Mathématique discret

Mustafa Kaya

6 décembre 2025

$\forall_n \in \mathbb{N}$

Théorème 1. *Pour tout entier n, la somme des n premiers entier naturels est égal à la moitié du produit de n par $(n-1)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons S_n la somme des n premiers entiers naturels. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} i = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) && \text{par définition} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (n-1-i) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 && \text{par commutativité} \end{aligned}$$

En sommant les deux formes de la somme S_n données ci-dessus, nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} 2 \times S_n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (n-1-i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (i + (n-1-i)) && \text{par associativité et commutativité} \\ &= n(n-1) && \text{On divise ensuite par 2 des deux coté} \\ &= \frac{2 \times S_n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

La somme de 0 jusqu'aà n-1 entier naturel est donc : $\frac{n(n-1)}{2}$ $\square$