Ch.3 离散数据的曲线拟合

引言 曲线拟合问题

仍然是已知 $x_1 \ldots x_m$; $y_1 \ldots y_m$, 求一个简单易算的近似函数 $P(x)$ 来拟合这些数据。

但是 ① m 很大;

② y_i 本身是测量值，不准确，即 $y_i \neq f(x_i)$

这时没必要取 $P(x_i) = y_i$, 而要使 $\rho_i = P(x_i) - y_i$ 总体上尽可能地小。

称为“残差”

这种构造近似函数 的方法称为曲线拟合， $P(x)$ 称为拟合函数

"使 $\rho_i = P(x_i) - y_i$ 尽可能地小" 有不同的准则

常见做法：

较复杂，

- 使 $\max\limits_{1 \le i \le m} |P(x_i) - y_i|$ 最小

- 使 $\sum\limits_{i=1}^{m} |P(x_i) - y_i|$ 最小

- 使 $\sum\limits_{i=1}^{m} |P(x_i) - y_i|^2$ 最小

不可导，求解困难

一　最小二乘法求解矛盾方程组

设线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \quad 或 \quad Ax = b \qquad \textbf{(1)}$$

其中

$$A = (a_{ij})_{N\times n}, \; x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \; b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

当线性方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵的秩不相等时, 方程组无解, 这时称方程组为矛盾方程组.

一　最小二乘法求解矛盾方程组

引理1: 设 n 元实函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的某个邻域内连续, 且有一阶连续偏导数, 若

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{P_0}=0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$

(2) 矩阵

$$M=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_{P_0} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\Big|_{P_0} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\Big|_{P_0} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\Big|_{P_0} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_{P_0} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\Big|_{P_0} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\Big|_{P_0} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\Big|_{P_0} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\Big|_{P_0} \end{pmatrix}$$

是正定(负定) 矩阵.

则 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极小(极大) 值.

引理2：设非齐次线性方程组(1) 的系数矩阵 A：$r(A)=n$，则

(1) 矩阵 $A^T A$ 是对称正定矩阵;

(2) n阶线性方程组 $A^T Ax = A^T b$ 有唯一解.

证：(1) 显然 $A^T A$ 是对称矩阵

因为 $r(A)=n$，所以$Ax=0$有唯一零解，故 $\forall x \neq 0$ 有 $Ax \neq 0$

于是 $(Ax)^T Ax = x^T (A^T A)x > 0$，因此 $A^T A$ 是正定矩阵.

(2) 因为 $A^T A$是正定矩阵，所以 $r(A^T A) = n$.

故 $A^T Ax = A^T b$ 有唯一解

说明：引理2 说明在$r(A)=n$的条件下，无论方程组(1)是否有解，n阶方程组 $A^T Ax = A^T b$ 都有唯一解.

矛盾方程组在某种意义下的解:

由于矛盾方程组(1)的精确解不存在, 故转化为寻求某种意义下的解.

令 $$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

称 δ_i 为偏差

工程中许多问题归结为偏差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)^2$$

达到最小, 这一条件称为最小二乘原则. 按最小二乘原则选择未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一组取值的方法称为求解矛盾方程组的最小二乘法. 符合条件的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一组取值称为矛盾方程组的最小二乘解.

将Q看作关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的$\boldsymbol{n}$ 元二次函数, 记为

$$Q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

求(1)的最小二乘解就是求该二次函数的最小值点.

Th1. 设矛盾方程组(1)的系数矩阵 A的秩为$\boldsymbol{n}$, 则二次函数

$$Q = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i)^2$$

必存在最小值, 且方程组 $A^T A x = A^T b$ 的解就是其最小值点.

证：*Q*为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **的二次函数, 且有连续的1、2阶偏导数.**

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 2a_{1k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - b_1\right) + 2a_{2k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j - b_2\right) + \cdots + 2a_{Nk}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{Nj}x_j - b_N\right)$$

$$= 2(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{Nk})\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j - b_2 \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{Nj}x_j - b_N \end{pmatrix} = 2(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{Nk})(Ax - b)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial Q}{\partial x_n}\right)^T = 2A^T(Ax - b) = 2(A^TAx - A^Tb)$$

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x_k} = 0, (k = 1, 2, \cdots, n)$ 即 $A^T Ax = A^T b$

由引理 **2** 知 $A^T Ax = A^T b$ 有唯一解, 设为 $x_1 = a_1, \cdots, x_n = a_n$

记 $P_0(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ，二元函数 $\boldsymbol{Q}$ 存在 $\boldsymbol{P_0}$, 使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}\Big|_{P_0} = 0, (k = 1, 2, \cdots, n)$$

故满足引理**1**的条件 **(1)** .

又 $$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_k \partial x_t} = 2(a_{1k}a_{1t} + a_{2k}a_{2t} + \cdots + a_{Nk}a_{Nt}) = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{it}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} a_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{N} a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} a_{i1}a_{in} \\ \sum_{i=1}^{N} a_{i1}a_{i2} & \sum_{i=1}^{N} a_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} a_{i2}a_{in} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{N} a_{i1}a_{in} & \sum_{i=1}^{N} a_{i2}a_{in} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} a_{in}^2 \end{pmatrix} = 2A^T A$$

由引理 2 知 M 正定, 故满足引理 1 的条件 (2) , 所以Q 存在极小值. 又方程组 $A^T Ax = A^T b$ 有唯一解, 所以Q 的极小值即为最小值. 方程组 $A^T Ax = A^T b$ 的解就是最小值点.

线性方程组 $A^T Ax = A^T b$ 称为正则方程组

说明: Th1说明只要矛盾方程组(1)的系数矩阵 A的秩为n，则

① 矛盾方程组(1)的最小二乘解存在;

② 正则方程组有唯一解, 此解就是矛盾方程组 (1) 的最小二乘解.

例1: 求下列矛盾方程组的最小二乘解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解: 因为$r(A)$=3, 所以最小二乘解存在. 正则方程组为:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{7}{4}, x_3 = 3$$

二 线性模型和最小二乘拟合

Def: 对于已知的 $m+1$ 对离散数据 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{m}$，记

$$a = \min_{0 \le i \le m}\{x_i\}, \quad b = \max_{0 \le i \le m}\{x_i\}$$

在连续函数空间 $C[a,b]$ 中选定 $n+1$ 个线性无关的基函数 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$，并记由它们生成的子空间为：

$$\Phi = \operatorname{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

$$= \{\varphi(x) \mid \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \ \forall\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in R\}$$

若有 $\varphi^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^* \varphi_k(x) \in \Phi$ 使得

$$\sum_{i=0}^{m}[y_i - \varphi^*(x_i)]^2 = \min_{\varphi(x)\in\Phi} \sum_{i=0}^{m}[y_i - \varphi^*(x_i)]^2 \qquad (1)$$

则称 $\varphi^*(x)$ 为离散数据 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{m}$ 在子空间 Φ 中的最小二乘拟合。

对于选定的基函数 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ ，定义中的拟合曲线即拟合模型 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$，是待定参数 $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n}$ 的线性函数，故称之为线性最小二乘问题。

由于 $$\varphi(x_i)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x_i)\,,\quad i=0,1,2,\cdots,m$$

记： $$I(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=0}^{m}[y_i-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x_i)]^2$$

则最小二乘问题，即求极小值问题 **(1)** 的解 $\varphi^*(x)$ ，也就是求多元二次函数 $I(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的极小值点 $(\alpha_0^*,\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*)$ ，使得：

$$I(\alpha_0^*,\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*)=\min_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R}I(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\qquad(2)$$

问题：极值问题 **(2)** 的解是否存在，是否唯一，即最小二乘问题 **(1)** 的解是否存在唯一？如果存在唯一，如何求之？

正规(法)方程和解的存在唯一性

记： $$I(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=0}^{m}[y_i-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x_i)]^2$$

由于 $I(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是关于待定参数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的二次多项式函数，所以 **(2)** 式有解的必要条件为：

$$\frac{\partial I(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}{\partial\alpha_l}=-2\sum_{i=0}^{m}[y_i-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x_i)]\varphi_l(x_i)=0,\quad l=0,1,\cdots,n$$

即：
$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(\sum_{i=0}^{m}\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)\right)=\sum_{i=0}^{m}y_i\varphi_l(x_i),\quad l=0,1,\cdots,n \qquad (3)$$

记 $\boldsymbol{m+1}$ 维向量:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}_k=[\varphi_k(x_0),\varphi_k(x_1),\cdots,\varphi_k(x_m)]^T, & k=0,1,2,\cdots,n\\ \mathbf{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_m)^T\end{cases}$$

其中 φ_k 为函数 $\varphi_k(x)$ 在点列 $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ 处取值的向量，由向量内积的定义，可得：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_l) = \sum\limits_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i), \quad k, l = 0, 1, \cdots, n \\ (\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi}_l) = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i \varphi_l(x_i), \quad l = 0, 1, \cdots, n \end{cases}$$

故方程 (3) 可写成：
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\varphi_k, \varphi_l) = (y, \varphi_l), \quad l = 0, 1, \cdots, n$$

即：
$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{G}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{pmatrix} (y, \varphi_0) \\ (y, \varphi_1) \\ \vdots \\ (y, \varphi_n) \end{pmatrix}}_{d}$$

方程 $G\alpha = d$ 称之为正规方程 (或法方程) 。

由此可见，最小二乘问题存在唯一解的必要条件就是正规方程的系数矩阵 G 非奇异。显然 G 为对称矩阵，称为**Gram 矩阵**.

定理1：Gram 矩阵 G 非奇异的充要条件是向量组 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ 线性无关。

定理2： 对于已知的 $m+1$ 对离散数据 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{m}$，选定 $n+1$ 维连续函数空间 Φ ，如果它有一组基 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 在点列 $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ 处的值向量组 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ 线性无关，则最小二乘问题存在唯一解 $\varphi^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^*\varphi_k(x)$ ，其中 $(\alpha_0^*,\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*)^T$ 为正规方程的解.

注: **(1)** 最小二乘问题的解与所选基函数无关。即对于$n+1$维连续函数空间 Φ 的任何基 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$， 只要它们在点列 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 处的值向量组 $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ 线性无关，就可以用相应的正规方程求解，从而得到相同的拟合曲线。

(2) 在离散点列 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^m$ 中，对自变量序列$\{x_i\}_{i=0}^m$ 没有特别要求，既不需要有序，也可以重复。

(3) Gram矩阵**G**由子空间 Φ 的基函数 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ 和自变量序列 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 确定，与离散点的函数值 $\{y_i\}_{i=0}^m$ 无关。

三　多项式拟合

在离散数据的最小二乘拟合中，最简单也是最常用的数学模型就是多项式：

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

即在多项式空间

$$\Phi = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \ , \forall \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in R\}$$

中作曲线拟合，称为多项式拟合。

特例：一次多项式拟合

设一次多项式　$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x$

则　$I(\alpha_0,\alpha_1)=\sum_{i=0}^{n}[y_i-\alpha_0-\alpha_1 x_i]^2$

由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial I(\alpha_0,\alpha_1)}{\partial \alpha_0}=-2\sum_{i=0}^{n}[y_i-\alpha_0-\alpha_1 x_i]=0\\[2ex]\dfrac{\partial I(\alpha_0,\alpha_1)}{\partial \alpha_1}=-2\sum_{i=0}^{n}[y_i-\alpha_0-\alpha_1 x_i]x_i=0\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}\alpha_0\sum_{i=0}^{n}1+\alpha_1\sum_{i=0}^{n}x_i=\sum_{i=0}^{n}y_i\\[2ex]\alpha_0\sum_{i=0}^{n}x_i+\alpha_1\sum_{i=0}^{n}x_i^2=\sum_{i=0}^{n}x_i y_i\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

解得 α_0, α_1 则得拟合多项式 $\varphi(x)$ 。

例1： 已知 $f(0)=1, f(1)=2, f(3)=4, f(5)=8$ ，求拟合直线.

解： 设拟合直线为 $y=a+bx$ ，则法方程组为:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \end{pmatrix}$$

解得 $a = 39/59, b = 81/59$

所以所求拟合直线为:
$$y = \frac{81}{59} x + \frac{39}{59}$$

一般多项式拟合

设 n 次多项式 $\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n$

则法方程为:

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \vdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \vdots & \sum x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \vdots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{pmatrix}$$

注: 数据代入多项式后所得矛盾方程组记为$A\alpha=y$, 则上述正则方程即为$A^T A\alpha=A^T y$, 也就是矛盾方程组的正则方程组. 故也可通过 $A^T A\alpha=A^T y$ 求得拟合多项式的各项系数.

例2：已知函数 $y=f(x)$ 的观测数据为：

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	-5	-6	3

用最小二乘法求形如 $y=a+bx+cx^2$ 的经验公式使与题目数据拟合.

解：正则方程组为：

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -26 \end{pmatrix}$$

解得： $a=13.5,b=-16.7,c=3.5$

所以拟合曲线为： $y=13.5-16.7x+3.5x^2$

可化为线性模型的曲线拟合

1　分式函数

$$\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$$

这种情形可令 $\bar{y} = 1/y, \bar{x} = 1/x$ ，则有 $\bar{y} = a + b\bar{x}$

此时法方程组为:

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum \frac{1}{x_i} \\ \sum \frac{1}{x_i} & \sum \frac{1}{x_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{y_i} \\ \sum \frac{1}{x_i y_i} \end{pmatrix}$$

2　指数函数　$y = a e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx \Rightarrow \bar{y} = \bar{a} + bx$

3　幂函数　$y = a x^{b} \Rightarrow \ln y = \ln a + b \ln x \Rightarrow \bar{y} = \bar{a} + b\bar{x}$

例3：给定数据如下：

x	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6
y	0.931	0.473	0.297	0.224	0.168

求形如 $y=\dfrac{1}{a+bx}$ 的拟合曲线.

解：令 $z=1/y$ ，则拟合函数转化为线性模 $z=a+bx$ 型：

此时数据转化为：

x	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6
z	1.074	2.114	3.367	4.464	5.592

用该线性模型拟合上述数据，相应的正规方程为:

$$\begin{pmatrix}5 & 9\\ 9 & 17.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16.971\\ 35.3902\end{pmatrix}$$

解得：$a=-2.0535$，$b=3.0265$

故所求拟合曲线为: $y=\dfrac{1}{3.0265x-2.0535}$

例4：2000年人口预测问题. 根据下表数据构造拟合函数，预测2000年时的世界人口。

年	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口/亿	29.72	30.61	31.51	32.13	32.34	32.85	33.56	34.20	34.83

解：根据人口增长的统计资料和人口理论数学模型可知，当人口总数N不是很大时，在不太长的时期内，人口增长接近于指数增长。因此采用指数函数 $N = e^{a+bt}$ 对数据进行拟合。两边同时取对数，得：$\ln N = a + bt$ ，令 $y = \ln N$ ，变换后的拟合函数为：$y = a + bt$

对人口数据取对数，计算得下表:

年	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口/亿	**3.3918**	**3.4213**	**3.4503**	**3.4698**	**3.4763**	**3.4920**	**3.5133**	**3.5322**	**3.5505**

相应的正规方程为:

$$\begin{pmatrix} 9 & 17676 \\ 17676 & 34715724 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.2975 \\ 61469.48 \end{pmatrix}$$

解得: $a = -33.0383,\ b = 0.0186$

故所求拟合函数为: $N(t) = e^{0.0186t - 33.0383}$

经计算$N(2000)$ = **64.1805** 亿，基本反映了人口变化趋势.