第九章 微分方程初值问题的数值解法

内容提纲

- 引言
- Euler法及其改进
- Runge-Kutta方法
- 线性多步法
- 误差分析
- 数值解法的收敛性、相容性和稳定性
- 边值问题数值解法简介

引言

常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y),\ x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

求未知函数 $y = y(x)$.

初值问题的数值解法:

- 求初值问题的解在一系列节点的值 $y(x_n)$的近似值 y_n 的方法.
- 本章数值解法都是采用“步进式”, 即求解过程顺着节点排列的次序一步步向前推进.

$$
\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}
$$

初值问题(1)与下列积分方程的解等价:

$$
y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt
$$

初值问题的数值解就是求一系列节点

$$
a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots \le b
$$

上函数 $y = y(x)$的近似值 $y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots$. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 称为步长. 一般取等步长 h .

基本知识:

定理1: 如果函数 $f(x, y)$在区域 $D=\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in R\}$ 上连续,且关于 y 满足Lipschitz条件

$$\begin{cases} | f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq L | y_1 - y_2 | \\ (x, y_1) \in D, (x, y_2) \in D, 0 < L < +\infty \end{cases}$$

(其中L 称为Lipschitz常数), 则对任何 $(x_0, y_0) \in D$, 初值问题(1)在$[a, b]$上存在唯一连续可微解 $y = y(x)$.

注: 如无特别说明, 总假设(1)的解存在唯一且足够光滑. 在 $f(x, y)$对变量 y 可微的情形下, 若偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续有界, 则可取L为

$$L = \max_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$$

此时Lipschitz条件显然成立. 故常用 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在D上连续有界来代替 $f(x, y)$关于 y 满足Lipschitz条件.

稳定性要求：

除了要保证(1)有唯一解外，还需保证微分方程本身是稳定的，即(1)的解连续依赖于初始值和函数 $f(x, y)$.

也就是说，当初始值 y_0 及函数 $f(x, y)$有微小变化时，只能引起解的微小变化.

定理2：如果函数 $f(x, y)$在区域 $D=\{(x,y) \mid a \le x \le b, y \in R\}$ 上关于 y 满足Lipschitz条件，则(1)是稳定的.

一、Euler方法及其改进

1. 显式Euler方法

将$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{n}$ 等分，记

$$h=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+kh\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\ x\in[a,b]\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\qquad(1)$$

微分法:

$$y'(x_k)\approx\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{x_{k+1}-x_k}=\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)\qquad k=0,1,\cdots,n-1\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

1. 显式Euler方法

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

积分法:

$$(1) \Leftrightarrow y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))dt \qquad (\bigstar)$$

积分项利用矩形公式计算

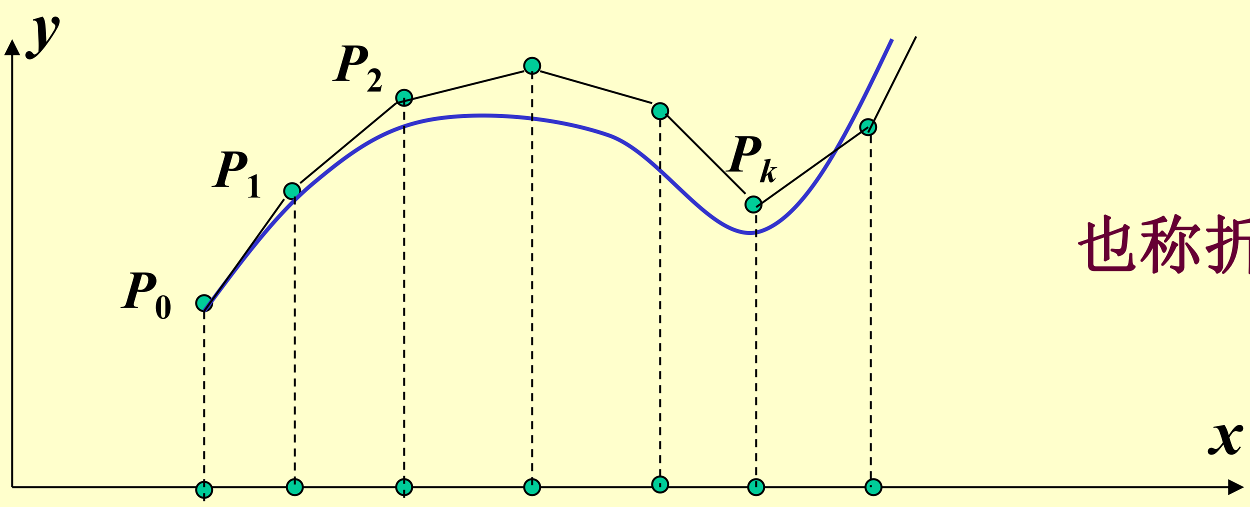
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))dt \approx h f(x_k, y_k) \Rightarrow y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h f(x_k, y_k)$$

Taylor公式推导:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,y'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k),\ \ x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$$

$$\Rightarrow\ y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k) \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

Euler公式几何意义:



也称折线法

2. 梯形法

$$(1) \Leftrightarrow y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))dt \qquad (\bigstar)$$

若采用梯形公式计算(★)中的积分项, 则有

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + \frac{h}{2}[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{k+1}} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \boxed{y_{k+1}})]$$

称之为梯形公式. 这是一个隐式公式, 通常用迭代法求解.

2. 梯形法

先用Euler法求出初值 $y_{k+1}^{(0)}$ ，即 $y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k)$ ，将其代入梯形公式的右端, 使之转化为显式公式, 即

$$y_{k+1}^{(l+1)} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(l)})] \qquad (☆)$$

直至满足： $|y_{k+1}^{(l+1)} - y_{k+1}^{(l)}| < \varepsilon$

取 $y_{k+1} = y_{k+1}^{(l+1)}$ 类似地, 可得 $y_{k+2}, y_{k+3}, \cdots$

注： 当 $\boldsymbol{f(x, y)}$关于$\boldsymbol{y}$满足Lipschitz条件且步长$\boldsymbol{h}$ 满足

$$\frac{1}{2}hL < 1$$

时, 迭代格式 **(☆)** 收敛 .

单步迭代: 计算 y_{n+1}时仅用 y_n；

多步迭代: 计算 y_{n+1}时除用 y_n 外, 还要用到 $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$; k 步迭代要用到 $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-k+1}$.

显式单步迭代:

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \tag{2}$$

隐式单步迭代:

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, y_{n+1}, h)$$

3. 改进的Euler方法

把Euler法作为预报(称为预估公式),把隐式的梯形公式作为校正(称为校正公式),则得改进的Euler方法:

$$\begin{cases} \overline{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1})] \end{cases}$$

或 $$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$$

也称为预估-校正法.

有时为了方便,预估-校正格式也写成下面形式:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] \\ K_1 = hf(x_k, y_k) \\ K_2 = hf(x_k + h, y_k + hK_1) \end{cases}$$

二、单步法的局部截断误差及精度

***Def* 1:** 先假设 $y(x_k) = y_k$,再估计误差

$$R_{k,h} = y(x_{k+1}) - [y(x_k) + h\phi(x_k, y(x_k), h)]$$

这种误差称为单步迭代法在 x_{k+1}处的局部截断误差.

***Def* 2:** 若某种数值方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则称该数值方法的精度为P阶的.

注: 通常情况下, P 越大, h 越小, 则截断误差越小, 数值方法越精确.

1^0.Euler方法是一阶方法.

设 $y_k = y(x_k)$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_k), \quad x_k < \xi_k < x_{k+1},$$

$$\Rightarrow y(x_{k+1}) = y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

而 $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k),$

$$\Rightarrow R_{k,h} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) = O(h^2)$$

所以Euler方法为一阶方法.

2^0. 梯形法是二阶方法.

$$\left.\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + O(h^3) \\ y(x_k) &= y(x_{k+1}) - h y'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2} y''(x_{k+1}) + O(h^3) \end{aligned}\right\} \quad \text{Taylor展开}$$

$\Rightarrow$

$$2[y(x_{k+1}) - y(x_k)] = h[y'(x_k) + y'(x_{k+1})] + \frac{h^2}{2}[y''(x_k) - y''(x_{k+1})] + O(h^3)$$

将 $y''(x_{k+1})=y''(x_k)+O(h)$ 代入上式, 得

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}[y'(x_k) + y'(x_{k+1})] + O(h^3)$$

$$\Rightarrow y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y(x_k) + \frac{h}{2}[y'(x_k) + y'(x_{k+1})] - y_k$$

$$-\frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] + O(h^3)$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_{k+1}, y_{k+1})] + O(h^3)$$

而 $f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_{k+1}, y_{k+1}) = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_{k+1},\eta)} (y(x_{k+1}) - y_{k+1})$

代入上式得:

$$(1 - \frac{h}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_{k+1},\eta)})(y(x_{k+1}) - y_{k+1}) = O(h^3)$$

当h充分小时, 若 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L < 1$, 则可选取 h, 使得

$$|\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_{k+1},\eta)}|<1$$

从而

$$\frac{1}{1-\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_{k+1},\eta)}}=1+\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_{k+1},\eta)}+\cdots$$

$\Rightarrow$

$$R_{k,h}=y(x_{k+1})-y_{k+1}=(1+\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_{k+1},\eta)}+\cdots)O(h^3)=O(h^3)$$

故梯形法的精度为**2** .

梯形法的局部截断误差为:

$$R_{k,h}=y(x_{k+1})-y_{k+1}=-\frac{h^3}{12}f'''(\xi_k),\quad x_k<\xi_k<x_{k+1}$$

同样可以证明改进的Euler法也是二阶方法.

例1:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - xy^2, \ 0 < x \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h = 2/10, 2/20, 2/30, 2/40$, 分别用欧拉法、改进的欧拉法和梯形法求解.

解: 记 $f(x, y) = y - x y^2$, $x_k = k h \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

(1) . Euler法:

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k - x_k y_k^2) \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$
$$y_0 = 1$$

当 $h = 2/10$时, n=10. 由Euler公式可得:

k	0	1	2	3	4
y_{k+1}	1.2	1.3824	1.506	1.53504	1.46503
k	5	6	7	8	9
y_{k+1}	1.32877	1.17077	1.02113	0.89169	0.783788

(2) . 改进的Euler法:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[(y_k - x_k y_k^2) + y_k + h(y_k - x_k y_k^2)$$

$$- x_{k+1}(y_k + h(y_k - x_k y_k^2))^2], \quad k = 0,1,\cdots,n$$

$$y_0 = 1$$

k	0	1	2	3	4
y_{k+1}	1.1912	1.34384	1.42348	1.41905	1.3473
k	5	6	7	8	9
y_{k+1}	1.23726	1.11424	0.994151	0.884751	0.788666

(3) . 梯形法(计算过程略)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[(y_k - x_k y_k^2) + y_{k+1} - x_{k+1} y_{k+1}^2], \quad k = 0,1,\cdots,n$$

$$y_{k+1}^{(l+1)} = y_k + \frac{h}{2}[(y_k - x_k y_k^2) + y_{k+1}^{(l)} - x_{k+1}(y_{k+1}^{(l)})^2], \quad l = 0,1,2,\cdots$$

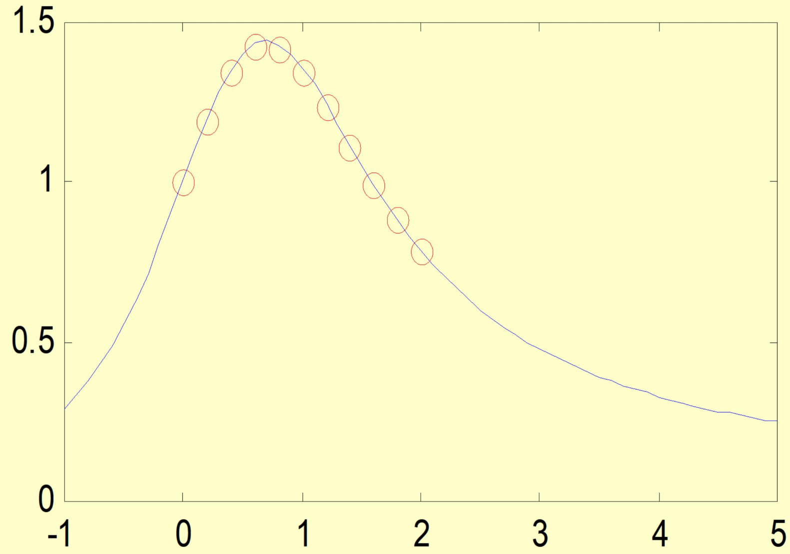
Euler法误差:

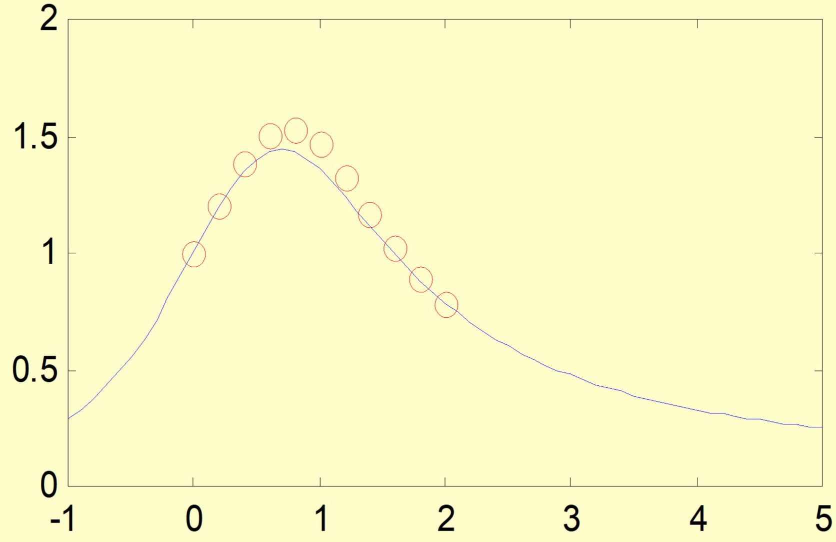
n	10	20	30	40
h	0.2	0.1	0.0667	0.05
误差	0.1059	0.0521	0.0342	0.0256

改进的Euler法误差:

n	10	20	30	40
h	0.2	0.1	0.0667	0.05
误差	0.0123	0.0026	0.0011	5.9612e-004

解析解：$$y(x)=\frac{1}{x-1+2e^{-x}}$$





预-校方法, h=0.2时

误差最大值: 0.0123

欧拉方法, h=0.2时

误差最大值: 0.1059

三、Runge -Kutta 方法

1、Taylor 级数法

设初值问题 $y = f(x,y), y(x_0) = y_0, a \le x \le b$ 有解 $y(x)$, 由 Tayler公式得:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \cdots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_k) + O(h^{p+1})$$

令

$$y_{k+1} = y_k + h y_k' + \frac{h^2}{2!}y_k'' + \cdots + \frac{h^p}{p!}y_k^{(p)} \qquad ①$$

称之为Taylor级数法. 其中 $y_k^{(i)} \approx y^{(i)}(x_k), i = 0,1,2,\cdots,p$

当 $y_k^{(i)} \approx y^{(i)}(x_k)$ 时, 有 $y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^{p+1})$. 此时①为 p 阶Taylor方法. p=1时即为Euler公式.

例2: 取步长 $h = 0.1$, 用一阶、二阶和四阶Taylor方法求解下列初值问题

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}.$$

解: (1) 一阶Taylor法

$$y_{k+1} = y_k + 0.1 y_k^2$$

k	0	1	2	3	4
y_{k+1}	1.1	1.221	1.37008	1.55779	1.80046

(2) 二阶Taylor法

$$y'' = (y^2)' = 2yy' = 2y^3$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + 0.1 y_k^2 + \frac{0.1^2}{2!} \cdot 2 y_k^3$$

k	0	1	2	3	4
y_{k+1}	1.11	1.24689	1.42175	1.65263	1.97088

(3) 四阶Taylor法

$$y''' = (2y^3)' = 6y^2 y' = 6y^4$$

$$y^{(4)} = 24y^3 y' = 24y^5$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + 0.1y_k^2 + \frac{0.1^2}{2!} \cdot 2y_k^3 + \frac{0.1^3}{3!} \cdot 6y_k^4 + \frac{0.1^4}{4!} \cdot 24y_k^5$$

k	0	1	2	3	4
y_{k+1}	1.1111	1.24996	1.42848	1.66644	1.99942

2、Runge -Kutta方法

由 $$\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}=y'(\xi) \qquad (x_k<\xi<x_{k+1})$$

得 $$y(x_{k+1})=y(x_k)+h\,y'(\xi)=y(x_k)+h\,f(\xi,y(\xi))$$

记 $K^*=f(\xi,y(\xi))$ 称为$[x_k, x_{k+1}]$上的平均斜率. 故

$$y(x_{k+1})=y(x_k)+hK^*$$

只要对K^*提供不同的算法, 就会得出不同的计算公式. 如取

$K^*=f(x_k,y_k)$ 则得Euler公式; 取

$$K^*=\frac{1}{2}(K_1+K_2),\ K_1=f(x_k,y_k),\ K_2=f(x_{k+1},y_k+hK_1)$$

则得改进的Euler公式, 它是利用x_k, x_{k+1}两点的斜率值K_1, K_2的算术平均值作为K^*, 精度比Euler法高.

2、Runge -Kutta方法

由 $$\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}=y'(\xi)\qquad (x_k<\xi<x_{k+1})$$

得 $$y(x_{k+1})=y(x_k)+h\,y'(\xi)=y(x_k)+h\,f(\xi,y(\xi))$$

记 $K^*=f(\xi,y(\xi))$ 称为$[\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{x_{k+1}}]$上的平均斜率. 故

$$y(x_{k+1})=y(x_k)+hK^*$$

只要对$\boldsymbol{K^*}$提供不同的算法, 就会得出不同的计算公式.

Runge-Kutta法的基本思想:

设法在$[x_k, x_{k+1}]$内多预报几个点的斜率, 再将它们的加权平均值作为平均斜率K^*

一般显式Runge-Kutta公式为:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{r} c_i k_i \\ k_i = f(x_k + \alpha_i h, y_k + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \quad i = 1, 2, \cdots, r \end{cases} \qquad ②$$

其中 $c_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ 为待定参数, 且$\alpha_1 = 0$.

称为r 级Runge-Kutta方法计算公式.

$$y_{k+1} = y_k + r_1 h + \frac{1}{2!} r_2 h^2 + \frac{1}{3!} r_3 h^3 + \cdots$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2!} y''(x_k) + \cdots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_k) + O(h^{p+1})$$

如要求:

$$r_1 = y'(x_k), r_2 = y''(x_k), \cdots, r_p = y^{(p)}(x_k)$$

即可得 p 个方程, 从而确定出待定参数. 代入表达式即可得到计算公式. 如果要求两个表达式的前p+1项完全重合, 即局部截断误差达到 $O(h^{p+1})$, 则称②式为 p 阶 r 级的Runge-Kutta方法. 常用的是 r =2,3,4 级的R-K方法, 且适当选取参数使得 $p = r$.

Runge-Kutta方法的推导(以r =2为例):

当r =2 时
$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21} h k_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$y_{k+1} = y_k + hc_1 f(x_k, y_k) + hc_2 f(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21} h k_1)$$

记 $f = f(x_k, y_k), f_x = f_x(x_k, y_k), f_y = f_y(x_k, y_k)$

则 $k_1 = f,$

$$k_2 = f(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21} h k_1)$$
$$= f(x_k, y_k) + h(\alpha_2 f_x + \beta_{21} k_1 f_y) + O(h^2),$$

$$y_{k+1} = y_k + (c_1 k_1 + c_2 k_2)h$$
$$= y_k + (c_1 + c_2) f h + c_2(\alpha_2 f_x + \beta_{21} k_1 f_y) h^2 + O(h^3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + (c_1 k_1 + c_2 k_2)h \\ &= y_k + (c_1 + c_2) f h + c_2(\alpha_2 f_x + \beta_{21} k_1 f_y) h^2 + O(h^3) \end{aligned}}$$

又 $y' = f(x_k, y_k) = f,\ y'' = f_x + f_y f$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + O(h^3)$$

$$= y_k + h f + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + O(h^3)$$

常用的二阶Runge-Kutta方法:

(1) $c_1 = c_2 = 1/2,\ \alpha_2 = \beta_{21} = 1$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(k_1 + k_2)/2 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + h, y_k + h k_1) \end{cases}$$

预估-校正算法

(2) $c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha_2 = \beta_{21} = 1$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hk_2 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

中间点方法

(3) $c_1 = 1/4, c_2 = 3/4, \alpha_2 = \beta_{21} = 2/3$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 3k_2)/4 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hk_1) \end{cases}$$

Heun (休恩)方法

注：二级**Runge-Kutta**方法的精度最高是二阶的,不可能达到三阶. 要提高计算方法的阶, 就必须增加预报点.

常用的三阶**Runge-Kutta**方法(**r =3**):

(1)

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_k + h, y_k - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

三阶**Kutta**方法

(2) $$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 3k_3)/4 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}hk_1) \\ k_3 = f(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hk_2) \end{cases}$$

三阶**Heun**方法

常用的四阶**Runge-Kutta**方法**(*r* =4):**

(1) $$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_k + h, y_k + hk_3) \end{cases}$$

标准(经典)四阶**Runge-Kutta**方法

(2) $$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h[k_1 + (2-\sqrt{2})k_2 + (2+\sqrt{2})k_3 + k_4]/6 \\ k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{\sqrt{2}-1}{2}hk_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_k + h, y_k - \frac{\sqrt{2}}{2}hk_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}hk_3) \end{cases}$$

称为Gill(吉尔)方法

注: 从理论上讲,可以构造任意高阶的计算方法. 但事实上, 精度的阶数与预报点的个数之间并非等量关系.

预报点的个数 r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$r\geq 10$
精度的阶数	1	2	3	4	4	5	6	6	7	$\leq r-2$

一般情况下, 四阶**Runge-Kutta**方法已可满足精度要求.

例3: 用经典Runge-Kutta方法求解下列初值问题(取 $h = 0.1$)

$$\begin{cases} y' = 2x + y\,, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解: $h = 0.1,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ x_{k+1} = x_k + 0.1 \quad (k = 0,1,\cdots,9)$

标准Runge-Kutta公式为:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + 0.1 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ k_1 = 2x_k + y_k \\ k_2 = 2(x_k + 0.05) + y_k + 0.05k_1 \\ k_3 = 2(x_k + 0.05) + y_k + 0.05k_2 \\ k_4 = 2(x_k + 0.1) + y_k + 0.1k_3 \end{cases}$$

计算结果见下表. 为比较在相同计算量条件下近似解的精度, 表中列出了Euler法(h =0.025)和改进的Euler法(h=0.05)在相应节点上的计算结果.

x_i	Euler法 h=0.025	改进Euler法 h=0.05	经典R-K法 h=0.1	准确解
0.1	1.111439	1.115380	1.115512	1.115513
0.2	1.255209	1.263914	1.264208	1.264208
0.3	1.434667	1.449089	1.449576	1.449576
0.4	1.653517	1.674756	1.675473	1.675474
0.5	1.915849	1.945171	1.946162	1.946164
0.6	2.226178	2.265040	2.266354	2.266356
0.7	2.589485	2.639561	2.641255	2.641258
0.8	3.011271	3.074479	3.076619	3.076623
0.9	3.497606	3.576144	3.578804	3.578809
1.0	4.055192	4.151573	4.154839	4.154845

注: 用表中每种方法计算 y_i 都需要计算四次 f 的值, 即它们的计算量基本相等.

四、单步法的进一步讨论——收敛性、相容性与稳定性

1. 收敛性

Def **: (整体截断误差)** 称

$$e_k = y(x_k) - y_k$$

为某一数值方法在点 x_k 处的整体截断误差. 它不仅与 x_k 有关, 也与 $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1, x_0$ 有关.

Def **:** 对满足解存在唯一性条件的初值问题(1), 如果一个显式单步法(3)产生的近似解对于任一固定的 $x \in [x_0, b), x = x_0 + nh$, 均有

$$\lim_{h \to 0} y_n = y(x)$$

则称该单步法收敛.

注: 由定义可知, 数值方法的收敛性并不涉及计算过程的舍入误差, 只与方法的截断误差有关. 若格式收敛, 则整体截断误差必趋于零.

定理1: 若初值问题的一个单步法的局部截断误差为

$$R_{n,h} = O(h^{p+1})\ (p \geq 1)$$

且单步法中函数 $\varphi(x, y, h)$ 关于 y 满足Lipschitz条件, 则

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{p})$$

证: 由局部截断误差的定义知

$$R_{n,h} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), h) = O(h^{p+1})$$

记 $$\overline{y} = y(x_n) + h\varphi(x_n, y(x_n), h)$$

则存在常数 $c > 0$ 使得

$$| y(x_{n+1}) - \overline{y} | < ch^{p+1}$$

由于 $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$, 且 $\varphi(x, y, h)$ 关于 y 满足 Lipschitz条件, 得

$$| \overline{y} - y_{n+1} | \leq | y(x_n) - y_n | + h | \varphi(x_n, y(x_n), h) - \varphi(x_n, y_n, h) |$$

$$\leq (1 + hL) | y(x_n) - y_n |$$

故 $$|e_{n+1}| = |y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \le |y(x_{n+1}) - \overline{y}| + |\overline{y} - y_{n+1}|$$

$$\le ch^{p+1} + (1+hL)|e_n|$$

从而有

$$|e_{n+1}| \le ch^{p+1} + (1+hL)[ch^{p+1} + (1+hL)]|e_{n-1}|$$

$$= ch^{p+1}[1 + (1+hL)] + (1+hL)^2 |e_{n-1}| \le \cdots$$

$$\le ch^{p+1}[1 + (1+hL) + (1+hL)^2 + \cdots + (1+hL)^n] + (1+hL)^{n+1}|e_0|$$

$$= ch^{p+1}\frac{(1+hL)^{n+1} - 1}{(1+hL) - 1} + (1+hL)^{n+1}|e_0|$$

若 $y(x_0) = y_0$, 则e_0=0, 由不等式

$$0 \le 1 + hL \le 1 + hL + \frac{1}{2!}hL^2 + \cdots = e^{hL}$$

得 $$0 \text{ £ } (1 + hL)^n \text{ £ } e^{nhL}$$

故 $$|e_{n+1}| \le ch^{p+1}\frac{e^{(n+1)hL} - 1}{(1+hL) - 1} = \frac{c}{L}h^p[e^{(n+1)hL} - 1]$$

当$x = x_{n+1}$固定时, $(n+1)h = x_{n+1} - x_0$ £ $b - a$, 所以有

$$|e_{n+1}| \le \frac{c}{L} h^p [e^{(b-a)L} - 1] = c_1 h^p$$

注: 定理表明, 数值方法的整体截断误差比局部截断误差低一阶. 收敛的方法至少是一阶方法. 在该定义条件下, **Euler**方法是一阶的, 预估-校正方法是二阶. 当$f(x, y)$关于 y 也满足**Lipschitz**条件, r 级**Runge-Kutta**方法中的φ 关于 y 也满足**Lipschitz**条件, 故定理中的条件得到满足, 解的收敛性得到保证.

2. 相容性

设单步法为 $y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$,

$$R_{n,h} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y_n + h\phi(x_n, y_n, h)]$$

$$= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), h)$$

由于$R_{n,h} \to 0 (h \to 0)$, 且 x_n为任意点, 故该式相当于用近似方程

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx \phi(x, y(x), h)$$

来代替 $$\frac{dy}{dx}=f(x,y(x))$$

通过在 $x=x_n$ 处求解近似方程而获得原方程的近似解. 因此,必须要求当$h\to 0$ 时, 近似方程应逼近于原方程.

由于
$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=y'(x)$$

因此, 要使 $h\to 0$ 时, 近似方程的极限状态为原微分方程, 需且只需下列极限成立:
$$\lim_{h\to 0}\phi(x,y(x),h)=f(x,y(x))$$

由于假设 $\phi(x,y(x),h)$ 是连续函数, 故上式可表示为
$$\phi(x,y(x),0)=f(x,y(x))$$

Def: 如果当$h\to 0$时, 近似方程逼近微分方程, 则称数值公式
$$y_{n+1}=y_n+h\phi(x_n,y_n,h)$$
与原微分方程相容.

相容的充要条件: $\phi(x,y(x),0)=f(x,y(x))$

Remark: 可以证明若单步法的阶大于或等于1, 则单步法与微分方程相容; 反之, 如果单步法与微分方程相容, 且 $\phi(x,y,h)$ 关于 y 满足Lipschitz条件, 则单步法至少为一阶方法.

事实上:

(1) 若单步法的阶大于或等于1, 由

$$R_{n,h}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\phi(x_n,y(x_n),h)\to 0 \qquad (h\to 0)$$

知

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\phi(x,y(x),h)$$

故有

$$y'(x)=f(x,y(x))=\phi(x,y(x),0)$$

即单步法与微分方程相容.

(2) 如果单步法与微分方程相容, 且 $\phi(x,y,h)$ 关于y 满足Lipschitz条件, 则

$$R_{n,h}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_{n+1})-y_n-h\phi(x_n,y_n,h)$$

$$=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\phi(x_n,y(x_n),h)$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2) - y(x_n) \ - h[\phi(x_n, y(x_n), 0) + O(h)]$$

$$= hy'(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) + O(h^2)$$

$$= O(h^2)$$

即与微分方程相容的单步法至少为一阶方法.

Th1. 设增量函数 $\phi(x, y, h)$ 在区域

$$D = \{(x, y) | a \le x \le b, y \in R, 0 \le h \le h_0\}$$

中连续, 且关于变量y 满足**Lipschitz**条件, 则单步法收敛的充要条件为相容性条件成立.

Remark: 在定理条件下, **Euler**方法、预估-校正方法以及**Runge-Kutta**方法都与原微分方程相容.

3. 稳定性

关于 单步法的收敛性以及收敛性定理都是在计算过程中无任何舍入误差的前提条件下建立的, 但在实际计算时通常会有舍入误差及其积累, 数值求解微分方程的过程是一个递推公式, 必须考

虑误差积累能否得到控制.

如果数值方法在计算过程中舍入误差的积累越来越大,得不到有效控制,则称其是不稳定的;反之如果计算结果对初始数据的误差及计算过程中的误差不敏感,即舍入误差不增长,则称相应的算法是稳定的.数值方法的稳定性有各种定义,这里仅考虑绝对稳定性概念.

设某数值方法在节点 x_n 处对初值问题的数值解为 y_n,实际计算得到的近似解为 $\tilde{y}_n$, $\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$ 称为第 n 步数值解得扰动.

Def: 若某种数值方法在计算 y_n 时有扰动 δ_n,但在计算后面的 y_m $(m>n)$ 由 δ_n 引起的误差 δ_m 满足 $|\delta_m|<|\delta_n|(m>n)$ 则称该数值方法是绝对稳定的.

设 $f(x,y)$ 关于 y 满足Lipschitz条件,下面仅对典型方程(模型方程) $y' = \lambda y$ 进行讨论.(其中λ为复常数,且 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$)

Remark: 从上面的定义可知,单步法是绝对稳定的,与模型方程

中的复数λ以及所用步长 h 有关. 若对复平面上的某个区域G, 当 $\lambda h \in G$ 时单步法绝对收敛, 则称G为单步法的绝对收敛域, G与实轴的交集称为绝对稳定区间. 显然绝对稳定域越大, 数值方法的绝对稳定性越好.

几个常用公式的稳定性

(1) Euler显式公式:

将Euler显式公式用于模型方程 $y' = \lambda y$, 则有

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda) y_n$$

设 y_n 有误差 δ_n, 参与运算的量为 $\tilde{y}_{n+1} = y_{n+1} + \delta_{n+1}$, 由此引起的 y_{n+1} 有误差 δ_{n+1} ,则实际得到近似 y_{n+1}的量为 $\tilde{y}_n = y_n + \delta_n$, 即

$$y_{n+1} + \delta_{n+1} = (1 + h\lambda)(y_n + \delta_n)$$

故有 $\delta_{n+1} = (1 + h\lambda)\delta_n$

要求误差不增加, 即 $|\delta_{n+1}| < |\delta_n|$, 必须 $\left|\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| = |1 + h\lambda| < 1$

$|1+h\lambda|<1$ 是保持绝对稳定性对步长 h 所加的限制. 因此**Euler**法的绝对稳定域为(**Euler**法是条件稳定的):

$$|1+h\lambda|<1$$

当λ为实数时, 得绝对稳定区间为(-2,0) .

(2) 梯形公式:

将梯形公式用于模型方程 $y'=\lambda y$, 则有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$

故
$$\delta_{n+1}=\delta_n+\frac{h\lambda}{2}(\delta_n+\delta_{n+1})$$

即
$$\delta_{n+1}=\left(\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right)\delta_n$$

设 $h\lambda=x+iy$

由于

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| = \left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right| = \left|\frac{2+x+iy}{2-x-iy}\right|$$

$$=\left\{\frac{(2+x)^2+y^2}{(2-x)^2+y^2}\right\}^{1/2} = \left\{\frac{4+4x+x^2+y^2}{4-4x+x^2+y^2}\right\}^{1/2}$$

当$x = \mathrm{Re}(\lambda h) < 0$时, 上式右端总小于1. 故梯形法的绝对稳定区域为: $\mathrm{Re}(\lambda h) < 0$, 即左半平面.

(3) 四阶经典R-K方法:

四阶经典R-K方法用于模型方程 $y' = \lambda y$, 则有

$$k_1 = \lambda y_n \qquad k_2 = \lambda(y_n + \frac{1}{2}hk_1) = y_n(\lambda + \frac{1}{2}h\lambda^2)$$

$$k_3 = \lambda(y_n + \frac{1}{2}hk_2) = y_n[\lambda + \frac{1}{2}\lambda h(\lambda + \frac{1}{2}\lambda h^2)]$$

$$k_4 = \lambda(y_n + hk_3) = y_n[\lambda + \lambda h(\lambda + \frac{1}{2}\lambda h^2 + \frac{1}{4}h^2\lambda^3)]$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=y_n+\frac{h}{6}y_n\{\lambda+2(\lambda+\frac{1}{2}h\lambda^2)$$

$$+2(\lambda+\frac{1}{2}h\lambda^2+\frac{1}{4}h^2\lambda^3)+(\lambda+h\lambda^2+\frac{1}{2}h^2\lambda^3+\frac{1}{4}h^3\lambda^4)\}$$

$$=y_n\{1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(h\lambda)^3+\frac{1}{24}(h\lambda)^4\}$$

扰动满足： $\delta_{n+1}=\delta_n\{1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(h\lambda)^3+\frac{1}{24}(h\lambda)^4\}$

故四阶经典**R-K**方法的绝对稳定域为**:**

$$\left|1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(h\lambda)^3+\frac{1}{24}(h\lambda)^4\right|<1$$