回顾 第1章 引论

1. 数值分析的对象、作用和特点

- ✓ 计算方法在解决实际问题中所处的地位
  - ◆ 计算方法是以计算机为工具求近似解的数值方法

2. 数值分析的误差

- ✓ 误差的分类：模型、观测、**截断、舍入**
- ✓ 绝对误差（限）、相对误差（限）
- ✓ 有效数字概念

3. 误差定性分析与避免误差危害

- ✓ 防止相近数相减、防止大数吃小数、防止接近零的数做除数、控制递推公式中误差的传播

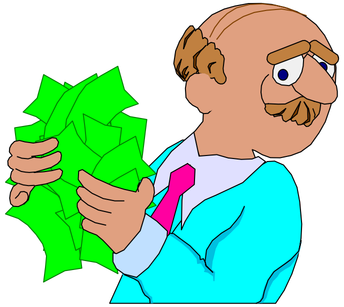
第2章　插值法

§ 2.1 引言

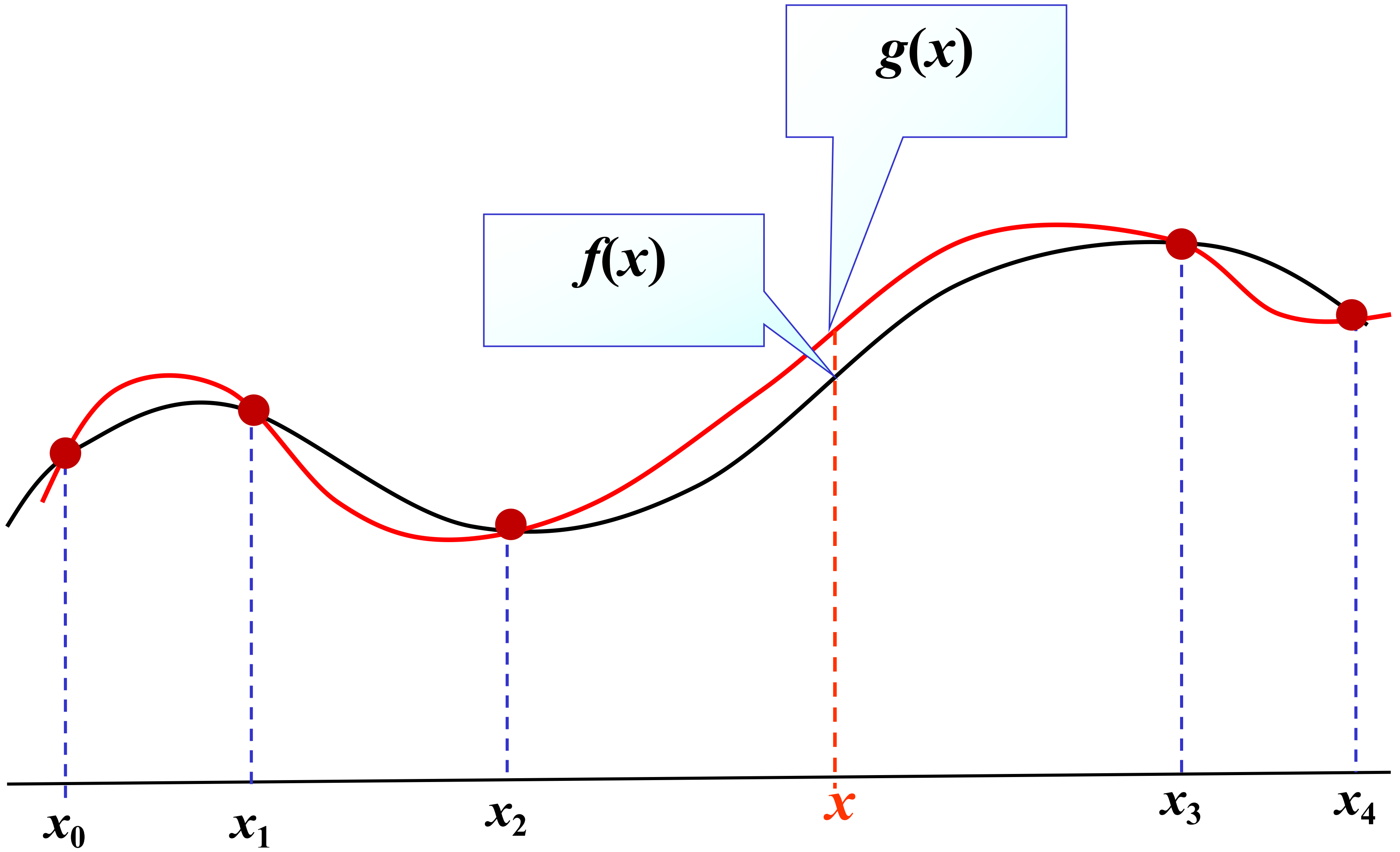
已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（^{o}C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温



这就是本章要讨论的“插值问题”。函数插值也就是对函数的离散数据建立简单的数学模型。



$g(x)$
$f(x)$
x_0
x_1
x_2
x
x_3
x_4

插值问题的定义

Def:

- 当精确函数 $y=f(x)$ 非常复杂或未知时,
- 在区间$[a, b]$上一系列互异节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处,
- 测得函数值 $y_0=f(x_0), \ldots, y_n=f(x_n)$,
- 由此构造一个简单易算的近似函数 $g(x)\approx f(x)$,
- 满足条件:

$$g(x_i)=f(x_i)\quad (i=0, \ldots n) \qquad (*)$$

这个问题称为 **"插值问题"**

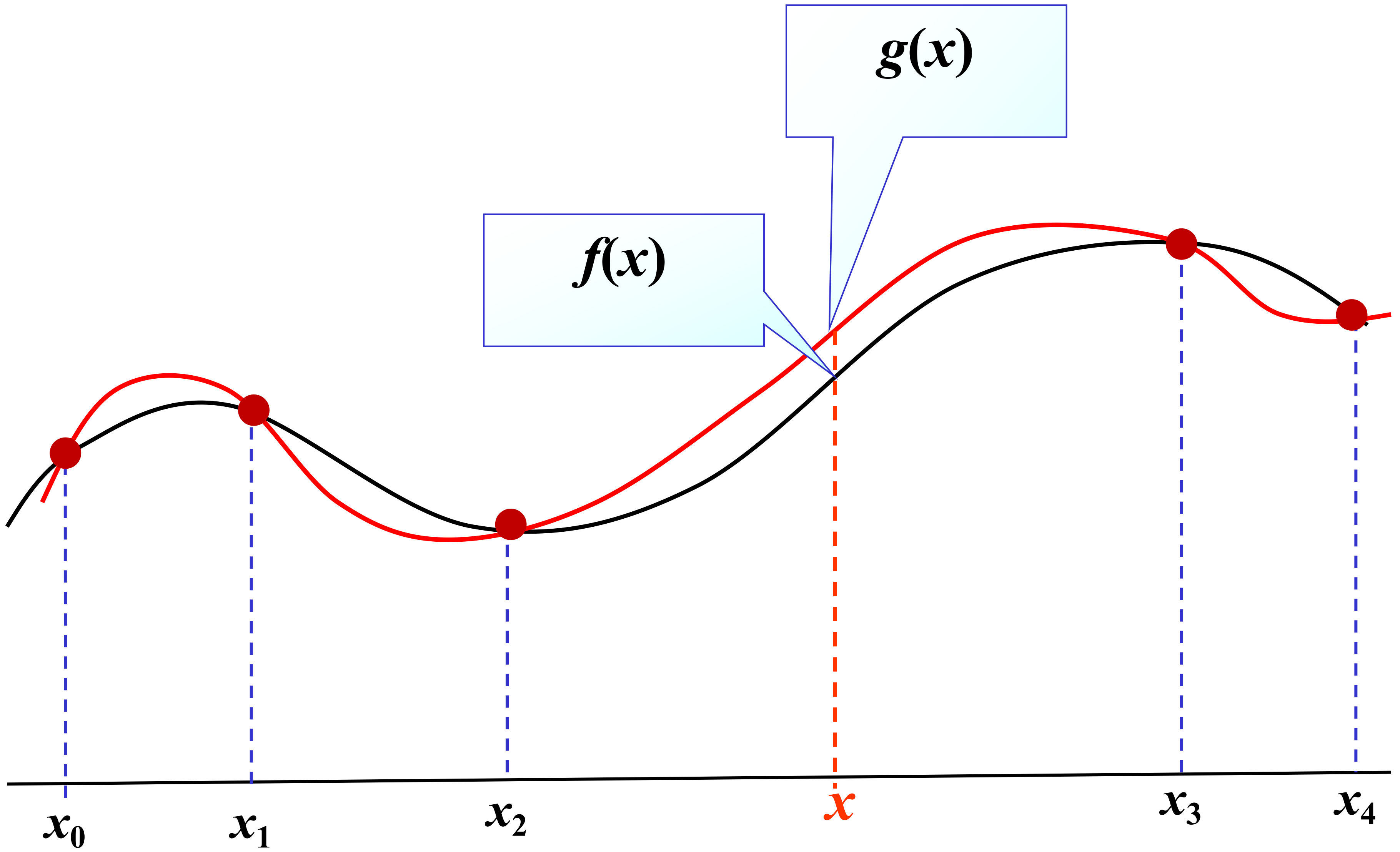
这里的 $g(x)$ 称为$f(x)$ 的**插值函数**。

节点 $x_0 \ldots x_n$称为插值节点, $f(x)$ 称为被**插函数**,

条件(*)称为**插值条件**, 区间$[a , b]$称为**插值区间**

插值余项

$$R(x) = f(x) - g(x)$$



g(x)
f(x)
x0
x1
x2
x
x3
x4

构造插值函数关心问题

插值函数是否存在？

插值函数是否唯一？

如何表示插值函数？

被插函数和插值函数的误差？

$g(x)$的选择要求计算最简单

初等函数

幂函数 x^{α}

指数函数与对数函数 a^{x} $\log_a x$

三角函数与反三角函数 $\sin x$

插值函数的类型有很多种

最常用的插值函数是 **代数多项式**

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

用代数多项式作插值函数的插值称为<u>代数插值</u>

本章主要讨论的内容

插值问题 $\xrightarrow{\text{插值法}}$ 插值函数

例题

已知f (x)的观测数据

x	0	1	2	4
f (x)	1	9	23	3

构造插值多项式

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

已知f (x)的观测数据

x	0	1	2	4
f (x)	1	9	23	3

$$g(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 23 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = -\frac{11}{4} x^3 + \frac{45}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + 1$$

代数插值

- 一、插值问题解的存在唯一性？
- 二、插值多项式的常用构造方法？
- 三、插值函数的误差如何估计？

一 代数插值问题解的存在惟一性

给定区间[a , b]上互异的n+1个点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的一 组函数值 $f(x_i), i=0,1,\cdots,n$ ，求一个次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)\in \boldsymbol{P_n}$ ，使得

$$P_n(x_i)=f(x_i)\,, i=0,1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

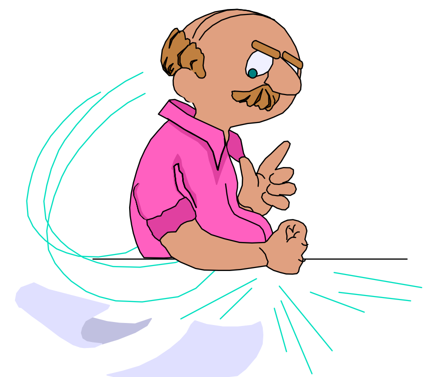
令 $$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (2)$$

只要证明 $P_n(x)$的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 存在唯一即可

定理1：满足插值条件（1）的插值多项式（2）是存在唯一的。

证： 由插值条件(1)知 $P_n(x)$的系数满足下列n+1个代数方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\ldots+a_n x_0^n=f(x_0) \\ a_0+a_1x_1+\ldots+a_n x_1^n=f(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\ldots+a_n x_n^n=f(x_n) \end{cases} \qquad (3)$$



而 $a_i, i=0,1,\cdots,n$ 的系数行列式是Vandermonde行列式, 且

$$V(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)\neq 0$$

注： 通过解上述方程组(3)求得插值多项式 $P_n(x)$ 的方法并不可取. 这是因为当n 较大时解方程组的计算量较大, 而且方程组系数矩阵的条件数一般较大(可能是病态方程组), 当阶数n 越高时, 病态越重 .

为此我们必须从其它途径来求$P_n(x)$:

不通过求解方程组而获得插值多项式

解的存在和惟一性

惟一性说明：

　　不论用何种方法来构造，也不论用何种形式来表示插值多项式，只要满足插值条件$g(x_i)=f(x_i)$，其结果都是相互恒等的。

容易构造，计算简单

基本思想: 在n 次多项式空间P_n中找一组合适的基函数 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$,使

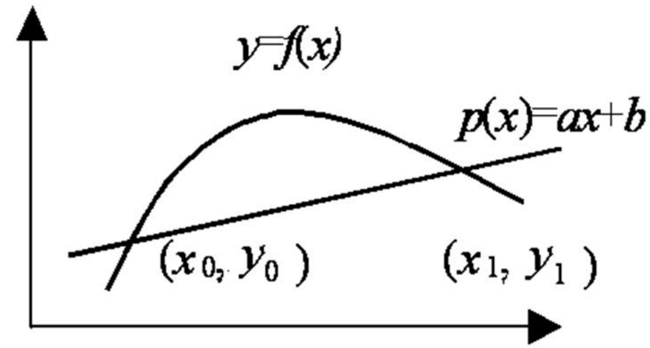
$$P_n(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)$$

不同的基函数的选取导致不同的插值方法

Lagrange插值

Newton插值

§ 2.2 拉格朗日（Lagrange）插值



已知 x_0, x_1；y_0, y_1，**求** $L_1(x) = a_0 + a_1 x$

使得 $L_1(x_0) = y_0, L_1(x_1) = y_1$

可见 $L_1(x)$ **是过** (x_0, y_0) **和** (x_1, y_1) **两点的直线.**

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)}_{l_0(x)} y_0 + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{l_1(x)} y_1 = \sum_{i=0}^{1} l_i(x) y_i$$

基函数性质

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0$$

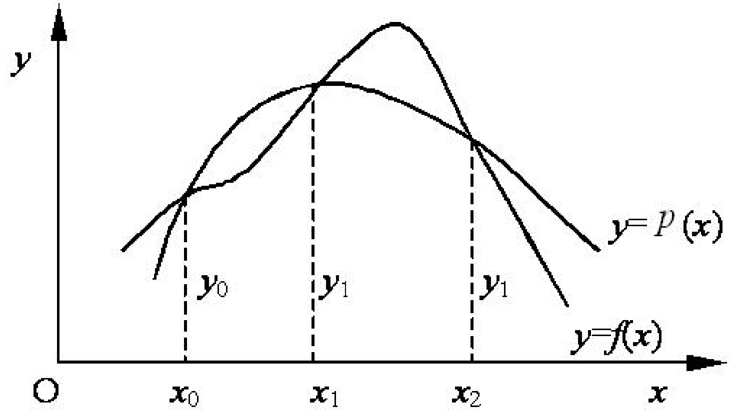
$$l_1(x_0)=0,\quad l_1(x_1)=1$$

$$l_0(x)+l_1(x)=1$$

$$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

x	x_0	x_1
$l_0(x)$	1	0
$l_1(x)$	0	1

抛物插值



构造 $L_2(x)$ 如下, 令: $L_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$L_2(x) = A(x-x_1)(x-x_2) + B(x-x_0)(x-x_1) + C(x-x_0)(x-x_2)$$

代入 $L_2(x_0) = y_0$， **可得** $A = \dfrac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

同理可得 $B = \dfrac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$，$C = \dfrac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

于是有

$$L_2(x)=\underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}_{l_1(x)}y_1+\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{l_2(x)}y_2$$

这种插值称为二次插值, 或抛物插值. 可以验证 $L_2(x)$满足插值条件: $L_2(x_i)=y_i\ (i=0,1,2)$.

其中，$l_0(x)$, $l_1(x)$和$l_2(x)$称为二次插值的基函数, 它们是由插值节点 x_0, x_1, x_2唯一确定的

二次插值函数：　$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$

基函数性质

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\qquad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\qquad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0,\quad l_0(x_2)=0$$

$$l_1(x_0)=0,\quad l_1(x_1)=1,\quad l_1(x_2)=0$$

$$l_2(x_0)=0,\quad l_2(x_1)=0,\quad l_2(x_2)=1$$

$$l_0(x)+l_1(x)+l_2(x)=1$$

$$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

基函数性质

x	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

例1：已知 $\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11, \sqrt{144}=12$ **分别用线性插值和二次插值求** $\sqrt{115}$ **的近似值。**

解: (1) 线性插值

$$L_1(x)=\frac{x-121}{100-121}\cdot 10+\frac{x-100}{121-100}\cdot 11$$

$$\therefore \sqrt{115}\approx L_1(115)=\frac{115-121}{100-121}\cdot 10+\frac{115-100}{121-100}\cdot 11\approx 10.71429$$

(2) 二次插值

$$L_2(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\cdot 10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\cdot 11$$

$$+\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\cdot 12$$

$$\therefore \sqrt{115}\approx L_2(115)\approx 10.7228$$

注：这里线性插值只选取两个相近点。

推广到拉格朗日插值

线性插值（两点）

$$L_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$$

抛物插值（三点）

$$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

拉格朗日插值（**n+1**点）

$$L_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$$

推广到一般情形，则有一般的Lagrange插值公式.

一、插值基函数

Def： 若n 次多项式 $l_k(x)\ (k=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$个插值节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足插值条件

$$l_k(x_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases},\quad (i,k=0,1,\cdots,n)$$

则称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为插值节点上的n 次插值基函数.

下建立其具体表达式：

由$i \neq k$时， $l_k(x_i)=0$ 知 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 为$l_k(x)$ 的零点，故设

$$l_k(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

由 $l_k(x_k)=1$ 得

$$A_k = \frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

因此

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

与 节点有关，而与f无关

基函数的性质

Prop1: 基函数 $l_k(x)\ (k=0,1,\cdots,n)$ 为由插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 唯一确定的n 次函数.

Prop2: 基函数所含的基函数个数与插值节点个数相同.

Prop3: 可以证明函数组 $l_0(x)$，$l_1(x)$，…, $l_n(x)$ 在插值区间$[a, b]$上线性无关, 所以这 $n+1$个函数可作为P_n 的一组基函数, 称为**Lagrange插值基函数**。

二、Lagrange 插值多项式

令:

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)y_k$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

例2.5 已知f (x)的观测数据

x	0	1	2	4
f (x)	1	9	23	3

构造Lagrange插值多项式

解 四个点可构造三次Lagrange插值多项式:基函数为

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x$$

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x$$

Lagrange插值多项式为

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}y_k l_k(x)$$

$$=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

例2.6　已知下列f(x)的观测数据构造插值多项式

x	1	2	3	4
f(x)	0	-5	-6	3

解：四个点可以构造三次插值多项式，将数据代入插值公式，有

$$p(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 + l_3(x)y_3$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3$$

这个例子说明p(x)的项数不超过n+1项，但可以有缺项。

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

方便记法：

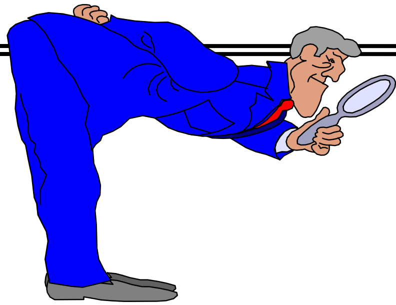
记： $$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

则

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$$

因此 $L_n(x)$ **可写成如下形式**

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}\cdot y_k$$



➢ 插值余项 /* Remainder */

定理6.2.1 若 $f^{(n+1)}(x)$ 在$[a\,,b]$内存在, 则在$[a\,,b]$上的$n+1$个互异的点，对$f(x)$所作的n 次Lagrange 插值多项式$L_n(x)$ 有误差估计

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

Rolle's Theorem的推论: 若 $\varphi(x)$ 充分光滑, 且

$\varphi(x_0) = \cdots = \varphi(x_n) = 0 \longrightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$

证明： 由于 $R_n(x_i)=0$， $i=0,1,\ldots,n$

$$\Rightarrow\ R_n(x)=u(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\qquad \text{(Taylor公式)}$$

任意固定 $x\neq x_i$ $(i=0,\ldots,n)$, 考察

$$\varphi(t)=R_n(t)-u(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)=f(t)-L_n(t)-u(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 $x_0\ \ldots\ x_n\ x$

$$\Rightarrow\ \varphi^{(n+1)}(\xi_x)=0,\quad \xi_x\in(a,b)\ \Rightarrow u(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

推论： 设 $f(x)\in C^2[a,b]$，并记 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$,则函数 $f(x)$ 的过点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 的线性插值余项 $R_1(x)$ 有上界误差估计式：

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{8}(b-a)^2,\quad \forall x\in[a,b]$$

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

1^0： 由于余项含有因子,如果插值点偏离节点较远, 则插值效果一般不理想.

2^0： 通常所说的n 次代数插值多项式不一定就是n次多项式, 它可能是次数低于n 的.

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

3^0: 一般情况下, 余项中ξ的具体数值不易确定, 实际计算中常估计其误差限.

设 $$M_{n+1}=\max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$$

则有 $$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|\omega_{(n+1)}(x)|$$

由此看出, $|R_n(x)|$的大小除与M_{n+1}有关外, 还与插值节点有密切关系. 当给定m 个点处的函数值, 但仅选用其中$n+1(n+1<m)$个作为插值条件而求某点 $\bar{x}$ 处的函数值时, $n+1$个节点的选取应尽可能地接近 $\bar{x}$.

例2： 已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ 的1次、2次 Lagrange 插值计算

$\sin 50°$， 并估计误差。

解： $\boxed{n=1}$ 分别利用x_0, x_1 以及 x_1, x_2 计算

⊕利用 $x_0=\frac{\pi}{6},\ x_1=\frac{\pi}{4}$ ➡ $L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \sin 50^0 \approx L_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)\approx 0.77614$$

$$R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ \frac{1}{2}<\sin\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-0.01319<R_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)<-0.00762$$

⌖利用 $x_1 = \dfrac{\pi}{4}, x_2 = \dfrac{\pi}{3}$

计算得：$\sin 50° \approx 0.76008,$

$$0.00538 < \tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00660$$

$\sin 50° = 0.7660444\ldots$

利用x_0, x_1 作为插值节点的实际误差 ≈ -0.01001

利用x_1, x_2作为插值节点的实际误差 ≈ 0.00596

$n=2$

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

$$\boldsymbol{R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\,;\qquad \frac{1}{2}<\cos\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$0.00044<R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00077$$

$\sin 50° = 0.7660444\ldots$

2次插值的实际误差 ≈ 0.00061

例3：考虑制做 $\sin x$ 在$[0,\pi]$上等距结点的函数表,要求用线性插值计算非表格点数据时,能准确到小数后两位,问函数表中自变量数据的步长 h 应取多少为好？

解：设应取的步长为h，则 $x_j = jh\ (j=0,1,\cdots,n)$.

当 $x\in(x_j,\ x_{j+1})$时

$$\sin x \approx \frac{1}{h}[(x-x_j)\sin x_{j+1} + (x_{j+1}-x)\sin x_j]$$

$$|R(x)| \le \max_{x_j\le x\le x_{j+1}} |f''(x)| \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{8} = \frac{h^2}{8}$$

只须 $\frac{h^2}{8} \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$ $\Rightarrow$ $h \le 0.2$

计算实习： Lagrange Polynomial

1 输入n, x, y, x*　　2 赋初始值　Pai　=1.0，Slag　=0.0

3　for　　i=0，1，…，n

3.1　Pai*(x^*-x_i)→Pai

end for(i)

4　for　　j=0, 1, …，n

4.1　Tai　=1.0

4.2　for　　i=0, 1，…，n

4.2.1　if　　$i\neq j$　　then

Tai*(x_j-x_i)→Tai

end if

end for　(i)

4.3　Slag　+((yj*Pai)/(x^*-x_j)*Tai)→Slag

end for(j)

5 输出　Slag　　6　end

基函数$l_j(x)$的分子

值节点个数

插值点x*处的计算结果

$x_i, y_i (i=0, 1, …, n)$

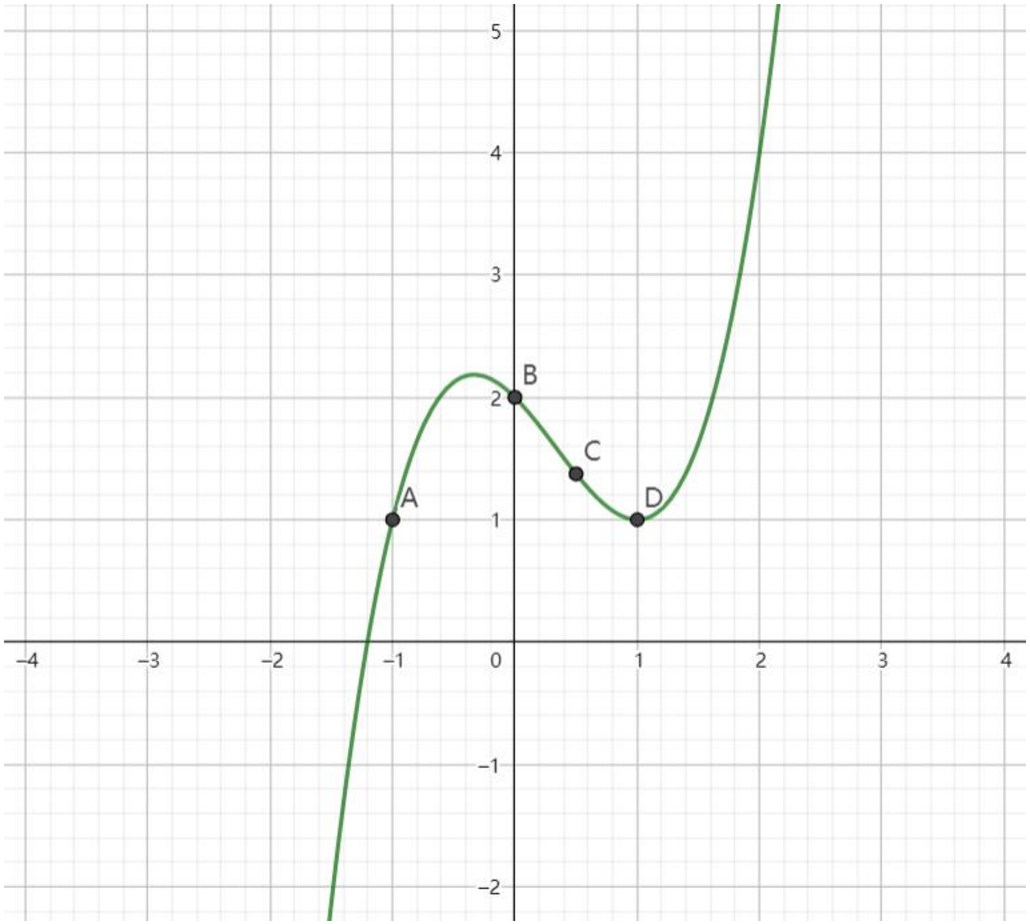
上机作业：

已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（^{o}C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温

这就是本章要讨论的“插值问题”。函数插值也就是对函数的离散数据建立简单的数学模型。



A
B
C
D
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4