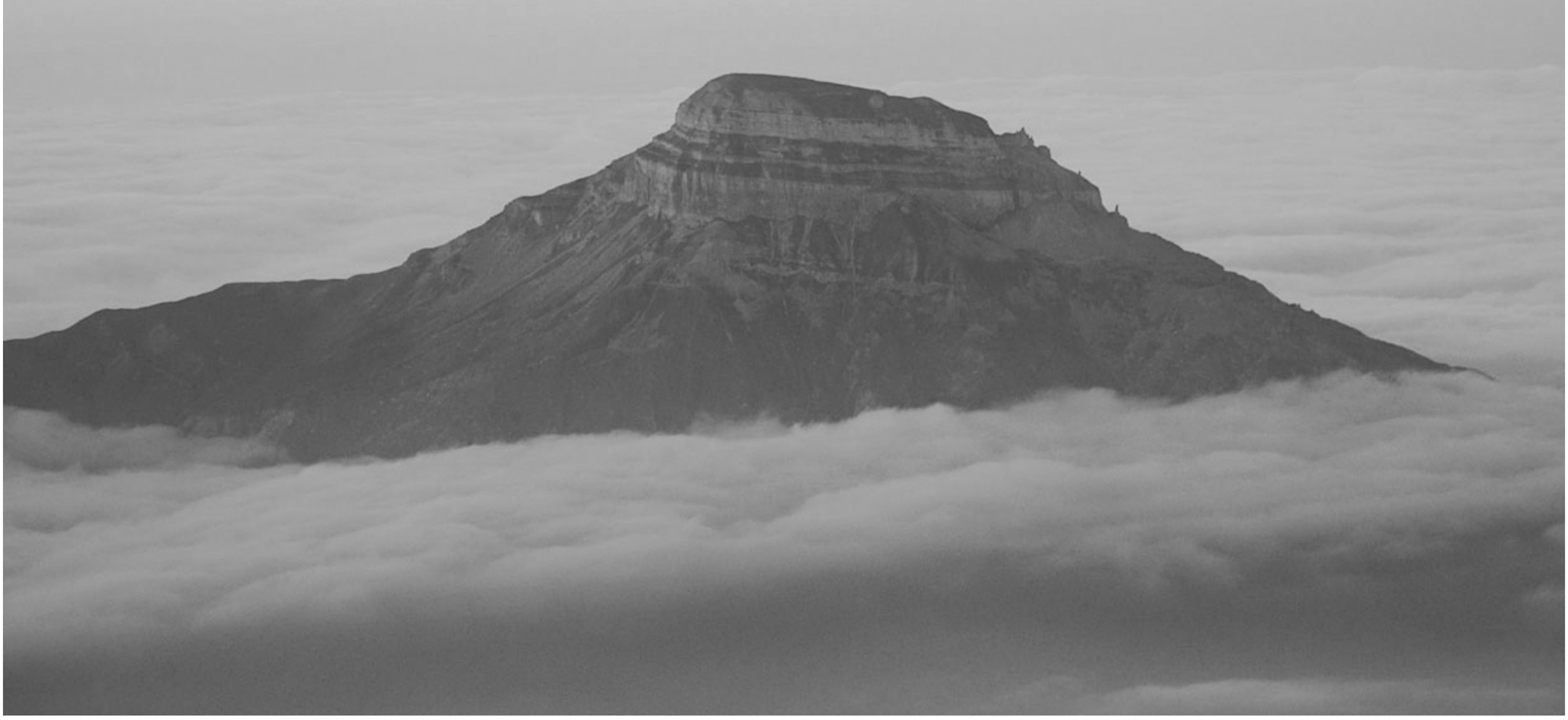
代数学.



命题:(1) 设 $0\to A\to B\to C$ exact，A,B,C 为 R-模

则 $\forall R$-模 M 有:

$$0\to \mathrm{Hom}_R(M,A)\to \mathrm{Hom}_R(M,B)\to \mathrm{Hom}_R(M,C)\ \text{exact}$$

(2) 设 $A\to B\to C\to 0$ exact

$\Leftrightarrow \forall M$, $0\to \mathrm{Hom}_R(C,M)\to \mathrm{Hom}_R(B,M)\to \mathrm{Hom}_R(A,M)$ exact

蛇形引理:

给定正合图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & R \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

则有正合列

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] & S \arrow[r, "g"] & T \arrow[d, "\delta"] \\
W & V \arrow[l, "k"'] & U \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}$$

证: (1) f,g,h,k 合理（图上追踪法 diagram chasing）.

eg. f 合理 $\Leftrightarrow$ R 可映到 S 中 $\Leftrightarrow$ R 可映到 $S\to B$ 的像.

$\Leftrightarrow$ R 可映到 $B\to B'$ 的核.

$\Leftrightarrow$ R 到 B' 映成 0.

……

日期:　　/

(2). δ 公理

(3) 正合性:

§2.1. 范畴: 作用: 统筹各类知识.(不提供新的知识)

(2.1) 基本概念:

Def1: 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由以下要素构成:

(1) $\mathcal{C}$ 有对象, 记 $A\in\mathcal{C}$ 或 $Obj(\mathcal{C})$. (可不为集合)?

(2) 对 $A,B\in\mathcal{C}$, 则有态射集 $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. (可为空集且不一定为映射).

其中, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\times Hom_{\mathcal{C}}(B,C)\to Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ (即有复合)

满足: C_1: $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\cap Hom_{\mathcal{C}}(A',B')=\varnothing$. (除非 $A=A', B=B'$)

C_2: $\exists 1_A\in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$. s.t. 对 $f: A\to B$ 有 $f\cdot 1_A=f$. (即幺态射).

C_3: $f(gh)=(fg)h$. (即态射可结合).

日期:　　/

- 态射不一定是对象间的映射.

eg. def $\mathcal{C}$: $Obj(\mathcal{C})=\{R$-模同态: $A\to M\}$. (M固定).

态射 $Hom_{\mathcal{C}}(f:A\to M, g:B\to M)=\{u:A\to B \mid$ $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$ $\}$.

可验证$\mathcal{C}$良定义.

- 反范畴: $\mathcal{C}^{op}$: · $Obj(\mathcal{C}^{op})=Obj(\mathcal{C})$.　　(为了方便叙述)

· $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B)=Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$.

eg. def: $\mathcal{V}^*_{/k}$: Obj: k-线性空间.

$Hom_{\mathcal{V}^*}(V,W)=\{$线性映射$f^*: V^*\to W^*\}$.

可见 $\mathcal{V}^*_{/k}=(\mathcal{V}_{/k})^{op}$.

Def2: 固定范畴$\mathcal{C}$.

- 始对象: S, 若$\forall X\in\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(S,X)$包含唯一的态射.
- 终对象: T. 若$\forall X\in\mathcal{C}$. $Hom_{\mathcal{C}}(X,T)$包含唯一的态射
- 零对象: 0. 始+终.

Props: 始/终/零对象, 若存在, 则同构意义下唯一.

Pf: 若 $S_1,S_2\in\mathcal{C}$ 为始对象.　　但态射不一定是映射?

可设 $Hom_{\mathcal{C}}(S_1,S_2)=\{f\}$. $Hom_{\mathcal{C}}(S_2,S_1)=\{g\}$.

$\Rightarrow$ $fg\in Hom_{\mathcal{C}}(S_2,S_2)\underset{\text{唯一}}{\overset{\uparrow}{=}}\{1_{S_2}\}$. $\Rightarrow fg=1_{S_2}$. 同理, $gf=1_{S_1}$. #

日期:　　/

eg. · sets: 始对象: 无. (除非认为 $\phi \to A$ 为映射).

终对象: $\{1\}$.

· group: $\{e\}$. 零对象.

Def3: 乘积 (product).

设 $A, B \in \mathcal{C}$. 若 $\exists\, A\times B \in \mathcal{C}$. 以及

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p\ (\text{态射})"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

s.t. $\forall X$, 以及 $f: X\to A$. $g: X\to B$.

$\exists!\ \theta:\ X \to A\times B$

即

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A & X \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "\exists!\theta"'] \end{tikzcd}$$

交换.

(即满足∃ $\begin{tikzcd} & B \\ A & X \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$ 的最大的一个)

$A\times B$ denote A和B的乘积. (本质为三元组 $(A\times B, p, q)$.).

eg. · Set: $A\times B = \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$.

$\theta(x) = (f(x), g(x))$

Props: $(A\times B, p, q)$ 若存在, 必唯一.

Pf: 考虑范畴 $\mathcal{C}_{AB}$:

obj: $(X,\ f: X\to A,\ g: X\to B)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{AB}}((X_1,f_1,g_1),(X_2,f_2,g_2)) = \left\{ h \;\middle|\; \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & B \\ A & X_2 \arrow[l, "f_2"] \arrow[u, "g_2"'] \arrow[ul, "\theta"'] \end{tikzcd} \right\}$$

日期: /

即 $A\times B$ 即 $\mathscr{C}_{AB}$ 中的始对象. $\Rightarrow$ $A\times B$ 唯一.

Def 4: 上积 (coproduct).

设 $A,B\in\mathscr{C}$, 若 $\exists A\sqcup B$ 以及
$$\begin{tikzcd} A\sqcup B & B \arrow[l, "i_2"'] \\ A \arrow[u, "i_1"] & \end{tikzcd}$$

s.t. $\forall X$ 及 $f: A\to X, g: B\to X$.

$\exists!\ \theta: A\sqcup B\to X$.

即
$$\begin{tikzcd} A\sqcup B \arrow[dr, "\exists!\theta"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$
交换. (即满足 $\exists$
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$
的最小的一个)

(注意到: $A\sqcup B$ 即 $\mathscr{C}^{op}$ 中的 "$A\times B$".).

eg. • Set: $A\sqcup B = (A\Delta B)$ $A\sqcup B$ 无交并. ?

• R-模范畴: product: $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 直积, coproduct: $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 直和. ?

§2.2. 函子.

Def 1: 设 $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ 为范畴. 一个协变函子:

$F: \mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 为一个对应 (不一定是映射).

① $\mathrm{obj}(\mathscr{C})\to\mathrm{obj}(\mathscr{C}')$.

$A \mapsto F(A)$

② $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(A),F(B))$.

$f: A\to B \mapsto f(F): F(A)\to F(B)$.

即保持态射性质的范畴间的对应.

满足: F1: $F(1_A) = 1_{F(A)} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(A),F(B))$.

F2: $F(fg) = F(f)F(g)$.

日期:　　/

Def2: 反变函子F:

①, ②': $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(B),F(A))$.

F_1, F_2': $F(fg)=F(g)F(f)$.

(注意: 反变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ ⇝ $F^{op}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'^{op}$; F^{op}即为一协变函子.)

eg.1. 遗忘函子: (高级结构 → 低级结构). (一个协变函子).

- $M_R \to Group \to Set$.
  $M \mapsto (M,+)$
  $G \mapsto G$.
  遗忘乘法　遗忘加法.
- 流形 → 拓扑空间.

eg.2. (一个反变函子).

$A\in M_R$.　$M_R \to M_R$ 同态

$M \mapsto Hom(M,A)$.

$f\downarrow$　　　$\uparrow$

$N \mapsto Hom(N,A)$.

2.3. Abel范畴.

Def1: 加法范畴. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴.

若 $\mathcal{C}$ 满足: AD1: $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ 为加法群 (即一 $\mathbb{Z}$-模).

零元的存在由 $\mathbb{Z}$-双线性与零对象可导出.

AD2: $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$.

满足 $\mathbb{Z}$-双线性.

即 $(f_1+f_2)g = f_1g+f_2g$.

$f(g_1+g_2) = fg_1+fg_2$.

AD3: 有零对象0.

AD4: $A\times B$, $A\sqcup B$ 存在.

denote $\mathcal{C}$ as 加法范畴.

eg. M-模范畴是加法范畴.

Props: $A, B\in\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$为加法范畴, 则 $A\times B\cong A\sqcup B$.

Pf:

Granted,

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "i_2"] \\ A \arrow[r, "i_1"'] & A\sqcup B \end{tikzcd}$$

step1:

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \\ A & A \arrow[l, "1_A"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "j_A"'] \end{tikzcd}$$

同理 j_B.　　$(p_1 j_A = 1_A,\ p_2 j_A = 0)$.

step2:

$$\begin{tikzcd} A\times B & B \arrow[l, "j_B"'] \arrow[d, "i_2"] \\ A \arrow[u, "j_A"] \arrow[r, "i_1"'] & A\sqcup B \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

$(f i_1 = j_A\ \ f i_2 = j_B)$

step3: $g = i_1p_1 + i_2p_2$.　(以M-模考察 Granted构造).

step4: 证 $gf = 1_{A\sqcup B}$.

$\Leftarrow$

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[dll, "i_2"'] \arrow[drr, "i_1"] & & \\ A\sqcup B \arrow[rr, "f"] & & A\times B \arrow[rr, "g"] & & A\sqcup B \\ & & A \arrow[ull, "i_1"] \arrow[urr, "i_1"'] & & \end{tikzcd}$$

交换.

$\Leftarrow$ $(i_1p_1+i_2p_2) f i_1 = i_1p_1j_A + i_2p_2j_A = i_1 1_A + i_2 0 = i_1$. ✓

Def: 固定加法范畴 $\mathcal{C}$. 设 $f\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

① 称 $f: A\to B$ 为"单射"，若 $\forall A'\in\mathcal{C}$，以及:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

若有 $fu=fv$ 则有 $u=v$.

② 称 $f: A\to B$ 为"满射"，若 $\forall B'\in\mathcal{C}$. 以及:（即反范畴中的单射）

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & B' \end{tikzcd}$$

若有 $uf=vf$. 则有 $u=v$.

Def3: 核&余核:

核: 设 $f: A\to B\in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

若 $\exists\, Ker(f)\in\mathcal{C}$，满足:

- $\exists\ i: Ker(f)\to A$，使 $f\cdot i=0\in Hom_{\mathcal{C}}(Ker(f),B)$.
- $\forall\ u: A'\to A$ 若 $f\cdot u=0$. 则

  $\exists!\ u': A'\to Ker(f)$ 使 $u=iu'$.

则称 $Ker(f)$ 为 $f: A\to B$ 的核.

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B. \\ & A' \arrow[u, "u"'] \arrow[ul, "\exists! u'"] & \end{tikzcd}$$

日期: /

余核: coker(f). (即反范畴中的核).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{coker}(f) \arrow[dl, "\exists! v'"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

(类比 $B/f(A)$)

Props: (1) $\ker(f)$ & $\mathrm{coker}(f)$ 同构意义下唯一.

(2). f单 $\Leftrightarrow \ker(f)=0$

f满 $\Leftrightarrow \mathrm{coker}(f)=0$. ?

(3) $\ker(f) \xrightarrow{i} A$ 为单射.

$B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f)$ 为满射. ?

Def 4:

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}(f) \\ \mathrm{coker}(i) = & \mathrm{coim}(f) \arrow[r, "\bar{f}", "?"'] & \mathrm{im}(f) = \ker(\pi) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Def 5: Abel 范畴:

若加法范畴 $\mathcal{C}$ 满足:

AB1: 对 $\forall f: A \to B$. $\ker(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$ 存在.

AB2: 对 $\forall f: A \to B$. $\mathrm{coim}(f) \xrightarrow[\simeq]{\bar{f}} \mathrm{im}(f)$.

则称 $\mathcal{C}$ 为阿贝尔范畴.

日期: /

eg. M_R:

$\cdots \to A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \to \cdots$ A_i R模 $d_i d_{i-1}=0$. $\forall i$.

称为链(chain).

其与态射(交换图 $\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_i \arrow[r] \arrow[d] & A_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & B_i \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$)组成一个Abel范畴.

Def6: 正合列.

态射序列 $\cdots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \to \cdots$

若 $f_n f_{n-1}=0$ 且 $\mathrm{im}(f_{n-1})=\ker(f_n)$.

称序列在A_n处正合.

eg. $0 \to \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f) \to 0$ 正合.

Thm: 蛇形引理. 在Abel范畴下成立:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & R \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Def7: 范畴等价:

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}'.$$

日期: /

当 $F\circ G = Id_E$, $G\circ F = Id_{E'}$. 则称 G, F 等价.

§3. 自由、投射、内射模

§3-1. 自由模

Def1: 自由模:

设 M 为 R-模, 若存在 $\{x_i\}_{i\in I}\subset M$ s.t

$\forall x\in M$, $\exists!\ \{a_i\}\subseteq R$.

使 $x=\sum a_i x_i$

则称 M 为自由模, $\{x_i\}_{i\in I}$ 为 M 的一组基.

Props1: (在上面条件下)

① $Rx_i \simeq R$.

② $M=\bigoplus_{i\in I} Rx_i \simeq \bigoplus_{i\in I} R$.

Props2: 设 $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$ 为 M 的两组基.

则 $|I|=|J|$. (等势) (即基的元素个数不依赖于基的选取).

Thm. (Universal Property).

M = free module. $\{x_i\}_{i\in I}$ 为一组基.

日期:　　/

<二>. $\forall R$-模 N, 及 $f: \{x_i\}_{i\in I} \to N$.

则 $\exists!\ \tilde{f}: M \to N$. (延拓).

即.
$$\begin{tikzcd} \{x_i\}_{i\in I} \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d] & N \\ M \arrow[ur, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Pf: 令 $\tilde{f}: M \to N$

$x = \sum a_i x_i \mapsto \sum a_i f(x_i)$

可验证.

§3.2 投射模.

Def2: 设 P 为 R-模. if. $\forall R$-模 满Hom. $M \xrightarrow{\pi} N \to 0$.

$$\forall f: P \to N.$$

$$\exists!\ \tilde{f}: P \to M. \text{ (提升). } s.t.\ f = \pi \circ \tilde{f}$$

即
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall\pi"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[ul, "\exists!\tilde{f}"] \arrow[u, "\forall f"'] & \end{tikzcd}$$

则称 P 为投射模 (projective module).

反eg. $\mathbb{Z}$ module:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\ & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[u, "id"'] & \end{tikzcd}$$

但 id 没有提升.

⟶ 线性关系可能无法保持

eg. $6\sigma(1) = \sigma(6) = \sigma(0) = 0$. ×

$\neq 0$.

回顾: $0 \to K \to M \to N \to 0$. 正合列.

$\underset{\sim\sim\sim}{\mathrm{Hom}_R(P,-)} \to$: $0 \to \mathrm{Hom}_R(P,K) \to \mathrm{Hom}_R(P,M) \to \mathrm{Hom}_R(P,N)$ (左正合)

则现P为投射模时有

$\underset{\rightsquigarrow}{Hom_R(P,-)}$: $Hom_R(P,K)\to Hom_R(P,M)\to Hom_R(P,N)\to 0$. (右正合).

def 正合=左正合+右正合, 称 函子F: 正合列→正合列. 为正合函子.

$\rightsquigarrow$ P为投射模 $\Leftrightarrow$ $Hom_R(P,-)$为正合函子.

Props: 自由模是投射模

记 $P=\bigoplus RX_i$

有
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[ul, "\exists\tilde{f}"] \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$
$\Leftarrow$ 对$f(x_i)$找$y_i\in\pi^{-1}(f(x_i))$.

$\rightsquigarrow$
$$\begin{tikzcd} \{x_i\} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook] & M \\ P \arrow[ur, "\exists\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Uparrow$

又由 $\tilde{f}\circ\pi|_{\{x_i\}}$
$=f|_{\{x_i\}}$
$\Rightarrow \tilde{f}\pi=f$.

Thm: TFAE: (以下等价).

① P为投射R-模.

② $\forall$ R-模正合列: $0\to K\to M\to P\to 0$. 分裂.

③ P为自由模的直和项.

Pf: ①⇒②:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "id_P"'] & \end{tikzcd}$$

②⇒③: 令$M=\bigoplus_{p\in P}R$ (自由模). $\therefore$ $0\to K\to M\to P\to 0$ 分裂.

日期: /

$\rightsquigarrow K\oplus P\cong M$. 即 P 为自由模 $\bigoplus_{p\in P} R$ 的直和项.

③⇒①: $\exists$ module Q, s.t. $P\oplus Q\simeq \oplus R$.

Pf1: 则 $\forall\ M\to N\to 0$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[ul, "\exists \hat{f}"] \arrow[u, "f"'] \arrow[d, "i"'] & \\ & \oplus R \arrow[uul, bend left, "\exists \tilde{g}"] \arrow[u, "\pi"'] \arrow[uu, bend right, "g=f\circ\pi"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{f}=\tilde{g}\circ i$.

$\rightsquigarrow P$ 为投射模.

Pf2: $\forall M\to N\to 0$.

$$\begin{tikzcd} \text{由 } \mathrm{Hom}_R(P\oplus Q, M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(P\oplus Q, N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ \mathrm{Hom}_R(P,M)\times \mathrm{Hom}_R(Q,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P,N)\times\mathrm{Hom}_R(Q,N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathrm{Hom}_R(P,M) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P,N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Rmk: $\exists$ 非自由投射模. 但不易构造.

若 R 为 PID. e.g. 自由模的子模 仍为自由模. (即必须在非 PID 上 才有这样的 module).

eg. $R=k[x,y]/(x^2+y^2-1)$. $I=(y, x-1)$.

$x-1, y$ 线性相关 $\therefore I$ 非 R 自由模.

§3.3. 内射模

Def. E 为 R-模, 若 $\forall\ 0\to K\to M$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "\exists \tilde{f}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

则称 E 为内射模 (injective).

(但是比投射模难)

(反范畴下的投射模)

日期:　　/

反eg. $\mathbb{Z}\in{}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$ 不是内射影.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow id & \not\swarrow & \\ & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

eg. $R=k$ field. $0\to U\to V$, $U\downarrow W$, $V \dashrightarrow W$

回顾: $0\to K\to M\to N\to 0$.

反变函子 $Hom_R(-,N)$.
$0\to Hom_R(N,E)\to Hom_R(M,E)\to Hom_R(K,E)$.

而E内射模 $\iff$ $Hom_R(N,E)\to Hom_R(M,E)\to Hom_R(K,E)\to 0$.

$\iff$ $Hom_R(-,E)$ 为正合函子.

Thm: TFAE:

① P为内射R-模.

② $\forall\ 0\to E\to M\to N\to 0$ 正合列分裂.

Thm: (Baer判别法).

E为内射R-模 $\iff$ $\forall R$的理想I, $0\to I\to R$, $\forall f: I\to E$, $\exists\tilde{f}: R\to E$

eg. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\in{}_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$.

由 $0\to \underset{\{0,2,4\}}{2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}\to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\forall f: 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\exists\tilde{f}$　　$0\to 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\downarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. 同理.

日期:　　　/

$\therefore \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \in {}_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$ 是内射模.

但 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \in {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$ 不是内射模.

Def: 设 D 为 R-模. 若 $\forall d \in D, r \in R, r \neq 0$.

$\exists d' \in D$. s.t. $d = rd'$. 则称 D 为可除模.

Rmk: 若 R 为 PID, 则 内射 $\Leftrightarrow$ 可除.

eg. $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射 $\mathbb{Z}$ 模.