微积分 I

肖源明

xym@nju.edu.cn

南京大学数学系

2023 年 9 月

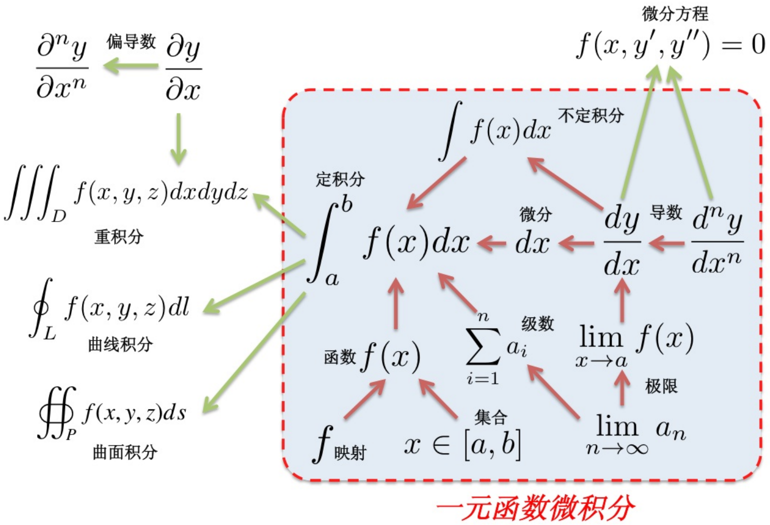
课程简介

1. 课程背景与主要内容
2. 资料与工具
3. 学习方法与要求

微积分（Calculus）

1. **Wikipedia**
   - Latin, *a small stone used for counting*
   - *a branch of mathematics focused on limits, functions, derivatives, integrals, and infinite series*
   - *widespread application in science, economics, and engineering*
2. **John von Neumann** （*The Mathematician, 1947*）
   - *The calculus was the first achievement of modern mathematics, and it is difficult to overestimate its importance.*
3. **李善兰、Wylie.A.** （《代微积拾级》,1859）
   - 我国康熙时，两国本来之 (即莱布尼兹)、奈端 (即牛顿) 二家又创微分、积分二术，……其理大要：凡线面体皆设为由小渐大，刹那中所增之积即微分也，其全积即积分也。

课程内容



$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$
偏导数
$\frac{\partial y}{\partial x}$
$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$
重积分
$\oint_L f(x,y,z)dl$
曲线积分
$\oiint_P f(x,y,z)ds$
曲面积分
微分方程
$f(x,y',y'')=0$
$\int f(x)dx$
不定积分
定积分
$\int_a^b f(x)dx$
微分
dx
$\frac{dy}{dx}$
导数
$\frac{d^n y}{dx^n}$
函数 $f(x)$
$\sum_{i=1}^n a_i$
级数
$\lim_{x\to a} f(x)$
极限
f 映射
$x\in[a,b]$
集合
$\lim_{n\to\infty} a_n$
一元函数微积分

笛卡尔 (《*谈谈方法*》,*(1637)*)

1. 凡是我没有明确地认识到的东西，我决不把它当成真的接受。
2. 把我审查的每一个难题按照可能和必要的程度分成若干部分，以便一一妥为解决。
3. 要按次序进行我的思考，从最简单、最容易认识的对象开始，一点一点逐步上升，直到认识最复杂的对象。
4. 在任何情况下，都要尽量全面地考察，尽量普遍地复查，做到确信毫无遗漏。

参考资料

1. **教科书**
   - 张运清 等，微积分 I（第三版），科学出版社，2020
2. **参考书**
   - 陈仲 等，大学数学（上、下），南京大学出版社，1998
   - 李忠，周建莹，高等数学（上、下），北京大学出版社，2004
   - R. 柯朗，F. 约翰, 微积分和数学分析引论（第一卷），科学出版社，2001
   - 菲赫金哥尔茨，微积分学教程 (第一至三卷)，第 8 版，高等教育出版社，2006
   - 任何有关教学内容和数学历史的书籍
     - E.T.Bell, 数学大师–从芝诺到庞加莱，上海科技教育出版社，2012
     - William Dunham, 微积分的历程: 从牛顿到勒贝格，人民邮电出版社, 2010

- **变速直线运动的瞬时速度**

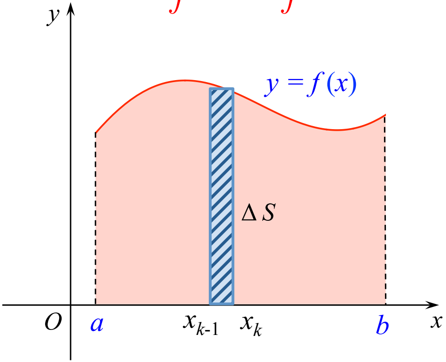
$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

- **曲线在一点处切线的斜率：**

$$k(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- **导数：函数关于自变量的相对变化率**

$$S=\int dS=\int f(x)dx$$



1. **分割：** 沿 x 轴方向分割曲边梯形
2. **取近似：** 用小矩形的面积 ΔS 近似小曲边梯形面积
3. **做和：** 求所有小矩形的面积总和 $\sum \Delta S$
4. **求极限：** $\sum \Delta S \to S$

常见的集合

1. $\mathbb{N}$：自然数集（包含 0）
2. $\mathbb{Z}$：整数集（所有自然数及其相反数）
3. $\mathbb{Q}$：有理数集（$p/q,\ (p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0)$）
4. $\mathbb{R}$：实数集（无理数：有理数集的分割）
5. $\mathbb{C}$：复数集（有序实数对）

注： 通过集合的笛卡尔乘积 “$\times$” 可以定义更 “高维”的集合，例如：

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \triangleq \{(x, y) | \, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

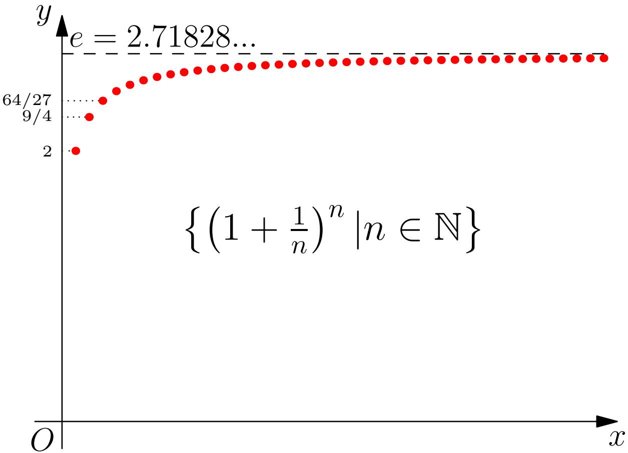
实数集 $\mathbb{R}$ 的一些重要性质

上帝创造了整数，其余所有的数都是人造的。
—— 克罗内克 (1823 ~ 1891)

1. $\mathbb{R}$ **是数域**：任意两个数的和、差、积、商 (除数不为零) 仍然为 $\mathbb{R}$ 中的数。对乘法与加法满足交换律、结合律与分配律。
2. **有序性**：任意两个实数均可比较大小。
3. **完备性**：实数集与数轴上的点之间存在一一对应。
4. **连续性公理（确界原理）**:非空有上界的实数集必有上确界。
   - **上确界**：最小的上界!

注：有理数集不满足连续性公理，即：有理数集的上（下）确界未必是有理数。

$e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \notin \mathbb{Q}$



$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ldots < e$$

映射

教材 P8

设集合 A, B 非空，若对任意 $x \in A$，依照某种对应关系 f，都存在 B 中的唯一元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个映射，记为：$f\colon A \to B$.

映射是事物之间“一对一”或“多对一”的依赖关系。

- **单射：** $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- **满射：** B 中任意元素都可在 A 中找到对应元素
- **一一映射（双射）：** 既是单射，又是满射

无穷集合

可以和自身的某个子集建立起一一映射的集合

一元函数

由实数集到实数集的映射。

$$y = f(x),\ (x \in D)$$

- **定义域：** $D \subset \mathbb{R}$，且 $D \neq \varnothing$
- **对应关系：** $f : D \to \mathbb{R}$

例 1：以下函数中哪些是完全相同的？

$$x, \quad |x|, \quad e^{\ln x}, \quad \ln(e^x), \quad \sqrt{x^2}, \quad \frac{x^2-4}{x-2} - 2,$$

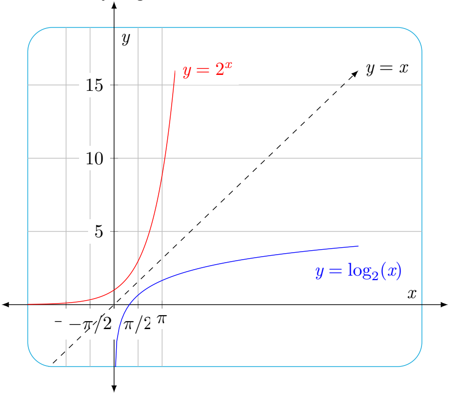
$$\sin(\arcsin x), \quad \arcsin(\sin x), \quad \tan(\arctan x)$$

设 $y = f(u),\ u \in U$, 和 $u = g(x), x \in D$ 是两个函数，并且 $g(D) \subset U$. 这时可以确定一个函数

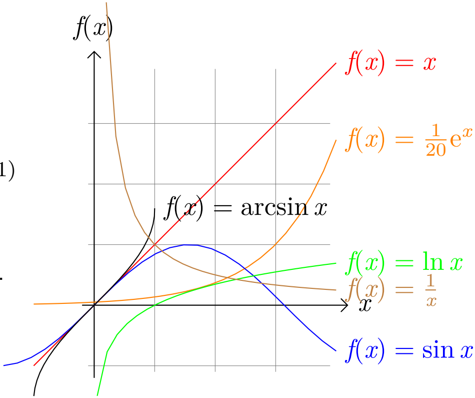
$$y = f(g(x)),\ x \in D.$$

称这个函数为由 f 与 g 构成的复合函数，可记作 $f \circ g$.

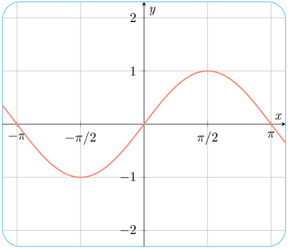
1. 函数 $y = f(x)$ 反函数可定义为使得 $g \circ f(x) = x$ 的函数 $g : f(D) \to D$.
2. 函数 $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 函数图像相同。函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。



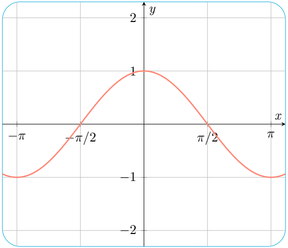
1. **幂函数：** $y = x^a,\ (a \in \mathbb{R})$.
2. **指数函数：** $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$
   ($y = e^x$ 自然指数函数).
3. **对数函数：** $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$
   ($y = \ln x$ 自然对数函数).
4. **三角函数：**
   $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x$.
5. **反三角函数：**
   $\arcsin x,\ \arccos x, \arctan x, \ldots$



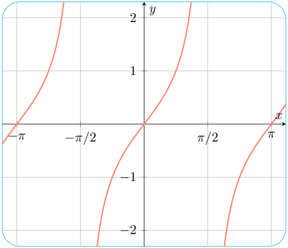
三角函数图像



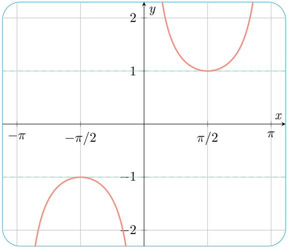
y
2
1
x
−π
−π/2
π/2
π
−1
−2



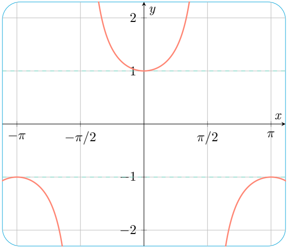
y
2
1
x
−π
−π/2
π/2
π
−1
−2



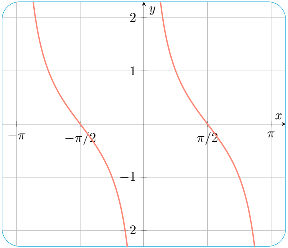
y
2
1
x
−π
−π/2
π/2
π
−1
−2



y
2
1
x
−π
−π/2
π/2
π
−1
−2



y
2
1
x
−π
−π/2
π/2
π
−1
−2



y
2
1
x
−π
−π/2
π/2
π
−1
−2

其他常用函数

1. n 次多项式（函数）：

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ (a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n)$$

- n 次多项式方程 $P_n(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上最多有 n 个根（包含重根），在 $\mathbb{C}$ 上有且仅有 n 个根（包含重根）
- 设 $x_i \in \mathbb{C}(i = 1, 2, \ldots, n)$ 为 $P_n(x) = 0$ 的全部根，则

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

- 已知 $P_n(x)$ 在 $n + 1$ 个点处的值，可以唯一确定 $P_n(x)$

❷ **有理函数：**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{其中} P(x), Q(x) \text{均为多项式函数}$$

❸ **双曲函数：**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \ \ldots$$

$$\boxed{\text{欧拉公式：} \ e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.}$$

一些常用的特殊函数

1. **符号函数**

$$\mathbf{sgn}\, x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

2. **取整函数**

$$y = [\,x\,]$$

$[\,x\,]$ 表示小于等于 x 的最大整数

❸ Dirichlet 函数

$$\boldsymbol{D}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

- $D(x)$ 在实数轴上处处无极限
- $D(x)$ 在实数轴上处处不连续

函数的简单性质

1. **有界性**
2. **单调性**
3. **奇偶性**
4. **周期性**

常用数学符号

- $\forall$ 任意 (for all)
- $\exists$ 存在 (exist)
- $\Rightarrow$ 推出 (deduce)
- $\Leftrightarrow$ 等价 (equivalent)
- $\to$ 趋于 (approach)

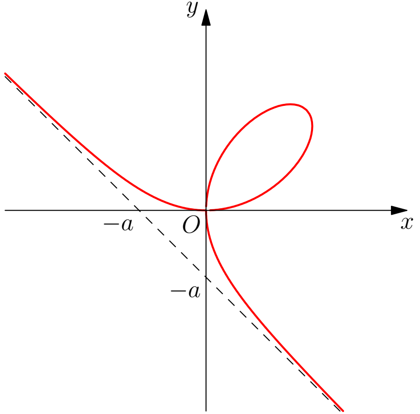
对逻辑的理解

以下命题有何区别?

命题 1: $\forall$ 男生 x, $\exists$ 女生 y, 满足 x 喜欢 y.

命题 2: $\exists$ 女生 y, $\forall$ 男生 x, 满足 x 喜欢 y.

问题：$y = f(x)$ 能否表示平面上的所有曲线?



Descartes 叶形线

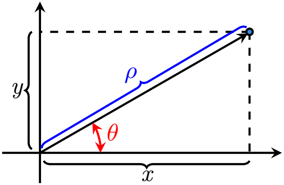
- **参数方程**：

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- **隐函数方程**：

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

极坐标：$(x, y) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \quad (\rho > 0, \theta \in \mathbb{R})$



绝对值与不等式

绝对值的性质

- $|a| \leqslant b, b > 0 \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$. 特别地，$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
- $|a| > b > 0 \Leftrightarrow a > b$ 或 $a < -b$.
- 三角不等式:$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.
- $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

初等不等式

1. 设 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, $b, d > 0$, 则 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.
2. $\sin x < x < \tan x$, $\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
3. 均值不等式: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $\forall a_i \in \mathbb{R}^+$.
4. Cauchy-Schwarz 不等式: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

例 2：证明下列不等式

1. $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant 2$.
2. $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant 2$. (hint: $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1$.)

例 3

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty \ +\infty)$ 上严格单调上升，且 $f(f(x)) = x$, 求证: $f(x) = x$.
2. 设 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，且 $f(0) = f(1)$. 对 $\forall x_0, x_1 \in [0,1]$, $x_0 \neq x_1$，均有 $|f(x_0) - f(x_1)| < |x_0 - x_1|$. 求证: $|f(x_0) - f(x_1)| < \dfrac{1}{2}$.

数列

- $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$
- $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$
- $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

数列的定义

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

问题：数列与集合有哪些不同?

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$: **“随着 n 越来越大，a_n 与 a 的差距将越来越小”**

极限：一种无限靠近的趋势

1. 对于数列而言，无限靠近的趋势意味着什么?
2. 如何从数学上严格表达这种趋势?

定义 1.2.4 (“$\varepsilon - N$” 语言) P17

称数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，是指: $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，**对** $\forall n > N$，**有** $|a_n - a| < \varepsilon$。记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \to a\ (n\to\infty)$$

等价说法

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，对 $\forall n > N$，有 $|a_n - a| < \varepsilon$

以下与数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义等价的说法是：

1. $\exists N > 0$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\forall n > N$，$|a_n - a| < \varepsilon$ ×
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，对 $\forall n > N$，$|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ √
3. $\forall \varepsilon > 0$，仅有有限多个 n，使得 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$ √
4. $\forall \varepsilon > 0$，定有无穷多个 n，使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ ×
5. $\forall \varepsilon > 0$，要使 $|a_n - a| < \varepsilon$，只须 n 充分大 √

定义

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，**对** $\forall n > N$，**有** $|a_n - a| < \varepsilon$

- $a \in \mathbb{R}$ 是一个确定的数（不能是 $\pm\infty$）
- “$\forall \varepsilon > 0$” 应该理解为 “对任意小的 $\varepsilon > 0$”，表示 a_n 可以无限接近 a
- N 是由 ε 决定的数，“存在 $N > 0$” 应该理解为 “存在充分大的 $N(\varepsilon)$”；如果 N 能够满足定义，任意比 N 大的数都能够满足定义；通常 ε 取得越小，N 需要取得越大
- N 并非由 ε 唯一确定，证明时我们只要找到一个合适的 N 即可，不需要找到 “最好” 的 N.
- “$|a_n - a| < \varepsilon$” 可替换为 “$|a_n - a| < C\varepsilon$”，其中 $C > 0$ 是为常数

反面说法

“反面定义”的写法

1. “任意”和“存在”互换
2. “$\geqslant (\leqslant)$”和“$< (>)$”互换

正面：$\{a_n\}$ 以 a 为极限

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使对 $\forall n > N$，有 $|a_n - a| < \varepsilon$

反面：$\{a_n\}$ 不以 a 为极限

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对 $\forall N > 0$，$\exists n_0 > N$，使得 $|a_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$

例

证明：数列 $\{(-1)^n\}$ 无极限。

例

证明：数列 $\{(-1)^n\}$ 无极限。

例

1. 若对任意 $N>0$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?
2. 若存在 $N>0$，对任意 $\varepsilon>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?

1. **唯一性**
   - 若 a, b 同为 $\{a_n\}$ 的极限，则 $a = b$
2. **有界性**
   - 若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ 有界
3. **保号性**
4. **极限的四则运算**

保号性

定理 1.2.3 P17

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > p$，则 $\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，$a_n > p$.

推论

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$a_n \geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0$.
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$\dfrac{|a|}{2} < |a_n| < \dfrac{3|a|}{2}$.
3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且最多有有限个 a_n 小于零，则 $a \geqslant 0$.
4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $a_n > b_n$.

定理 1.2.23 P24

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别以 a,b 为极限，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$
3. 若 $b\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$

例

设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$，证明 $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛，并求其值。

例：计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-6n+1}{3n^2+n+7}.$$

1. **子数列的收敛性**
2. **夹逼准则**
3. **单调有界准则**
4. **柯西收敛准则**

子数列的收敛性

$$\{a_{n_k}\}:\ a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

定理 1.2.6 P18

数列收敛，当且仅当其任意子数列收敛，且极限相同。

反面说法:若存在不收敛的子列，或存在极限不相同的子列，则数列不收敛。

例

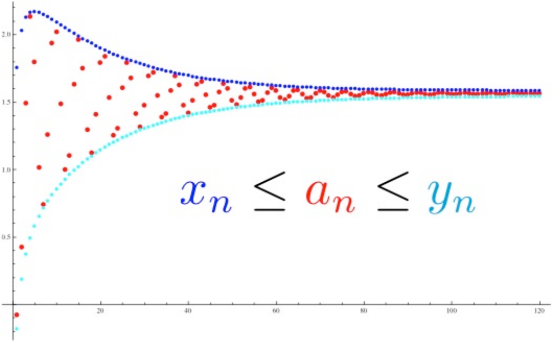
证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a.$

1. 问：当 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 皆收敛时，能断定 $\{x_n\}$ 收敛吗?
2. 问：若子列 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{3n}\}$ 均收敛，能断定 $\{x_n\}$ 收敛吗?
3. 问：若 $\{x_{2n}\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 能断定 $\{x_n\}$ 收敛吗?

夹逼准则（迫敛定理）

定理 1.2.24 P25

设对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant a_n \leqslant y_n$, 且 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛于相同的极限 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.



例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$，其中 $0<k<1$.

例

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$.

单调有界准则

定理 1.2.25 P27

单调有界的数列必收敛。

e 的极限定义 P27-例 1.2.15

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n \to \infty)$$

- $\{a_n\}$ 单调递增，e 为其上确界

柯西收敛判别准则

定理 1.2.27 P31

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，对应有这样的正整数 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m > N, n > N$ 时就有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

- 只要数列中足够靠后的任意两项都无限接近，即能保证数列 $\{a_n\}$ 收敛。

例 1.2.19 P31

证明调和级数 $\left\{ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}$ 发散。

例

设 $a > 0, x_1 > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{a}{{x_n}^3}\right), (n = 1, 2, \ldots),$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

注: 在已知极限存在的情况下，可通过在递推式两边同时取极限，然后解方程求得极限的值。

例

设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

定义，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限。

定理

设 $0 < r < 1$ 和 A 是两个常数，$\{x_n\}$ 是一个给定的数列，只要 $\{x_n\}$ 满足下列两个条件之一：

- $|x_{n+1} - x_n| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|$.
- $|x_{n+1} - A| \leqslant r|x_n - A|$.

那么 $\{x_n\}$ 必收敛，并在第二种条件下，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

注: 若 $\{x_n\}$ 不单调，可试图证明

$$|x_{n+1} - A| \leqslant r|x_n - A|, \qquad \text{其中 } 0 < r < 1.$$

再利用夹逼准则得到极限的存在性。

例：计算下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^n} \quad (a > 1)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}_{n\text{个根号}}$

注: 若极限存在，可由通项公式反推递推式，然后解方程求得极限值

从数列的极限出发

数列与数列极限

- $\{a_n\}$：整序函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$：当 n 趋于无穷时，a_n 向确定值 A 不断逼近的趋势
- 例如：$a_n = \dfrac{1}{n} \to 0(n\to\infty)$

函数与函数极限

- 一般函数：$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$：当 x 趋于无穷时，$f(x)$ 向确定值 A 不断逼近的趋势

函数极限的六种不同趋势

1. $x \to \infty \quad x \to +\infty \quad x \to -\infty$
   - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$
2. $x \to x_0 \quad x \to x_0^+ \quad x \to x_0^-$
   - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

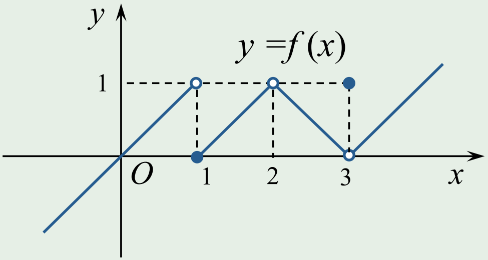
定义 1.2.10（“$\varepsilon-K$” 语言） P21

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\forall x>K,|f(x)-A|<\varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists K<0,\forall x<K,|f(x)-A|<\varepsilon$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$
   - $\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\forall|x|>K,|f(x)-A|<\varepsilon$

定义 1.2.8 (“$\varepsilon - \delta$” 语言) P19

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$
3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$
   - $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon$

例：根据图形判断极限的存在性



1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $=1$
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $=0$

1. 为什么在定义中要求 $0<|x-x_0|<\delta$，而不是 $|x-x_0|<\delta$?
2. $f(x_0+0), f(x_0-0)$ 与 $f(x_0)$ 是何关系? 无关

例：证明

1. $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a,\ (a>0)$.

函数极限与数列极限的关系

定理 1.2.14（Hiene 定理） P22

$\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_n \to \Delta(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

- 以上 Δ 对应于函数极限的六种不同趋势
- **用途一：** 证明极限不存在性
- **用途二：** 利用函数极限计算对应的数列极限

例 1.2.9 P22

证明：$f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时无极限。

例

证明 Dirichlet 函数在任意点处无极限。

函数极限的基本性质

1. **唯一性**
2. **有界性**
3. **保号性**
4. **四则运算**

唯一性

定理 1.2.10 P21

函数极限若存在，必唯一。

定理 1.2.9 P21

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $f(x)$ 当 x 充分大时有界。
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界。

保号性

定理 1.2.11 P22

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > p$，则 $f(x)$ 当 x 充分大时大于 p.
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > p$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内大于 p.

函数极限的四则运算

定理 1.2.23 P24

若函数极限存在，则四则运算符号可以与极限符号交换次序。

问题讨论

若 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，则当 $x \to x_0$ 时，以下哪些函数必无极限：

$$f(x) + g(x), \quad f(x)g(x), \quad [g(x)]^2, \quad \frac{g(x)}{f(x)}$$

复合函数的极限

定理

设有复合函数 $y=f[g(x)]$，其中

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\qquad \lim_{u\to u_0} f(u)=A,$$

在 x_0 附近 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

注：以上结论可以推广到 x 趋于无穷的情形

函数极限的夹逼定理

定理 1.2.24 P25

设在 x_0 的某领域内，恒有

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

例 1.2.15 P28-29

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

例：计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)(a>0)$

例 1.2.13 P26

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

例：计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}(n\neq 0)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$
6. $\lim\limits_{x\to \pi}(x-\pi)\tan\dfrac{x}{2}$

复习：函数极限

1. **六种不同的趋势：**
   - $x \to \infty,\ +\infty,\ -\infty,\ x_0,\ x_0^+,\ x_0^-$
2. **极限的"$\varepsilon-\delta$"定义**
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A: \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$
   - 证明思路:首先将考虑 $|f(x) - A|$ 作适当的变形和放大，使之成为依赖于 $|x - a|$ 的比较简单的一个量，再让放大后的表达式小于给定的 ε, 从而决定要找的 δ.
   - $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 不以 A 为极限: $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x^* \in \mathring{N}_\delta(x_0), |f(x^*) - A| \geqslant \varepsilon_0$
3. **函数极限与数列极限的关系**
   - $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to \Delta, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$
4. **函数极限的基本性质**
   - 唯一性、有界性、保号性、四则运算

$f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 当 $x\to 0$ 时无极限

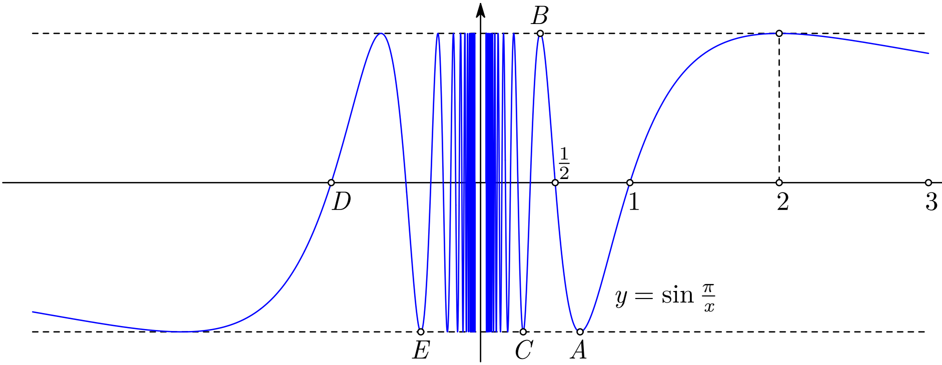
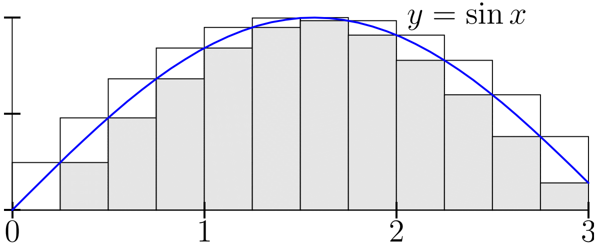


图: Graph of $y=\sin\frac{\pi}{x}$ for $-3<x<3,\ \ x\neq 0$.

夹逼准则的例

研究计算曲边三角形的面积

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x.$$



无穷小

定义 1.2.12 P23

$f(x)$ **是** $x \to \Delta$ **时的无穷小：** $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = 0$

- Δ：∞，$+\infty$，$-\infty$，x_0，x_0^+，x_0^-

柯西 (《国立工科大学的分析教程》, *1821*)

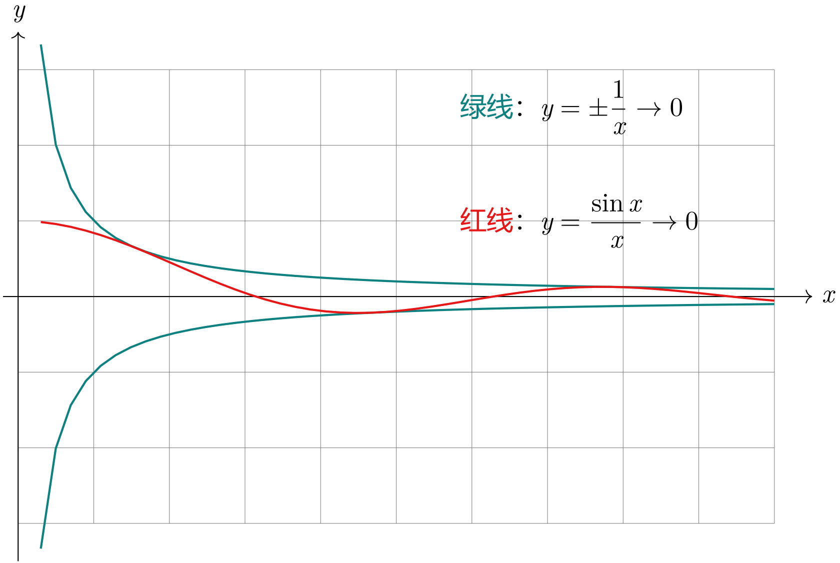
......如果变量通过一串数值而无限减少，以至小于任意给定的数，则把这个变量叫做无穷小量，即这种变量以零为极限......

无穷小的性质

定理 1.2.16-1.2.21 P23

1. 在同一过程中的有限个无穷小之和（积）仍为该过程中的无穷小
2. 同一过程的有界函数中与无穷小之积仍为该过程中的无穷小
3. $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - A$ 是 $x \to \Delta$ 时的无穷小

无穷小量与有界量的乘积



无穷大

定理 1.2.22 P24

$f(x)$ 是 $x\to\Delta$ 时的无穷大： $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{1}{f(x)}=0$，即：

$$\lim_{x\to\Delta}f(x)=\pm\infty$$

思考：无穷大与无界是什么关系？

无穷小的比较

定义 1.2.14（无穷小量的阶） P32

设 α, β 均为同一过程中的无穷小，$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A$ 为常数，则

1. $A = 0$，称 α 为 β 的**高阶（高级）无穷小**，记为：$\alpha = \circ(\beta)$
   - 无穷小：$\alpha = \circ(1)$
2. $A \neq 0$，称 α 为 β 的**同阶（同级）无穷小**
   - 一般地，若 α 是 β^k 的同阶无穷小量（$k > 0$），则称 α 是 β 的 k 阶无穷小量
3. $A = 1$，称 α 为 y_2 的**等价无穷小**，记为：$\alpha \sim \beta$

等价无穷小的性质 P32

1. 自反性：$\alpha \sim \alpha$
2. 对称性：$\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$
3. 传递性：$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

定理 1.2.31 P32

设在变化过程 $x \to \Delta$ 中，α 与 β 是等价无穷小量，若 $\lim\limits_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g}$ 存在，则

$$\lim_{x\to\Delta} \frac{f\alpha}{g} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g} \cdot \lim_{x\to\Delta} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\Delta} \frac{f\beta}{g}.$$

注： 极限“乘法因子”中的等价无穷小可相互替代

问题：同为无穷小，哪个趋于零更快？

常用的无穷小替换：当 $x \to 0$ 时

1. $x \sim \sin x \sim \tan x$
2. $x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
3. $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
4. $(1+x)^a - 1 \sim ax$
5. $\ln(1+x) \sim x$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$

例

当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，求 k.

求极限过程中，加减项不能随意用等价无穷小代替！

等价无穷小 P32

设 α_1, α_2 为同一过程中的无穷小，若 $\lim \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$, 称 α_1 为 α_2 的**等价无穷小**，记为：$\alpha_1 \sim \alpha_2$.

注： $\beta \sim \alpha$ 等价于 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理 1.2.31 P33

设 $\alpha_1 \sim \alpha_2$, $\beta_1 \sim \beta_2$, 则

$$\lim \alpha_1 \cdot u = A \Leftrightarrow \lim \alpha_2 \cdot u = A,$$

$$\lim \frac{\alpha_1 \cdot u}{\beta_1 \cdot v} = B \Leftrightarrow \lim \frac{\alpha_2 \cdot u}{\beta_2 \cdot v} = B.$$

注： 极限“乘法因子”中的等价无穷小可相互替代。

运算法则

高阶无穷小的运算

设 m, n 为正整数，当 $x \to 0$ 时，

- $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min(m, n)$ (加减法时低阶“吸收”高阶);
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$ (乘除法时阶数“累加”);
- $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m)$, $k \neq 0$ 且为常数 (非零常数不影响阶数).

注意：$o(x^m) - o(x^m) \xcancel{=} 0$.

例

假设在变化过程 $x \to x_0$ 中，α 与 β 是等价无穷小量，求下列变量的极限（设 $\alpha \neq \beta$）

1. $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha+\beta}$
2. $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$
3. $\dfrac{\alpha-\alpha\beta}{\alpha+\beta}$
4. $\dfrac{1-\cos\beta}{\alpha\beta}$
5. $\dfrac{\sqrt{\cos\alpha}-1}{\alpha\beta}$
6. $\dfrac{\ln\sqrt{1+\alpha}}{\beta+\alpha}$
7. $(1\pm\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$
8. $\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$

极限计算举例

例：计算极限

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^{\tan x}-a^{\sin x}}{x^3}$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq1$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

注： 求极限前先做两件事：

- 看是否有极限不为零的因式，直接代入求值。
- 利用等价无穷小进行因式化简。

函数的连续性

定义 1.3.1 P36

函数 $f(x)$ 在 x_0 连续： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- $f(x)$ 在 x_0 有定义
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在
- $f(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$

例

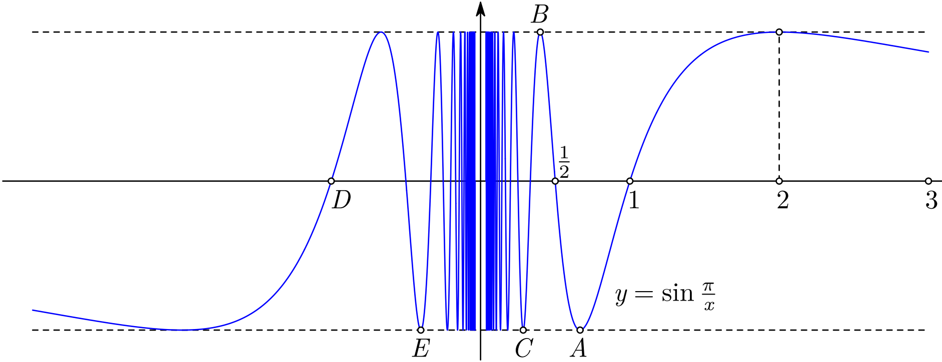
如果 f 为连续函数，则 $|f|$ 也是连续函数。

定义 1.3.4 P40

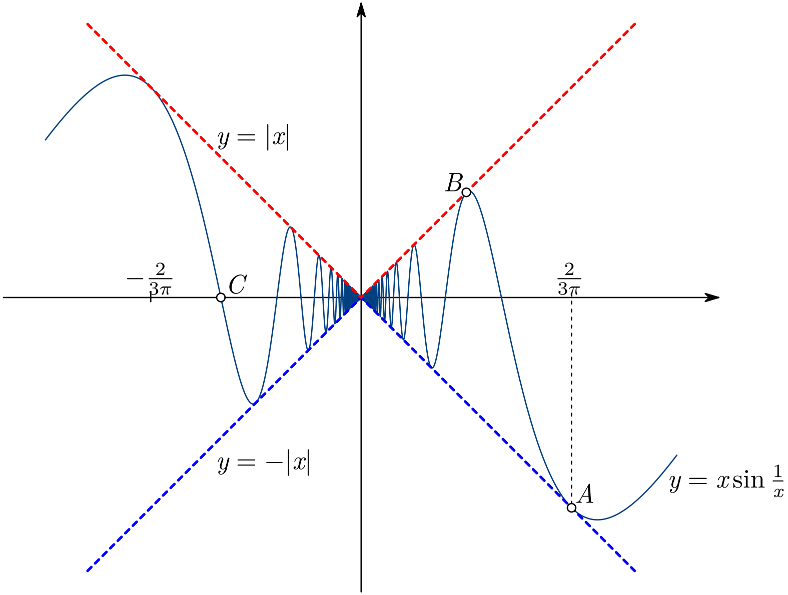
设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，对其分类如下：

1. **第一类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 均存在
   - 跳跃间断点：$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$
   - 可去间断点：$f(x_0)$ 无定义，或 $f(x_0) \neq f(x_0^+) = f(x_0^-)$
2. **第二类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 不同时存在
   - 无穷间断点：某个单侧极限趋于无穷
   - 振荡间断点：某个单侧极限不存在

振荡间断点



可去间断点



定理 1.3.5-1.3.10 P38-39

1. **四则运算：** 四则运算仍保持函数的连续性
2. **复合函数：** 连续函数的复合运算可以和极限运算交换次序
3. **反函数：** 连续函数的反函数也连续
4. **初等函数：** 初等函数在其定义域内连续

例

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续，证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

也在 $[a, b]$ 上连续。

例

讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型。

例

讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型。

例

若 $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)}{\sin^2 x}$ 的可去间断点，求 a,b 的值。

小结

1. **函数连续的概念：** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
   - $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.
   - $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
   - $f(x_0{}^-) = f(x_0) = f(x_0{}^+)$ (既左连续又右连续).
   - $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得只要 $|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$.
   - 对任意收敛到 x_0 的点列 x_n, 均有 $f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty)$.
2. **连续函数的基本性质：** 四则运算、复合、求逆、初等函数
3. **间断点的分类：**
   - **第一类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 均存在
     - 跳跃间断点：$f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$
     - 可去间断点：$f(x_0)$ 无定义，或 $f(x_0) \neq f(x_0^+) = f(x_0^-)$
   - **第二类间断点：** $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 不同时存在
     - 无穷间断点：某个单侧极限趋于无穷
     - 振荡间断点：某个单侧极限不存在

闭区间套定理

定理 习题 1.3-13

设闭区间序列 $[a_n, b_n](n = 1, 2, \ldots)$ 满足:

1. $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

则存在唯一实数 x，使得 $x \in [a_n, b_n](n = 1, 2, \ldots)$.

连续函数在闭区间上的性质

1. **最值定理**
   - 有界性
2. **介值定理**
   - 零点存在性

最值定理

定理 1.3.14 P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到最大和最小值。

推论 P41

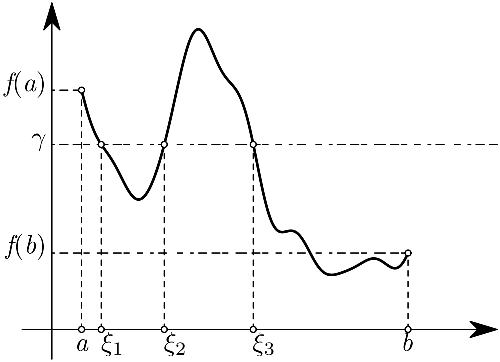
设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

例

设 $f(x) \in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

定理 1.3.12 P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，M, m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值，则对任意 $\gamma \in [m, M]$，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \gamma$.



推论（零点定理/零点存在性） P41

设 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有零点。

零点存在性定理的推广

1. 设 $f(x) \in C(a,b)$，且 $f(a+0)f(b-0) < 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点。
2. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$，且 $f(-\infty)f(+\infty) < 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有零点。

例

设 $a_0 \neq 0$，证明：以下方程至少有一个实根

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

例

1. 设 $f(x) \in C[0\,,\,2a]$, $f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi \in [0\,,\,a]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + a)$. (2009 期中考题) $F(x) = f(x) - f(x+a)$ $x = 0,\ a$
2. 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数，a 是一个实数，试证明存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f(\xi + a) = f(\xi)$. (2016 期中考题) 取 x, 使得 $f(x)$ max/min
3. 设非负函数 $f \in C[0, 1]$, 且 $f(0) = f(1) = 0$. $a \in (0, 1)$ 是一个实数，证明：存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $x_0 + a \in [0, 1]$ 且满足 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.
4. 上题若去掉函数 f 非负的条件，结论是否还成立? 不成立

往年极限考题-参考答案

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right) = \ln a$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1004}{n}\right) = e^{2008}$
6. $\lim\limits_{x\to1} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} = \frac{m-n}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\cot^2 x} = e^{\frac{1}{3}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x} - e^{x^2}}{x^2} = -\frac{2}{3}$
9. $\lim\limits_{x\to0+} \frac{x^{\sin x}-1}{x^x-1} = 1$
10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x\sin x - x(1+x)}{\sin^3 x} = \frac{1}{3}$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = -1$
12. $\lim\limits_{x\to0+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$
13. $\lim\limits_{x\to0+} (\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}} = e$
14. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{5}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = 1$
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = c,\ 0<a<b<c$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$
18. $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$
19. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left[\frac{k}{n^2} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n+i)^2}\right] = k(k+1)$

本章常见题型

1. 函数的概念（分段函数，复合函数等）
2. 极限的概念与性质
3. 求极限或已知极限求式中的参数
4. 求递推数列的极限
5. $1^{\infty}, \frac{0}{0}$ 等重要极限类型
6. 无穷小阶的比较
7. 讨论函数的连续性，判断间断点的类型
8. 利用闭区间连续函数的性质证明问题

求极限的方法小结

1. 利用定义
2. 利用极限的四则运算和变量代换 (复合)
3. 利用函数连续性，Heine 定理
4. 三个准则（主要夹逼准则和单调有界准则）
5. 两个重要公式-1^∞, $\frac{0}{0}$
6. 等价无穷小量的代换，Landau 符号-$o(x)$
7. 还有 (**暂时不必用到**)：洛必达法则，泰勒公式，定积分......
8. 若待求极限为有限项之和，可先运用裂项相消、求和公式、归纳法等求得和函数再求极限

若干基本极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} xq^x=0,\ |q|<1$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0,\ |q|<1$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\ a>0$;
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;
9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0$;
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\ a>1,\alpha>0$;

函数在一点处的导数

定义 2.1.1 P46

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称其为$f(x)$ **在 x_0 处的导数**，记为

$$f'(x_0),\qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\qquad y'_x|_{x=x_0}$$

例 习题 2.1-1

假设 $f'(x_0)$ 存在，则

1. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\underline{\quad -f'(x_0)\quad}$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\underline{\quad 2f'(x_0)\quad}$
3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\underline{\quad 2f'(x_0)\quad}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=\underline{\quad f'(x_0)\quad}$

思考:若以上某个极限存在，是否就意味着 $f(x)$ 在 x_0 可导?

导数的物理/几何意义

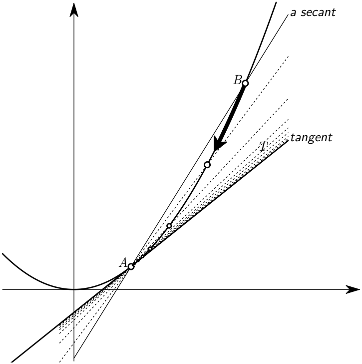
- **变速直线运动的瞬时速度**

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

- **曲线在一点处切线的斜率：**

$$k(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **导数：函数关于自变量的相对变化率**



曲线的切线

已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在该点的切线和法线方程。

例

函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 是否可导?

思考:可导等价于有切线吗？（否）

一些常用函数的导函数

1. $f(x) = C\ (C\text{为常数})$ $\qquad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n\ (n \in \mathbb{Z})$ $\qquad f'(x) = nx^{n-1}\ (n \neq 0)$
3. $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$
4. $f(x) = \ln x$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = \sin x$ $\qquad f'(x) = \cos x$
6. $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$

例

1. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.
2. 证明：可导的奇函数的导函数是偶函数，可导的偶函数的导函数是奇函数。
3. 证明：可导的周期函数的导函数是周期函数。

导数存在的条件

定理 2.1.1 P47

$f(x)$ 在 x_0 可导，当且仅当在该点的左、右导数存在且相等。

思考:$f(x)=|x|$ 在原点是否可导?

定理 2.1.2 P50

$f(x)$ 在一点可导，则一定在该点连续。

以直代曲:可导点附近，函数曲线与其切线近似相等

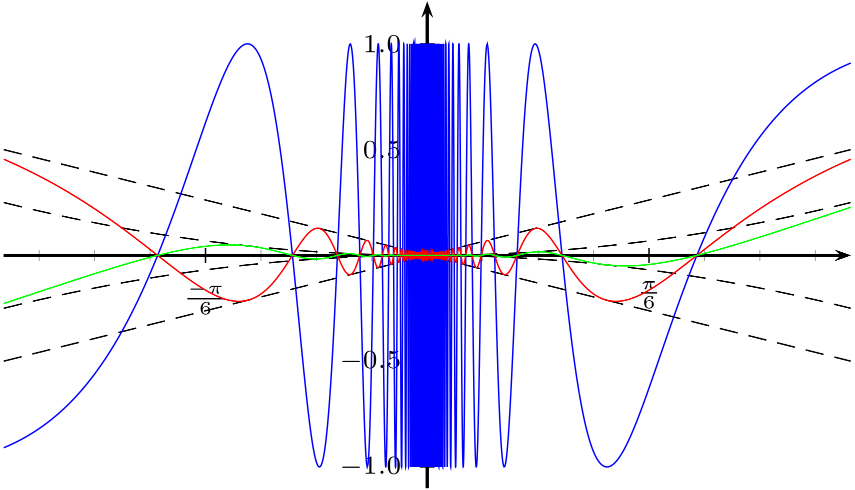
例

研究函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性和可导性。

函数 $x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right)$ 的图像



复习

1. **导数的概念：**
   - $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
2. **常用初等函数的导函数**
   - $C,\ x^n,\ e^x,\ \ln x,\ \sin x,\ \cos x$
3. **函数可导的条件**
   - 可导必连续
   - 以直代曲：$\Delta y = y'\Delta x + \circ(\Delta x),\ (\Delta x \to 0)$

例

设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$，试确定常数 a, b 使 $f(x)$ 处处可导，并求 $f'(x)$.

例

求过点 $(2,0)$ 且与曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 相切的直线方程。

定理 2.1.4 P51

设 $u(x), v(x)$ 均在 x 可导，则

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$

例：计算以下函数的导函数

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 - \dfrac{6}{x}$
2. $f(x) = x^3 \cos x \sin x$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
5. $f(x) = \tan x$ $\qquad f'(x) = \sec^2 x$
6. $f(x) = \sec x$ $\qquad f'(x) = \sec x \tan x$

反函数求导法则

定理 2.1.5 P53

设 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $x=\varphi(y)$ 在 y 处可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$，则 $y=f(x)$ 在点 $x=\varphi(y)$ 处可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

例：计算下列函数的导函数 P53-54

1. $f(x)=\arcsin x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $f(x)=\arctan x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

复合函数的求导法则

定理 2.1.6(链式法则) P54-55

设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且

$$y'_x = f'(u)\varphi'(x)$$

例：计算下列函数的导函数

1. $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ $\qquad y'=a^x\ln a$
2. $y=x^a$ $\qquad y'=ax^{a-1}$

例：计算下列函数的导函数

1. $y = \sin(3x+2)$
2. $y = e^{x^2}$
3. $y = x^x$
4. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}\ (a>0)$
5. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
6. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
7. $y = e^{x^2} \sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

例

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某邻域内有定义，试讨论 “极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在” 与 “导数 $f'(x_0)$ 存在” 的关系。

定义 2.1.4 P61

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'_x$$

例

求函数

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 10$$

的各阶导函数。

注： 若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则 $P^{(n+1)}(x) = 0$

例：求以下函数的 n 阶导数

1. $y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad y^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
2. $y = \sin x$ $\qquad y^{(n)}(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$
3. $y = xe^x$ $\qquad y^{(n)}(x) = (n + x)e^x$
4. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad y^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

Leibniz 公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)$$

例

设 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

例

设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

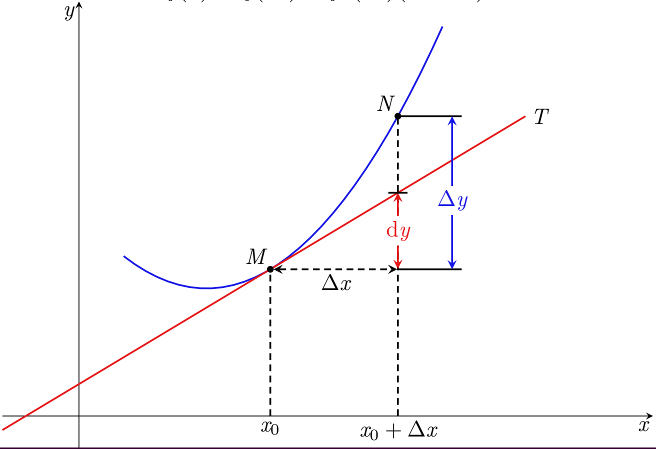
“以直代曲”与局部线性化

若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\circ(x-x_0)\quad (x\to x_0)$$

即：在 x_0 附近，$f(x)$ 可以近似地表示为一个线性函数

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$



定义 2.2.1 P70

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若存在与 Δx 无关的常数 A，使得 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 满足

$$\Delta y = A\Delta x + \circ(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$$

则称 $y=f(x)$ 在 x_0**可微**，$A\Delta x$ 称为$y=f(x)$ **在** x_0 **处的微分**，记为

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}$$

可微与可导的关系

定理 2.2.1 P70

设 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，当且仅当 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，且

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$$

例

求 $y=\sin x$ 当 $x=\dfrac{\pi}{4}, \mathrm{d}x=0.1$ 时的微分。

微分运算法则

定理 2.2.2（四则运算） P72

设 $u(x), v(x)$ 可导，则

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$

定理 2.2.3（复合运算） P72

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 均可微，则 $y = f[\varphi(x)]$ 可微，

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

例

求函数 $y = e^{2x-1}\sin x$ 的微分。

例

试将下列微分形式表示为某一函数的微分

1. $x^2\mathrm{d}x$
2. $e^{2x}\mathrm{d}x$
3. $\cos(5x-1)\mathrm{d}x$
4. $\dfrac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x$

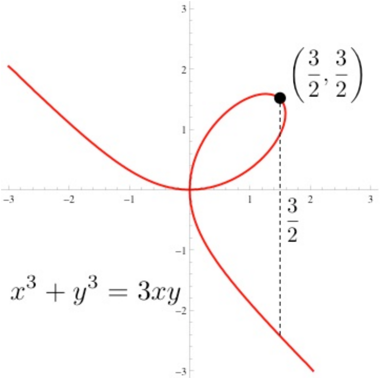
隐函数： 由形如 $f(x, y) = 0$ 的方程所确定的函数

例

设 $y = y(x)$ 是由方程

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

所确定的隐函数，满足 $y(3/2) = 3/2$，求其在点 $(3/2, 3/2)$ 处的切线方程。



利用隐函数求导法简化求导运算

例

求 $y = \dfrac{(x^2+2)^2}{(x^4+1)(x^2+1)}$ 的导数。

例

证明过曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任一点 (x_0, y_0) 的切线在两坐标轴上的截距之和为常数。

参数方程求导法则

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

确定，$x=\varphi(t)$ 可逆，则

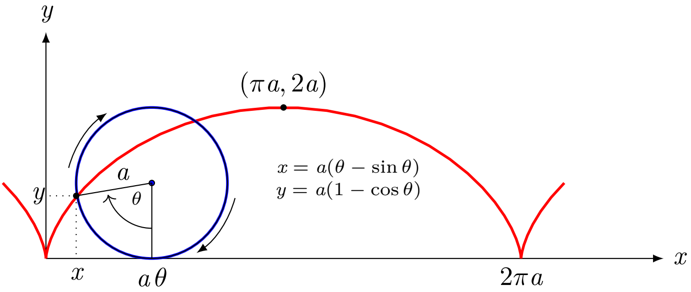
$$y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例

求椭圆 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程。

例

已知 $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$，求 $y''(x)$。



例

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在 $x=0$ 的某邻域内 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x^2)-3f(1-\cos x)=x^2+o(x^2),$$

试求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程。

例

设 $y=\sin(x+y)$, 求 y''.

例

设 $f(x)$ 处处可导，$f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$. (不要用洛必达法则!)

内容与要求（§2.3 ）

- 熟练掌握 Rolle 定理和 Lagrange 中值定理
- 理解 Cauchy 中值定理
- 熟练掌握 L'Hospital 法则

Fermat 引理

定理 2.3.1 P77

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $N(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导。如果对任意 $x \in N(x_0)$，有 $f(x) \geqslant f(x_0)$ (或 $f(x) \leqslant f(x_0)$)，那么 $f'(x_0) = 0$.

例

设 $f \in C[0,+\infty)$，$f \in D(0,+\infty)$，$f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，求证：存在 $\xi > 0$ 使 $f'(\xi) = 0$.

例（Darboux 定理）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件，且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，则 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个根。

定理 2.3.2 P77

若函数 $f(x)$ 满足:

1. 在区间 $[a,b]$ 上连续
2. 在区间 (a,b) 内可导
3. $f(a)=f(b)$

则: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0.$

注: 以上三个定理条件缺一不可!

例

证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根。

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理条件, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=f(\xi)$ 成立。

辅助函数的构造

例

设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得:

$$f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

- $y' + \lambda y = 0$: $F(x) = e^{\lambda x} y$
- $xy' + ny = 0$: $F(x) = x^n y$
- $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$: $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

例

证明：对函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$，至少存在一点 $\xi \in (1,3)$，使得 $f''(\xi) = 0$.

推论（Rolle 定理的高阶推广）

设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_n]$ 上有 $n-1$ 阶连续导数，在 (x_0, x_n) 内 n 阶可导，且

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n), \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n),$$

则存在 $\xi \in (x_0, x_n)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

定理 2.3.3 P78

若函数 $f(x)$ 满足:

1. 在区间 $[a, b]$ 上连续
2. 在区间 (a, b) 内可导

则：存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

推论 2.3.4 P79

导数恒为零的函数取值恒为常数。

例 P80

证明：$\dfrac{\ln x - \ln x_1}{x - x_1} < \dfrac{1}{x_1}, \quad (0 < x_1 < x)$

例

证明不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x),\ x > 0$$

例

证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有唯一实根。

例

设 $f(x) \in C[a, b]$，且 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导，连接函数曲线两端点的直线在 (a, b) 内至少与曲线存在一个交点，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f''(\xi) = 0$.

思考:若端点连线与函数曲线存在多个交点，能够得到什么结论?

导函数的特性

- 若$f(x)$ 在 x_0 点左或右连续，导函数的左或右极限存在，则 $f(x)$ 在 x_0 点左或右可导，并且 $f(x)$ 在 x_0 点左或右导数等于 $f'(x)$ 的左或右极限，即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x), \quad f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

- $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上未必连续，但一定具有介值性 (注意与连续函数的介值性区分)。
- 若函数 $f(x)$在区间 I 上可导 (意味着 I 上处处导数存在)．则 $f'(x)$ 在区间 I 内至多有第二类间断点。
- 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定严格单调。

方程根的研究：函数零点与导数零点之间的关系

- 若函数 $f(x)$ 有 n 个（不同）零点，则 $f'(x)$ 至少有 $n-1$ 个（不同）零点。
- 若函数 $f(x)$ 有 $n+1$ 个零点，则 $f^{(n)}(x)$ 至少有一个零点。
- 若函数 $f^{(n)}(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有 n 个零点。

例

证明方程 $\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\cdots+x+1=0$ 当 n 为偶数时无实根，当 n 为奇数时仅有一实根。

例

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导且 $|f'(x)| \leqslant M$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

例

设 $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D(0,1), f(0)=0, f(1)=1$, 求证:

- 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1-\xi$.
- 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

Cauchy 中值定理

定理 2.3.6 P80

若函数 $f(x), \varphi(x)$ 满足：

1. 在 $[a, b]$ 上连续
2. 在 (a, b) 内可导，且 $\varphi'(x) \neq 0$

则：存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

注： Cauchy 中值定理可视为参数化的 Lagrange 中值定理

例

设 $0 < a < b$，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，证明:

1. 存在 $\xi \in (a, b)$，使得:

$$f(b) - f(a) = \ln \frac{b}{a} \cdot \xi f'(\xi)$$

2. 存在 $\eta \in (a, b)$，使得:

$$2\eta[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\eta)$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：对任意 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

提示： 构造辅助函数

$$F(t)=f(t)-\frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)}f(x)$$

不定式（型）极限

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}},\quad \frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}},\quad \mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}},\quad \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty},\quad \boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty},\quad \boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}},\quad \mathbf{0}^{\mathbf{0}}$$

注： 以上 $0, 1, \infty$ 均表示一种趋势，而不是具体的值!

例：计算极限

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2+2^x)^{1/x}$

定理 2.3.7（$0/0$ 型不定式极限） P81

设函数 $f(x), g(x)$ 满足:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$
2. $f(x), g(x)$ 在 a 右侧可导，即 $f'(x)$，$g'(x)$ 存在, 且 $g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或等于 ∞）

则

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (或等于}\infty)$$

注：以上结论可以直接推广到 ∞/∞ 不定式的情形（**P83-定理 2.3.9**）

例：计算极限

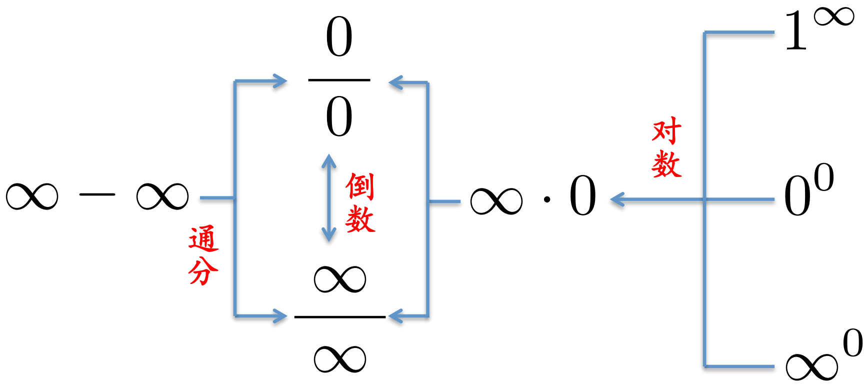
1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\tan^3 x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}(n\in\mathbb{N},\lambda>0)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}(\alpha>0)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

其他不定式极限

例

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{4}{\pi}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right) \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{2}{3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \cdots\cdots \frac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots e^{\frac{1}{6}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right) \cdots\cdots \frac{2}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2^x)^{1/x} \cdots\cdots\cdots\cdots 2$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) \cdots -\frac{1}{4}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \cdots\cdots\cdots\cdots 1$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4} \cdots\cdots\cdots \frac{1}{12}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3} \cdots\cdots 6$

不定式极限的相互转换


$\frac{0}{0}$
倒数
$\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$
通分
$\infty \cdot 0$
对数
1^{∞}
0^{0}
∞^{0}

小结

1. **中值定理**
   - Rolle 定理
   - Lagrange 中值定理

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b)$$

   - Cauchy 中值定理

2. **L'Hospital 法则**

$$\lim_{x \to *} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to *} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

常用无穷小替换：$x \to 0$ 时

1. $x \sim \sin x \sim \tan x$
2. $x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
3. $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
4. $(1+x)^a - 1 \sim ax$
5. $\ln(1+x) \sim x$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$

例：计算极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x} - e^{x^2}}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^{\sin x}-1}{x^x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$

极限中的“加法因子”不能进行无穷小替换！

例 16-17 期中

设 $f(x) = x - (ax + b\sin x)\cos x$, 并设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零，求常数 a, b 及此极限值。

例 15-16 期中

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(e^{1/n} - 1)\right]^{\frac{1}{1-f(1/n)}}$.

例 04-05 期中

设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内二阶连续可导，$f'(a) \neq 0$, 试求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(x)}\right).$$

1. **内容与要求**（§2.3 ）
   - 理解多项式逼近的概念
   - 掌握 Taylor 公式的定义
   - 掌握求函数 Taylor 展开式的方法

$P(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式

- $P(x)$ 是 n 次多项式
- $y = P(x)$ 在 x_0 处与 $y = f(x)$ 处至少 n 阶相切

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- 给定 $f(x)$ 和 x_0，$P_n(x)$ 唯一确定
- 若 $x_0 = 0$，称为$f(x)$ **的 n 阶 Maclaurin 多项式**

例：求 Maclaurin 多项式 P88

1. $f(x) = e^x$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

2. $f(x) = \cos x$

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

误差估计 (1)

定理 2.3.11 P86

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，$P(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式，则当 $x \to x_0$ 时

$$|f(x) - P_n(x)| = \circ[(x - x_0)^n]$$

- **余项：** $R_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$
- **带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式：**

$$f(x) = P_n(x) + \circ[(x - x_0)^n]$$

定理 2.3.12（Taylor 中值定理） P87

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内 $n+1$ 阶可导，对该邻域内任一点 x，存在介于 x_0 和 x 之间的一点 ξ，满足

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- 上式称为**带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式**

$$f(x_0+h)=P_n(x_0+h)+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},(0<\theta<1)$$

推论

若存在常数 $C>0$，使当 $x\in(a,b)$ 时，恒有

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant C,\ \ n=0,1,2,\ldots$$

则

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

- Taylor 多项式的次数越高，逼近精度越高

常用的 Maclaurin 公式 P93-94

❶ $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \ (0 < \theta < 1, x \in \mathbb{R})$ .... 应用

❷ $\sin x = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

$+(-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1} \ (0 < \theta < 1, x \in \mathbb{R})$ .... 图形

❸ $\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$+(-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2} \ (0 < \theta < 1, x \in \mathbb{R})$

常用的 Maclaurin 公式 P88

❹ $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1, x>-1)$$ ········ 应用

❺ $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$(0<\theta<1, x\neq -1)$ ········ 应用

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ 的 Taylor 展开

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

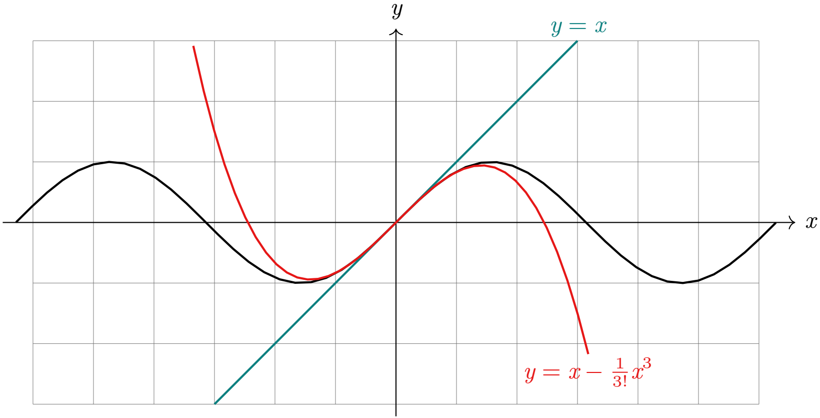
$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)\,!}(1+\theta\, x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, \ (0<\theta<1).$

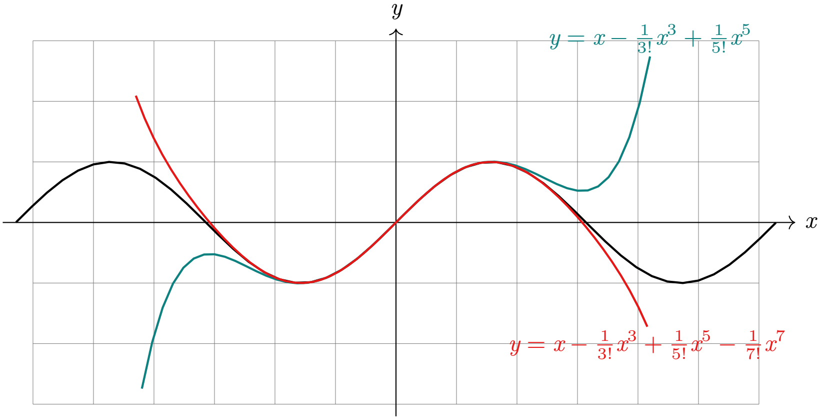
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



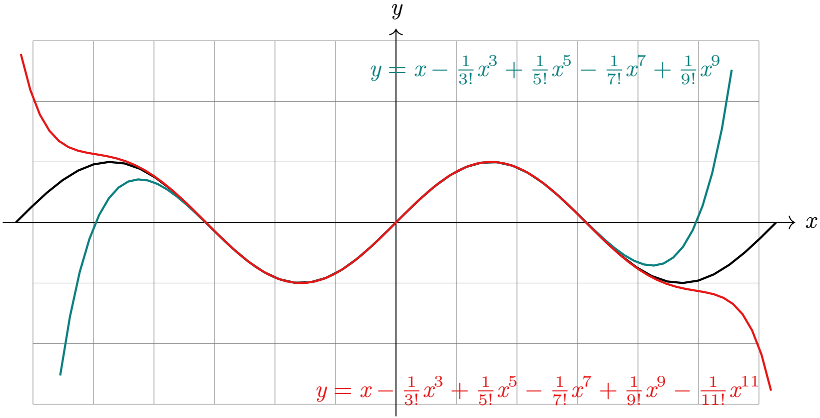
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



返回

多项式函数的 Taylor 展开

定理

多项式函数 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 的 m 阶 Maclaurin 多项式为其 m 次**截断多项式**：

$$P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k$$

例

求 $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$ 的各阶 Maclaurin 多项式和在 $x=1$ 处的 Taylor 多项式。

问题：给定函数 $f(x)$，求其在 x_0 的 n 阶 Taylor 公式

1. **直接法（公式法）**
   - 逐个计算 Taylor 系数，给出相应的公式
2. **间接法**
   - 利用已知函数的 Maclaurin 公式
   - 利用级数和多项式的性质

直接法求 Taylor 展开式

例

求 $f(x) = \tan x$ 的 3 阶带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式。

- 直接法
- 待定系数法

间接法求 Taylor 展开式

规则

若在区间 I 内，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，则

1. $\lambda f(x)+\mu g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n$，其中 λ,μ 为常数
2. $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$
3. 若 $h(x)\in I$，有 $f[h(x)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n[h(x)]^n.$

例：求带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式

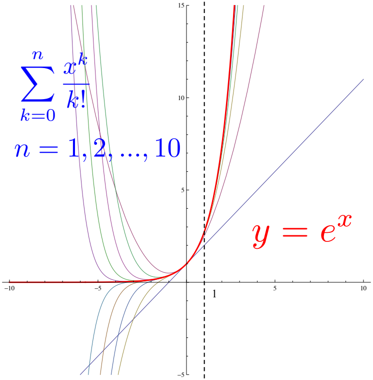
1. $f(x) = \ln(2+x)$
2. $f(x) = e^{-x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $f(x) = \cos^2 x$

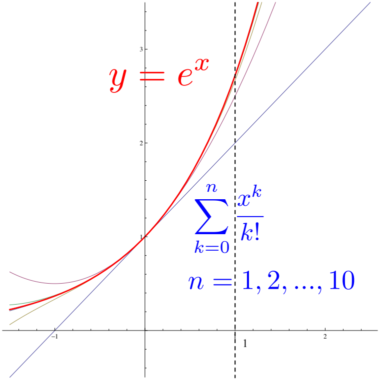
Taylor 公式的应用

1. **近似计算**
2. **计算不定式极限**
3. **证明不等式**

例

计算 $e^{0.1}$ 的值，误差不超过 10^{-3}.





例

证明常数 e 是无理数。

证明.

假设 $e=\dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n\geqslant 2$。在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x=1$，得到 $(0<\theta<1)$

$$\frac{m}{n}=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m\cdot n!}{n}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^\theta}{n+1}$$

由于 $0<e^\theta<3$，所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数。矛盾。 返回 □

例：计算以下极限

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$

返回

注：不知道该展开到多少阶时，先进行试探性展开

例： 08-09 期中

确定常数 a, b, 使得当 $x \to 0$ 时，$e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}$ 是 x 的三阶无穷小量。

3. 证明不等式

证明：

- 当 $x > 0$ 时，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
- 当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

返回

例： 09-10 期末

设 $f(x)$ 在 I 上有二阶导数，又知对 $\forall x \in I$, 有 $|f(x)| \leqslant A$, $|f''(x)| \leqslant B$, 其中 A, B 为常数。求证：

1. 若 $I = [0,1]$, 则 $|f'(x)| \leqslant 2A + B/2$.
2. 若 $I = (0, +\infty)$, 则 $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{AB}$.
3. 若 $I = (-\infty, +\infty)$, 则 $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2AB}$.

(2) $f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$

$$f'(x) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} - \frac{f''(\xi)}{2}(t-x)$$

$$\leq \frac{2A}{|t-x|} + \frac{B}{2}|t-x|$$

$$\leq 2\sqrt{\frac{2A}{|t-x|} + \frac{B}{2}|t-x|}$$

$$= 2\sqrt{AB}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，且 $f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant A$，证明：对任意 $x\in[0,1]$，恒有

$$|f'(x)|\leqslant \frac{A}{2}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,则至少存在一点 $c\in(a,b)$,使得

$$|f''(c)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

思考题： 将条件 $f'(a)=f'(b)=0$ 换作 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明相同结论。

小结

1. **Taylor 多项式**
2. **函数的 Taylor 展开**
   - 直接法
   - 间接法
3. **Taylor 公式的应用**
   - 计算极限
   - 证明不等式

可导函数的单调性

定理 2.4.1 P95

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 恒大（小）于零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增（减）。

- 以上仅仅是判定可导函数严格单调的充分条件，而非充要条件
- 若定理中的“大（小）于”改成“大（小）于等于”，则对应于单调递增情形，且为充要条件 (**定理 2.4.2**)

例

讨论 $y = x - \sin x$ 的单调性。

例

设 $a_1 = 1$, 当 $n \geqslant 1$ 时，$a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$, 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

定理（可导函数单调的充要条件）

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增，当且仅当：

1. $f'(x) \geqslant 0,\ x \in (a, b)$
2. 在 (a, b) 的任意子区间上 $f'(x)$ 不恒为零

推论 1

设 $\varphi(x), \psi(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可导，且：

1. $\varphi'(x) > \psi'(x),\ x \in (a, b)$
2. $\varphi(a) = \psi(a)$

则在 (a, b) 上，恒有 $\varphi(x) > \psi(x)$

例

证明：当 $x > 0$ 时，恒有 $x - \dfrac{1}{6}x^3 < \sin x < x.$

例

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内可导且 $f(0) = 1,\ f'(x) < f(x)\ (x > 0)$．证明：$f(x) < e^x$.

推论 2

设 $\varphi(x),\psi(x)$ 均在 $[a,b]$ 上n 阶可导，且:

1. $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x),\ x\in(a,b)$
2. $\varphi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(a), k=0,1,2,\dots,n-1$

则在 (a,b) 上，恒有 $\varphi(x) > \psi(x)$

例：证明下列不等式

1. $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x},\ (x>0)$
2. $e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!},\ (x>0, n\in\mathbb{N})$

连续函数在有界闭区间上的最值定理 最值的存在性

设 $f(x) \in C[a,b]$，则

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到最大和最小值。
- 存在 m, M，以及点 $x_m, x_M \in [a,b]$, 使对任意 $x \in [a,b]$, $m = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M$.

问题：**如何求得以上的 m, M 和 x_m, x_M?**

Fermat 引理 极值存在的必要条件

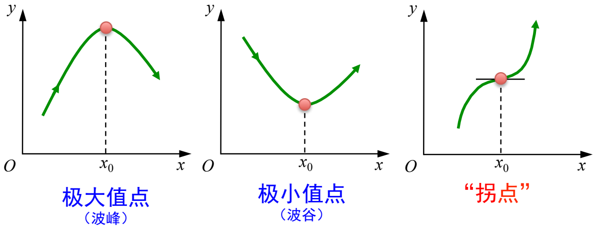
若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 的某邻域内, 有 $f(x) \geqslant f(x_0)$ (或 $f(x) \leqslant f(x_0)$), 则 $f'(x_0) = 0$.

Darboux 定理 单调区间的划分

设函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可导函数，则 $f'(x)$ 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值。

定理 2.4.4（极值第一充分条件） P97

设 $f(x)$ 在 x_0 连续，在 x_0 的去心领域内可导，且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧导数值异号，则 $f(x)$ 在 x_0 处取极值。



例：讨论以下函数的极值

1. $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$
2. $f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$

[例] $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$

$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'}{f}$

$\ln|f(x)| = \ln|x-4| + \frac{2}{3}\ln|x+1|$

$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{|x-4|} + \frac{2}{3|x+1|}$

$f' = f\cdot\frac{5(x-1)}{3(x-4)(x+1)} = \frac{5(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{3}$

$f'(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + (x-4)\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}.$

$= \frac{3(x+1)+2(x-4)}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{5(x-1)}{\sqrt[3]{x+1}}$

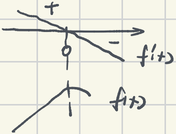
讨论 $f'(x)=0$ $\underline{\underline{f(1)}}$.

$f'(x)$ 不存在 $x=-1$

[例] $f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})e^{-x}$

$f'(x)= \left(1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})\right)e^{-x}$

$= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$



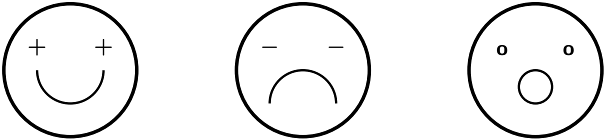
$f(x)$极大$=f(0)=1$

函数极值的判定 (续)

定理 2.4.5（极值第二充分条件） P97

设 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，则

1. 若 $f''(x_0)<0$，$f(x)$ 在 x_0 处取极大值
2. 若 $f''(x_0)>0$，$f(x)$ 在 x_0 处取极小值



$f''>0$ local min. | $f''<0$ local max. | $f''=0$ test fails

例：讨论以下函数的极值

1. $f(x)=(x^2-1)^3+1$
2. $f(x)=x^3e^{-x}$

例

求函数 $f(x) = \left|2x^3 - 9x^2 + 12x\right|$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。

例

求数列 $\sqrt[n]{n}$ 中最大的一项。

例

设 $f(x) \in C[a, b]$，在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$，试讨论

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

在 (a, b) 内的单调性。

小结

1. **可导函数的单调性**
   - 充分条件与充要条件
   - 用单调性证明不等式
2. **可导函数的极值**

函数的凹凸性

最简单的定义：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. $\overset{f(x)\text{连续}}{\Longleftrightarrow}$ $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

约定： 以下的凹凸均指“上凹”和“上凸”

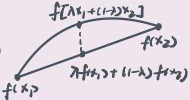
$\overset{f(x)\text{可导}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \Longleftrightarrow f'$单减

$\overset{f\text{二阶可导}}{\Longleftrightarrow}$ $f''<0$

定义（凸函数）

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，以及任意 $\lambda \in [0,1]$，有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**凸函数**。若对于 $\lambda \in (0,1)$ 上式中的不等号严格成立，则称其为**严格凸函数**。

注： 任意两点间的割线都不会位于两点间曲线的上方

推论

f 为区间 I 上的凸函数的充要条件是对于 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，有下述不等式成立

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \geqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

定理

设 f 是定义在区间 I 中的函数。则 f 为凸函数当且仅当对任意的 $x_i \in I$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

例

算术–几何平均值不等式 $\Uparrow$ $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

$\Uparrow$ $\ln\left(\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln x_1+\frac{1}{n}\ln x_2+\cdots+\frac{1}{n}\ln x_n$

取 $\lambda_i=\frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $\ln x$ 为凸函数 $\Leftarrow$ $f(x)=\ln x$ $f'(x)=\frac{1}{x}$ 单减.

例

在 $\triangle ABC$ 中，证明 $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$. $= 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sin\frac{A+B+C}{3}$

可导凸函数的充要条件

推论

可导函数 f 为凸函数当且仅当 f' 为单调递减函数。 $f''\le 0$

定理 P100

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 为 (a,b) 内的凸函数，当且仅当：对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，恒有

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

注： 任意点处的切线总位于曲线上方

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_1) \Leftrightarrow \text{割线斜率} < \text{切线斜率}.$$

$$\Leftrightarrow f'\downarrow \Leftrightarrow f''\le 0$$

(二阶可导) 凸函数的判定

$l(x)$是 $(a,f(a))$ $(b,f(b))$ 的割线

令 $h(x)=f(x)-l(x)$，则 $h(a)=h(b)=0$

引理

$\therefore h(x)=f(x)-l(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$

$(l''(x)=0)$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：对任意 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

定理 2.4.6（充分条件） P100

设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，则 构造 $h(x)=f(x)-l(x)$，运用引理即可.

1. 若 $f''(x)$ 恒不大于零，$f(x)$ 为凸函数
2. 若 $f''(x)$ 恒不小于零，$f(x)$ 为凹函数

推论

严格凸（凹）函数的驻点为极值点。

拐点及其判定

一阶导：单调性
二阶导：凹凸性
三阶导：拐点。

拐点： 两侧 $f''(x)$ 反号的点

$x=0$ 是 $f(x)=x^3$ 的拐点。

$f'(x)=3x^2\geq 0$ $f(x)\uparrow$

$f''(x)=6x$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 下凸，在 $(0,+\infty)$ 上凸.

$f'''(x)=6>0$ $\left.\begin{array}{l} f''(0)=0 \\ f'''(0)=6\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0$ 是拐点。

推论

设 f 在 x_0 点三阶可导，$f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

例

求下列曲线的凹凸区间及拐点。

1. $f(x)=3x^4-4x^3+1$
2. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

例

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，$f(0)=0$, $f''(x)>0$. 求证：对任意 $a,b>0$, 有
$$f(a)+f(b)<f(a+b).$$
$f(a+b)-f(a)>f(b)-f(0)$.
2. 设 $b>a>0$. 求证：
即证：$g(x)=f(x+b)-f(x)$ 单增.
$$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b).$$

例

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在二阶导数，$f(0)<0, f''(x)>0$, 求证：

1. 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 至多有两个零点，至少有一个零点；
2. 若的确有两个零点 x_1 与 x_2, 则 $x_1x_2<0$.

定义 P103

1. **水平渐近线：** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$
2. **铅直渐近线：** $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = \infty$
3. **斜渐近线：**
   - 斜率：$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   - 截距：$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$

例

求函数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线。

例

作出函数 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。

1. **分析函数一般性质：** 定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴的交点
2. **画出渐近线：** 水平、铅直和斜渐近线
3. **求一、二阶导函数：** 确定不可导点
4. **列表分析：** 单调、凸凹区间，极值点和拐点
5. **描点作图**

① $(x \neq 1)$ 过 $(0,0)$.

② $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$

$\therefore x=1$ 是铅直渐近线.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

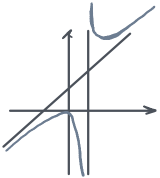
$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + x}{x-1}$

$= \dfrac{x}{x-1} = 1$

$\therefore$ 斜渐近线：$y = x+1$.

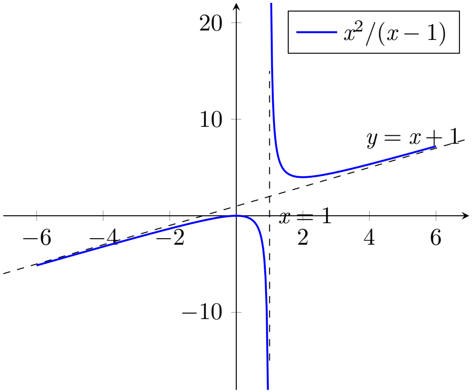
③ $y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	−	−	−	不存在	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	不存在	↘	极小	↗



例

作出函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的图形。



④

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	不存在	$-$		$-$	不存在	$+$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	拐点	$\searrow$

例

作出函数 $y=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$ 的图形。

① 连续. 定义域 $\mathbb{R}$. 过 $(0,0)$ $(6,0)$

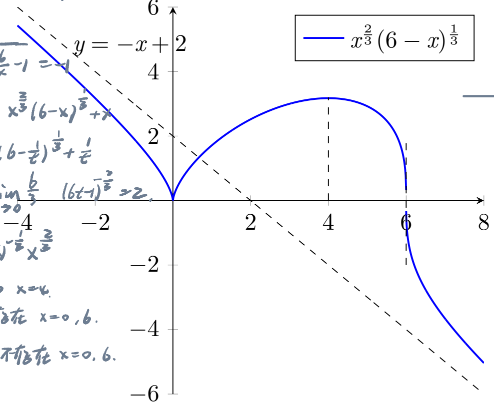
② 渐近线.

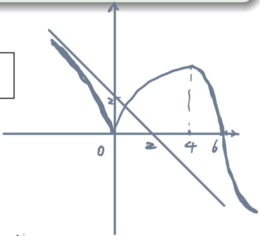
$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{\frac{6-x}{x}}=\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}=-1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}+x$

令 $t=\frac{1}{x}\to 0$ $=\lim\limits_{t\to 0}t^{-\frac{2}{3}}(6-\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(6t-1)^{\frac{1}{3}}+1}{t}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{6}{3}(6t-1)^{-\frac{2}{3}}=2.$





③ $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(6-x)^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$

$=\frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$ $y'=0$ $x=4$. y'不存在 $x=0,6$.

$y''=\frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ y''不存在 $x=0,6$.

小结

1. **可导函数的极值**
2. **函数的凹凸性**
3. **分析作图法**
   - 定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、...
   - 一、二阶导数、不可导点
   - 极值点、拐点、单调区间
   - 渐近线

第二章内容回顾

1. 导数的概念与计算
   - 四则运算、反函数、复合函数
   - 隐函数与参数方程
   - 高阶导数
2. 微分的概念与应用
3. 中值定理
   - Rolle 定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理
   - L'Hospital 法则–极限的计算
   - Taylor 公式
4. **函数性质**
   - 单调性、凸凹性、渐近线

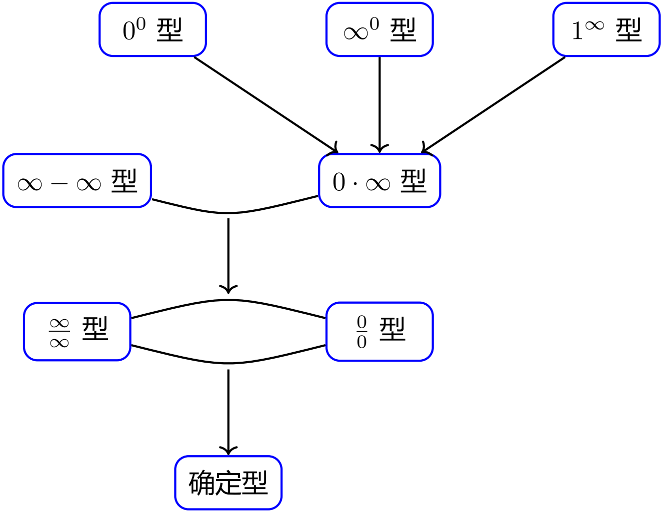
期中复习 (至第二章第三节)

1. **函数**
   - 函数的定义域、值域，基本表示形式
   - 基本初等函数的性质及图形，初等函数的概念与性质
   - 函数表示的多样性：隐函数，极坐标，参数方程等
2. **极限**
   - 极限的保号性：$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A \Leftrightarrow \exists\ \mathring{N}_\delta\ (\bullet), f(x)=A+o(1)$
   - 极限的计算方法：两个重要极限，三个收敛准则，极限运算法则，等价无穷小，洛必达法则，泰勒公式
3. **连续**
   - 根据定义判断间断点，初等函数的连续性
   - 有界闭区间上连续函数的性质

期中复习 (续)

4. **导数和微分**
   - 定义与性质, 微分形式不变性的运用
   - 复合函数微分法，隐函数微分法及参数微分法
5. **导数的应用**
   - 以三个中值定理为依据, 通过函数增量研究函数性质
   - 函数零点与导函数零点的关系，求极限，函数性质（增减），泰勒公式

函数极限



$$(15)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$$

$$(18)\quad \lim_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$$

求极限问题

关于洛必达法则，有如下说明：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限。

例

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $(e^{-\frac{1}{6}})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2\cos^2 x}$. $(-\frac{2}{3})$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$. (37)
4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内一阶导数连续，且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时，是比 h 高阶的无穷小，试确定 a, b. $(a=2, b=-1)$

关于幂指函数

例

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

定理

若 $x\to\square$ 时，$a(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\left(1+a(x)\right)^{b(x)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\square}a(x)b(x)}}$$

例

求幂指函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的导数.

闭区间上连续函数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

最值定理 $f(x)$ 在该区间上有界，而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

零值定理 若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

介值定理 若 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

例

对下面的方程求导数 y'_x:

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$

例

求幂指函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的导数.

复合函数，参数方程求导

定理

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例

已知 $f(u)$ 可导，求 $f(\ln x)$ 的导数和二阶导数.

定理

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定了 x 和 y 的函数关系，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \tag{2}$$

罗尔中值定理

定理

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,
2. 在开区间 (a,b) 内可导,
3. $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

事实

该定理可用于证明存在性等式。

拉格朗日中值定理

定理

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
2. 在开区间 (a, b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

事实

该定理可用于证明恒等式和不等式。

例

证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

证明不等式有如下这些方法：

1. 拉格朗日中值定理　　利用 1 阶导数
2. 泰勒公式　　利用 n 阶导数
3. 函数的单调性　　利用 1 阶导数
4. 曲线的凹凸性　　利用 2 阶导数

泰勒公式

- 泰勒公式和几个常用函数的麦克劳林展开

  $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，$\xi$介于 x 与 a 之间;

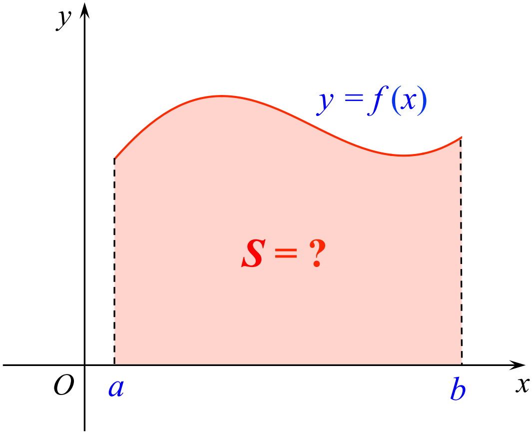
  1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
  2. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$
  3. $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$
  4. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2k})$
  5. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k+1})$

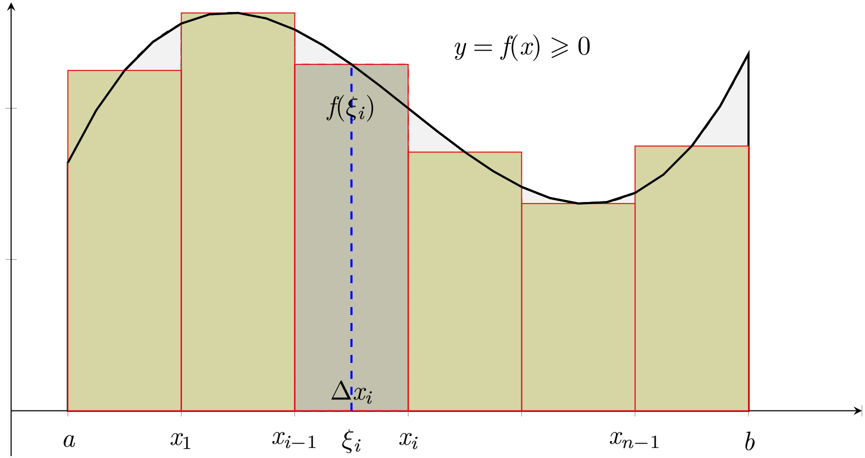
  掌握函数在一点的泰勒公式，会用直接展开或间接展开的方法求函数的泰勒公式。($\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$)

问题：如何求给定曲线所围平面区域的面积？

求“曲边梯形”的面积

给定曲线 $y = f(x)$，求由该曲线及 $y = 0$，$x = a$，$x = b$ 所围区域的面积。



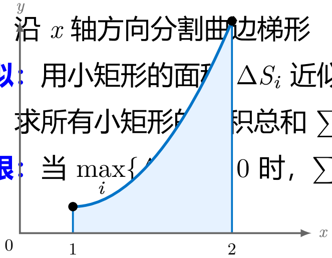


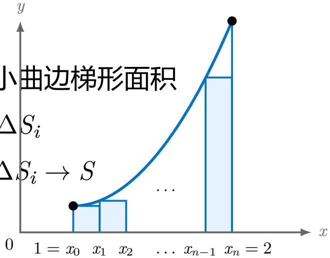
$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

例

求由曲线 $y=x^2$ 以及直线 $x=1, x=2$ 和 $y=0$ 所围成的曲边梯形的面积。

- **分割：** 沿 x 轴方向分割曲边梯形
- **取近似：** 用小矩形的面积 ΔS_i 近似小曲边梯形面积
- **求和：** 求所有小矩形的面积总和 $\sum \Delta S_i$
- **取极限：** 当 $\max\limits_i\{\Delta$ 0 时，$\sum \Delta S_i \to S$





定积分的定义

定义 3.2.1 P138

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上（Riemann）可积：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

- 上式右端极限对 $[a,b]$ 的任意分法均存在且相同
- $\lambda\to 0$ 用于保证分割得足够“细”
- 给定分法，ξ_k 的取法应该是任意的

定理 3.2.1 P139

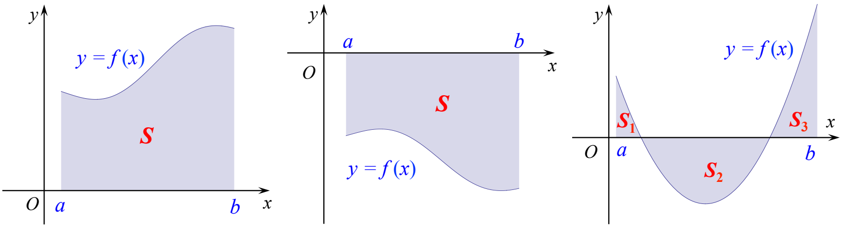
1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则一定在 $[a,b]$ 上有界
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则一定在 $[a,b]$ 上可积
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调有界，则一定在 $[a,b]$ 上可积

- 分段连续（只有有限个第一类间断点）的函数是可积的

例

证明 Dirichlet 函数在任意区间 $[a,b]$ 上不可积。

- **“带有符号的面积”**



约定:

❶ $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

❷ $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分的基本性质

定理 P139-141

1. **线性性：**

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2. **区间可加性：**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

定理（续） P139-141

3. **保号性：**
   - $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$
   - $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，非负且不恒为零，则
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$$
   - 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

定理（续） P139-141

③ **保号性：**（续）

- **绝对值不等式：** $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

- **积分估值：** $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

$1 \le \sqrt{1+x^4} \le 1+x^2.$ $\quad \int_0^1 (1+x^2)\,dx = \frac{4}{3}.$

例

证明不等式：$1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$.

例

已知 $f''(x) < 0,\ x \in [0,1]$, 证明 $\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

$f(x) = f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}) + f''(\xi)(x-\frac{1}{3})^2 \qquad f''(x)<0$

$\therefore f(x) \le f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}) \Rightarrow f(x^2) \le f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})$

$\therefore \int_0^1 f(x^2)\,dx \le \int_0^1 f(\frac{1}{3})\,dx + f'(\frac{1}{3})\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})\,dx$

$= f(\frac{1}{3})$

$f(x)=[x]$，$x\in[0,2]$

$\int_0^2 [x]dx=\int_0^1 0dx+\int_1^2 1dx=1$

$1=\int_0^2 [x]dx \neq f(\xi)\times 2$

$f(\xi)=\frac{1}{2}$ (不存在)

定理 3.2.3 P141-143

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

思考： 定积分中值定理与微分中值定理有何联系？

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值 M，最小值 m.

$m\le f(x)\le M \Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

$$m\le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$$

$=f(\xi)$

小结

❶ **定积分的定义：** 分割、取近似，求和、取极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

❷ **定积分的性质**

- 线性性、区间可加性
- 保号性、保序性、定积分的估值
- 定积分中值定理

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

练习

例：求下列极限

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$
2. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}$$
3. $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{t+\cos t}\mathrm{d}t$$

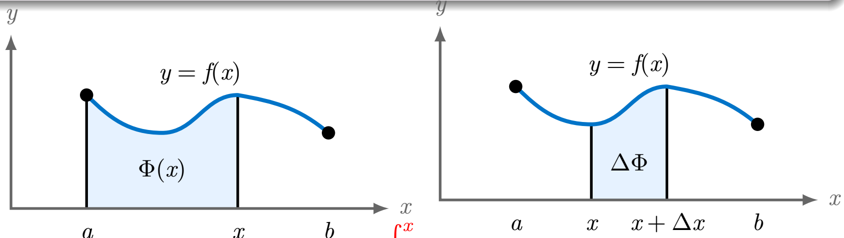
定理 3.2.5 P144

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则**变上限积分**

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)$ 可导，且

$$\Phi'(x)=f(x).$$



- 若 $f(x)$ 连续，则变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

定理 3.2.6（Newton-Leibniz 公式） P145

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

例：计算下列定积分

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]_x' = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

例：计算

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\mathrm{d}t$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^{-t}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t}$

例

求函数 $f(x)=\max\{1,x^2\}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数使得 $F(0)=1$.

例

设 $f\in C[a,b]$, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\displaystyle\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)$.

例

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导，且 $f(0)=0$, 证明 $\displaystyle\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{Ma^2}{2}$.

其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

原函数与不定积分

定义 P119

1. $F(x)$ 是 $f(x)$ 的**原函数**： $F'(x) = f(x)$
2. $f(x)$ 的**不定积分**： $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

- $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x)$
- $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$
- $\int [af(x) + bg(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x$

基本不定积分公式

1. $\int k\mathrm{d}x$
2. $\int e^x\mathrm{d}x$
3. $\int x^a\mathrm{d}x\ (a\neq -1)$
4. $\int a^x\mathrm{d}x\ (a>0)$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
6. $\int \cos x\mathrm{d}x$
7. $\int \sin x\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$
10. $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

定理 (第一换元法) P123

设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$

- 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=F[\varphi(x)]+C$$

例 1：计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \cos^2 x\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \tan x\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \sin^3 x\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \sec^6 x\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \sec x\mathrm{d}x$

定理 (第二换元法) P123

设 $x=\varphi(t)$ 可导且可逆，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

例 2：计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

分部积分法

$$\int uv' \mathrm{d}x = uv - \int u' v \mathrm{d}x$$

例 3：计算下列不定积分

1. $\int x \cos x \mathrm{d}x$
2. $\int x e^x \mathrm{d}x$
3. $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$
4. $\int \ln x \mathrm{d}x$
5. $\int x \arctan x \mathrm{d}x$
6. $\int e^x \cos x \mathrm{d}x$

小结

1. **换元法**
   - $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$
   - $$\int f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(t)}$$
2. **分部积分法**
   - $$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

小结

第一换元法常用技巧

1. **分项积分：** 积化和差，有理分式分解，...
2. **降低幂次：** 倍角公式，凑幂公式，...

   例如：$\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$,
   - m, n 中有奇数，取奇次幂的底数 (如 n 是奇数，则取 $\cos x$) 与 $\mathrm{d}x$ 凑微分。
   - m, n 均为偶数，则利用倍角公式降幂，直至将三角函数降为一次幂。
3. **统一函数：** 三角公式，$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$，...

   例如：$\displaystyle\int \frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}\mathrm{d}x, \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x, \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$
4. **巧妙配元：** 加一项减一项，...

小结

第二换元法常用变换

1. 当被积函数含有二次根式时，一般可通过三角代换将根号化去，

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin\theta} \qquad \int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\tan\theta}$$

$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$, 先配方，再换元

2. 当被积函数含有一次根式时，如
   - $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$, 作变换 $t = \sqrt[n]{ax+b}$;
   - $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\mathrm{d}x$, 作变换 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, 其中 p 是 m, n 的最小公倍数
   - $\int R(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})\mathrm{d}x$, 作变换 $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

3. **倒代换：** $x = \dfrac{1}{t}$

小结

分部积分法处理原则：选取 u 和 $\mathrm{d}v$，使 $\int v\mathrm{d}u$ 比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易求出

1. 若被积函数 $=$ 幂函数 $\times$ 正 (余) 弦或指数函数，则幂函数在 d 之前，正 (余) 弦或指数函数置于 d 之后。
2. 若被积函数 $=$ 幂函数 $\times$ 对数函数或反三角函数，则对数函数或反三角函数在 d 之前，幂函数置于 d 之后。
3. 若被积函数 $=$ 指数函数 $\times$ 正 (余) 弦函数，任选一种函数凑微分。如需多次分部积分，要注意每次凑微分时函数的选择要一致。

积分表补充

1. $\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
2. $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
4. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
5. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad (a \neq 0)$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, \mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C \quad (a \neq 0)$
7. $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$

课堂练习

例：计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+1}\sec^2 x\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{3\cos x-4\sin x}{\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\mathrm{d}x$

定义

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 均为多项式函数，若 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数，称该函数为**真分式**，否则为**假分式**

- 利用**多项式除法**，任意假分式都可以表示成一个多项式与一个真分式的和，例如：

$$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}$$

例：计算下列不定积分

1. $\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q}$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n}$

- 设 $Q(x)$ 可分解为两个没有公因式的多项式 $Q_1(x), Q_2(x)$ 的乘积，则真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 必可分解为两个真分式 $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 的和
- 任意多项式都可分解为形如 $(x^2+px+q)^l$, $(x-a)^k$ 的多项式的乘积

例：计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+6}{(x-1)(x^2+2x+3)}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)}$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

可化为有理函数的积分

例：计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}}$

一些往年考题

计算下列不定积分

1. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\,dx$
2. $\int x^2(\ln x)^2\,dx$
3. $\int (\cos x + \sqrt{x}\sec x)^2\,dx$
4. $\int \cos x \cdot \sqrt{e^{\sin x} - 1}\,dx$
5. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$
6. $\int \tan^6 x\sec^4 x\,dx$
7. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$
8. $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x}\,dx$
9. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$
11. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$
12. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

答案:

1. $\frac{\ln x}{1-x} + \ln|1-x| - \ln x + C$
2. $\frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$
3. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\tan x + \ln|\cos x| + C$
4. $2\sqrt{e^{\sin x}-1} - 2\arctan\sqrt{e^{\sin x}-1} + C$
5. $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$
6. $\frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C$
7. $x - \tan x + \sec x + C$
8. $\frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + C$
9. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$
10. $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$
11. $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
12. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\cot x + C$

微分与积分的互逆关系

微分	积分
微积分基本定理	
$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$	$\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = f(x) - f(a)$
运算法则	
$[c_1u(x) + c_2v(x)]' = c_1u'(x) + c_2v'(x)$	$\int [c_1f(x) + c_2g(x)]\,dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int g(x)dx$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$
$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$	$\int \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx = f(u(x)) + c$
中值定理	
$\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}'(\xi)(b-a)$	$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$
常用公式	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$

定积分：复习

1. **定积分的定义**：分割、取近似，做和、求极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

2. **定积分的性质**
   - 线性性、区间可加性
   - 保号性、保序性、定积分的估值
   - 定积分中值定理

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

定理 3.2.5 P144

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则**变上限积分** $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)$ 可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$.

定理 3.2.6（Newton-Leibnitz 公式） P145

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，$\mathcal{F}(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a).$$

定理 3.2.7（换元法） P148

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

1. $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$;
2. $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导，且 $\varphi(t)\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

定理 3.2.8（分部积分法） P150

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

例：计算下列定积分

1. $\displaystyle\int_9^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$

Wallis 积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

1. **对称区间上的定积分：**
   - $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$
   - 奇函数：$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x) = 0$
   - 偶函数：$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)$

例：计算

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x \quad (a^2+b^2\neq 0)$
2. $\displaystyle\int_0^{4} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

② **周期函数的定积分**

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

③ **正弦、余弦的转换：**

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

例：计算

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

小结

1. **Newton-Leibniz 公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$$

2. **变限积分**

$$\left[\int_a^x f(t)dt\right]_x' = f(x)$$

3. **定积分的计算**
   - 换元法、分部积分法
   - 定积分的一些特殊性质

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，$f(a)=f(b)=0$，

(1). 证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x.$

(2). 证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$

例

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = 0.$

例

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, 证明：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

例 10-11 期末

(1). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$f(a)=0$, 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

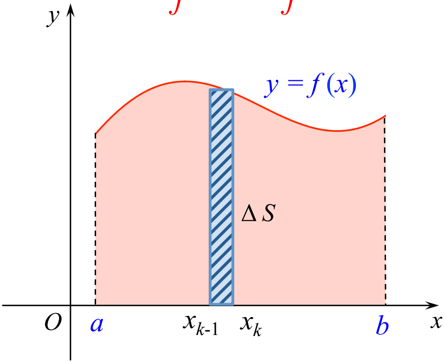
❶ **分割：** 沿 x 轴方向分割曲边梯形

❷ **取近似：** 用小矩形的面积 ΔS 近似小曲边梯形面积

❸ **做和：** 求所有小矩形的面积总和 $\sum \Delta S$

❹ **求极限：** $\sum \Delta S \to S$

$$S = \int dS = \int f(x)dx$$



平面图形的面积：直角坐标系情形

例 1

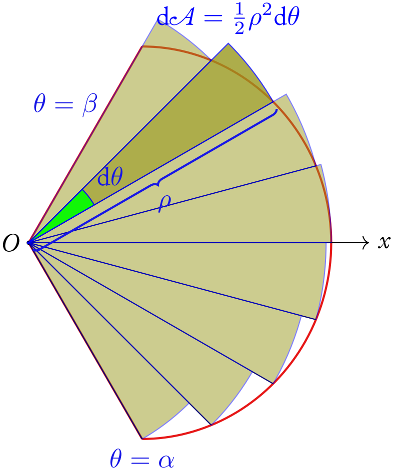
计算两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围图形的面积。

例 2

计算由抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 所围图形的面积。

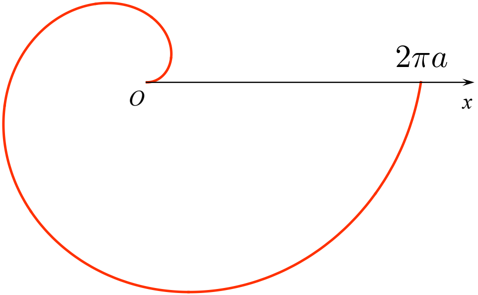
由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积为

$$\mathscr{A}=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\big[\rho(\theta)\big]^2\mathrm{d}\theta$$



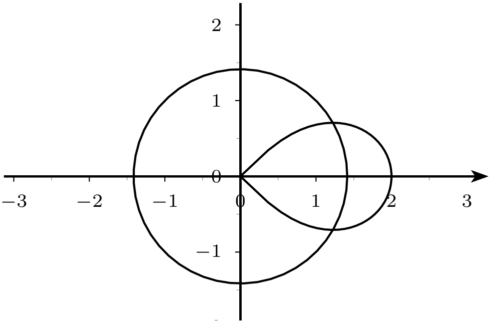
例 3

计算 Archimedes 螺线 $\rho = a\theta$ $(a > 0)$ 相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围的图形面积。

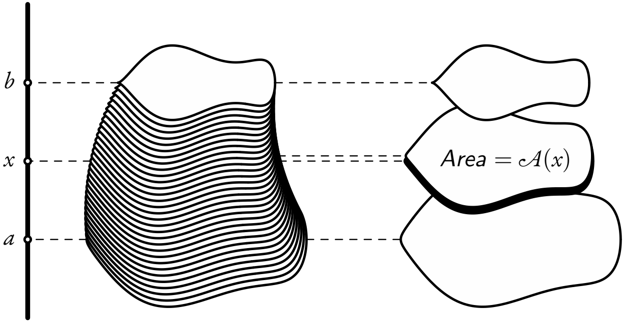


例 4

计算由双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ 所围成，且在半径为 a，圆心在原点的圆内部的图形的面积。



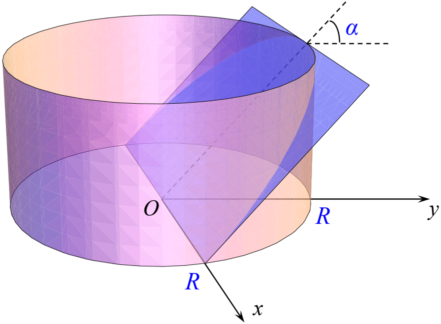
横截面面积为已知的立体体积



$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x)\mathrm{d}x$$

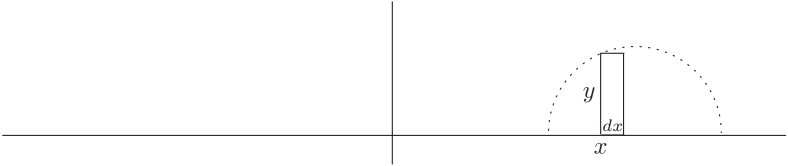
例 5

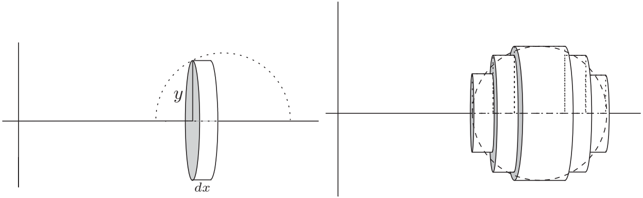
一平面经过半径为 $\mathcal{R}$ 的圆柱体的底面圆心，并与底面交角为 α (如图所示)，求该平面所截圆柱体的体积。



旋转体的体积

曲线 $y = f(x)$ $(x \in [a,b])$ **绕** x **轴旋转一周:**





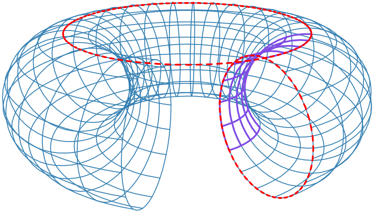
$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

例 6

求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得立体的体积。

例 7

求圆域 $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2\ (b>a)$ 绕 x 轴旋转而成的圆环体的体积。



柱壳法求旋转体体积

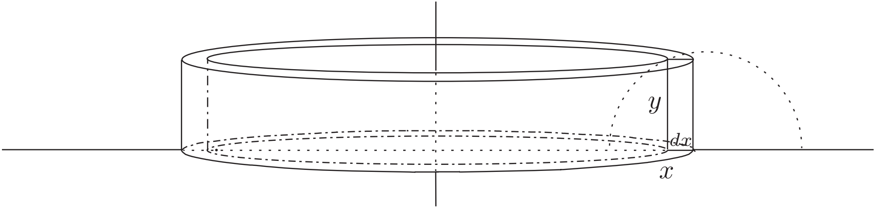
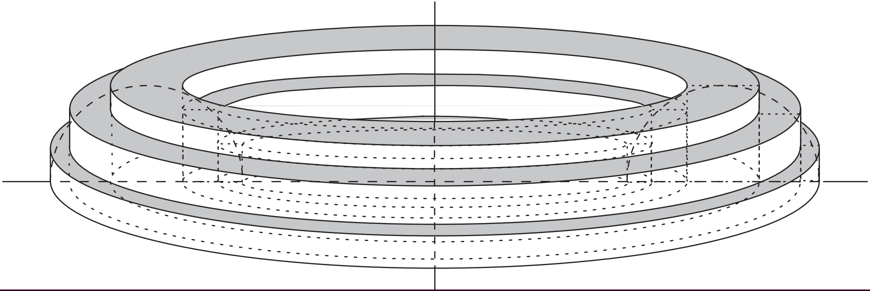
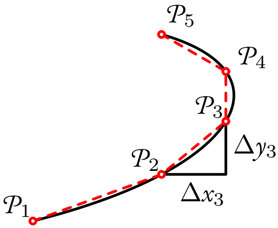


图: 旋转薄壳



例 8

求由 $y = x$，$x = a$, 及 x 轴所围成的平面图形，分别绕 x 轴和绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积。



任意光滑曲线弧都可求长

例 9：求以下曲线的弧长

1. $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}\ (a \leqslant x \leqslant b)$
2. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$
3. $\rho = a\theta\ (a > 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

小结

1 微元法

- 发现微元：

$$\mathrm{d}\mathcal{S}$$

- 表示微元：

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = f(x)\mathrm{d}x$$

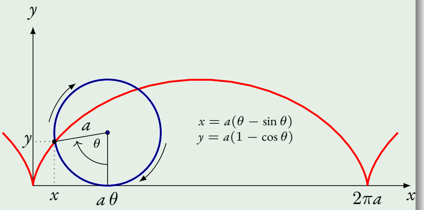
- 计算定积分：

$$\mathcal{S} = \int_a^b \mathrm{d}\mathcal{S} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

例

设旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴围成一平面图形，求

1. 该图形的面积;
2. 该图形边界的弧长;
3. 该图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积;
4. 该图形绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积。



$$1.\ 3\pi a^2, 2.\ 8a + 2\pi a, 3.\ 5\pi^2 a^3, 4.\ 6\pi^3 a^3$$

定积分存在的条件

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. **有限区间：** $a, b \neq \infty$
2. **分段连续：** $f(x)$ 最多有限多个第一类间断点
3. **必要条件：** $f(x)$ 有界

定义 3.4.1：（无穷限的积分） P178

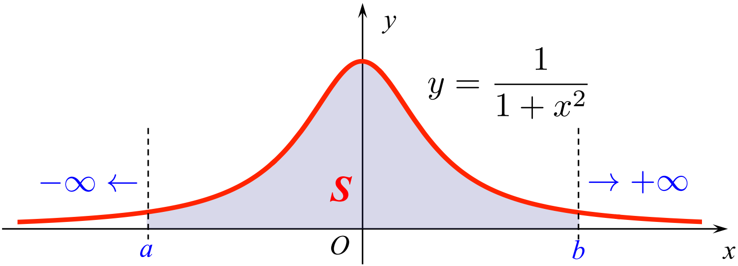
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

- 类似地，可以定义 $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$
- Newton-Leibnitz 公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

例 1：计算以下无穷区间上积分

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

例 2

1. 讨论 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, $a > 0, p > 0$ 的敛散性;
2. 证明
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$
3. 根据以上结论给出 p 级数的判敛条件。

定义 3.4.2 P180

1. **瑕点：**无穷间断点
2. 设 a 为 $f(x)$ 的瑕点，**瑕积分：**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例 3

计算瑕积分 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ \ a>0.$

例 4：讨论瑕积分的收敛性

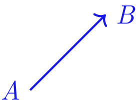
1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

例 5：计算积分：

1. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$

向量：既有大小，又有方向的量称为向量。

- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$
- 向量的相等：若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$



向量的模：向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$

- 单位向量：模为 1 的向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$
- 零向量：模为 0 的向量，记为 $\vec{0}$，或 $\mathbf{0}$

平行 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反, 则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 记为 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

- 规定零向量与任何向量都平行。

共线 若两个向量可平移到一条直线上, 则称它们共线。

- 两向量平行等同于两向量共线。

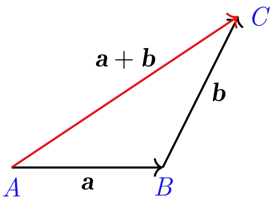
共面 若三个或更多个向量可平移到一个平面上, 则称它们共面。

向量的运算

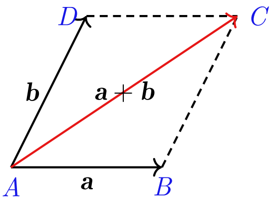
1. **加法与数乘：** $k\vec{a}+l\vec{a}$
2. **数量积：** $\vec{a}\cdot\vec{b}$
3. **向量积：** $\vec{a}\times\vec{b}$
4. **混合积：** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

向量的加法

三角形法则：



平行四边形法则：

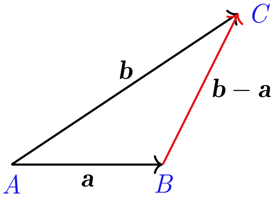


性质

向量的加法满足下列运算定律：

- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

与 $\boldsymbol{a}$ 大小相同而方向相反的向量, 称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{a}$.
三角形法则: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



- $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$
- $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$
- $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

向量的数乘

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

性质

向量的数乘满足下列性质：

- $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$
- $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \mu(\lambda\boldsymbol{a})$
- $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a},\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

几何上，向量的加法与数乘等价于向量的平移与放缩，统称**向量的线性运算**

例

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量, 则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 为单位向量。

例

设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$.

定理

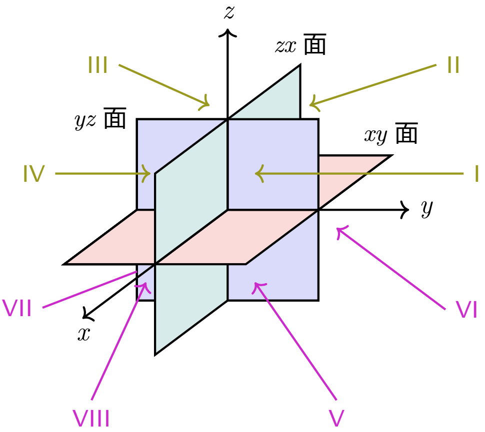
设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量, 则有

$$\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$$

其中实数 λ 是唯一的。

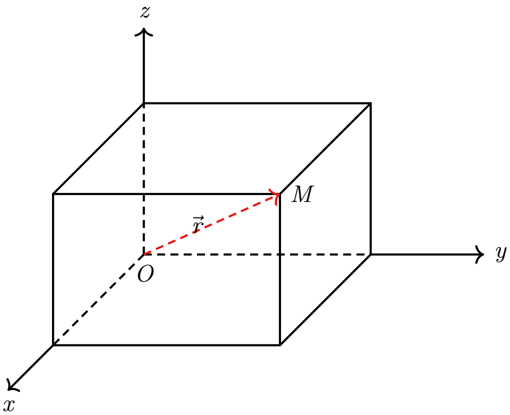
空间直角坐标系

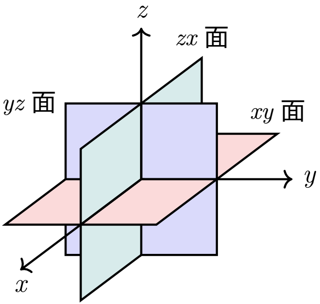
- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



在空间直角坐标系中, 我们有

$$\text{点 } M \longleftrightarrow \text{坐标 } (x, y, z) \longleftrightarrow \text{向量 } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$





坐标面上的点：

xy 面 $\leftrightarrow$ $z=0$

yz 面 $\leftrightarrow$ $x=0$

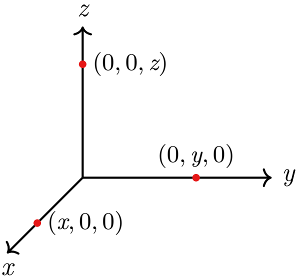
zx 面 $\leftrightarrow$ $y=0$

坐标轴上的点：

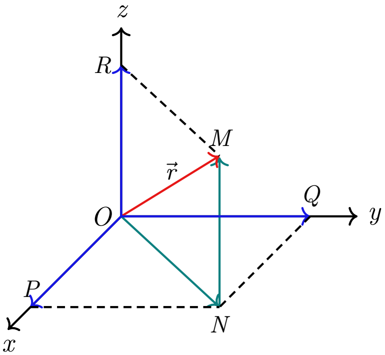
x 轴 $\leftrightarrow$ $y=z=0$

y 轴 $\leftrightarrow$ $z=x=0$

z 轴 $\leftrightarrow$ $x=y=0$



向量的坐标分解



- x 轴上单位向量 $\vec{i}$
- y 轴上单位向量 $\vec{j}$
- z 轴上单位向量 $\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)\end{aligned}$$

向量的坐标运算

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数. 由向量的坐标分解可得

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{b} \,//\, \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}$

平行向量对应坐标成比例

例

求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & (1) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & (2) \end{cases}$$

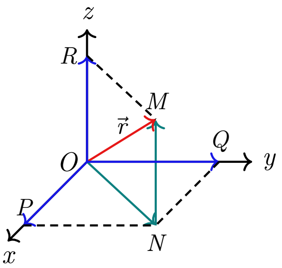
其中 $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$.

例

已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M, 使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

注记

点 M 的坐标等于向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.



$$\vec r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$
$$= x\vec i + y\vec j + z\vec k = (x, y, z)$$

$$\therefore \quad |\vec r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

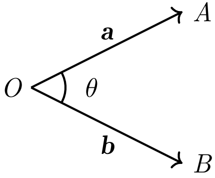
$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例

在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点。

向量的夹角

设有非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取空间中一点 O, 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.



称 $\angle AOB = \theta$ （$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）为向量的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \theta$.

方向角和方向余弦

给定 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$，称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴的夹角 α，β，γ 为方向角。方向角的余弦称为方向余弦。

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦

方向余弦满足下面性质:

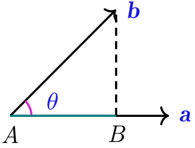
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \boldsymbol{e}_{\vec{r}}$

例

设点 A 位于第 I 卦限, 向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴, y 轴的夹角依次为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标。

若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \theta$, 记 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为

$$\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos\theta$$



同理, 若 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta$.

性质

向量投影有线性运算:

1. $\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{Prj}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a}$
2. $\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{Prj}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a} + \operatorname{Prj}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}$

例

设正方体的一条对角线为 OM, 一条棱为 OA, 且 $|OA| = a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

练习

选择

下列哪组角可作为空间向量的方向角 . . . . ( )

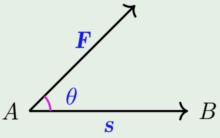
(A) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ (B) $45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

(C) $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ (D) $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

例

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\boldsymbol{s}$. 则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$



定义

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，称

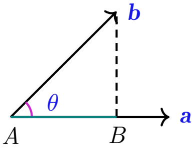
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（点乘）。

数量积与投影

数量积与投影的关系如下：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}|\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$



同理，我们有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}|\cos\theta = |\boldsymbol{b}|\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$。

数量积的性质

推论

1. $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$
2. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ (Cauchy-Schwartz 不等式)
3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

性质

向量的数量积符合下列运算定律：

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
4. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

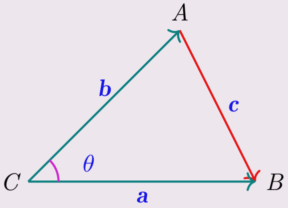
例

试用向量证明三角形的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

解

设 $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$。



数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

对于非零向量，由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$，得

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

此式即为两向量的夹角公式。

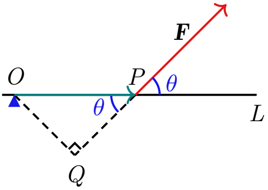
例

已知三个点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

力矩问题

例

设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\boldsymbol{F}$ 作用在杠杆的 P 点上。则力 $\boldsymbol{F}$ 作用在杠杆上的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量：



- $|\boldsymbol{M}| = |OQ|\,|\boldsymbol{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\boldsymbol{F}|\,\sin\theta$
- $\boldsymbol{M}\perp\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{F}$，$\overrightarrow{OP}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{M}$ 符合右手定则

两向量的向量积（叉乘、矢量积、外积）

定义

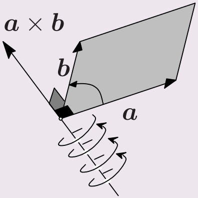
设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\boldsymbol{c}$

大小：$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\theta$

方向：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 符合右手定则

称 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（叉乘），记为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$



性质

规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$$

性质

向量的向量积符合下列运算定律：

1. **反交换律：** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
2. *(数乘)* 结合律：$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
3. 分配律：
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$
4. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ （零向量）
5. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ **平行**

向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)\\ &=\big(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\big)\end{aligned}$$

其中二阶行列式的定义为 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$

向量积的坐标表示

定义

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，记 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别为 x,y,z 轴对应的方向向量，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

向量积的几何意义

例

证明：$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$

性质

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均垂直
2. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 服从 “右手法则”
3. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的夹角
4. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ 等于以 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

例

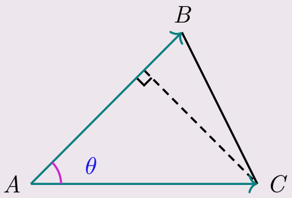
已知三角形 ABC 的三个顶点为

$$A(1,2,3),\ B(3,4,5),\ C(2,4,7),$$

1. 求垂直于该三角形所在平面的单位向量;
2. 求该三角形的面积

解

$$S=\frac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$



练习

题

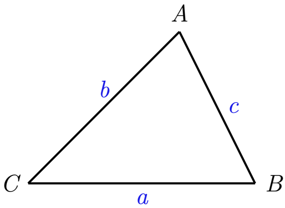
已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$，且 $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}| = 3$，求 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. $\cdots\cdots\sqrt{17}$

练习

题

证明三角形的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



练习

题

在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$，$C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD 的长度. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{2}{5}$

练习

选择

下列关系式错误的是 . . . . ( )

(A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (B) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\mathbf{a}|^2$ (D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$

选择

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量，且满足 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$，则必有 . . . . ( )

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ (B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

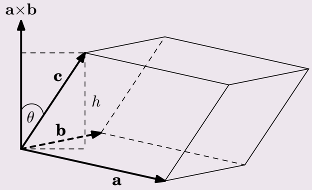
(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ (D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

混合积

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

性质

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
2. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$
3. **几何意义**：以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体体积
4. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面



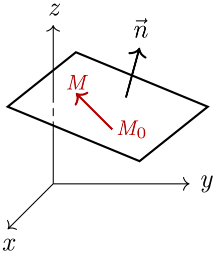
小结

1. **向量的表示**
2. **向量的运算及其性质**
   - 线性运算：平移、放缩
   - 数量积：投影、夹角
   - 向量积：正交、面积
   - 混合积：体积

平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$，求该平面 Π 的方程。

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



- 称它为平面的点法式方程，
- 称 $\vec{n}$ 为平面的法向量。

例

求过点 $(1, 1, 1)$ 且以 $\vec{n} = (2, 3, 4)$ 为法向量的平面的方程。

例

已知三个点坐标 $M_1(0, 0, 1)$, $M_2(1, 1, 0)$ 和 $M_3(1, 0, 1)$，求过这三个点的平面的方程。

平面的一般方程

平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

等价于平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

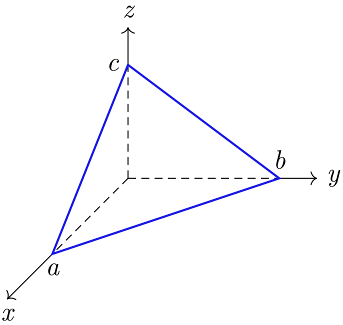
- $D = 0$ 表示平面过原点
- ◇ $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
- ◇ $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
- ◇ $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A = C = 0$ 表示平面平行于 xz 面
- $B = C = 0$ 表示平面平行于 yz 面

例

求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程。

例

设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$。求该平面的方程。

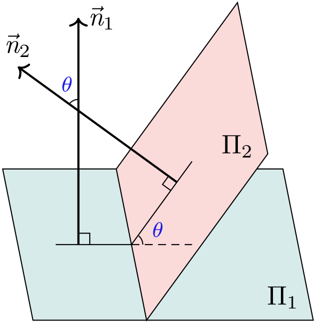


平面方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

这称为平面的截距式方程。

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$，则两平面的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



若 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$，$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$，则有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面的夹角

$$\Pi_1: \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$
$$\Pi_2: \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 \perp \Pi_2 &\iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \\ &\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ // \ \Pi_2 &\iff \vec{n}_1 \ // \ \vec{n}_2 \\ &\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

例

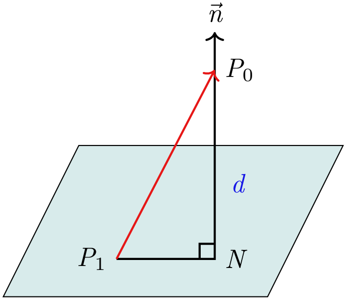
求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角。

例

一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程。

例

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到该平面的距离。

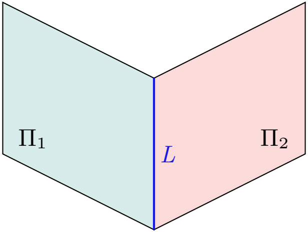


$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

1. 直线的一般式方程

空间直线可视为两平面的交线，其一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



2. 直线的对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$，则它的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程或点向式方程、标准式方程。

在对称式方程中令

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得到直线的参数式方程:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

例 20 期末

将直线的一般式方程 $\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 化为点向式方程及参数式方程。

注：直线方向也可通过求直线上的两点来确定。

两直线的夹角

两直线的夹角，是指两者的方向向量的夹角（取锐角或直角）.
设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2),$$

则有

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

两直线的夹角

$$L_1: \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$
$$L_2: \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$
$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$
$$\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$
$$L_1 \parallel L_2 \iff \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$$
$$\iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

注记

在空间中，两条直线垂直时未必相交.

例

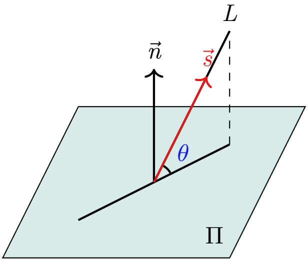
求直线 L_1 和 L_2 的夹角。

$$\begin{aligned} L_1: &\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1} \\ L_2: &\quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1} \end{aligned}$$

直线与平面的夹角

当直线和平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线 所夹锐角 θ，称为直线和平面的夹角。

$$\sin\theta = \cos\langle\vec{s},\vec{n}\rangle = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$$



当直线和平面垂直时，规定它们的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则两者夹角满足

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$L\perp\Pi\Longleftrightarrow\vec{s}\,//\,\vec{n}\quad\Longleftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

$$L\,//\,\Pi\Longleftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\quad\Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$$

例

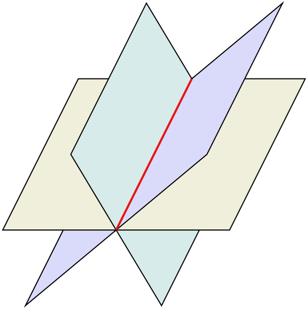
求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，且过点 $(-3,2,5)$ 的直线的方程。

平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束的方程为



$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中，λ_1，λ_2 不全为零。

平面束的方程

在平面束方程（λ_1，λ_2 不全为零）

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) \\ +\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

中通常固定 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda$，得到简化写法

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1 \\ +\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

注记

简化写法缺少平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

点、直线与平面的位置关系

如何用向量或坐标的形式表示空间中各种几何对象间的位置关系?

1. **点到平面的距离**
2. **点到直线的距离**
3. **两平面的夹角**
4. **两直线的夹角**
5. **直线与平面的位置关系**

1、点到平面的距离

问题： 求点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 d
投影法: $d =$ 平面上任一点 M 到 P 的连线在平面法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长度

$$d = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{MP} = \frac{|\boldsymbol{MP} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

即

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

例

设 a, b, c 分别为某平面在三个坐标轴上的截距，d 为其到原点的距离，证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2、点到直线的距离

问题： 求点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到直线

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

的距离 d

利用向量叉乘的几何意义： 记 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$

$$d = \frac{|\boldsymbol{MP} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

3、两平面的夹角

问题：求两平面 $\pi_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = 1, 2$ 的夹角 θ
记 $\boldsymbol{n}_i = (A_i, B_i, C_i), i = 1, 2$，则

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$
- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

4、两直线的夹角

问题：求两直线

$$L_i: \frac{x-x_i}{m_i} = \frac{y-y_i}{n_i} = \frac{z-z_i}{p_i}, \ i=1,2$$

的夹角 θ

记 $\boldsymbol{s}_i = (m_i, n_i, p_i), i=1,2$，则

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}$$

5、直线与平面的位置关系

已知直线和平面：

$$L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

记 $\boldsymbol{s}=(m,n,p), \boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则

1. **夹角：** $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}$
2. $L\perp\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s}//\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$
3. $L//\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow mA+nB+pC=0$

如何判定相交

1. **如何判断两个平面相交?**
   - 若不平行，必相交
2. **如何判断直线和平面是否相交?**
   - 若不平行，必相交
3. **如何判断两直线是否相交?**
   - 将一条直线的参数方程代入另一直线的方程，判断是否有解
   - 两直线距离是否为零，$(s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}) = 0?$
   - 过一直线做另一直线的平行面，求该面与后者的距离
4. ……

例

求点 $P(5,4,2)$ 在直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ 上的投影，并求点 P 到直线的距离。

例

求直线 $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ 在平面 $x+2y+4z=2$ 上的投影和投影平面的方程。

例

求异面直线 $x-3=y-4=-z-1$ 与 $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+1}{4}=-z$ 之间的距离，并求公垂线的方程。

练习

题

一直线过点 $A(1,2,1)$ 且垂直于直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$$

又和直线

$$L_2:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

相交，求此直线方程.

答案

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}.$$

练习

题

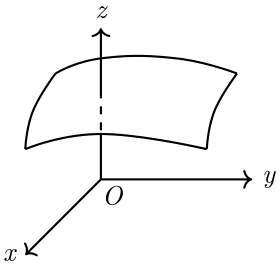
求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

答案

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

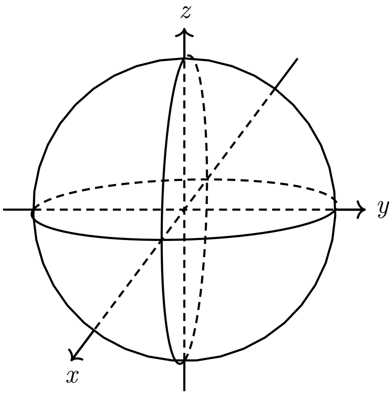
方程与曲面

- 方程 $F(x, y, z) = 0$ 对应一个曲面 S
- 曲面 S 对应一个方程 $F(x, y, z) = 0$



球面

- 球心在原点，半径为 R 的球面
- 方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$



三维空间中任意曲面均可用含有两个参数的方程表示

$$x = x(u, v),\ \ y = y(u, v),\ \ z = z(u, v)$$

例

求以原点为球心，$R(R > 0)$ 为半径的球面的参数方程。

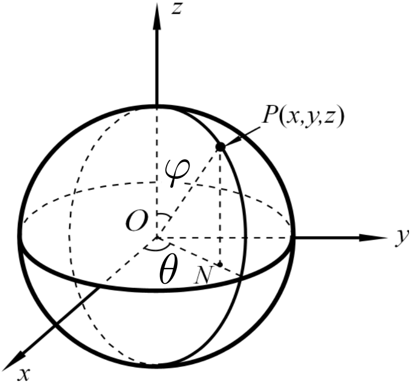
- **以 x, y 为参数：**

$$x = u, y = v, z = \pm\sqrt{R^2 - u^2 - v^2},\ (u^2 + v^2 \leqslant R^2)$$

- **以角度为参数：** (球面的极坐标方程)

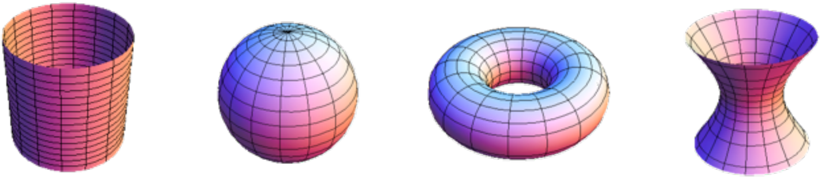
$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{pmatrix}$$

球面的极坐标方程



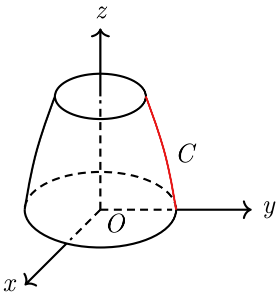
$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{pmatrix}$$



例

求曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面

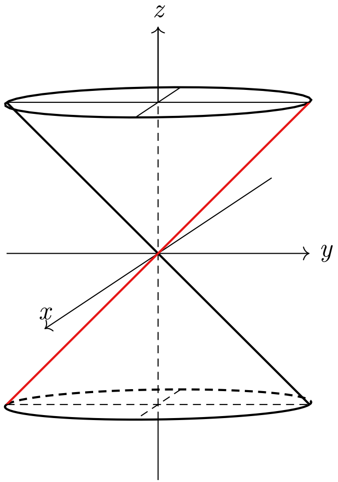


$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

曲线 C 称为旋转曲面的母线

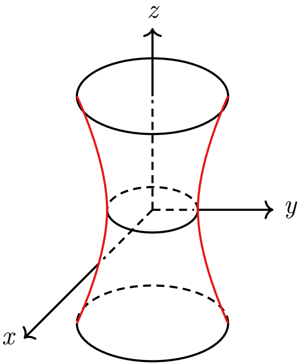
圆锥面

- yz 面上的直线 $z = ay$ 绕 z 轴旋转一周
- 圆锥面 $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$



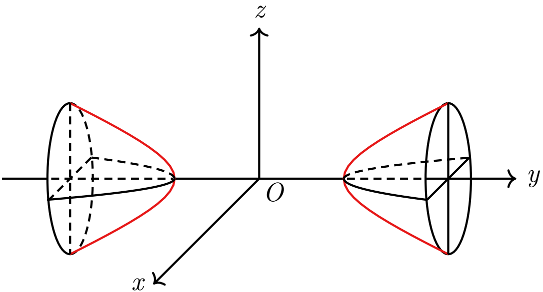
旋转单叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周，得到旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.（实例：广州塔）



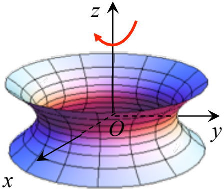
旋转双叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 y 轴旋转一周，得到旋转双叶双曲面 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$.

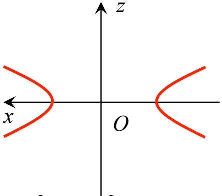


旋转双曲面

单叶双曲面

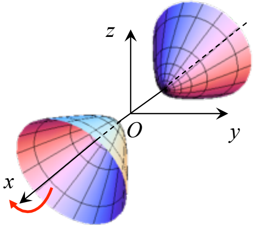


$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面



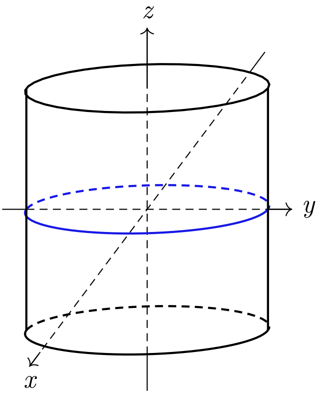
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

例

$x^2 + y^2 = R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 移动而得。

准线：xy 面的圆 $x^2 + y^2 = R^2$.
母线：平行于 z 轴的直线。



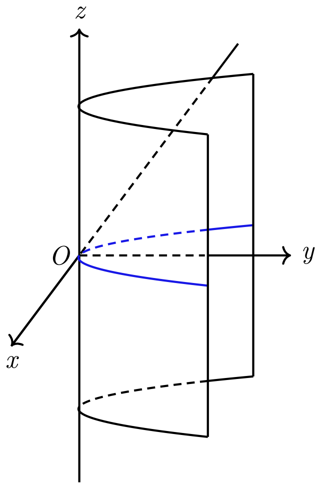
一般地，方程 $F(x, y) = 0$ 在空间中表示一个柱面。

例

$y = x^2$ 抛物柱面

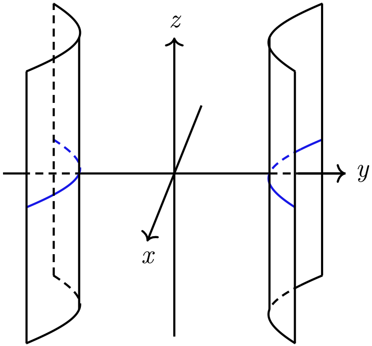
准线 xy 面上的抛物线 $y = x^2$

母线 平行于 z 轴的直线



例

$y^2 - x^2 = 1$ 双曲柱面

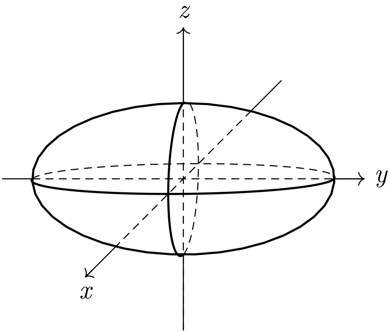


准线 xy 面上的双曲线

母线 平行于 z 轴的直线

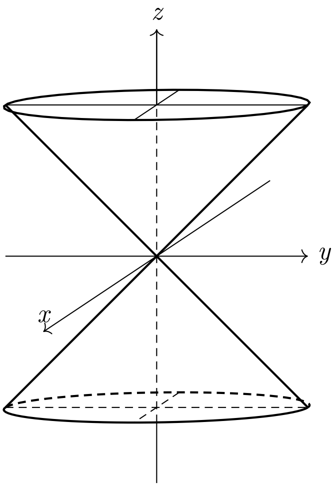
椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



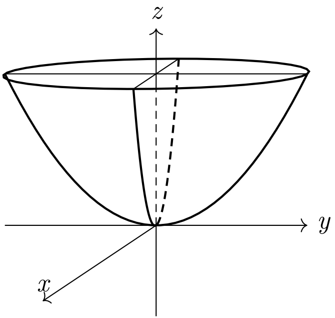
椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$



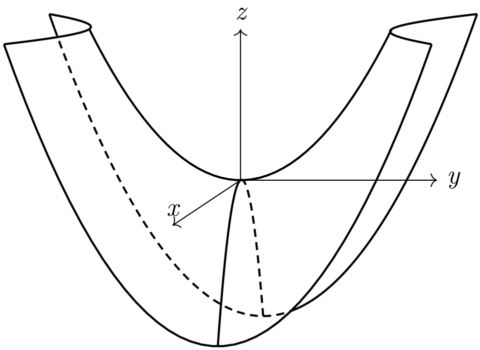
椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



双曲抛物面

- $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$
- 又称为马鞍面



二次曲面

定义：三元二次多项式方程

$$\begin{aligned} a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yx + b_3zx & \\ +c_1x + c_2y + c_3z + d &= 0 \\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0) & \end{aligned}$$

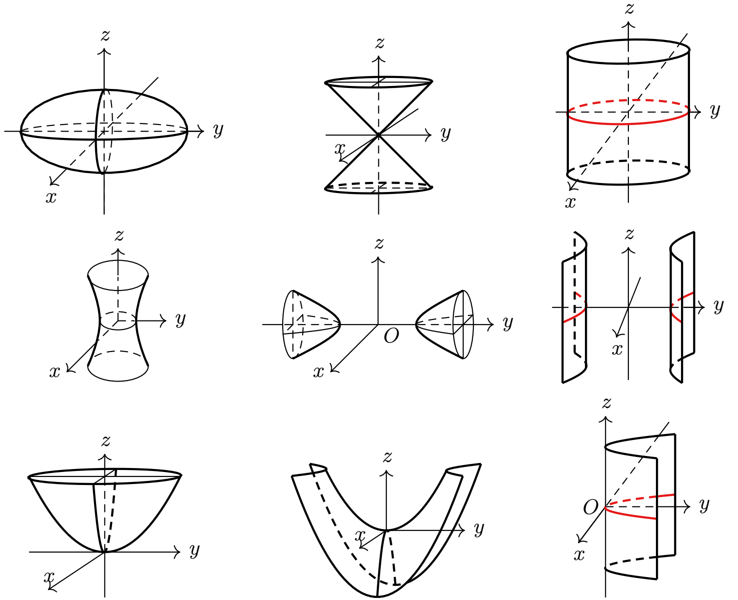
常见的二次曲面

- 椭球面
- 单叶双曲面
- 双叶双曲面
- 椭圆（双曲，抛物）柱面
- 椭圆抛物面
- 双曲抛物面
- 椭圆锥面

二次曲面的分类

椭圆型	椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲型	单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
抛物型	椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	抛物柱面 $x=ay^2$

二次曲面的图形



练习

题

求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

练习

选择

下列结论中，错误的是 . . . . ( )

(A) $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

(B) $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

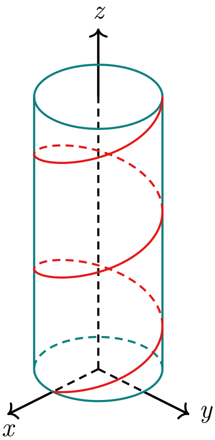
(C) $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

(D) $y^2=5x$ 表示抛物柱面

空间曲线的参数方程

任意曲线都可以视为动点的运动轨迹

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

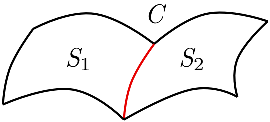


例：以下方程表示何种曲线

1. $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t\ (t \in \mathbb{R})$
2. $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t\ (t \in \mathbb{R})$

空间曲线的一般式方程

空间曲线可视为两个曲面的交线。



其一般方程为方程组

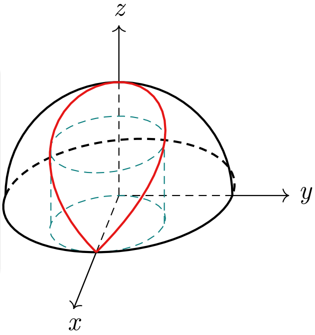
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

例

方程组

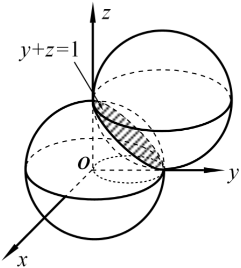
$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$$

表示上半球面和圆柱面的交线。 (Viviani 曲线)



例

求空间曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程。



曲线在 xOy 上的投影 = 变量 x,y 满足的柱面方程与 xOy 平面的交线

空间曲线的投影

空间曲线:

$$C:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

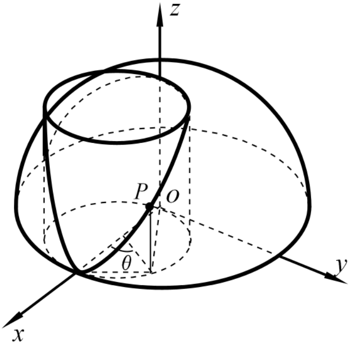
消去 z，所得方程

$$H(x,y)=0$$

- 曲线 C 关于 xOy 平面的**投影柱面**
- xOy 平面内的一条曲线——C **的投影曲线**

求

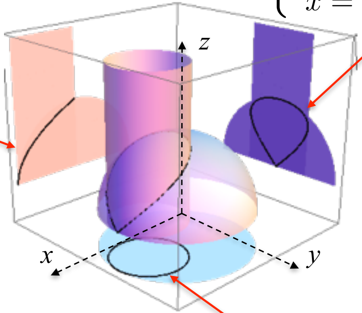
Viviani 曲线在各坐标面上的投影曲线，并由此写出 Viviani 曲线的参数方程。



$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2y^2 + \left(z^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2 = \frac{R^4}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 - Rx = R^2 \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - Rx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos\theta),\ \ y = \frac{R}{2}\sin\theta,\ \ z = R\sin\frac{\theta}{2},\ \ \theta \in [0, 2\pi]$$

期末复习

1. **函数**
   - 函数的定义域、值域，基本表示形式
   - 基本初等函数的性质及图形，初等函数的概念与性质
   - 函数表示的多样性：隐函数，极坐标，参数方程等
2. **极限**
   - 极限的保号性：$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x) = A \Leftrightarrow \exists \overset{\circ}{N}_\delta(\bullet), f(x) = A + o(1)$
   - 极限的计算方法：两个重要极限，三个收敛准则，极限运算法则，等价无穷小，洛必达法则，泰勒公式
3. **连续**
   - 根据定义判断间断点，初等函数的连续性
   - 有界闭区间上连续函数的性质

期末复习 (续)

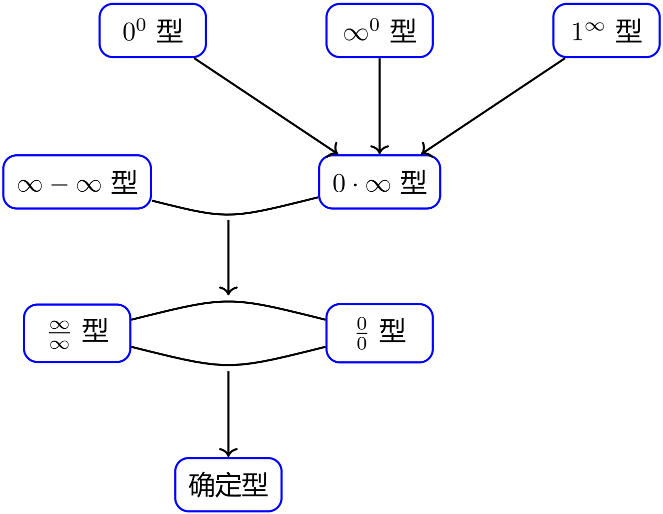
4. **导数和微分**
   - 定义与性质，微分形式不变性的运用
   - 复合函数微分法，隐函数微分法及参数微分法
5. **导数的应用**
   - 以三个中值定理为依据，通过函数增量研究函数性质
   - 函数零点与导函数零点的关系，求极限，函数性质（增减凹凸），函数图形及渐近线，泰勒公式

期末复习 (续)

6. **不定积分**
   - 原函数概念、不定积分概念
   - 三个基本方法、一个可积类型
7. **定积分**
   - 概念和性质，中值定理，广义积分
   - 原函数、导函数及变上限定积分之间的关系
   - 定积分计算方法的特点：对称性
8. **定积分的应用**
   - 面积、弧长、旋转体体积及表面积

9. **向量代数**
   - 向量及其表示:长度 + 方向
   - 向量运算:
     - 线性运算：平移、伸缩
     - 点乘：投影、夹角
     - 叉乘：反交换律、平行四边形面积, $a \times b \perp a$, $a \times b \perp b$
     - 混合积：体积、共面
10. **平面与直线方程**
    - 夹角，距离，平行，垂直，如何判定相交

函数极限



$$(15)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$$

$$(18)\quad \lim_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$$

与积分相关的极限问题

计算极限

1. (13,14,19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}$
2. (17) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1/2} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n+1/n}\right]$
3. (15) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n+k}$
4. (16) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$
5. (12) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$
6. (16) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

与积分相关的极限问题（续）

例

1. (17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\,\mathrm{d}t}{x^2}$
2. (15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_{x^2}^{x}\dfrac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t.$
3. (13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\tan x^2}\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x}\dfrac{e^{xt}-1}{t}\,\mathrm{d}t$
4. (14) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\arctan(at)\,\mathrm{d}t}{x^6}=2$，则 $a.$

关于幂指函数

例

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

定理

若 $x\to\square$ 时，$a(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\big(1+a(x)\big)^{b(x)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\square}a(x)b(x)}}$$

例

求幂指函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的导数.

复合函数，参数方程求导

定理

设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例

已知 $f(u)$ 可导，求 $f(\ln x)$ 的导数和二阶导数.

定理

设参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定了 x 和 y 的函数关系，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \tag{2}$$

函数的最值

一般地，对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点。

特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值。

证明不等式的方法

例

证明：当 $x>0$ 时，有 $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$.

证明不等式有如下这些方法：

1. 拉格朗日中值定理 利用 1 阶导数
2. 泰勒公式 利用 n 阶导数
3. 函数的单调性 利用 1 阶导数
4. 曲线的凹凸性 利用 2 阶导数

证明不等式的方法（续）

例 13 期末

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续单调增函数，求证：$\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

例 18 期末

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且 $f(x)\geqslant 0$, 满足

$$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1].$$

证明：$f(x)\leqslant 1+x,\ x\in[0,1].$

- 泰勒公式和几个常用函数的麦克劳林展开

  $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，$\xi$介于 x 与 a 之间;

  1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
  2. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$
  3. $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n+o(x^n)$
  4. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\dfrac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2k})$
  5. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{1}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k+1})$

  掌握函数在一点的泰勒公式，会用直接展开或间接展开的方法求函数的泰勒公式。($\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$)

例 18 期末

如果 $f(0)=0$, 证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ξ 使 $a^3f''(\xi)=3\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

例 17 期末

讨论函数 $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调增减区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数的图像。

1. **分析函数一般性质：** 定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴的交点
2. **画出渐近线：** 水平、铅直和斜渐近线
3. **求一、二阶导函数：** 确定不可导点
4. **列表分析：** 单调、凸凹区间，极值点和拐点
5. **描点作图**

有理分式

将有理分式分解为部分分式的时候，可以用待定系数法。

对于较简单的情形，可以直接凑出分子的系数

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{16-x^4} = \int \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

有理分式也可以用换元积分法化为简单的有理分式

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{a^6-x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{a^6-x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{a^6-u^2}$$

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4)}{(1+x^8)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

有理分式

例

1. (17) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
2. (16) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^{1+x}+e^{3-x}}$
3. (13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
4. (19) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

三角函数有理式

1. 形如 $\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$ 的积分，
   - 如果 m, n 中有奇数，取奇次幂的底数 (如 n 是奇数，则取 $\cos x$) 与 $\mathrm{d}x$ 凑微分，那么被积函数一定能够变形为关于另一个底数的多项式函数。
   - 如果 m, n 均为偶数，则利用倍角公式降幂，直至将三角函数降为一次幂，再逐项积分。
2. 两个类型题：
   - $\int \frac{A\sin x + B\cos x}{C\sin x + D\cos x}\mathrm{d}x$:

     $$令\ A\sin x + B\cos x = a(C\sin x + D\cos x) + b(C\sin x + D\cos x)'.$$

   - $$\int \frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2 x}{a\tan^2 x + b}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a\tan^2 x + b}.$$

换元积分法的正切正割函数情形 (令 $u=\tan x$):

$$\int \varphi(\tan x)\sec^{2k}x\,\mathrm{d}x=\int \varphi(u)(1+u^2)^{k-1}\mathrm{d}u$$

$$\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x=\int \tan^2 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x-\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

换元积分法的正弦余弦函数情形 (k 可为负整数):

$$\int \varphi(\sin x)\cos^{2k+1}x\,\mathrm{d}x = \int \varphi(u)(1-u^2)^k \mathrm{d}u$$
$$\int \varphi(\cos x)\sin^{2k+1}x\,\mathrm{d}x = -\int \varphi(u)(1-u^2)^k \mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{(2+u)(1-u^2)}$$

换元积分法的根号情形 I:

1. 若含有 $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，令 $u=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;
2. 若含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$，令 $u=\sqrt[6]{x}$.

$$\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 2u\arctan u\,\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{u^2+u}\mathrm{d}u$$

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}a^4 \tag{17}$$

分部积分法

分部积分公式: $\displaystyle\int \mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} - \int \mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{u}$

分部积分的关键在于选择合适的 $\mathbf{u}$ 和 $\mathrm{d}v$:

- $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \quad = \int \mathbf{x}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
- $\int x\cos x\mathrm{d}x \quad = \int \mathbf{x}\mathrm{d}\left(\sin x\right)$
- $\int x\ln x\mathrm{d}x \quad = \int \ln\mathbf{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\mathrm{d}x \quad = \int \arctan\mathbf{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

分部积分法（例题）

例

1. (17) $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$
2. (19) $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$
3. (16) $\int_0^{\pi} x\cos^6 x\sin x\,\mathrm{d}x$
4. (15) $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x$
5. (18) $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
6. (15) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$
7. (19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$
8. (14) 设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

❶ 定积分的性质

- 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$
- 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\boxed{(18)\quad \int_{-1}^{1} \frac{x^5+x^3+x^2+x+\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}\qquad \boxed{(06)\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}\,\mathrm{d}x}$$

- 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$
- 若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

(计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x} = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\pi.$)

- 要注意被积函数中的 $|\cdot|, \sqrt{\cdot}$ 在积分区间上的符号。

(计算 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x.$)

❷ 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$. 分部积分可得递推公式 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

从而

$$I_k=\begin{cases}\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\dfrac{2n-4}{2n-3}\cdots\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, & k=2n-1,\\ \dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdots\dfrac{1}{2}I_0=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & k=2n.\end{cases}$$

例

1. (13) 求连续函数 $f(x)$, 使得 $f(x)=x\arctan x+\dfrac{1}{1+x^2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. (18) 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ 设 $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant 2)$, 求 $F(x)$.
3. (19) 设 $f(x)$ 连续, $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ (A 为常数), 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

极坐标下的面积

在极坐标中，由射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 以及曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 围成的曲边扇形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

例

1. 求曲线 $\rho=2\cos\theta$ 围成的面积。
2. (13) 求曲线 $\rho=\sqrt{\sin\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 所围图形的面积。

例 18 期末

求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线，以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小。

平面曲线的弧长

1. 参数方程：$s = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,\mathrm{d}t$
2. 直角坐标：$s = \displaystyle\int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x$
3. 极坐标：$s = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$

例 15,19 期末

求心脏线 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 的全长。

例

设旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴围成一平面图形，求

- 该图形的面积;
- 该图形边界的弧长;
- 该图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积;
- 该图形绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积。

$1.\ 3\pi a^2, 2.\ 8a + 2\pi a, 3.\ 5\pi^2 a^3, 4.\ 6\pi^3 a^3$

利用向量代数抽取几何信息

平面，直线方程 17 期末

设直线 $L:\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\x+y+4z-2=0\end{cases}$，平面 π 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$a,b,c$ 均为非零的数，且 $b=c$，平面 π 过直线 L，求平面 π 的方程。

位置关系 19 期末

1. 求一条直线 L 过点 $P(2,3,4)$，且与平面 $\pi:2x+y-2z+7=0$ 平行，又与直线 $L_1:\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-5}{-1}$ 相交。
2. 证明 $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 是两条异面直线。

夹角，距离 17 期末

求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\begin{cases}x-y+z+5=0\\5x-8y+4z+36=0\end{cases}$ 的距离。

例

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,\mathrm{d}x$, 证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

例

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，$f(0)=0$, 证明：存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

例

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微，$f(a) = f(b) = 0$. 证明:

1. $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$.
2. $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}(b-a) \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$.

例

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = M$. 证明:

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2, \qquad \forall x \in [a, b].$$

例 13 期末

设 $f(x)$ 是二阶可微函数，且 $f''(x)\geqslant 0$, 证明：

1. 对任意的 $x,p\in\mathbb{R}$, 有 $f(x)\geqslant f(p)+f'(p)(x-p)$;
2. $\exp\left(\int_0^1 (1+f^2(x))\,\mathrm{d}x\right)\leqslant \int_0^1 \exp(1+f^2(x))\,\mathrm{d}x$.

例 15 期末

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并且存在 $M>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant M$. 设 n 为正整数，证明：

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{2n}.$$

例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，

1. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$.
2. (Hadamard) 若 $f''\geqslant 0$，证明：$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(\frac{a+b}{2})$.

例 23 考研

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leqslant 1$，

1. 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\leqslant\frac{x(1-x)}{2}$.
2. 证明：$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{12}$.　(可改进为 $\frac{1}{24}$)

计算不定积分

例

1. $\int \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}\,\mathrm{d}x$. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} - \arctan\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + C\right)$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. $\left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C\right)$
3. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$. $\left(x\tan\frac{x}{2} + C\right)$
4. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + C\right)$
5. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$. $\left(\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C\right)$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$. $\left(\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\right)$
7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}$. $\left(\frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} - \ln|\csc x+\cot x| + C\right)$
8. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$. $\left(\frac{\ln x}{1-x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C\right)$

积分运算的结果是否正确，可以通过它的逆运算 (求导) 来检验，即它的导函数是否等于被积函数。

计算定积分

例

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$. $\quad (2\sqrt{2}\pi)$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2013} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$. $\quad (2012!!)$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. $\quad (\frac{\pi}{2})$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. $\quad (0)$
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$. $\quad (\frac{4}{e})$
6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$. $\quad (0)$

求极限问题

关于洛必达法则，有如下说明：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限。

例

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $\quad(e^{-\frac{1}{6}})$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2\cos^2 x}$. $\quad(-\frac{2}{3})$
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=1$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$. $\quad(37)$
4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内一阶导数连续，且 $f(0)\neq0$, $f'(0)\neq0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时，是比 h 高阶的无穷小，试确定 a, b. $\quad(a=2, b=-1)$