

第9章 常微分方程初值问题数值解法

§ 9.1 引言

§ 9.2 简单的数值方法

§ 9.3 龙格-库塔方法

§ 9.4 单步法的收敛性与稳定性*

§ 9.5 线性多步法*

§ 9.6 线性多步法的收敛性与稳定性*

§ 9.7 一阶方程组与刚性方程组*

§ 9.1 引言

包含自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。在微分方程中, 自变量的个数只有一个, 称为常微分方程。自变量的个数为两个或两个以上的微分方程叫偏微分方程。微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数。如果未知函数 y 及其各阶导数

$$y', y'', \cdots, y^{(n)}$$

都是一次的, 则称它是线性的, 否则称为非线性的。



引言

在高等数学中，对于常微分方程的求解，给出了一些典型方程求解析解的基本方法，如可分离变量法、常系数齐次线性方程的解法、常系数非齐次线性方程的解法等。但能求解的常微分方程仍然是有限的，大多数的常微分方程是不可能给出解析解。譬如

$$y' = x^2 + y^2$$

这个一阶微分方程就不能用初等函数及其积分来表达它的解。



引言

从实际问题当中归纳出来的微分方程，通常主要依靠数值解法来解决。本章主要讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

在区间 $a \leq x \leq b$ 上的数值解法。

可以证明, 如果函数在带形区域 $R = \{a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ 内连续, 且关于 y 满足李普希兹 (Lipschitz) 条件, 即存在常数 L (它与 x, y 无关) 使

引言

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

对 \mathbb{R} 内任意两个 y_1, y_2 都成立, 则方程(1)的解
 $y = y(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在且唯一。

§ 9.2 简单的数值方法

对常微分方程初值问题(1)式的数值解法，就是要算出精确解 $y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一系列离散节点

处的函数值 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

$y(x_0), y(x_1), \cdots, y(x_n)$ 的近似值 y_0, y_1, \cdots, y_n 。

相邻两个节点的间距 $h = x_{i+1} - x_i$ 称为步长，步长可以相等，也可以不等。本章总是假定 h 为定数，称为定步长，这时节点可表示为

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

数值方法的基本思想

数值解法需要把连续性的问题加以离散化，从而求出离散节点的数值解。

对常微分方程数值解法的基本出发点就是离散化。其数值解法有两个基本特点，它们都采用“步进式”，即求解过程顺着节点排列的次序一步一步地向前推进，描述这类算法，要求给出用已知信息 $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_0$ 计算 y_{i+1} 的递推公式。建立这类递推公式的基本方法是在这些节点上用数值积分、

数值方法的基本思想

数值微分、泰勒展开等离散化方法，对初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

中的导数 y' 进行不同的离散化处理。

对于初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



数值方法的基本思想

的数值解法，首先要解决的问题就是如何对微分方程进行离散化，建立求数值解的递推公式。递推公式通常有两类，一类是**计算 y_{i+1} 时只用到 x_{i+1} , x_i 和 y_i , 即前一步的值**，因此有了初值以后就可以逐步往下计算，此类方法称为**单步法**；其代表是龙格—库塔法。另一类是**计算 y_{i+1} 时，除用到 x_{i+1} , x_i 和 y_i 以外，还要用到 x_{i-p}, y_{i-p} ($p = 1, 2, \dots, k$)，即前面 k 步的值**，此类方法称为**多步法**；其代表是亚当斯法。

1 Euler公式

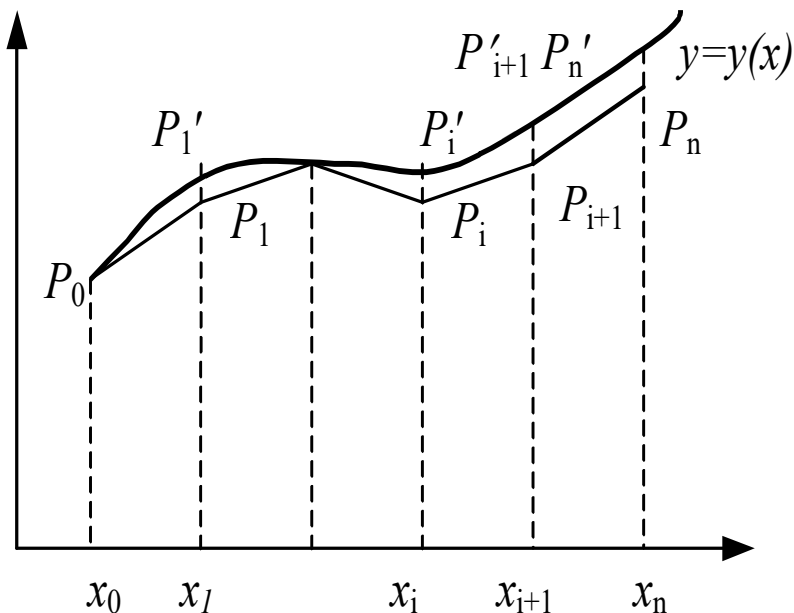
欧拉（Euler）方法是解初值问题的最简单的数值方法。初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解 $y=y(x)$ 代表通过点 (x_0, y_0) 的一条称之为微分方程的积分曲线。积分曲线上每一点 (x, y) 的切线的斜率 $y'(x)$ 等于函数 $f(x, y)$ 在这点的值。

Euler公式

Euler法的求解过程是:从初始点 P_0 (即点 (x_0, y_0))出发,作积分曲线 $y=y(x)$ 在 P_0 点上切线 $\overline{P_0P_1}$ (其斜率为 $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$),与 $x=x_1$ 直线

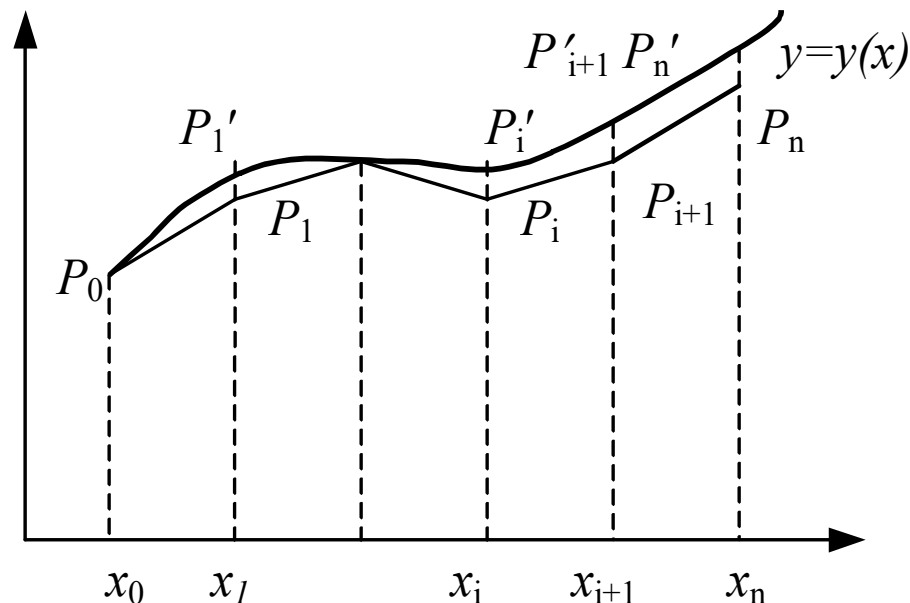


相交于 P_1 点(即点 (x_1, y_1)),得到 y_1 作为 $y(x_1)$ 的近似值,如上图所示。过点 (x_0, y_0) ,以 $f(x_0, y_0)$ 为斜率的切线方程为 $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

当 $x = x_1$ 时,得 $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$

Euler公式

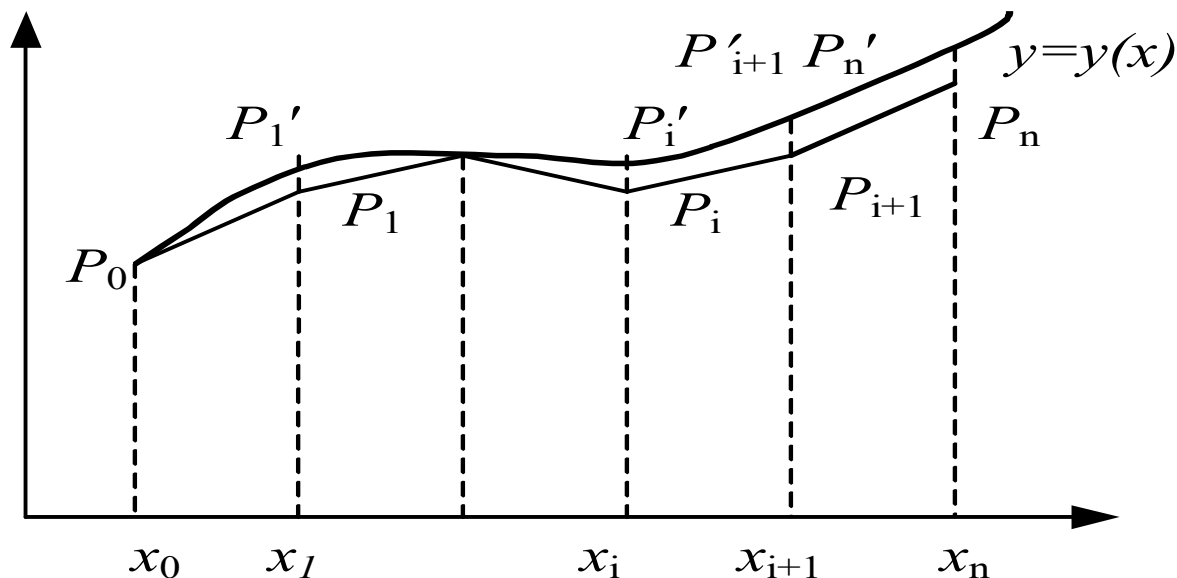
这样就获得了P1点的坐标。



同样, 过点 $P_1(x_1, y_1)$, 作积分曲线 $y=y(x)$ 的切线
交直线 $x=x_2$ 于 P_2 点, 切线 $\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $y'(x_1) = f(x_1, y_1)$
直线方程为 $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$

Euler公式

当 $x = x_2$ 时, 得 $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$



由此获得了 P_2 的坐标。重复以上过程, 就可获得一系列

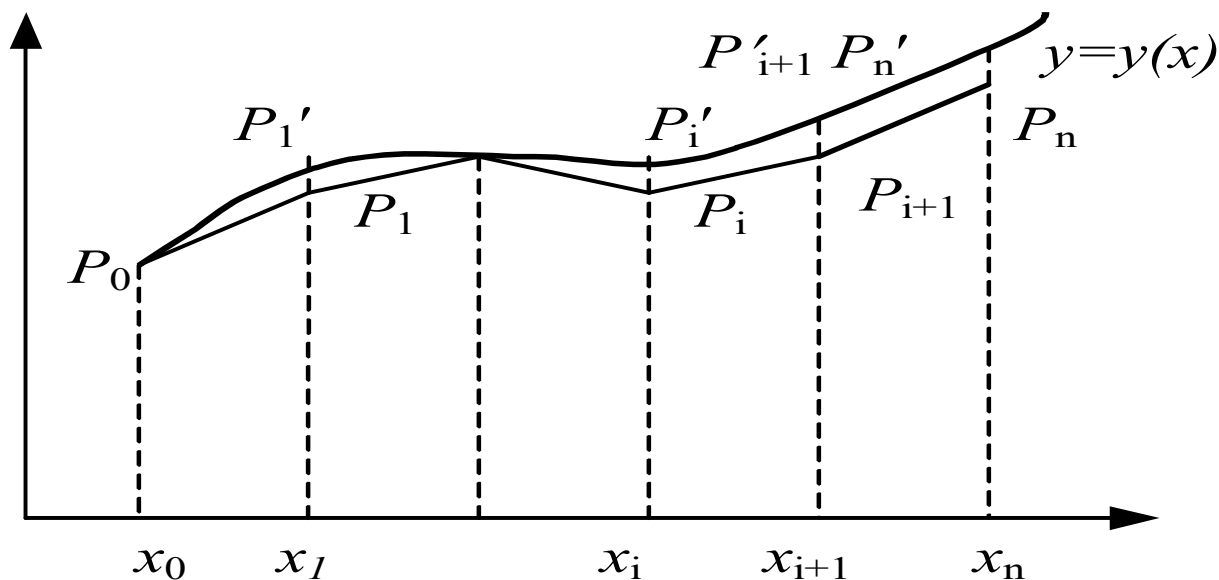
的点: P_1, P_2, \dots, P_n 。对已求得点 $P_n(x_n, y_n)$ 以

$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ 为斜率作直线 $y = y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n)$

Euler公式

当 $x = x_{n+1}$ 时, 得 $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$

取 $y(x_n) \approx y_n$



这样, 从 x_0 逐个算出 x_1, x_2, \dots, x_n

对应的数值解 y_1, y_2, \dots, y_n

Euler公式

从图形上看, 就获得了一条近似于曲线 $y=y(x)$ 的折线 $\overline{P_1P_2P_3 \cdots P_n}$ 。

通常取 $x_{i+1} - x_i = h_i = h$ (常数), 则Euler法的计算格式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad i=0,1,\dots,n \quad (2)$$

还可使用数值微分、数值积分法和泰勒展开法推Euler格式。以数值积分为例进行推导。

将方程 $y' = f(x, y)$ 的两端在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上积分得,

Euler公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx \quad (3)$$

选择不同的计算方法计算上式的积分项

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx$,就会得到不同的计算公式。

用左矩形方法计算积分项

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx \approx (x_{i+1} - x_i) f[x_i, y(x_i)]$$

Euler公式

代入(3)式,并用 y_i 近似代替式中 $y(x_i)$ 即可得到向前欧拉(Euler)公式

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

由于数值积分的矩形方法精度很低, 所以欧拉(Euler)公式当然很粗糙。

例题

例1 用欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 & (0 \leq x \leq 0.6) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h=0.2$, 计算过程保留4位小数

解: $h=0.2$, $f(x, y) = -y - xy^2$ 欧拉迭代格式

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - hy_i - hx_i y_i^2 \\ &= 0.2y_i(4 - x_i y_i^2) \quad (i = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

例题

当 $i=0$, $x_1=0.2$ 时, 已知 $x_0=0$, $y_0=1$, 有

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.2 \times 1(4 - 0 \times 1) = 0.8$$

当 $i=1$, $x_2=0.4$ 时, 已知 $x_1=0.2$, $y_1=0.8$, 有

$$y(0.4) \approx y_2 = 0.2 \times 0.8 \times (4 - 0.2 \times 0.8) = 0.6144$$

当 $i=2$, $x_3=0.6$ 时, 已知 $x_2=0.4$, $y_2=0.6144$, 有

$$y(0.6) \approx y_3 = 0.2 \times 0.6144 \times (4 - 0.4 \times 0.6144) = 0.4613$$

梯形公式

2 梯形公式

为了提高精度, 对方程 $y' = f(x, y)$ 的两端在区间上 $[x_i, x_{i+1}]$ 积分得,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx \quad (4)$$

改用梯形方法计算其积分项, 即

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2} [f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

代入(4)式, 并用近似代替式中即可得到梯形公式

梯形公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (5)$$

由于数值积分的梯形公式比矩形公式的精度高，因此梯形公式（5）比欧拉公式(2)的精度高的数值方法。

(5)式的右端含有未知的 y_{i+1} ，它是一个关于 y_{i+1} 的函数方程，这类数值方法称为**隐式方法**。相反地，欧拉法是关于 y_{i+1} 的一个直接的计算公式，这类数值方法称为**显式方法**。

两步欧拉公式

3 两步欧拉公式

对方程 $y' = f(x, y)$ 的两端在区间上 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 积分得

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx \quad (6)$$

改用中矩形公式计算其积分项，即

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f[x, y(x)] dx \approx (x_{i+1} - x_{i-1}) f[x_i, y(x_i)]$$

代入上式,并用 y_i 近似代替式中 $y(x_i)$ 即可得到两步欧拉公式

两步欧拉公式

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i) \quad (7)$$

前面介绍过的数值方法,无论是欧拉方法,还是梯形方法,它们都是单步法,其特点是在计算 y_{i+1} 时只用到前一步的信息 y_i ;可是公式(7)中除了 y_i 外,还用到更前一步的信息 y_{i-1} ,即调用了前两步的信息,故称其为两步欧拉公式

欧拉法的局部截断误差

4 欧拉法的局部截断误差

衡量求解公式好坏的一个主要标准是求解公式的精度, 因此引入局部截断误差和阶数的概念。

定义1 在 y_i 准确的前提下, 即 $y_i = y(x_i)$ 时, 用数值方法计算 y_{i+1} 的误差 $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$, 称为该数值方法计算时 y_{i+1} 的局部截断误差。

对于欧拉公式, 假定 $y_i = y(x_i)$, 则有

$$y_{i+1} = y(x_i) + h[f(x_i, y(x_i))] = y(x_i) + hy'(x_i)$$

欧拉法的局部截断误差

而将真解 $y(x)$ 在 x_i 处按二阶泰勒展开

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi) \quad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

因此有 $y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^2}{2!} y''(\xi)$

定义2 数值方法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$,则称这种数值方法的阶数是P。步长($h < 1$) 越小,P越高,则局部截断误差越小,计算精度越高。欧拉公式的局部截断误差为 $O(h^2)$, 欧拉方法仅为一阶方法。

欧拉法的局部截断误差

两步欧拉公式比欧拉公式精度也是高一个数值方法,
设 $y_i = y(x_i)$, $y_{i-1} = y(x_{i-1})$ 前两步准确,则两步欧拉公式

$$y_{i+1} = y(x_{i-1}) + 2hf(x_i, y(x_i))$$

把 $y(x_{i-1})$ 在 x_i 处展开成Taylor级数, 即

$$\begin{aligned} y(x_{i-1}) &= y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + O(h^3) \\ &= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + O(h^3) \end{aligned}$$

欧拉法的局部截断误差

由 $y_{i+1} = y(x_{i+1}) + 2hf(x_i, y_i)$

$$= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + O(h^3) + 2hf(x_i, y_i)$$
$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + O(h^3) \quad (8)$$

再将 $y(x_{i+1})$ 在 x_{i+1} 处进行泰勒展开

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + O(h^3) \quad (9)$$

欧拉法的局部截断误差

所以, 由(8)和(9)可得两步欧拉公式的局部截断误差

为, 即 $y(x_{i+1}) - y_{i+1} = O(h^3)$



改进的欧拉公式

5 改进的欧拉公式

显式欧拉公式计算工作量小,但精度低。梯形公式虽提高了精度,但为隐式公式,需用迭代法求解,计算工作量大。综合欧拉公式和梯形公式便可得到改进的欧拉公式。

先用欧拉公式(2)求出一个初步的近似值 \bar{y}_{i+1} ,称为预测值,它的精度不高,再用梯形公式(5)对它

改进的欧拉公式

校正一次,即迭代一次,求得 y_{i+1} ,称为校正值,这种**预测-校正**方法称为改进的欧拉公式:

$$\begin{array}{l} \text{预测} \\ \text{校正} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \end{array} \right. \quad (10)$$
$$i=0,1,2,\dots,n-1$$

可以证明,公式(10)的精度为二阶。这是一种一步显式格式,它可以表示为嵌套形式。

改进的欧拉公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))] \quad (11)$$

或者表示成下列平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

改进欧拉算法的实现

6 改进欧拉法算法实现

(1) 计算步骤

① 输入 x_0, x_1, h, N

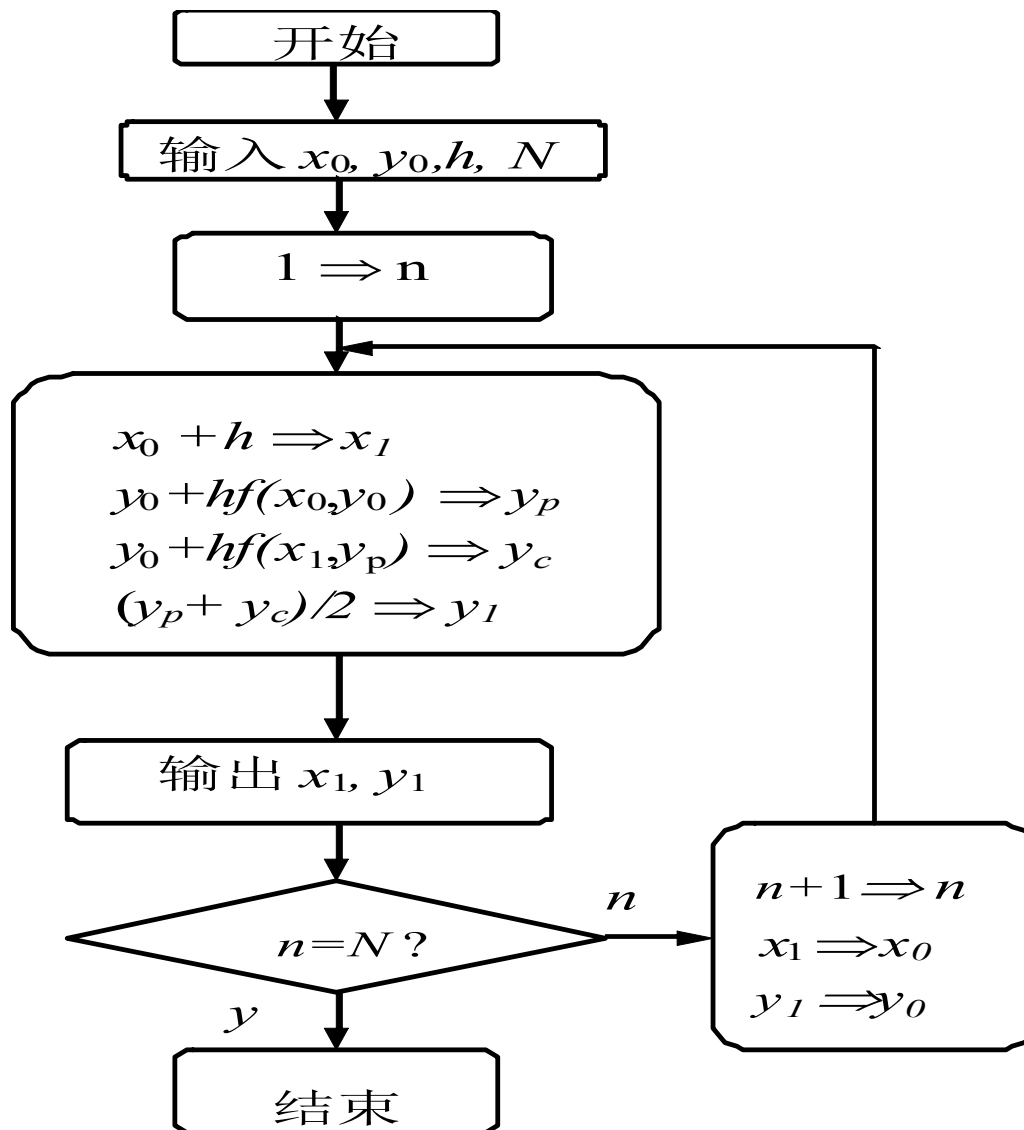
② 使用以下改进欧拉法公式进行计算

$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

③ 输出 x_1, y_1 , 并使 $x_1 \Rightarrow x_0, y_1 \Rightarrow y_0$
转到 ② 直至 $n > N$ 结束。

改进欧拉算法实现

(2) 改进欧拉法的流程图



例题

例2 用改进欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

区间为 $[0,1]$,取步长 $h=0.1$

解: 改进欧拉法的具体形式

$$\begin{cases} y_p = y_i + 0.1(y_i - \frac{2x_i}{y_i}) \\ y_c = y_i + 0.1(y_p - \frac{2x_{i+1}}{y_p}) \\ y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

本题的精确解为 $y(x) = \sqrt{1+2x}$,计算结果略。

例题

例3 对初值问题
$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

证明用梯形公式求得的近似解为

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^n \quad x = nh$$

并证明当步长 $h \rightarrow 0$ 时, y_n 收敛于精确解 e^{-x}

证明: 解初值问题的梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

例题

$$\because f(x, y) = -y$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$$

整理成显式 $y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n$ 反复迭代, 得到

$$y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^3 y_{n-2}$$

$$= \dots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

例题

$$\because y_0 = 1 \quad \therefore y_n = \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^n$$

由于 $x = nh$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{h}{2} \right)^{\left(-\frac{2}{h} \right) \left(-\frac{x}{2} \right)}}{\left(1 + \frac{h}{2} \right)^{\left(\frac{2}{h} \right) \left(\frac{x}{2} \right)}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-x}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} y_n = e^{-x}$$

证毕

§ 9.3 龙格-库塔方法

1 龙格-库塔(Runge-Kutta)法的基本思想

Euler公式可改写成

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hK_1 \\ K_1 = f(x_i, y_i) \end{cases}$$

则 y_{i+1} 的表达式 $y(x_{i+1})$ 与的Taylor展开式的前两项完全相同,即局部截断误差为 $O(h^2)$ 。

改进的Euler公式又可改写成

龙格-库塔法的基本思想

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_{i+1}, y_i + hK_1) \end{cases}$$

上述两组公式在形式上有一个共同点:都是用 $f(x,y)$ 在某些点上值的线性组合得出 $y(x_{i+1})$ 的近似值 y_{i+1} , 而且增加计算的次数 $f(x,y)$ 的次数, 可提高截断误差的阶。如欧拉公式: 每步计算一次 $f(x,y)$ 的值, 为一阶方法。改进欧拉公式需计算两次 $f(x,y)$ 的值, 它是二阶方法。它的局部截断误差为 $O(h^3)$ 。

龙格-库塔法的基本思想

于是可考虑用函数 $f(x,y)$ 在若干点上的函数值的线性组合来构造近似公式，构造时要求近似公式在 (x_i, y_i) 处的Taylor展开式与解 $y(x)$ 在 x_i 处的Taylor展开式的前面几项重合，从而使近似公式达到所需要的阶数。既避免求偏导，又提高了计算方法精度的阶数。或者说，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 这一步内多预报几个点的斜率值，然后将其加权平均作为平均斜率，则可构造出更高精度的计算格式，这就是龙格—库塔（Runge-Kutta）法的基本思想。

二阶龙格-库塔法

2 二阶龙格—库塔法

在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上取两点 x_i 和 $x_{i+p} = x_i + ph$, 以该两点处的斜率值 k_1 和 k_2 的加权平均(或称为线性组合)来求取平均斜率 k^* 的近似值 K , 即

$$K = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$$

式中: k_1 为 x_i 点处的切线斜率值, $k_1 = f(x_i, y_i) = y'(x_i)$

k_2 为 $x_i + ph$ 点处的切线斜率值, 比照改进的欧拉

法, 将 x_{i+p} 视为 x_{i+1} , 即可得

二阶龙格-库塔法

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + phk_1)$$

对常微分方程初值问题(1)式的解 $y=y(x)$, 根据微分中值定理, 存在点 $\xi \in (x_i, x_{i+1})$, 使得

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(\xi)(x_{i+1} - x_i)$$

也即
$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hK \quad (13)$$

式中
$$K = y'(\xi) = f(\xi, y(\xi))$$

K可看作是 $y=y(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的平均斜率。所以

二阶龙格-库塔法

可得计算公式为：

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hK \\ &= y(x_i) + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \end{aligned} \quad (14)$$

将 $y(x_i)$ 在 $x=x_i$ 处进行二阶Taylor展开：

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + O(h^3) \quad (15)$$

将 $k_2 = y'(x_i + ph) = f(x_i + ph, y_i + phk_1)$

在 $x=x_i$ 处进行一阶Taylor展开：

二阶龙格-库塔法

$$\begin{aligned}k_2 &= f(x_i, y_i) + ph \left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) \right] + O(h^2) \\&= y'(x_i) + ph \cdot y''(x_i) + O(h^2)\end{aligned}$$

将以上结果代入 (14) 得:

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) &= y(x_i) + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\&= y(x_i) + h \left\{ \lambda_1 y'(x_i) + \lambda_2 \left[y'(x_i) + ph \cdot y''(x_i) + O(h^2) \right] \right\} \\&= y(x_i) + h(\lambda_1 + \lambda_2) y'(x_i) + \lambda_2 ph^2 y''(x_i) + O(h^3) \quad (16)\end{aligned}$$

对式(15)和(16)进行比较系数后可知,只要

二阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 \cdot p = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (17)$$

有2阶
精度

成立,格式(14)的局部截断误差就等于 $O(h^3)$

式(17)中具有三个未知量,但只有两个方程,因而有无穷多解。若取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, 则 $p=1$, 这是无穷多解中的一个解, 将以上所解的值代入式(14)并改写可得

二阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1) \end{cases}$$

不难发现，上面的格式就是改进的欧拉格式。凡满足条件式（17）有一簇形如上式的计算格式，这些格式统称为**二阶龙格—库塔格式**。因此改进的欧拉格式是众多的二阶龙格—库塔法中的一种特殊格式。

二阶龙格-库塔法

若取 $\lambda_1 = 0$,则 $\lambda_2 = 1, p = \frac{1}{2}$, 此时二阶龙格-库塔法的计算公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

此计算公式称为变形的二阶龙格—库塔法。式中

$x_{i+\frac{1}{2}}$ 为区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的中点。



三阶龙格-库塔法

3 三阶龙格-库塔法

为了进一步提高精度，设除 x_{i+p} 外再增加一点

$$x_{i+q} = x_i + qh \quad (p \leq q \leq 1)$$

并用三个点 x_i , x_{i+p} , x_{i+q} 的斜率 k_1, k_2, k_3 加权平均得出平均斜率 k^* 的近似值，这时计算格式具有形式：

三阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h[(1-\lambda-\mu)k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3] \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + ph, y_i + phk_1) \end{cases} \quad (18)$$

为了预报点 x_{i+q} 的斜率值 k_3 , 在区间 $[x_i, x_{i+q}]$ 内有两个斜率值 k_1 和 k_2 可以用, 可将 k_1, k_2 加权平均得出 $[x_i, x_{i+q}]$ 上的平均斜率, 从而得到 $y(x_{i+q})$ 的预报值 y_{i+q}

$$y_{i+q} = y_i + qh[(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2]$$

于是可得 $k_3 = f(x_{i+q}, y_{i+q})$

三阶龙格-库塔法

运用Taylor展开方法选择参数 $p, q, \lambda, \mu, \alpha$,可以使格式(18)的局部截断误差为 $O(h^4)$,即具有三阶精度,这类格式统称为三阶龙格—库塔方法。下列是其中的一种,称为库塔(Kutta)公式。

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_{i+1}, y_i + h(-k_1 + 2k_2)) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases} \quad (19)$$



四阶龙格-库塔法

4 四阶龙格—库塔法

如果需要再提高精度，用类似上述的处理方法，只需在区间 $[x_i, x_{i+q}]$ 上用四个点处的斜率加权平均作为平均斜率 k^* 的近似值，构成一系列四阶龙格—库塔公式。具有四阶精度，即局部截断误差是 $O(h^5)$ 。

由于推导复杂，这里从略，只介绍最常用的一种四阶经典龙格—库塔公式。

四阶龙格-库塔法

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right. \quad (20)$$



四阶龙格-库塔法算法实现

5 四阶龙格—库塔法算法实现

(1) 计算步骤

① 输入 x_0, x_1, h, N

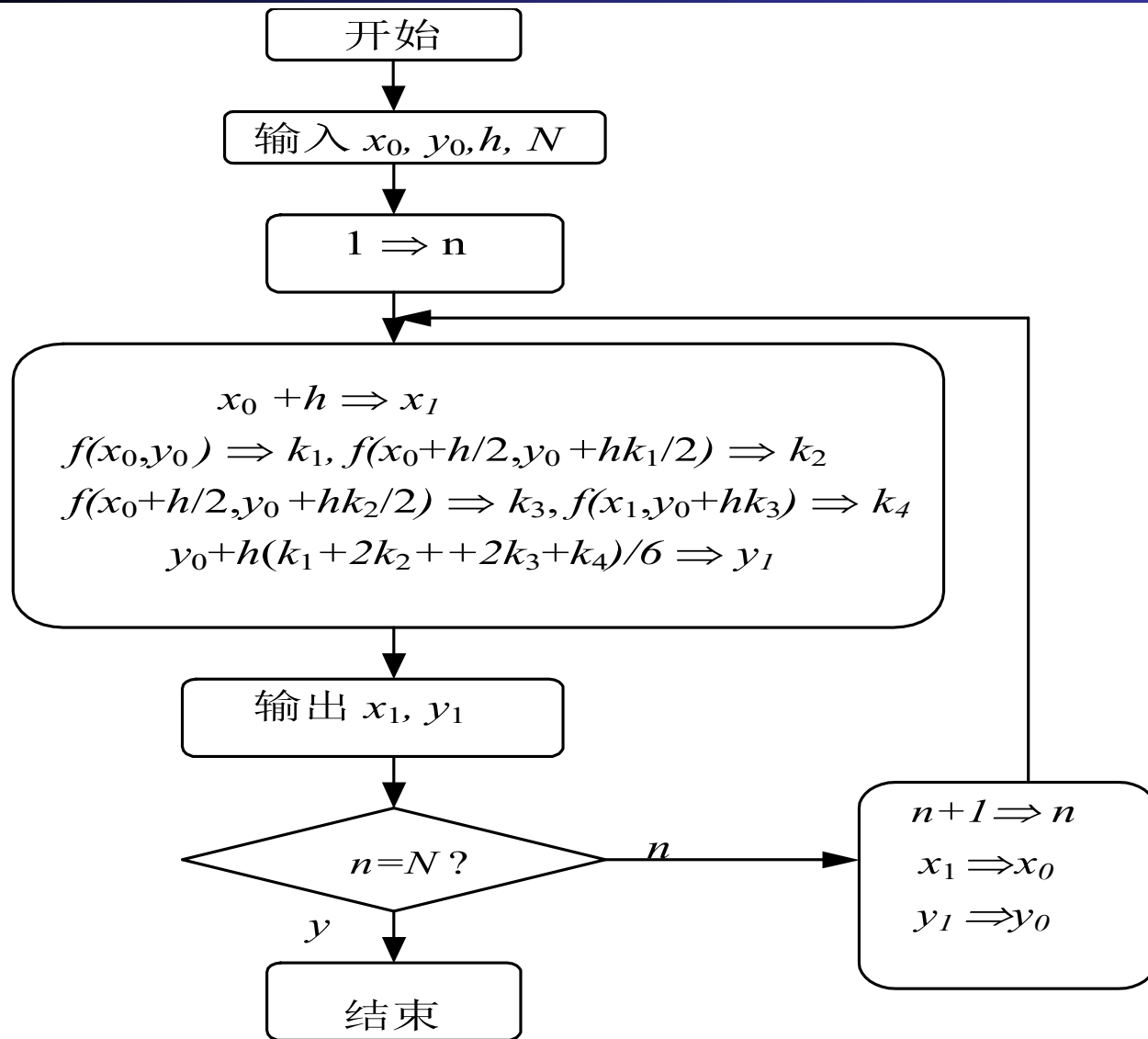
② 使用龙格—库塔公式 (20) 计算出 y_1

③ 输出 x_1, y_1 , 并使 $x_1 \Rightarrow x_0, y_1 \Rightarrow y_0$

转到 ② 直至 $n > N$ 结束。

四阶龙格-库塔法算法实现

② 四阶龙格-库塔算法流程图



例题

例4 取步长 $h=0.2$ ，用经典格式求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

解: $f(x, y) = 2xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$

由四阶龙格-库塔公式可得

$$k_1 = f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = f\left(x_{0+\frac{h}{2}}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(0.1, 1) \approx 0.2$$

$$k_3 = f\left(x_{0+\frac{h}{2}}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(0.1, 1.02) \approx 0.204$$

例题

$$k_4 = f(x_{0+h}, y_0 + hk_3) = f(0.2, 1.0408) \approx 0.41632$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 1.040811$$

可同样进行其余 y_i 的计算。本例方程的解为 $y = e^{x^2}$

龙格—库塔方法的推导基于Taylor展开方法，因而它要求所求的解具有较好的光滑性。如果解的光滑性差，那么，使用四阶龙格—库塔方法求得的数值解，其精度可能反而不如改进的欧拉方法。在实际计算时，应当针对问题的具体特点选择合适的算法。



变步长的龙格-库塔法

6 变步长的龙格-库塔法

在微分方程的数值解中，选择适当的步长是非常重要的。单从每一步看，步长越小，截断误差就越小；但随着步长的缩小，在一定的求解区间内所要完成的步数就增加了。这样会引起计算量的增大，并且会引起舍入误差的大量积累与传播。因此微分方程数值解法也有选择步长的问题。

以经典的四阶龙格-库塔法(20)为例。从节点 x_i 出发，先以 h 为步长求出一个近似值，记为 $y_{i+1}^{(h)}$ ，

变步长的龙格-库塔法

由于局部截断误差为 $O(h^5)$ ，故有

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(h)} \approx ch^5$$

当h值不大时，式中的系数c可近似地看作为常数。

然后将步长折半，即以为 $\frac{h}{2}$ 步长，从节点 x_i 出发，跨两步到节点 x_{i+1} ，再求得一个近似值 $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ ，每跨一步的截断误差是 $c\left(\frac{h}{2}\right)^5$ ，因此有

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i+1}^{(\frac{h}{2})}) \approx 2c\left(\frac{h}{2}\right)^5$$

变步长的龙格-库塔法

这样
$$\frac{y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(h)}} \approx \frac{1}{16}$$

由此可得
$$y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} \approx \frac{1}{15} (y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} - y_{i+1}^{(h)})$$

这表明以 $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ 作为 $y(x_{i+1})$ 的近似值，其误差可用步

长折半前后两次计算结果的偏差
$$\Delta = \left| y_{i+1}^{(\frac{h}{2})} - y_{i+1}^{(h)} \right|$$

来判断所选步长是否适当



变步长的龙格-库塔法

当要求的数值精度为 ε 时:

(1) 如果 $\Delta > \varepsilon$, 反复将步长折半进行计算, 直至 $\Delta < \varepsilon$ 为止, 并取其最后一次步长的计算结果作为 y_{i+1}

(2) 如果 $\Delta < \varepsilon$, 反复将步长加倍, 直到 $\Delta > \varepsilon$ 为止, 并以上一次步长的计算结果作为 y_{i+1} 。

这种通过步长加倍或折半来处理步长的方法称为变步长法。表面上看, 为了选择步长, 每一步都要反复判断 Δ , 增加了计算工作量, 但在方程的解 $y(x)$ 变化剧烈的情况下, 总的计算工作量得到减少, 结果还是合算的。

本章小结

本章介绍了常微分方程初值问题的基本数值解法。包括单步法和多步法。单步法主要有欧拉法、改进欧拉法和龙格—库塔方法。多步法是亚当姆斯法。它们都是基于把一个连续的定解问题离散化为一个差分方程来求解，是一种步进式的方法。用多步法求常微分方程的数值解可获得较高的精度。

实际应用时，选择合适的算法有一定的难度，既要考虑算法的简易性和计算量，又要考虑截断误差和收敛性、稳定性。

本章小结

龙格-库塔法较为常用，适用于多步方法中作初值计算和函数 $f(x,y)$ 较为简单的场合。四阶标准龙格—库塔法精度高，程序简单，易于改变步长，比较稳定，也是一个常用的方法，但计算量较大。当函数 $f(x,y)$ 较为复杂，可用显式亚当姆斯方法或亚当姆斯预测—校正方法，不仅计算量较小，稳定性也比较好，但不易改变步长。

一般采用龙格—库塔法提供初值 y_1, y_2, y_3 ，然后用亚当姆斯外推公式求得预测值 $y_{i+1}^{(0)}$ ，再由

本章小结

亚当姆斯内插值求得校正值 y_{i+1} ，如此求得的值近似程度好且节省计算量，是一种较好的方法。

本章习题



● 本章结束

