Problemu

Zadanie polegało na przetestowaniu poprzednio utworzonych funkcji do narysowania wykresów funkcji i wielomianów interpolacyjnych dla następujących przykładów

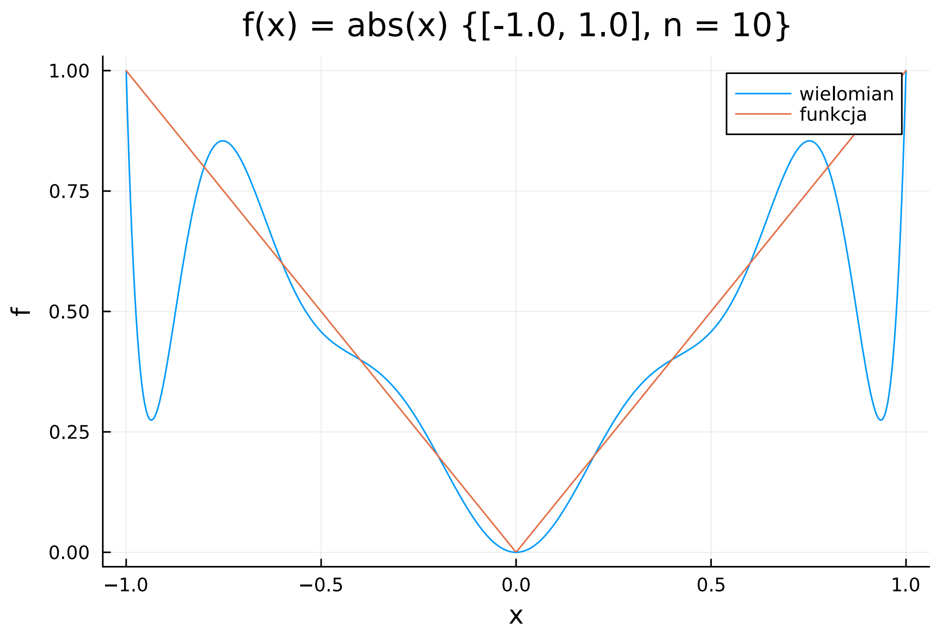
1. funkcja $|x|$ na przedziale $[-1, 1]$ dla $n = 5, 10, 15$
2. funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$ dla $n = 5, 10, 15$

6.2 Wyniki

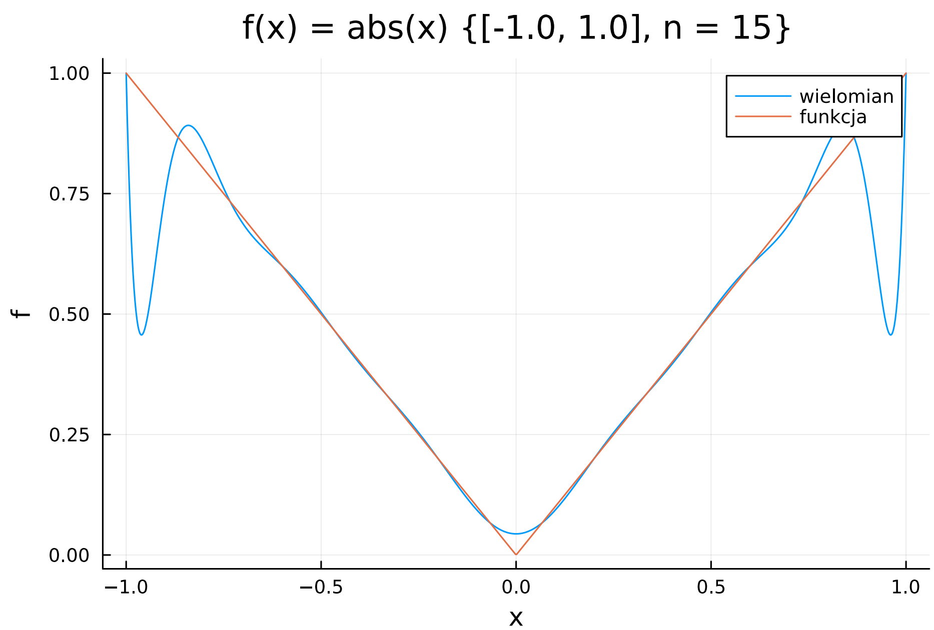
Wyniki znajdują się na poniższych wykresach:



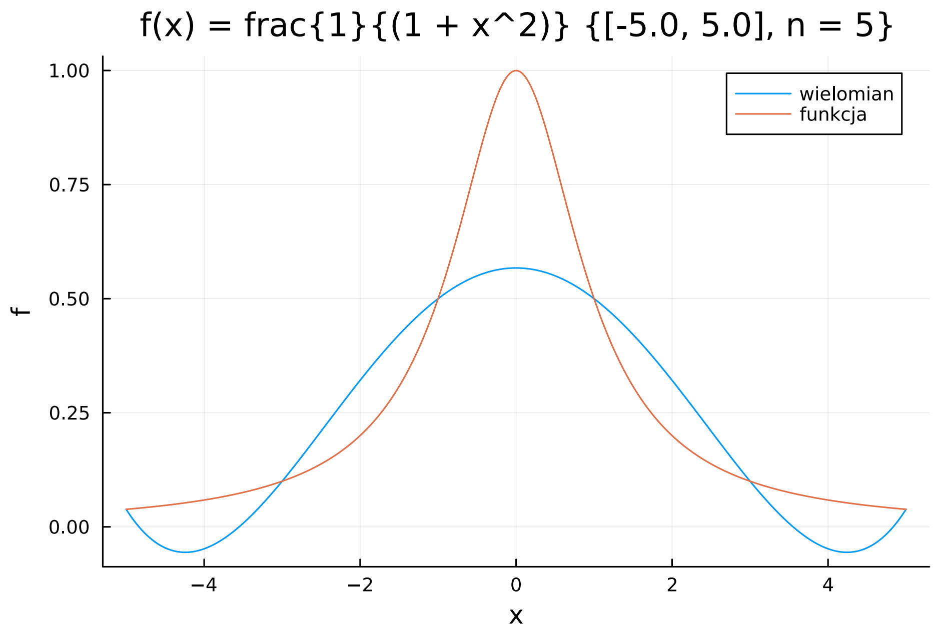
Rysunek 7: funkcja $|x|$ dla $n = 5$



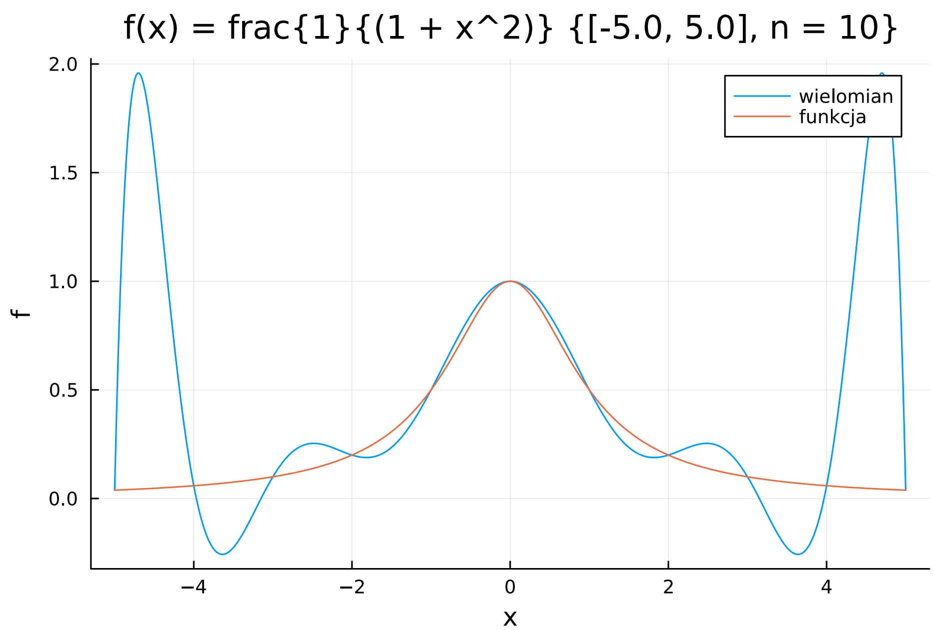
Rysunek 8: funkcja $|x|$ dla $n = 10$



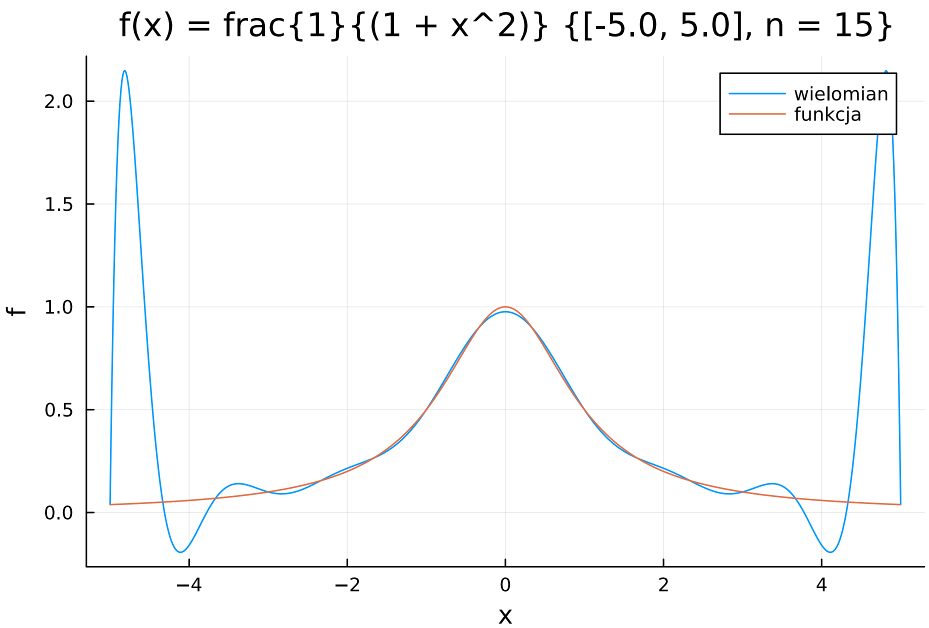
Rysunek 9: funkcja $|x|$ dla $n = 15$



Rysunek 10: funkcja $frac1(1 + x^2)$ dla $n = 5$



Rysunek 11: funkcja $frac1(1 + x^2)$ dla $n = 10$



Rysunek 12: funkcja $frac1(1 + x^2)$ dla $n = 15$

6.3 Wnioski

Możemy zauważyć że na wykresach w tym zadaniu wielomiany interpolacyjne znacząco różnią się od funkcji w przeciwieństwie do zadania poprzedniego. Wynika to z gwałtowniejszych zmian wartości funkcji na zadanych przedziałach jak i z zmiany znaku pochodnej funkcji na interpolowanym przedziale. Możemy zaobserwować, że wraz ze wzrostem stopnia wielomianu interpolującego wartości w środku przedziału są przybliżane z większą dokładnościa natomiast wartości na brzegu przedziału zaczynają bardziej odbiegać. Jest to spowodowane tym, że czynniki z wysokimi potęgami dalej od zera zyskują wartości na tyle duże, że dominują one pozostałe czynniki wielomianu. Możemy więc podsumować że interpolacja wielomianem nie zawsze jest skuteczna i zależy od interpolowanej funkcji. Najlepiej zachowują sie funkcję z pochodną o stałym znaku na przedziale i o stosunkowo niewielkich różnicach wartości na przedziale.