五　复化求积公式

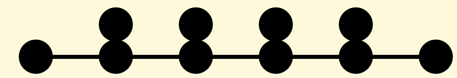
高次插值有Runge 现象, 高阶Newton-Cotes公式会出现数值不稳定, 低阶Newton-Cotes公式有时又不能满足精度要求. 解决这个矛盾的办法是将积分区间[a , b]分成若干小区间, 在每个小区间上用低阶求积公式计算, 然后将它们加起来, 这就是复化求积方法.

➢ 复化梯形公式:

将[a , b]分成 n 个相等的子区间 $[x_k, x_{k+1}]$, 这里

$$h=\frac{b-a}{n},\ \ x_k=a+kh\quad (k=0,\dots,n)$$

在每个 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用梯形公式:



$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1} I_k=\sum_{k=0}^{n-1}\{\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\}$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)$$

其中 $\eta_k\in(x_k, x_{k+1})$, 只要 $f(x)\in C^2[a,b]$, 则由介值定理知存在 $\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)=f''(\eta)$$

因此有

$$I=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$$

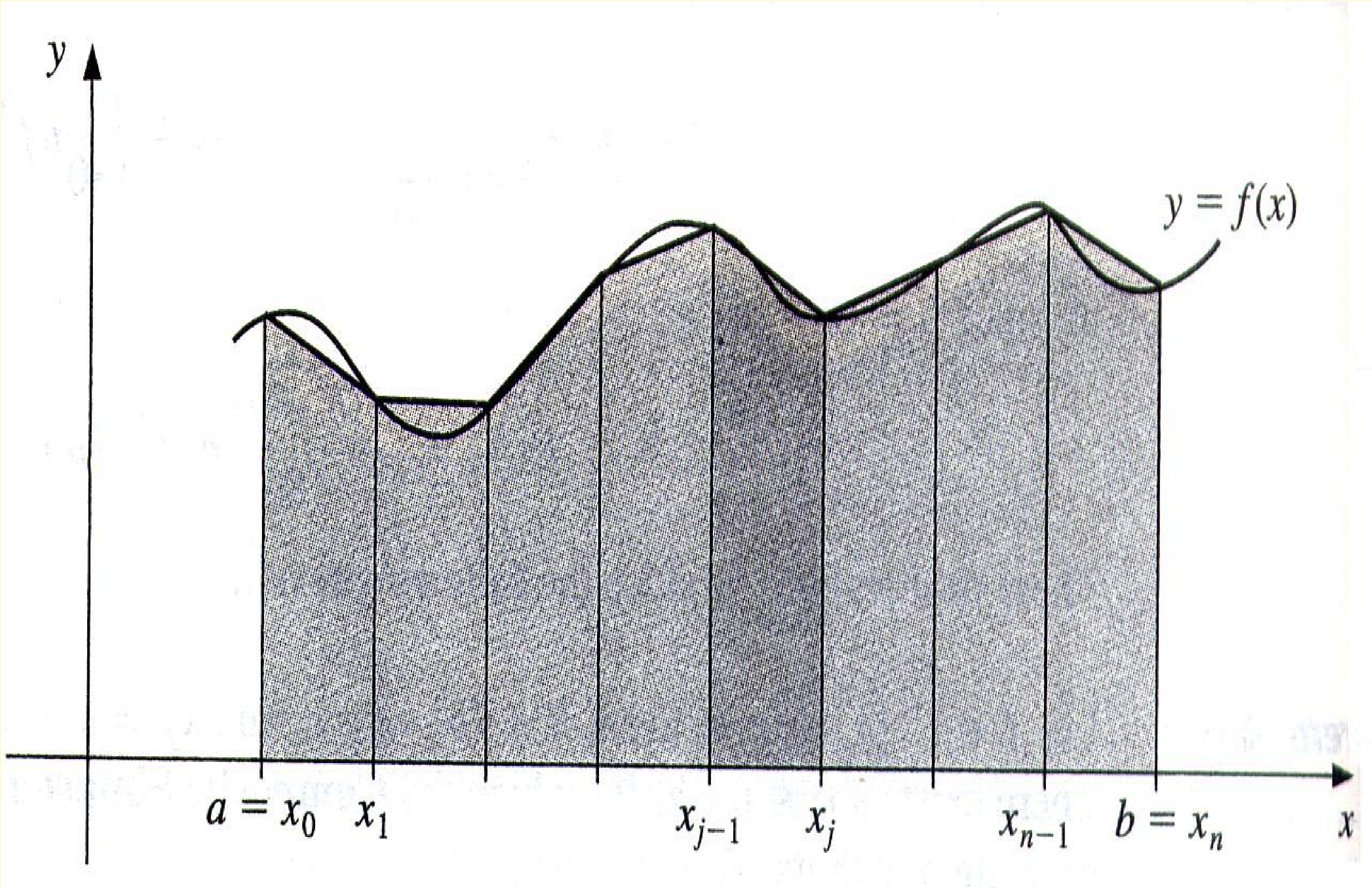
记: $$T_n=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

若用T_n作为 I 的近似公式, 则称之为复化梯形公式 .

余项为:

$$R[f]=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

或记为: $R_1^{(n)}$



复化梯形公式积分法

收敛性

由上述的误差估计式可知，当 $f(x) \in C^2[a, b]$ 时, 只要 $h \to 0$时, 数列$T_n(f) \to I(f)$, 且收敛速度为二阶$O(h^2)$.

但是$f(x) \in C^2[a, b]$ 条件相对苛刻, 现假定$f(x)$在$[a, b]$上 **Riemann可积**, 讨论复化求积公式的收敛性:

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\triangle x_i + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x_i\right)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} T_n(f) = \lim_{n \to \infty} T_n(f) = \frac{1}{2}[I(f) + I(f)] = I(f)$$

➢ 复化 Simpson 公式:

将[*a* , *b*] 2*n* 等分(偶数份) , 则

x_{2k} $\qquad$ x_{2k+1} $\qquad$ x_{2k+2}

$$h=\frac{b-a}{2n},\quad x_j=a+jh\qquad (j=0,1,\dots,2n)$$

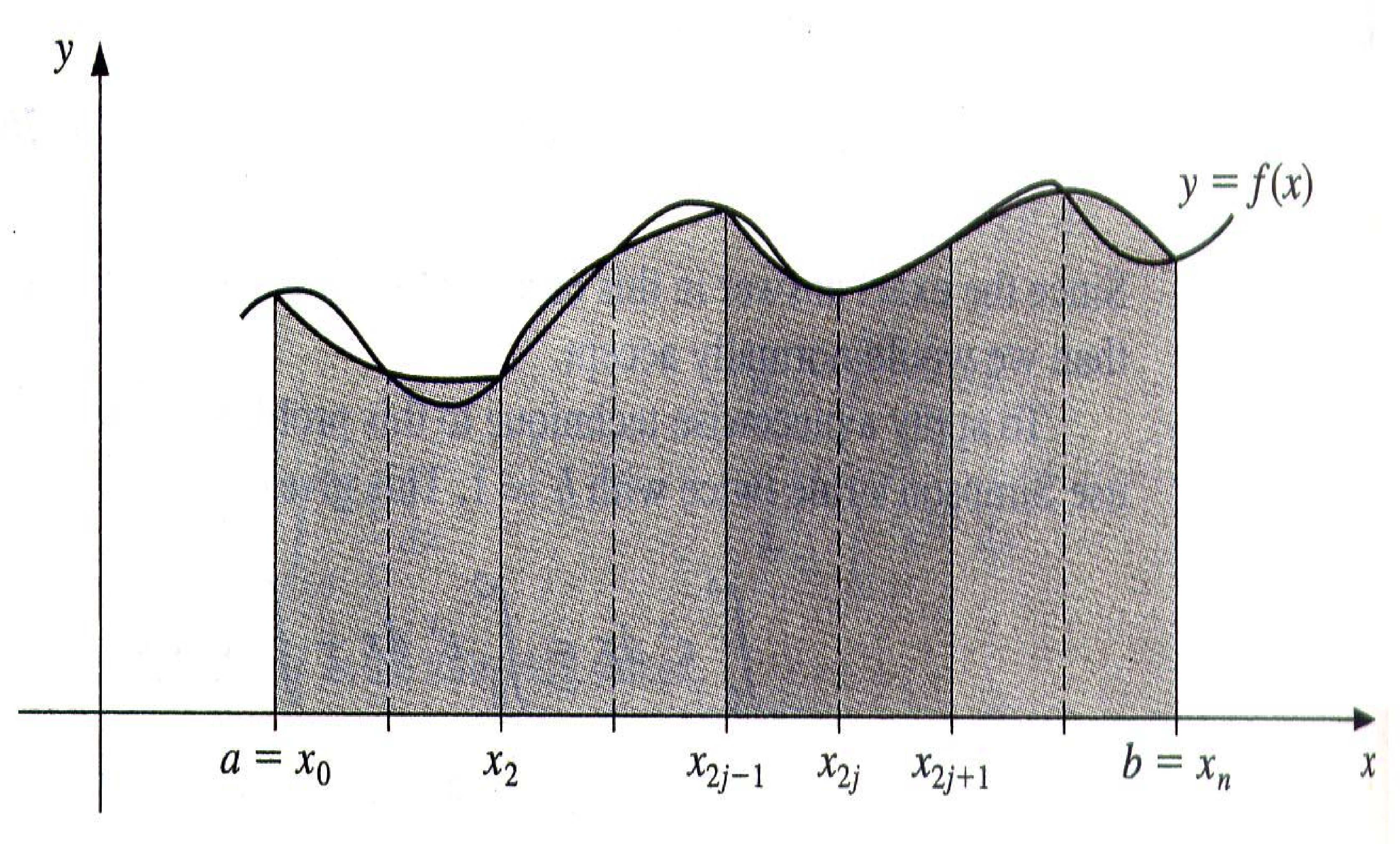
在每两个子区间$[x_{2k},x_{2k+2}],k=0,1,\cdots,n-1$ **上利用Simpson公式, 则得**

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{h}{3}[f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]=S_n(f)$$

称之为复化抛物型公式或复化Simpson公式, 可用于求 *I* 的近似值, 即:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}[f(a)+4\sum_{k=1}^{n}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+f(b)]$$



复化Simpson公式积分法

误差估计

每个子区间上的误差估计式为

$$R_k(1,f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_k), h = \frac{b-a}{2n}, x_{2k-2} \le \eta_k \le x_{2k}$$

将n 个子区间的误差相加得

$$I(f) - S_n(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(\eta_k)$$

由闭区间上连续函数的介值性质可知在(a,b)内至少存在一点 η，使

$$f^{(4)}(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(\eta_k)$$

$$R_2^{(n)} = R[f] = I(f) - S_n(f)$$

$$= -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\eta) h^4 = -\frac{(b-a)^5}{2880 n^4} f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$$

可见, 当$f(x)$有四阶导数时, 复化Simpson公式具有4 阶收敛.

➢ 复化 Cotes 公式:

类似地将[a , b] $4n$ 等分, 可得复化 Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_n = \frac{4h}{90}[7f(a) + 32\sum_{k=1}^{n} f(x_{4k-3}) + 12\sum_{k=1}^{n} f(x_{4k-2})$$

$$+ 32\sum_{k=1}^{n} f(x_{4k-1}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{4k}) + 7f(b)]$$

其中 $h = \dfrac{b-a}{4n}$, $x_k = a + kh \quad (k = 0,1,2,\cdots,4n)$

余项为:

$$R_4^{(n)} = R[f] = -\frac{2(b-a)}{945} h^6 f^{(6)}(\eta), \eta \in (a,b)$$

定理1: 设 $f(x)$ 在 [a , b] 上黎曼可积, 则当分点无限增多, 即 $n \to \infty$ 且 $h \to 0$ 时, 复化梯形公式、复化 Simpson 公式和复化Cotes公式均收敛到积分 $\int_a^b f(x)dx$

例1：　对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，试用数据表计算积分

$$I(f)=\int_0^1 \frac{\sin\ x}{x}dx$$

解：将区间[0 , 1]划分为 8 等分, 应用复化梯形法求得:

$$T_8=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{8\times 2}\left[f(0)+2\sum_{k=1}^{7}f\left(\frac{k}{8}\right)+f(1)\right]$$

$$=0.9456909$$

x	$f(x)$
0	1
1/8	0.9973978
2/8	0.9896158
3/8	0.9767267
4/8	0.9588510
5/8	0.9361556
6/8	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

应用复化Simpson法计算，得

$$S_4 = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{j=1}^{4} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{3} f(x_{2j}) + f(b)\right]$$

$$= \frac{1}{8\times 3}\left[f(0) + 4\sum_{k=1}^{4} f\left(\frac{2k-1}{8}\right) + 2\sum_{k=1}^{3} f\left(\frac{2k}{8}\right) + f(1)\right]$$

$$= 0.9460832$$

比较上面两个结果T_8和S_4，它们都需要提供9个点上的函数值工作量基本相同，然而精度却差别很大.

同积分的准确值 $I(f)$=**0.9460831**比较，复化梯形法的结果T_8=**0.9456909**只有两位有效数字， 而复化Simpson法的结果S_4=0.9460832却有六位有效数字.

例2: 对于下面给定的数据表, 分别用复化梯形公式和复化Simpson 公式计算 $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ 的近似值.

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

解: 用复化梯形公式可得:

$$\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx \approx T_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2.6-1.8}{4}\times[3.12014+2\times(4.42569+6.04241+8.03014)+10.46675]=5.058364$$

用复化Simpson公式可得:

$$\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx \approx S_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2.6-1.8}{4}\times[3.12014+2\times 6.04241+4\times(4.42569+8.03014)+10.46675]=5.033002$$

例3:

1．用2 段Simpson公式（5 节点）计算 $\int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx$ 的近似值（计算中取4位有效数字）；

2．若使误差不超过 10^{-4} ，用复化梯形公式计算该积分至少应取多少个节点?

解: (1) 用2段Simpson公式:

$$\int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx \approx S_2 = \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{2k})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k+2})]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4-0}{2\times 2}\times\{f(0)+f(4)+2f(2)+4[f(1)+f(3)]\}$$

$$=\frac{1}{3}\{1+\frac{1}{1+4^2}+2\frac{1}{1+2^2}+4[\frac{1}{2}+\frac{1}{1+3^2}]\}=1.286$$

(2).

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

故: $M_2 = \max\limits_{0 \le x \le 4} |f''(x)| = 2$

$$|R_n[f]| = \left| -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) \right| \le \left| \frac{4^3}{12n^2} \times 2 \right| \le 10^{-4}, \quad n \ge 327$$

所以用复化梯形公式计算该积分至少应取328个节点。

六 变步长的求积法(区间逐次分半)

变步长的梯形法

在区间[a , b]上取n+1个等距节点，记 $h=\dfrac{b-a}{n}$

由复化梯形公式, 得

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})] \qquad (1)$$

若精度不够, 把各个小区间再对分, 插进节点

$$x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})$$

再由复化梯形公式得

$$T_{2n}=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})] \qquad (2)$$

记

$$H_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

则得计算T_{2n}得递推公式：$T_{2n} = \frac{1}{2}(T_n + H_n)$

误差估计：

$$\frac{I-T_n}{h^2} = -\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1} h f''(\eta_k) \to -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

同理可知 $\frac{I-T_{2n}}{(\frac{h}{2})^2} \to -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$

故 $\frac{I-T_n}{I-T_{2n}} \approx 4$ 即 $I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$

这表明, 以T_{2n}作为I 的近似值, 其误差近似为($T_{2n}-T_n$)/3. 可用于控制误差.

类似地, 可推导变步长的Simpson法和Cotes法

对于Simpson公式,则有

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) = S_{2n} + \frac{1}{4^2 - 1}(S_{2n} - S_n)$$

对于Cotes公式,则有

$$I \approx C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) = C_{2n} + \frac{1}{4^3 - 1}(C_{2n} - C_n)$$

例题见课本P276.

七 Rumberg求积算法

由上节知 $\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$ 可作为I 的更好的近似值. 因而常用此线性组合来逼近I .

$$\tilde{T}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]=S_n$$

即此线性组合实际上就是抛物型公式 S_n .

记 $$S_n=\frac{4}{4-1}T_{2n}-\frac{1}{4-1}T_n \qquad (3)$$

进一步插入节点,类似地可得Cotes公式与Simpson公式的关系式

$$C_n = \frac{4^2}{4^2-1} S_{2n} - \frac{1}{4^2-1} S_n \qquad (4)$$

C_n 可看作是由 S_{2n} 和 S_n 的线性组合的改进值.

继续下去,又有下述**Rumberg**求积公式

$$R_n = \frac{4^3}{4^3-1} C_{2n} - \frac{1}{4^3-1} C_n \qquad (5)$$

一般地,有

$$T_n^{(m)} = \frac{4^m}{4^m-1} T_{2n}^{(m-1)} - \frac{1}{4^m-1} T_n^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

称为Rumberg求积公式(或称为线性加速求积公式).

注: 只要 $f(x)$在$[a, b]$内充分光滑,上述公式总可以得到I的较好的近似值.这种利用若干个近似值推出更为精确的近似值的方法称为外推法.

序列$\{T_n\}$, $\{S_n\}$, $\{C_n\}$和$\{R_n\}$分别称为梯形序列、**Simpson**序列、**Cotes**序列和**Rumberg**序列. 对于**Rumberg**序列, 其线性组合的系数分别为 $\frac{4^m}{4^m-1}\approx 1$ 和 $\frac{1}{4^m-1}\approx 0\ (m\geq 4)$. 因此新的求积序列与前一个序列结果相差不大. 故通常外推到**Rumberg**序列为止.

可以证明, 每次外推都可以使误差的阶提高**2** 阶.

利用Rumberg序列求积的算法称为Rumberg算法.

Rumberg算法的计算步骤:

1^0: 计算 $f(a)$ 和 $f(b)$, 由(1)求出T_1 .

2^0: 将$[a, b]$二等分, 计算 $f(\frac{a+b}{2})$, 由(2)求出T_2 , 由(3)求出S_1 .

3^0: 将$[a,b]$四等分, 计算 $f(a+\frac{b-a}{4})$ 及 $f(a+\frac{3(b-a)}{4})$,

由(2)求出T_4 , 由(3)求出S_2 , 再由(4)求出C_1 .

4^0: 将$[a,b]$八等分, 计算 $f(a+\frac{b-a}{4}i)\ (i=1,3,5,7)$由(2)

求出T_8 , 由(3)求出S_4 , 由(4)求出C_2 , 再由(5)求出R_1 .

5^0: 将区间再次对分, 类似于上述计算过程计算T_{16} , S_8 , C_4 ,

R_2 .

上述过程依次进行下去, 可得 R_1 , R_2 , R_4 , R_8 , ... 直到龙贝格序列中前后两项之差的绝对值不超过给定的误差限为止.