

微积分 I (第一层次) 期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题 (每题 6 分, 共 48 分)

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^3 x} = 1$.

2. 用 $\varepsilon - N$ 语言证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = 1$.

3. 求函数 $y = \sqrt{\frac{x+2}{x+5}} \sin x + (\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n$, 其中 $a \geq 0, b \geq 0$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的可微性。

6. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

7. 设 $f(x) = x \ln(1 + x) + \cos x + ax^2 + bx + c = o(x^2)$, 求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小, 求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \operatorname{arccot} t + \ln(1 + t^2). \end{cases}$ 试求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

二、(10分) 确定函数 $f(x)$ 的间断点, 并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}, & x \neq 0, x \neq 1, \\ 0, & x = 0, \\ \sin 1, & x = 1. \end{cases}$$

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a) = f(b)$, 证明对一切 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < f(a) = f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y} - xy - e = 0$ 确定的曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 又 $f(a) = 1, f(b) = 0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = \frac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2, \xi_3 \in (a, b)$ ($\xi_2 \neq \xi_3$), 使得 $\frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = 5(a - b)$.

六、(10分) 设 $f(x) = |x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数, $g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有 n 阶导数?

微积分 I (第一层次) 期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题 (每题 6 分, 共 48 分)

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^3 x} = 1$.

2. 用 $\varepsilon - N$ 语言证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = 1$.

3. 求函数 $y = \sqrt{\frac{x+2}{x+5}} \sin x + (\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n$, 其中 $a \geq 0, b \geq 0$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的可微性。

6. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

7. 设 $f(x) = x \ln(1 + x) + \cos x + ax^2 + bx + c = o(x^2)$, 求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小, 求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \operatorname{arccot} t + \ln(1 + t^2). \end{cases}$ 试求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

二、(10分) 确定函数 $f(x)$ 的间断点, 并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}, & x \neq 0, x \neq 1, \\ 0, & x = 0, \\ \sin 1, & x = 1. \end{cases}$$

三、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a) = f(b)$, 证明对一切 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < f(a) = f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y} - xy - e = 0$ 确定的曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 又 $f(a) = 1, f(b) = 0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = \frac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2, \xi_3 \in (a, b)$ ($\xi_2 \neq \xi_3$), 使得 $\frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = 5(a - b)$.

六、(10分) 设 $f(x) = |x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数, $g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有 n 阶导数?

微积分 I (第一层次)期中试卷(2020.11.21)

一、计算下列各题(每题6分,共48分)

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} = 1$.
2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} \right) = 0$.
3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^{2x} \sin x, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.
4. 设 $0 < x_1 < 1$, 且 $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$ ($n \geq 1$), 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.
5. 求由方程 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = \ln 2$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数.
6. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线和法线方程.
7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.
8. 已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\arctan \frac{2020}{n-1} - \arctan \frac{2020}{n+1} \right)$ 是不为零的常数, 求 α 以及该极限值.

二、(10分) 确定以下函数的间断点, 并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

三、(12分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求 $1 - \cos(\sin x) + a \ln(1 + x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的某邻域内可导, 且 $f'(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$, 计算 $f'''(2)$.

五、(10分) 设 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明: 在 $[0, 1]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

微积分 I (第一层次) 期中试卷 2021.11.20

一、简答题 (每题 6 分, 共 48 分)

1. 用定义证明: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$.

2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 以 x 为基准无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求 $5^x - 1 - \ln(1+x \ln 5)$ 的无穷小主部.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan x + e^y + xy = 0$ 给出, 求 $\frac{dy}{dx}$.

5. 设 $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \sin x_n$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

6. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 求 $t = 1$ 对应点处的导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7. 设 $y = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$, 求 $y^{(99)}$.

8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + a_4^x}{4} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

二、(10分) 求函数 $f(x) = \frac{|x-1|\tan(x+2)}{x^2+x-2}$ 的间断点, 并说明间断点的类型.

三、(10分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 1+x^2, & x \leq 0, \end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的连续性; (2) 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

四、(8分) 设 $y = f\left(\frac{2x-1}{1-3x}\right)e^{f(x)}$, $f'(x) = \sin x + x$, 且 $f(0) = 1$. 求 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$.

五、(8分) 当 $x > 0$ 时, 证明不等式: $0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < x(e^x - 1)$.

六、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $|f''(x)| \leq M$ 且 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最大值.

证明: $|f'(0)| + |f'(1)| \leq M$.

七、(8分) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

微积分 I (第一层次) 期中试卷 (2022.11.12)

一、证明下列各题 (每题 6 分, 共 12 分)

1. 用函数极限的定义 ($\varepsilon - \delta$ 语言) 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2\sqrt{x}) = 3$.
2. 用数列极限定义 ($\varepsilon - N$ 语言) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 q^n = 0$, ($|q| < 1, q \neq 0$).

二、计算下列各题 (每题 6 分, 共 36 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$.
2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \arcsin x}$.
3. 设 $x \geq 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n}$.
4. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 1$. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.
5. 求 $y = \frac{5}{x^2 - x - 6}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.
6. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

三、(8分) 讨论函数 $f(x) = \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi x}{2}}$ 的连续性, 并判断其间断点的类型.

四、(8分) 设函数 $f(x) = \tan x - \sin x + e^x + ax^2 + bx + c$, 满足 $f(x) = o(x^2)$, 求 a, b, c , 并求 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

五、(10分) 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n + 6}{x_n + 2}, n = 1, 2, \dots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

六、(6分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(f(x)) = x$ 有实根, 求证 $f(x) = x$ 亦有实根.

七、(10分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(2) = 2$. 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f(\xi) = 2 - \xi$;
- (2) 存在 $\eta, \zeta \in (0, 2)$, ($\eta \neq \zeta$), 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

八、(10分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(a \ln(1+x) + b \cos x - b), & x < 0, \\ 1 + \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$ 试求:

- (1) a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导?
- (2) 在 (1) 成立的前提下, 复合函数 $F(x) = f(f(x))$ 在 $x = 0$ 处是否可导? 若可导, 求出其在 $x = 0$ 处的导数值.

微积分 I (第一层次) 期中试卷参考答案 19.11.16

一、 1. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $|\sqrt{1 - \sin^3 x} - 1| = \frac{|\sin^3 x|}{1 + \sqrt{1 - \sin^3 x}} \leq |x|^3 < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon^{1/3}$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$

时有 $|\sqrt{1 - \sin^3 x} - 1| < \varepsilon$.

2. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\left| \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1 \right| = \frac{|\sqrt{1+n^2} - n|}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}(n + \sqrt{1+n^2})} \leq \frac{1}{n}$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1 \right| < \varepsilon$.

3. 令 $y_1 = \sqrt{\frac{x+2}{x+5}} \sin x$, $y_2 = (\arctan x)^{\tan x}$, 则 $y' = y'_1 + y'_2$, $dy = (y' + y')dx$, 其中

$$y'_1 = y_1 (\ln y_1)' = \frac{y_1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} + \frac{\cos x}{\sin x} \right),$$

$$y'_2 = y_2 (\ln y_2)' = y_2 \left(\sec^2 x \ln \arctan x + \frac{\tan x}{(1+x^2) \arctan x} \right).$$

4. 当 $ab = 0$ 时, 易见原式为 0. 当 $ab \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} - 1} n \cdot \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} - 1 \right)} \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} - 1}{1/n} + \frac{b^{1/n} - 1}{1/n} \right) \right) = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

5. $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x} = 0$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x} = 1$. 则 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 从而不可微.

6. 首先由归纳法可有 $x_n > 0$, 又由于 $0 < x_{n+1} = \ln(1 + x_n) < x_n$, 故数列 x_n 单调递减有下界, 故收敛, 设极限是 A , 则 $\ln(1 + A) = A$, 从而有 $A = 0$.

7. 由 $f(x) = o(x^2)$ 可得 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 即 $1 + c = 0$, 从而 $c = -1$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + \cos x + ax^2 + bx - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(1+x) + \frac{\cos x - 1}{x} + ax + b \right) = b = 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + \cos x + ax^2 - 1}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - \sin x + 2ax}{2x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \cos x + 2a}{2} = \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + \cos x - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x^k} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - \sin x - x}{kx^{k-1}} \\ &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \cos x - 1}{k(k-1)x^{k-2}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3} + \sin x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}} \end{aligned}$$

从而取 $k = 3$, 得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{2}$. 则 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的无穷小阶数为 3, 无穷小主部为 $-\frac{1}{2}x^3$.

$$8. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t - 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2t-1)'}{\frac{dx}{dt}} = 2(1+t^2).$$

二、函数在 $x \neq 0, x \neq 1$ 的地方显然连续; 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} \frac{1-x}{x} x \sin \frac{1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x},$$

不存在, 所以 $x = 0$ 是第二类间断点, 且为振荡间断点.

由于 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \sin 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0$, 所以 $x = 1$ 是第一类间断点, 且为跳跃间断点.

三、任给 $x \in (a, b)$, 由中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, x)$, $\xi_2 \in (x, b)$, $\xi_1 < \xi_2$ 且

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

可推出 $f(x) < f(a)$.

四、切线方程为 $y = \frac{1-e}{e}x + 1$, 法线方程为 $y = \frac{e}{e-1}x + 1$.

五、证明: (1) 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 从而在 $[a, b]$ 连续. 又 $f(b) = 0 < \frac{4}{5} < 1 = f(a)$, 由介值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = \frac{4}{5}$.

(2) 由 Lagrange 中值定理, 分别考虑区间 $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, b]$, 可得

$$f(\xi_1) - f(a) = f'(\xi_2)(\xi_1 - a), \quad f(b) - f(\xi_1) = f'(\xi_3)(b - \xi_1)$$

注意到 $f(a) = 1, f(b) = 0, f(\xi_1) = \frac{4}{5}, f'(x) \neq 0$, 整理可得

$$-\frac{1}{5} \frac{1}{f'(\xi_2)} = \xi_1 - a, \quad -\frac{4}{5} \frac{1}{f'(\xi_3)} = b - \xi_1$$

两式相加得证.

六、解: 由莱布尼兹公式可直接求出 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 处的 k ($0 < k \leq n-1$) 阶导数为

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)x^{n-k}g(x)\operatorname{sgn}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} F_{n-i}(x)g^{(k-i)}(x)\operatorname{sgn}(x)$$

其中 $F_{n-i}(x)$ 为 x 的 $n-i$ 次单项式. 由导数的定义可有对任意 $0 < k \leq n-1$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 k 阶导数为零. 则 $f^{(n-1)}(x)$ 当 $g(0) = 0$ 时可导, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 n 阶可导.

微积分 I (第一层次) 期中试卷参考答案 2020.11.21

一、1. 不妨设 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$,

$$\text{当 } 0 < |x-1| < \delta \text{ 时, 有 } |\sqrt[3]{x}-1| = \frac{|x-1|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} < |x-1| < \varepsilon.$$

2. 解: 当 n 为偶数时,

$$0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) < \frac{1}{n}.$$

当 n 为奇数时,

$$0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1} \right) - \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}.$$

由夹逼准则即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n} \right) = 0$.

$$3. f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} \sin x}{x} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} x^{2x} (2(1 + \ln x) \sin x + \cos x), & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

4. 首先由归纳法可得 $0 < x_n < 1$, 又由于 $x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n) > 0$, 因此数列 x_n 单调递增有上界, 故收敛. 设极限是 A , 则 $A^2 = A$, 由 $\{x_n\}$ 单调递增可知 $A = 1$.

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y). \quad 6. \text{切线方程为 } y = \frac{1}{2}x + 1, \text{法线方程为 } y = -2x + 1.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$8. \arctan \frac{2020}{n-1} - \arctan \frac{2020}{n+1} = \frac{1}{1+\xi^2} \left(\frac{2020}{n-1} - \frac{2020}{n+1} \right) \sim \frac{4040}{n^2}, \quad \text{其中 } \xi \in \left(\frac{2020}{n+1}, \frac{2020}{n-1} \right),$$

$$\text{故 } \alpha = 2, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2020}{n-1} - \arctan \frac{2020}{n+1} \right) = 4040.$$

二、当 $x_0 = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $f(x_0) = 0$, f 连续.

当 $x_0 \neq k$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, 取有理数序列 $\{x_{n,1}\}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1} = x_0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n,1}) = \sin \pi x_0$; 取无理数序列 $\{x_{n,2}\}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,2} = x_0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n,2}) = 0$. 故函数在 $x = x_0$ 处不连续, 且为第二类间断点.

$$\text{三、解: 当 } a \neq -\frac{1}{2} \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x) + a \ln(1+x^2)}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cos x + \frac{2ax}{1+x^2}}{2x} = \frac{1}{2} + a \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{当 } a = -\frac{1}{2} \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}{x^4} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cos x - \frac{x}{1+x^2}}{4x^3} \\ &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) \cos^2 x - \sin(\sin x) \sin x + \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}}{12x^2} \\ &\stackrel{0}{=} -\frac{1}{12} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\sin x) \cos^3 x - \cos(\sin x) \sin 2x + \frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}}{24x} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

因此, $a \neq -\frac{1}{2}$ 时无穷小主部为 $(\frac{1}{2} + a)x^2$; $a = -\frac{1}{2}$ 时无穷小主部为 $\frac{1}{24}x^4$.

四、 $f'''(2) = 2e^3$.

五、 $f(x) = x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$, $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$;

$n > 1$ 时, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$.

六、证明: 若在 $[0, 1]$ 上, $f(x)$ 不恒为零, 设 $|f(x)|$ 在 $x_0 \in (0, 1]$ 处达到最大值. 由中值定理, 存在 $\xi \in (0, x_0) \subset (0, 1]$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0}$. 从而

$$|f'(\xi)| = \frac{|f(x_0)|}{x_0} \geq |f(x_0)| > \frac{1}{2}|f(x_0)| \geq \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

与题目条件矛盾.

微积分 I (第一层次) 期中试卷参考答案 2021.11.20

一、1. 不妨设 $|x - 2| < \frac{1}{2}$, 则 $\left| \frac{x+2}{x-1} - 4 \right| = \frac{3|x-2|}{|x-1|} < 6|x-2|$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\frac{\varepsilon}{6}, \frac{1}{2}\}$, 使得 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 总有 $\left| \frac{x+2}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$.

2. $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = -1$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1 - \ln(1+x \ln 5)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x \ln 5 - \frac{\ln 5}{1+x \ln 5}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x \ln^2 5 + \frac{\ln^2 5}{(1+x \ln 5)^2}}{k(k-1)x^{k-2}} = \ln^2 5, (k=2)$,

所以无穷小主部为 $(\ln 5)^2 x^2$.

4. 把 y 看成 x 的函数, 方程 $\arctan x + e^y + xy = 0$ 两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{1+x^2} + e^y y' + y + xy' = 0$, 所以 $y' = -\frac{\frac{1}{1+x^2} + y}{x + e^y}$.

5. 解: 法一: $x_2 = \frac{1}{2} \sin x_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 由 $\begin{cases} 0 \leq \sin t \leq t, & t \in [0, 1/2], \\ t \leq \sin t \leq 0, & t \in [-1/2, 0] \end{cases}$ 知,

当 $x_2 = \frac{1}{2} \sin x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ 时, $0 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2$, 此时数列单调下降, 有下界 0, 收敛;

当 $x_2 = \frac{1}{2} \sin x_1 \in [-\frac{1}{2}, 0]$ 时, $0 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n-1} \geq \dots \geq x_2$, 此时数列单调上升, 有上界 0, 收敛.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin x_n$ 得极限 $A = \frac{1}{2} \sin A$, 从而极限为 0.

法二: $0 \leq |x_n| = \frac{1}{2} |\sin x_{n-1}| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1}| = \frac{1}{2^2} |\sin x_{n-2}| \leq \frac{1}{2^2} |x_{n-2}| \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_1|$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} |x_1| = 0$, 由夹逼准则可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$. 所以在 $t=1$ 处, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2}$.

7. 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(99)} &= (e^{-x})^{(99)}(x^2 + 3x + 1) + C_{99}^1(e^{-x})^{(98)}(x^2 + 3x + 1)' + C_{99}^2(e^{-x})^{(97)}(x^2 + 3x + 1)'' \\ &= (-1)^{99}e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + 99 \cdot (-1)^{98}e^{-x}(2x + 3) + \frac{99 \cdot 98}{2}(-1)^{97}e^{-x} \cdot 2 \\ &= e^{-x}(-x^2 + 195x - 9406). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + a_4^x}{4} \right)^{\frac{1}{x}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a_1^x + a_2^x + a_3^x + a_4^x) - \ln 4}{x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + a_3^x \ln a_3 + a_4^x \ln a_4}{a_1^x + a_2^x + a_3^x + a_4^x} \right) = \exp \left(\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \ln a_4}{4} \right) \\ &= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \end{aligned}$$

二、解: 函数在定义域 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1, x \neq -2, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 2, k \in \mathbb{Z}\}$ 上都是连续的;

$$\text{在 } x = 1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\tan(x+2)}{x+2} = \frac{\tan 3}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} -\frac{\tan(x+2)}{x+2} = -\frac{\tan 3}{3},$$

所以 $x = 1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点;

$$\text{在 } x = -2 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} -\frac{\tan(x+2)}{x+2} = -1,$$

所以 $x = -2$ 是第一类间断点中的可去间断点;

$$\text{在 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2, k \in \mathbb{Z} \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} - 2} f(x) = \infty,$$

所以 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2, k \in \mathbb{Z}$ 都是第二类间断点中的无穷间断点.

三、解: (1) 由初等函数的连续性, $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 处均连续;

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (1 + x^2) = 1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处也连续; 进而 $f(x)$ 是定义域 \mathbb{R} 上的连续函数.

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}; \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } f'(x) = 2x.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x - 1}{2x} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 + x^2 - 1}{x} = 0,$$

所以 $f'(0) = 0$.

或者按单侧导数极限理论,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x \sin x}{2x} = 0 = f'_+(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x = 0 = f'_-(0), \text{ 所以 } f'(0) = 0.$$

$$\text{因此 } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \text{ 且 } f'(x) \text{ 连续.} \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

二、解：函数在定义域 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1, x \neq -2, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 2, k \in \mathbb{Z}\}$ 上都是连续的； $x = 1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点； $x = -2$ 是第一类间断点中的可去间断点； $x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2, k \in \mathbb{Z}$ 都是第二类间断点。

三、(1) $f(x)$ 是定义域 \mathbb{R} 上的连续函数. (2) $f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \text{ 且 } f'(x) \text{ 连续.} \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$

四、 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = (\sin 1 + 1)e$. 五、(略)

六、证：由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导，得 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上存在且连续. 由 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最大值，得存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 对 $f'(x)$ 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理知：

$$\begin{aligned} f'(\xi) - f'(0) &= f''(\eta_1)(\xi - 0), \quad \eta_1 \in (0, \xi), \quad f'(1) - f'(\xi) = f''(\eta_2)(1 - \xi), \quad \eta_2 \in (\xi, 1), \\ |f'(0)| + |f'(1)| &= |f'(\xi) - f'(0)| + |f'(1) - f'(\xi)| = |f''(\eta_1)(\xi - 0)| + |f''(\eta_2)(1 - \xi)| \\ &= |f''(\eta_1)|\xi + |f''(\eta_2)|(1 - \xi) \leq M. \end{aligned}$$

七、法一：数列单增，有上界（讲基本极限 e 时证过数列小于 3），则极限存在。

$$\text{固定 } n, \text{ 则对任意的 } m > n, \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right);$$

$$\text{由极限保号性, 令 } m \rightarrow \infty, e \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \text{则数列单增有上界进而收敛, 且 } e \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!};$$

$$\text{另一方面, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}; \quad \text{令 } n \rightarrow \infty, e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!};$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

法二：由带拉格朗日余项的泰勒公式，有 $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$.

$$\text{则令 } x = 1 \text{ 有 } \left| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - e \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{e}{n+1}. \quad \text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

微积分 I (第一层次) 期中试卷参考答案 (2022.11.12)

一、1. (略); 2. 证明：记 $a = \frac{1}{|q|} > 1, \forall \varepsilon > 0$, 注意到

$$|n^3 q^n| = \frac{n^3}{a^n} = \frac{n^3 a^3}{(1+a-1)^{n+3}} < \frac{n^3 a^3}{C_{n+3}^4 (a-1)^4} < \frac{4! a^3}{(a-1)^4} \frac{1}{n}$$

取 $N = \left\lceil \frac{4! a^3}{(a-1)^4 \varepsilon} \right\rceil + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|n^3 q^n| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 q^n = 0$.

二、 1. e . 2. $\frac{3}{2}$. 3. 记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n}$, 则 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x < 4, \\ \frac{x^2}{4}, & x \geq 4. \end{cases}$

4. $e^{-\frac{1}{2}}$. 5. $y^{(n)} = -\frac{n!}{(3-x)^{n+1}} - (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$. 6. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos t(\cot t - t)$.

三、 $x = 0, x = 1, x = 2k (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为间断点, x 为其它实数时 $f(x)$ 连续.

$x = 0$ 为可去间断点, $x = 1$ 为跳跃间断点, $x = 2k$ 为第二类间断点(无穷间断点).

四、 $a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = -1$. $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数为 3, 无穷小主部为 $\frac{2x^3}{3}$.

五、 $|x_{n+1} - 2| < \frac{1}{3^n} |x_1 - 2|$, 即 $|x_{n+1} - 2| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 说明数列 x_n 收敛, 且极限为 2.

六、提示: 对函数 $F(x) = f(x) - x$ 在区间 $[x_1, f(x_1)]$ 上连续用零点定理即可.

七、提示: (1) 对函数 $\phi(x) = f(x) + x - 2$ 在 $[0, 2]$ 上用零点定理;

(2) 对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[0, \xi]$ 以及 $[\xi, 2]$ 上使用拉格朗日中值定理.

八、(1) $a = 1, b = -3$. (2) $f(f(x))$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $F'(0) = \cos 1$.

