§ 6.2 拉格朗日插值

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\underbrace{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}_{l_0(x)}}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{\underbrace{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}_{l_1(x)}}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{\underbrace{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}_{l_2(x)}}y_2$$

$$\Downarrow$$

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

例1： 已知 $\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11,\sqrt{144}=12$ 分别用线性插值和二次插值求 $\sqrt{115}$ 的近似值。

解: (1) 线性插值

$$L_1(x)=\frac{x-121}{100-121}\cdot 10+\frac{x-100}{121-100}\cdot 11$$

$$\therefore \sqrt{115}\approx L_1(115)=\frac{115-121}{100-121}\cdot 10+\frac{115-100}{121-100}\cdot 11\approx 10.71429$$

(2) 二次插值

$$L_2(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\cdot 10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\cdot 11+\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\cdot 12$$

$$\therefore \sqrt{115}\approx L_2(115)\approx 10.7228$$

注： 这里线性插值只选取两个相近点。

§ 6.2 拉格朗日插值

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k$$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

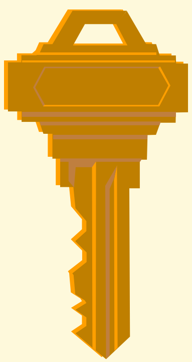
已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（°C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温

§ 6.3 牛顿插值(Newton's Interpolation)

Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需要重新计算。也就是说，**Lagrange** 插值不具有继承性。



能否重新在P_n中寻找新的基函数？

希望每加一个节点时，只在原有插值的基础上附加部分计算量（或者说添加一项）即可。

本讲主要内容:

- Newton插值多项式的构造
- 差商的定义及性质
- 差分的定义及性质
- 等距节点Newton插值公式

一、 基函数

问题1 求作 n 次多项式 $N_n(x)$

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \quad (1)$$

使满足 $N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots n \quad (2)$

为了使 $N_n(x)$ 的形式得到简化,引入如下记号

$$\varphi_0(x) \equiv 1$$

$$\varphi_i(x) = (x-x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}), \quad i = 1,2,\cdots n \quad (3)$$

Def 1: 由式(3)定义的n+1个多项式 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 称为Newton插值的以$x_0, x_1,\ldots, x_n$ 为节点的基函数, 即

$$N_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$$

可以证明,这样选取的基函数是线性无关的, 由此得出的问题1的解便于求值, 而且新增加一个节点 x_{n+1}时只需加一个新项 $c_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$ 即

$$N_{n+1}(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+c_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$$

而 $$\varphi_{n+1}(x)=(x-x_n)\varphi_n(x)$$

依据条件(2),可以依次确定系数 $c_0, c_1,\ldots, c_n$. 如:

取 $x=x_0$ 得 $c_0=N_n(x_0)=f(x_0)$

取 $x=x_2$ 得

$$N_n(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow$$

$$c_2=\frac{N_n(x_2)-c_0-c_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{f(x_2)-f(x_0)-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{f(x_2)-f(x_1)+\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_1-x_0)-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right]\Big/(x_2-x_0)$$

为了得到计算系数 c_i 的一般方法,下面引进差商的概念.

➢ 二、差商（亦称均差）/* divided difference */

Def 2: 给定$[a, b]$中互不相同的点 $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ 以及 $f(x)$在这些点处相应的函数值 $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots,$则

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

称为$f(x)$在x_0, x_1处的1阶差商

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

称为$f(x)$在x_1, x_2处的1阶差商

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

称为$f(x)$在x_0, x_1, x_2处的2阶差商

一般地，n 阶差商：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

差商的性质:

性质1 (差商与函数值的关系)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$$

证: 归纳法. 当k=1时, 有

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

结论成立.

设 $k = m$ -1 时, 结论成立. 则有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}] = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{m-1})}$$

$$f[x_1, x_2, \cdots, x_m] = \sum_{j=1}^{m} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_m)}$$

由差商的定义, 当$k=m$时, 有

$$f[x_0,x_2,\cdots,x_m]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_m]}{x_0-x_m}$$

$$=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-1})}\cdot\left(\frac{1}{x_j-x_0}-\frac{1}{x_j-x_m}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{x_0-x_m}+\frac{f(x_0)}{\omega'_{m+1}(x_0)}+\frac{f(x_m)}{\omega'_{m+1}(x_m)}=\sum_{j=0}^{m}\frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1}(x_j)}$$

所以$k=m$时结论成立, 由归纳假设知性质成立.

性质2 (对称性): 差商的值与结点排列顺序无关. 在n阶差商中任意调整节点的顺序, 差商的值不变.

$$f[x_i,x_j]=f[x_j,x_i]$$

$$f\left[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n\right]=f\left[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n\right]$$

性质3 (差商与导数的关系)

设 $f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数且, $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$,

则存在$\xi\in[a,b]$使得

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

提示: $g(x)=f(x)-\{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$g(x_0)=g(x_1)=\cdots g(x_n)=0$ **反复应用Rolle定理.**

性质4: (重节点差商) 若 $f(x)$在 x_i 处具有k 阶导数, 则有

$$f[\underbrace{x_i,x_i,\cdots,x_i}_{k+1}]=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_i)$$

性质5: (线性性) 若 $F(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$, α,β 为常数, 则有

$$F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\alpha f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+\beta g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

规定：一个点 x_0 的零阶差商为 $f(x_0)$.

例：设 $f(x)=x^7+x^4+3x-25$

求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 和 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$

差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	……	n 阶差商
x_0	$f[x_0]$					
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$				
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

例1： 已知信息 $f(0)=1, f(-1)=5, f(2)=-1$

构造 $f(x)$ 的插商表。

解： $f(x)$ 的插商表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶
0	1		
-1	5	-4	
2	-1	-2	1

例2： $f(x)$ 的插商表

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
1	1.25			
1.5	2.50	2.50		
0	1.00	1.00	1.50	
2	5.50	2.25	2.50	1.00

➢ 三、牛顿(Newton)插值公式

当n=1时：过两点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x_1, f(x_1))$ 的直线为

$$N_1(x) = y_0 + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

称为1次Newton插值多项式。

当n=2时：构造不超过 2 次的多项式:

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

易知$N_2(x)$满足插值条件：

$$N_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2$$

称之为2次Newton插值多项式。

推广到一般情形:

令

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

可证 $N_n(x)$ 满足插值条件:

$$N_n(x_i)=f(x_i)\,,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

称之为 n 次Newton插值多项式. 或称为Newton插值公式

注: 由Newton插值公式可以看出, 每当增加一个结点时, Newton插值多项式只在原有插值多项式的基础上增加一项, 克服了Lagrange插值不具备继承性的缺点.

差商推导Newton插值：(利用差商的定义)

$$\begin{cases} f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n] & \cdots\cdot \text{ }n-1 \end{cases}$$

① $+ (x-x_0) \times$ ② $+ \ldots\ \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \times$ $n-1$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}$$

$$+\underbrace{f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

Newton插值的余项： 由插值的唯一性或上述推导知

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

例3: 给定 $f(x)=\ln x$ 的数据表

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.78846	0.87547	0.95551	1.02962	1.09861

1. 构造差商表

2. 分别写出二次、四次Newton插值多项式

解: 差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶	四阶
2.20	0.78846				
2.40	0.87547	0.43505			
2.60	0.95551	0.40010	–0.087375		
2.80	1.02962	0.37055	–0.073875	0.02250	
3.00	1.09861	0.34495	–0.06400	0.01646	–0.00755

$$N_2(x) = 0.78846 + 0.43505\,(x - 2.20) - 0.087375\,(x - 2.20)(x - 2.40)$$

$$\begin{aligned}N_4(x) = {} & 0.78846 + 0.43505\,(x - 2.20) \\ & - 0.087375\,(x - 2.20)(x - 2.40) \\ & + 0.0225\,(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60) \\ & - 0.00755\,(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60)(x - 2.80)\end{aligned}$$

例4： 由函数表求Newton插值函数

x	-2	-1	0	1	3
y	-56	-16	-2	-2	4

解： $f(x_0)=-56$, $f[x_0,x_1]=40$, $f[x_0,x_1,x_2]=-13$

$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=2$, $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=0$

$$N_3(x)=-56+40(x+2)-13(x+2)(x+1)+2x(x+1)(x+2)$$

函数值的计算：秦九韶算法

$$N_3(x)=-56+(x+2)\{40-(x+1)[13+\underline{2x}]\}$$

例5： 推导计算公式 $P(n)=\sum_{k=1}^{n} k^3$

解：

1	1					
2	9	8				
3	36	27	19/2			
4	100	64	37/2	3		
5	225	125	61/2	4	1/4	
6	441	216	91/2	5	1/4	0
7	784	343	127/2	6	1/4	0

$$P(n)=1+8(n-1)+\frac{19}{2}(n-1)(n-2)+3(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$+\frac{1}{4}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

§ 6.4 等距节点插值公式

一、差分的概念及性质

Def 1: 设 $y_i = f(x_i)$ 为等距节点 $x_i = x_0 + ih\,(i = 0, 1, \cdots, n)$ 上的函数值, 其中 $h = (b-a)/n$ 称为步长, 则

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

和 $$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

分别称为 $f(x)$在 x_i 处以 h 为步长的一阶向前差分和一阶向后差分.

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i$$

和 $$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

分别称为 $f(x)$在 x_i 处以 h 为步长的二阶向前差分和二阶向后差分.

一般地

$$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$$

和

$$\nabla^m y_i = \nabla^{m-1} y_i - \nabla^{m-1} y_{i-1}$$

分别称为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的 m 阶向前差分和 m 阶向后差分. Δ, ∇ 称为差分算子.

差分的性质

Prop1: 各阶差分可用函数值线性表示, 其计算公式为

$$\Delta^m y_i = y_{m+i} - C_m^1 y_{m+i-1} + C_m^2 y_{m+i-2} - \cdots + (-1)^s C_m^s y_{m+i-s} + \cdots + (-1)^m y_i$$

其中 C_m^s 为组合数, 即 $$C_m^s = \frac{m(m-1)\cdots(m-s+1)}{s!}$$

Prop2: 差分与差商的关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} = \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}$$

Prop3: 差分与导数的关系

$$\Delta^n y_0 = h^n f^{(n)}(\xi) \qquad \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x_n \text{ 之间}$$

$$\nabla^n y_n = h^n f^{(n)}(\xi) \qquad \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x_n \text{ 之间}$$

向前差分表

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\cdots\ \cdots$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0				
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$

二、等距节点插值

当插值节点 $x_0,\ldots,x_n$ 为等距分布时, Newton插值公式可以简化.

给定等距节点 $x_i = x_0 + ih\ (i = 0,1,\cdots,n)$ 后, 将差分与差商的关系式代入Newton插值多项式, 可得

$$\boxed{\begin{aligned} N_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}}$$

令 $x = x_0 + th,\ t > 0$, 则有

$$\boxed{N_n(x_0+th) = f(x_0) + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0}$$

称为Newton前插多项式, 或Newton前插公式.

二、等距节点插值

令 $x = x_0 + th$, $t > 0$ ，则有

$$\boxed{N_n(x_0+th) = f(x_0) + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0}$$

称为Newton前插多项式, 或Newton前插公式.

Newton前插公式的余项

$$R_n(x_0+th) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

向前差分表

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\cdots\cdots$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0				
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$

类似地, 如果要求 x_n 附近的某点 x 的函数值, 设 $x_{n-1} < x < x_n$, 记 $x = x_n + t\,h$ $(-1 < t < 0)$, 则有

$$N_n(x_n + th) = f(x_n) + t\nabla y_n + \frac{t(t-1)}{2!}\nabla^2 y_n + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\nabla^n y_n$$

称为Newton 后插公式 . 其余项为

$$R_n(x) = R_n(x_n - th) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(-1)^{n+1}h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)$$

$$x_0 < \xi < x_n, \quad 0 < t < 1$$

注: 若要计算的插值点 x 较靠近点 x_0, 则用向前插值公式 , 这时 $t = (x - x_0)/n$ 的值较小, 数值稳定性较好. 反之, 若 x 靠近 x_n, 则用向后插值公式 .

向前差分表

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\cdots\ \cdots$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0				
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$

向前与向后差分的关系

$$\nabla y_n = \Delta y_{n-1}, \nabla^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2}, \cdots, \nabla^n y_n = \Delta^n y_0$$

故后插公式又可表示成:

$$N_n(x) = N_n(x_n - th) = y_n - t\Delta y_{n-1} + (-1)^2 \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

注: 计算靠近 x_0 或 x_n 的点的值时, 都只需构造向前差分表 .

向前差分表

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\cdots\ \cdots$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0				
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$

例: 给定 $f(x)$在等距节点上的函数值表如下:

x_i	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.5	1.8	2.2	2.8

分别用Newton向前和向后差分公式，求 $f(0.5)$ 及 $f(0.9)$的近似值.

解: 先构造向前差分表如下:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.4	1.5			
0.6	1.8	0.3		
0.8	2.2	0.4	0.1	
1.0	2.8	0.6	0.2	0.1

$x_0 = 0.4$, $h = 0.2$, $x_3 = 1.0$. 分别用差分表中对角线上的值和最后一行的值, 得Newton向前和向后插值公式如下:

$$N_3(0.4+0.2t)=1.5+0.3t+\frac{t(t-1)}{2}\times 0.1+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\times 0.1 \quad (1)$$

$$N_3(1-0.2t)=2.8-0.6t+\frac{t(t-1)}{2}\times 0.2-\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\times 0.1 \quad (2)$$

当 x=0.5 时, 用公式(1) , 这时 $t=(x-x_0)/h=0.5$. 将 $t=0.5$ 代入(1), 得

$$f(0.5)\approx N_3(0.5)=1.64375.$$

当 x=0.9 时, 用公式(2), 这时 $t=(x_3-x)/h=0.5$. 将 $t=0.5$ 代入(2), 得

$$f(0.9)\approx N_3(0.9)=2.46875.$$

§6.5 分段低次插值

一、龙格现象与分段线性插值

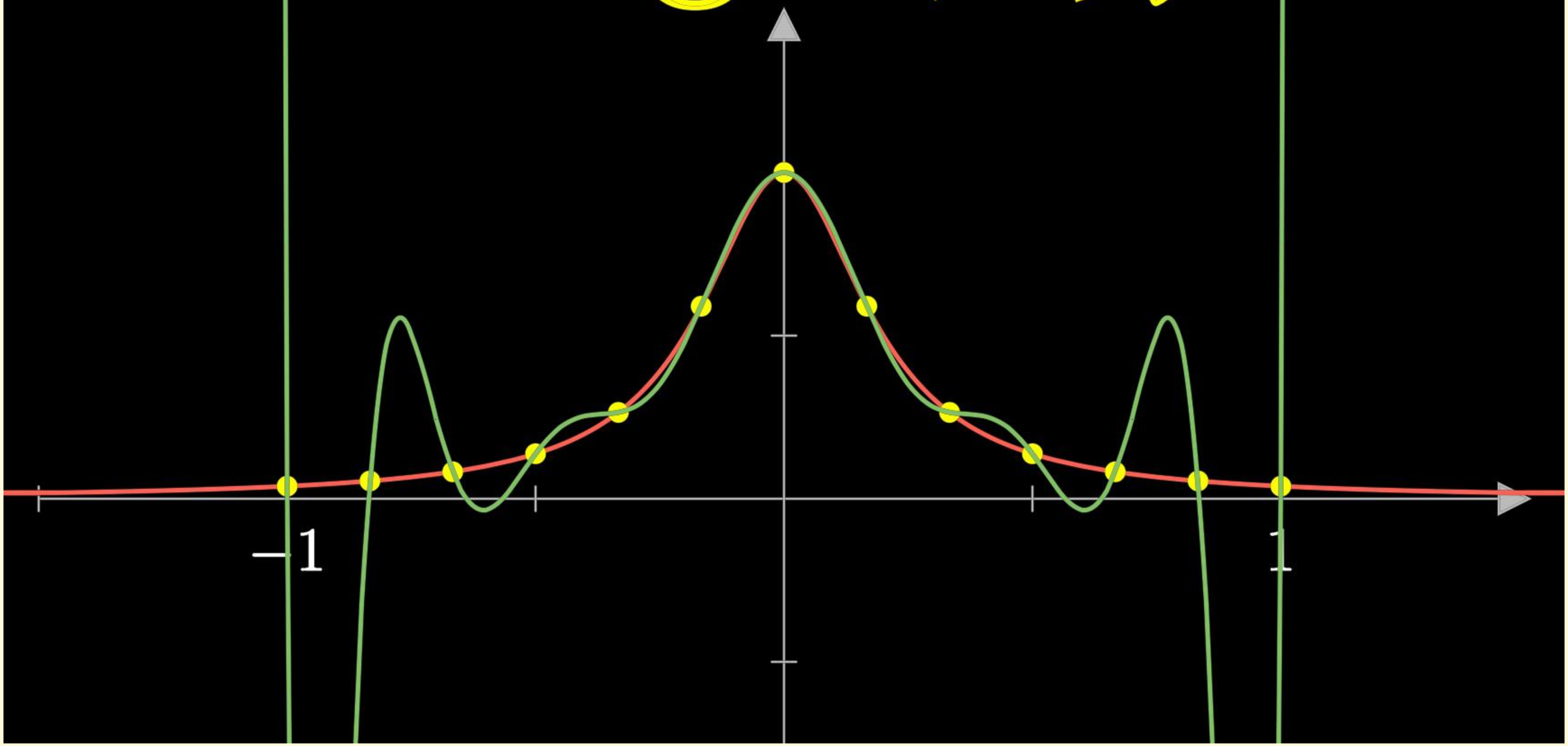
利用插值多项式逼近连续函数时 $y=f(x)$ 时, 并非插值多项式的次数越高越好. 因为当插值多项式的次数较高时, 给自变量一个小的扰动, 就可能引起函数值较大的变化, 从而使得截断误差很大. 这种现象称为龙格现象.

例如：对于连续函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ，在区间 $[-5,5]$ 上取等距插值节点

$$x_i=-1+\frac{10}{n}\cdot i\,,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

当 $n=10$ 时, 10次插值多项式 $L_{10}(x)$ 以及函数 $f(x)$ 的图形见 P_{185}

Runge 现象



由此可见, $L_{10}(x)$的截断误差$R_{10}(x)=f(x)-L_{10}(x)$在区间 $[-5,5]$ 的两端非常大. 这种现象称为**Runge现象**. 不管n 取多大, Runge现象依然存在. 避免Runge现象的方法之一就是采用分段低次插值. 最简单的就是分段线性插值.

分段线性插值

$$I_h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1), & x\in[x_0,x_1]\\ \dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2), & x\in[x_1,x_2]\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots & \\ \dfrac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}f(x_{n-1})+\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}f(x_n), & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

Def: 设函数 $f(x)\in C[a,b], n+1$ 个有序插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 满足

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

称之为区间[*a* , *b*]的一个划分。其中 x_0 和 x_n 称为边界点，$x_1,\cdots,x_{n-1}$ 称为内节点。记子区间的最大长度

$$h=\max_{0\le i\le n-1}\{x_{i+1}-x_i\}$$

则称分段线性函数

$$I_h(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,l_i(x)$$

为*f* (*x*) 在区间[*a* , *b*]上关于划分 Δ 的分段线性插值多项式。其中，插值基函数

$$l_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}), & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (x-x_{i+1})/(x_i-x_{i+1}), & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, & \text{其他}\,x\end{cases}\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

当$i=0$时没有第1式，当$i=n$ 时没有第2式。

几何意义：以每两个相邻节点为插值点构造一次插值(即直线段), 用各直线段所连成的折线近似代替曲线 $y=f(x)$.

误差估计：若 $f(x)$ 在插值区间$[a , b]$上二阶导数连续，并记 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$，则分段线性插值的余项有如下估计式：

$$|f(x)-I_h(x)|\le\frac{1}{8}M_2h^2,\quad \forall x\in[a,b]$$

二、分段二次插值

设 $f(x)\in C^3[a,b]$, 已知 $f(x)$在节点

$$a=x_0<x_{\frac{1}{2}}<x_1<x_{1+\frac{1}{2}}<x_2<\cdots<x_{n-\frac{1}{2}}<x_n=b$$

上的函数值 $f(x_0),f(x_{\frac{1}{2}}),\cdots,f(x_i),f(x_{i+\frac{1}{2}}),\cdots,f(x_n)$. 在区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$ 上采用二次插值 $P_2^{(i)}(x)$, 此时插值节点为

$x_{i-1},x_{i-\frac{1}{2}},x_i$

$$P_2^{(i)}(x)=\frac{(x-x_{i-\frac{1}{2}})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_{i-\frac{1}{2}})(x_{i-1}-x_i)}f(x_{i-1})+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i-\frac{1}{2}}-x_{i-1})(x_{i-\frac{1}{2}}-x_i)}f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

$$+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})}f(x_i),\quad x\in[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$$

截断误差

$$R_2^{(i)}(x)=f(x)-P_2^{(i)}(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})(x-x_i)$$

若节点等距, 记 $h=x_i-x_{i-1}$, 则

$$x_{i-\frac{1}{2}}=x_{i-1}+\frac{h}{2},x_i=x_{i-1}+h$$

设 $x=x_{i-\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\cdot s\quad s\in[-1,1],\ x\in[x_{i-1},x_i]$

则

$$P_2^{(i)}(x)=P_2^{(i)}(x_{i-\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\cdot s)$$

$$=\frac{s(s-1)}{2}f(x_{i-1})-(s-1)(s+1)f(x_{i-\frac{1}{2}})+\frac{s(s+1)}{2}f(x_i)$$

此时 $R_2^{(i)}(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot\frac{h^3}{8}(s-1)s(s+1)$，$s\in[-1,1]$, $\xi\in[x_{i-1},x_i]$

若 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f'''(x)|=M_3$

则 $|R_2^{(i)}(x)|\le\frac{M_3h^3}{48}|(s-1)s(s+1)|\le\frac{\sqrt{3}}{216}M_3h^3$, $(i=1,2,\cdots,n)$

$$\Rightarrow P_2^{(i)}(x)\to f(x)\quad(h\to 0)$$

例: 已知 $y=f(x)$ 的观测数据如下

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-1	-5	3	1	2	4	8

求分段线性插值和分段二次插值 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$.

§6. 6 Hermite 插值

分段线性插值简单易操作, 但插值曲线不光滑, 即在内节点处一节导数不连续, 这种情况往往不能满足实际应用的需要. 为了克服这一缺陷, 通常添加一阶导数作为插值条件 .

一、 两个节点的情形:

设 x_0, x_1为插值节点， $x_0 < x_1$，且已知

$$y_k = f(x_k),\ m_k = f'(x_k) \quad k = 0,1$$

在区间$[x_0, x_1]$上求多项式 $H(x)$，使得满足插值条件

$$H(x_k) = y_k,\ H'(x_k) = m_k \quad k = 0,1$$

由于有4个条件，所以$H(x)$应为次数不超过3次的多项式，称为Hermite三次插值。

定理1： 设 $f(x)\in C^1[x_0,x_1]$，则在区间$[x_0,x_1]$上满足插值条件

$$H(x_k)=y_k\ ,\ H'(x_k)=m_k\quad k=0,1$$

的不超过3次的多项式$H(x)$存在且唯一，并可构造如下：

$$H(x)=\alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)m_0+\beta_1(x)m_1$$

其中插值基函数 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 为三次多项式

$$\begin{cases}\alpha_0(x)=\left(1+2\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,\ \beta_0(x)=(x-x_0)\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2\\ \alpha_1(x)=\left(1+2\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2,\ \beta_1(x)=(x-x_1)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2\end{cases}$$

如果 $f(x)\in C^4[x_0,x_1]$，则插值余项为

$$R(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ ,\ \forall x\in[x_0,x_1]$$

其中 ξ_x 在 x_0 与 x_1 之间。

插值基函数的性质:

$$\alpha_i(x_k)=\begin{cases}1, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}, \quad \alpha_i'(x_k)=0 \quad i,k=0,1$$

$$\beta_i(x_k)=0, \quad \beta_i'(x_k)=\begin{cases}1, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases} \quad i,k=0,1$$

插值函数的唯一性:

设$H(x)$和$\tilde{H}(x)$都是满足插值条件的不超过3次的Hermite插值多项式，则$P(x)=H(x)-\tilde{H}(x)$ 是不超过3次的多项式，且满足

$$P(x_k)=P'(x_k)=0, \; k=0,1$$

这说明 x_0 和 x_1 都是$P(x)$的二重根，从而$P(x)$为4次多项式，这是不可能的。

二、 一般情形的Hermite 插值（二重Hermite 插值）

对于函数 $f(x)\in C^1[a,b]$, 已知 $f(x)$在$[a, b]$上n+1个互异节点处的函数值 $f(x_i)=y_i$ 及导数值 $f'(x_i)=m_i$, 求一个次数不超过 2n+1次的多项式 $H_{2n+1}(x)$, 使之满足插值条件:

$$\left.\begin{aligned} H_{2n+1}(x_k)&=f(x_k) \\ H'_{2n+1}(x_k)&=f'(x_k) \end{aligned}\right\}, \qquad k=0,1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

由于插值条件有2n+2个, 所以插值多项式不超过2n+1次. 并且易知这种插值多项式是存在唯一的.

插值基函数: 借助于Lagrange插值基函数

设 $\alpha_j(x),\beta_j(x)\ (j=0,1,\cdots,n)$ 为次数不超过 2n+1 的多项式, 且满足

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j(x_i)&=\delta_{ij}\ ,\ \alpha'_j(x_i)=0 \\ \beta_j(x_i)&=0\ ,\ \beta'_j(x_i)=\delta_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (i,j=0,1,\cdots,n) \qquad (2)$$

则 $\alpha_j(x), \beta_j(x)\ (j=0,1,\cdots,n)$ 称为插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的插值基函数.

满足插值条件(1)的Hermite插值多项式可写成基函数的线性组合

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(x) y_k + \beta_k(x) m_k]$$

由条件(2), 显然有

$$H_{2n+1}(x_k) = y_k, H'_{2n+1}(x_k) = m_k \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

下面求满足条件(2)的基函数 $\alpha_j(x), \beta_j(x)\ (j=0,1,\cdots,n)$

由 $\alpha_j(x_i) = 0, \alpha'_j(x_i) = 0\ (i \neq j)$

令 $\alpha_j(x) = (a_j x + b_j)[l_j(x)]^2$ ，这里 a_j, b_j 为待定常数.

由条件(2)知, 在 $x = x_j$ 处有 $\begin{cases} a_j x_j + b_j = 1 \\ a_j + 2(a_j x_j + b_j) l'_j(x_j) = 0 \end{cases}$

解得

$$a_j = -2l_j'(x_j) = -2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}$$

$$b_j = 1 + 2x_j l_j'(x_j) = 1 + 2x_j \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}$$

于是 $\alpha_j(x) = [1 - 2(x - x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}]l_j^2(x) \quad j = 0,1,\cdots,n$

类似地, 由 $\beta_j(x_i) = 0,\ \beta_j'(x_i) = 0\ (i \neq j)$

令 $\beta_j(x) = (c_j x + d_j)[l_j(x)]^2$,这里 c_j, d_j 为待定常数.

由条件(2)知, 在 $x = x_j$ 处有 $\begin{cases} c_j x_j + d_j = 0 \\ c_j + 2(c_j x_j + d_j)l_j'(x_j) = 1 \end{cases}$

解得 $c_j = 1, d_j = -x_j$

于是 $\beta_j(x)=(x-x_j)l_j^2(x) \quad (j=0,1,\cdots,n)$

因此Hermite插值多项式为:

$$H_{2n+1}=\sum_{j=0}^{n}[1-2(x-x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}]l_j^2(x)y_j+\sum_{j=0}^{n}(x-x_j)l_j^2(x)m_j$$

说明: (1) 类似于两节点情形, 可以得到一般情形Hermite插值多项式的唯一性.

(2) 类似于Lagrange插值余项的讨论, 有Hermite插值多项式的余项

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)\,,\xi\in(a,b)$$

(3) 几何意义: 曲线 $y=H_{2n+1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 在插值节点处有公共切线.

(4) 特例: n=1是, 即为前面介绍的两节点Hermite插值 .

Hermite插值多项式的求法1：（一般情形的Hermite插值）

(1) 直接利用公式；

(2) 待定系数法；

(3) 利用插商表。

Prop: $f[\underbrace{x_0, x_0, \cdots, x_0}_{n+1}] = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

例1: **求不超过3次的多项式 $H(x)$，使之满足插值条件：**

$$H(-1) = -9,\ \ H'(-1) = 15,\ \ H(1) = 1,\ \ H'(1) = -1$$

解： **(1) 公式法**

令 $x_0 = -1, x_1 = 1, y_0 = -9, y_1 = 1, m_0 = 15, m_1 = -1$

则

$$\alpha_0(x) = \left(1 + 2\frac{x+1}{1+1}\right)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right)^2 = \frac{(x+2)(x-1)^2}{4},$$

$$\alpha_1(x) = \left(1 + 2\frac{x-1}{-1-1}\right)\left(\frac{x+1}{1+1}\right)^2 = \frac{(2-x)(x+1)^2}{4},$$

$$\beta_0(x)=(x+1)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right)^2=\frac{(x+1)(x-1)^2}{4},$$

$$\beta_1(x)=(x-1)\left(\frac{x+1}{1+1}\right)^2=\frac{(x-1)(x+1)^2}{4}$$

$$\therefore\ H(x)=\alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)m_0+\beta_1(x)m_1$$

$$=x^3-4x^2+4x$$

(2) 待定系数法

令 $H(x)=a+bx+cx^2+d\,x^3$ ，由条件可得：

$$\begin{cases} a-b+c-d=-9, \\ a+b+c+d=1, \\ b-2c+3d=15, \\ b+2c+3d=-1. \end{cases}$$

解得：$a=0,b=4,c=-4,d=1$

$$\therefore\ H(x)=x^3-4x^2+4x$$

(3) **插商表**

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
-1	-9			
-1	-9	15		
1	1	5	-5	
1	1	-1	-3	1

$$\therefore\ H(x) = -9 + 15(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^2(x-1)$$

$$= x^3 - 4x^2 + 4x$$

三、 特殊情形的Hermite 插值

在带导数的插值问题中, 有时插值条件中的函数值个数与导数值个数不相等, 为特殊情形的Hermite插值.

如：给定函数表如下

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	y_0	y_1	y_2
$f'(x)$	m_0	m_1	

求次数不高于4 的多项式 $H_4(x)$, 使之满足:

$$\begin{cases} H_4(x_i) = y_i & (i = 0,1,2) \\ H_4'(x_i) = m_i & (i = 0,1) \end{cases}$$

Hermite插值多项式的求法2：(特殊情形的Hermite插值,即插值条件中函数值个数和导数值个数不相等)

(1) 待定系数法(Newton插值多项式或一般情形的Hermite插值多项式为基础);

(2) 利用插商表。

1^0 以Newton插值多项式为基础

设 $$H_4(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + (Ax + B)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

其中***A*, *B***为待定系数. 显然 $H_4(x_i) = y_i \ (i = 0, 1, 2)$

由条件 $H_4'(x_i) = m_i \ (i = 0, 1)$ 求得常数 ***A*, *B***后, 便可得 $\boldsymbol{H_4(x)}$.

2^0 以一般情形的Hermite插值多项式为基础

设 $$H_4(x) = H_3(x) + C(x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

其中C为待定系数，$H_3(x)$为满足

$$H_3(x_i)=y_i,\ H_3'(x_i)=m_i(i=0,1)$$

的次数不高于3 的Hermite 插值多项式. 显然

$$H_4(x_i)=y_i,\ H_4'(x_i)=m_i\quad(i=0,1)$$

由条件$H_4(x_2)=y_2$求得 C 后, 便可得$H_4(x)$.

3^0 类似于一般情形, 利用差商表可得相应插值多项式

设

例2：求不超过4次的多项式 $P(x)$，使之满足插值条件：

$$P(0)=P'(0)=0,\ P(1)=P'(1)=1,\ P(2)=1$$

解：(1) 待定系数法　可得：

$$P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2$$

(2) 插商表

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶	四阶
0	0	1			
0	0	0			
1	1	1	1		
1	1	1	0	–1	
2	1	0	–1	–1/2	1/4

$$\therefore\ P(x)=0+0\cdot(x-0)+(x-0)^2-(x-0)^2(x-1)+\frac{1}{4}(x-0)^2(x-1)^2$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2$$

例3: 已知 $f(0)=1, f'(0)=2,\ f(1)=3,\ P(2)=4$ ，求$H_3(x)$.

解： **(1) 待定系数法**

设 $H_3(x)=a+bx+cx^2+d\,x^3$ ，代入条件，可得：

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b+c+d=3 \\ a+2b+4c+8d=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1/4 \\ d=-1/4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad H_3(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x+1$$

(2) 构造插商表

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
0	1			
0	1	2		
1	3	2	0	
2	4	1	$-1/2$	$-1/4$

$$\therefore\ H_3(x)=1+2(x-0)+0\cdot(x-0)^2-\frac{1}{4}(x-0)^2(x-1)$$

$$=-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x+1$$

四　分段Hermite 插值

Def： 设函数 $f(x)\in C^1[a,b]$，对于划分

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

记 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1}\{x_{i+1}-x_i\}$，且

$$y_i=f(x_i),\ m_i=f'(x_i),\ i=0,1,2,\cdots,n$$

则称分段三次函数

$$H_3(x)=\alpha_i(x)y_i+\alpha_{i+1}(x)y_{i+1}+\beta_i(x)m_i+\beta_{i+1}(x)m_{i+1}$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,1,2,\cdots,n-1$$

为 $f(x)$在区间$[a, b]$上关于划分 Δ 的分段Hermite三次插值多项式。其中插值基函数如下确定：

$$\begin{cases} \alpha_i(x)=\left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2, \ \beta_i(x)=(x-x_i)\left(\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 \\ \alpha_{i+1}(x)=\left(1+2\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2, \ \beta_{i+1}(x)=(x-x_{i+1})\left(\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 \end{cases}$$

由定理1可知，$H_3(x)$满足边界条件：

$$\begin{cases} H_3(x_0)=y_0, \ H_3'(x_0)=m_0 \\ H_3(x_n)=y_n, \ H_3'(x_n)=m_n \end{cases}$$

以及内节点的衔接条件：

$$\begin{cases} H_3(x_i-0)=H_3(x_i+0)=y_i, \\ H_3'(x_i-0)=H_3'(x_i+0)=m_i \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

若 $|f^{(4)}(x)| \le M_4, x \in [a,b]$ ，则有

$$|R_3(x)| \le \frac{M_4}{384} h^4$$

故 $H_3(x) \to f(x) \quad (h \to 0)$

注：分段线性插值不能保证在插值节点处的光滑性；分段二次插值不能保证在 $x_i \ (i = 0, 1, \cdots, n)$ 处的光滑性；分段三次插值能够保证插值节点处的光滑性，但在节点处的凹凸性不能保证与 $f(x)$ 相同。