

计算力学课程实习报告

平面 4 结点等参单元有限元程序设计

空间 8 结点六面体等参单元有限元程序设计



2017 年 12 月 25 日-2018 年 1 月 19 日

目录

1.有限单元法.....	1
1.1. 整体刚度矩阵.....	1
1.2. 整体结点荷载列阵.....	2
1.3. 整体结点位移列阵.....	3
1.4. 其它.....	3
2.有限元程序设计.....	5
2.1.程序函数.....	5
2.2.数据输入输出.....	7
3.计算实例.....	9
3.1.算例 1.....	9
3.1.1.几何模型.....	9
3.1.2.有限元数据文件.....	10
3.1.3.计算结果.....	10
3.1.4.结果分析.....	11
3.2.算例 2	12
3.2.1.几何模型.....	12
3.1.2.有限元数据文件.....	13
3.1.3.计算结果.....	13
3.2.4.结果分析.....	14
4. 小结和展望.....	15
5. 工作安排.....	错误!未定义书签。

1.有限单元法

程序的主要思路是，设法得到控制方程 $[K] \cdot \{\delta\} = \{F\}$ 左边的整体刚度矩阵项 $[K]$ 以及右边的整体结点荷载列阵项 $\{F\}$ （部分），解出线性代数方程组得到整体结点位移列阵，利用结点位移列阵可求出应力分布。

基于等参单元适应性广的原因，此次课程设计选取等参单元作为基本的网格单元。针对平面问题，选取 4 结点等参单元；针对空间问题，选取 8 结点六面体等参单元。有限元问题中，等参单元被广泛应用，并且四边形可退化为三角形、六面体也可退化为四面体作为填充单元使用。

以下分析主要针对 8 结点六面体等参单元，平面问题类似。

1.1. 整体刚度矩阵

①关键矩阵

1. 形函数矩阵 $[N]$ ，与局部坐标 r 、 s 、 t 有关，即 $N(r,s,t)$ 。

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}_{3 \times 24}$$

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + r_i r) (1 + s_i s) (1 + t_i t) \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

2. 应变矩阵 $[B]$ ，与局部坐标 r 、 s 、 t 和单元编号 elementID 有关，即 $B(r,s,t,\text{elementID})$ 。

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}_{6 \times 24}$$

3. 雅各比矩阵 $[J]$ ，与局部坐标 r 、 s 、 t 和单元编号 elementID 有关，即 $J(r,s,t,\text{elementID})$ 。

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial t} \end{bmatrix}_{3 \times 8} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix}_{8 \times 3}$$

4. 弹性矩阵[D]，与弹性模量 E 和泊松比 μ 有关，即 D(E, μ)。

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ \text{对称} & & & & & G \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

②单元刚度矩阵

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([B]^T [D] [B] |J|) dr ds dt = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 ([B]^T [D] [B] |J|) H_i H_j H_k$$

其中，数值积分方法采用高斯积分，高斯点的个数取决于被积分函数变量的最高次幂，单元刚度矩阵中 $[B]^T [D] [B]$ 视为常数， $|J|$ 最高具有变量的 2 次幂，

$n \geq \frac{2+1}{2}$ ，则选取 2 个积分点即可。

③组集整体刚度矩阵

组集整体刚度矩阵的关键在于将单元刚度矩阵的单元编号转换为整体编号，将单元刚度矩阵的元素置入整体刚度矩阵中。利用数据文件中单元信息中的结点编号即可建立单元与整体的关系。

④存储格式

采用 COO 存储格式：存储矩阵非 0 元素的值和其对应的行列号，分别置于三个数组存储。如 $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，存储为 value={1,2,4}，row={0,0,1}，col={0,1,1}。

1.2. 整体结点荷载列阵

整体结点荷载列阵分为四部分进行求解：

1. 集中力

考虑到处理集中力的一般方法较为繁琐，不利于整个分析过程的高效性。假设网格划分时，在集中力作用点处布置一结点，这将大大减少程序的代码。

2. 分布力

假设分布力方向沿分布面的法向（方便编程），且为线性分布（方便确定高斯点数目），这也符合工程的实际特点。

$$\begin{aligned}
 r = \pm 1, \{R\} &= -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [N(s_i, t_j)]^T p(s_i, t_j) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \end{array} \right\} H_i H_j \\
 s = \pm 1, \{R\} &= -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [N(t_i, r_j)]^T p(t_i, r_j) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial r} \end{array} \right\} H_i H_j \\
 t = \pm 1, \{R\} &= -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [N(r_i, s_j)]^T p(r_i, s_j) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} \end{array} \right\} H_i H_j
 \end{aligned}$$

3. 体力

$$\begin{aligned}
 \{R\} &= \int_V [N]^T \{P\} dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{array} \right\} |J| dr ds dt \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 [N(r_i, s_i, t_i)]^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{array} \right\} |J(r_i, s_i, t_i, elementID)| H_i H_j H_k
 \end{aligned}$$

4. 约束反力，之后利用大数法，可暂时不予考虑。

三部分分别求解完后，利用单元和整体编号之间的关系，累加到整体结点荷载列阵上去。

1.3. 整体结点位移列阵

由整体刚度矩阵 $[K]$ 和整体结点荷载列阵 $\{F\}$ 解线性代数方程组（PCG 法）得到整体结点位移列阵 $\{S\}$ 。由整体结点位移列阵可继续求解相关应力。

1.4. 其它

①大数法

大数法的修改形式：

$$\begin{bmatrix} 10^{30} & & \\ & 10^{30} & \\ & & \ddots \\ & & & 10^{30} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \times 10^{30} \\ u_j \times 10^{30} \end{Bmatrix}, \text{ 其中 } u_i, u_j \text{ 为已知位移, 可为0}$$

大数法特点:1.没有破坏矩阵的对称性, 没有改变矩阵的维数; 2.不会对原方程组的解产生明显影响; 3.成功避开了右手项含有未知数这一给求解造成阻碍的难题(右手项含有的未知数来自未知的约束反力, 而约束的位移已知)。

②求解线性代数方程组

为求解得到的线性代数方程组, 使用预处理共轭梯度迭代法(the preconditioned conjugate gradient method)进行求解。其中, 预处理矩阵 M 采用 Jacobi precondition (取主元素形成对角阵)。公式如下:

Jacobi Precondition :

$$M_{ij} = \begin{cases} K_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

The Precondition Conjugate Gradient Method :

$$\{U\}_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \{R\}_0 = \{F\} - [K] \{U\}_0, \{Z\}_0 = [M]^{-1} \{R\}_0, \{P\}_0 = \{Z\}_0$$

$$\text{repeat :} \{Q\}_k = [K] \{P\}_k$$

$$a_k = \frac{\{Z\}_k^T \{P\}_k}{\{P\}_k^T \{Q\}_k}$$

$$\{U\}_{k+1} = \{U\}_k + a_k \cdot \{P\}_k$$

$$\{R\}_{k+1} = \{R\}_k - a_k \cdot \{Q\}_k$$

$$\{Z\}_{k+1} = [M]^{-1} \{R\}_{k+1}$$

$$b_k = \frac{\{R\}_{k+1}^T \{Z\}_{k+1}}{\{R\}_k^T \{Z\}_k}$$

$$\{P\}_{k+1} = \{Z\}_{k+1} + b_k \cdot \{P\}_k$$

$a_k \cdot \{P\}_k$ 足够小时退出迭代

注意 PCG 使用的条件: 系数矩阵为正定对称矩阵。

③ (平面情况) 由全局坐标得到局部坐标: 利用雅阁比矩阵得到全局坐标插值和局部坐标插值的关系, 由迭代获得局部坐标。应用于求等效结点荷载列阵。迭代公式为:

$$\text{已知} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

repeat :

$$\begin{cases} x_k = \sum N_i(r_k, s_k) \cdot x_i \\ y_k = \sum N_i(r_k, s_k) \cdot y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_k = x - x_k \\ \Delta y_k = y - y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta r_k \\ \Delta s_k \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} r_{k+1} \\ s_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_k + \Delta r_k \\ s_k + \Delta s_k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \Delta r_k \\ \Delta s_k \end{Bmatrix} \text{ 足够小时退出迭代}$$

2.有限元程序设计

2.1.程序函数

这里主要列出空间 8 结点六面体等参单元有限元程序设计的程序函数，平面 4 结点等参单元类似。

origin 程序入口	dataInOut 读取数据文件、输出计算结果	dataInOut::read(fileName) fileName 为数据文件名 读取数据文件，将结点、单元、材料、约束、面力、集中力信息存进共享数据中 dataInOut:: nodeDisplacementOut() 输出整体结点位移值到 FEMout.txt 中 dataInOut:: centerStressOut() 输出单元中心（应力佳点）处的应力值到 FEMout.txt 中 dataInOut:: nodeStressOut() 输出结点处的应力值到 FEMout.txt 中 dataInOut:: vtkOut() 将计算结果输出为 VTK 格式，作为可视化处理的数据	共享数据： ①数据文件：结点、单元、材料、约束、面力、集中力信息 ②整体刚度矩阵 ③整体结点荷载列阵 ④结点位移列阵 ⑤结点应力矩阵 基本函数： matrix matrix::matrixM(A,B) 计算矩阵 A 和矩阵 B 相乘 matrix::matrixT(A) 计算矩阵 A 的转置 matrix::matrixN2(A) 计算矩阵 A(2 阶)的逆 matrix::matrixN3(A) 计算矩阵 A(3 阶)的逆 matrix::matrixN(A) 计算矩阵 A 的逆 matrix::matrixM2(A,B) 计算矩阵 A 和数 B 相乘 matrix::matrixP(A,B) 计算矩阵 A 和矩阵 B 相加 matrix::matrixP2(A,B) 计算矩阵 A 和矩阵 B 相减
	stiffness 计算整体刚度矩阵	stiffness:: Nri(r, s, t) r、s、t 为局部坐标 计算形函数对局部坐标的偏导数 stiffness:: J(r, s, t,elementID) r、s、t 为局部坐标，elementID 为单元编号 计算雅各比矩阵 stiffness:: B(r, s, t,elementID) r、s、t 为局部坐标，elementID 为单元编号 计算位移-应变转换矩阵 stiffness:: D(elementID) elementID 为单元编号 计算弹性矩阵 stiffness::elementStiffness(elementID) elementID 为单元编号 计算单元刚度矩阵 stiffness:: globalStiffness() 计算整体刚度矩阵 stiffness:: match(elementID, i) elementID 为单元编号，i 为单元的局部序号 计算局部序号对应的整体序号 stiffness:: COO(value, i, j) value 为值，i 为行序号，j 为列序号	

		将大型稀疏矩阵采用 COO 格式进行存储	
load 计算整体结点荷载列阵		load:: getLoadR() 组集整体结点荷载列阵 load:: N(r, s, t) r、s、t 为局部坐标 计算形函数矩阵 load:: nodeloadR() 处理集中力形成的结点荷载列阵 load:: faceloadR() 处理面力形成的结点荷载列阵 load:: bodyloadR() 处理体力形成的结点荷载列阵 load:: faceload_ElementID_FaceID(faceloadID) faceloadID 为面力编号 得到分布力所在的单元 ID 和面 ID load:: GaussPiontP(faceloadID) faceloadID 为面力编号 计算高斯点处的荷载值	matrix::matrixDet2(A) 计算矩阵 A(2 阶)的行列式 matrix::matrixDet3(A) 计算矩阵 A(3 阶)的行列式 matrix::matrixDet(A) 计算矩阵的行列式
求解控制方程（即求解线性代数方程组）	solve_LU 直接法	solve_LU:: getDisplacement() 得到各节点位移值 solve_LU:: doLU() 分解得到 L、U 矩阵中的 L 矩阵 solve_LU:: forward() 前代求解[L][g]=[R]中的[g] solve_LU:: backwards() 回代求解[U][displacement]=[g] solve_LU:: getLUij(row, col) row 为行号，col 为列号 用于操作 LU	
	solve_PCG 迭代法（提供一般解法 N 和逐单元 EBEw 求解法）	solve_PCG:: getDisplacement() 得到各节点位移值 solve_PCG:: doPCG() PCG 实现 solve_PCG:: getMN() 得到预处理矩阵 solve_PCG:: getZ(M, R) M、R 均为 PCG 法中的计算矩阵 用于计算 Z 列阵 solve_PCG:: getQ(P) P 为 PCG 法中的计算矩阵 用于计算 Q 列阵	
stress		stress:: doStress()	

计算单元中心、结点处应力	计算应力值 stress:: getCenterStress() 得到各单元中心处应力值 stress:: getNodeStress() 得到各结点应力值 stress:: nodeLinkElement() 将结点对应的单元存入数组
--------------	---

2.2.数据输入输出

数据全部使用国际标准单位：米、千克、秒，以及其直接衍生的单位。如混凝土弹性模量：2E+10Pa，重度：21000 N / m^3 。

①平面4结点等参单元

数据从txt文本文件中输入，数据的输入形式如下：

NODE（结点信息）		189（结点个数）				
0（结点编号）		0.0（结点 x 坐标）		0.0（结点 y 坐标）		
1		0.0		0.125		
.....						
ELEMENT（单元信息）		160（单元个数）				
0（单元编号）	0（单元材料编号）	0（单元的第 1 个结点编号）	17（单元的第 2 个结 点 编 号）	16（单元的第 3 个结点编号）	1（单元的第 4 个结点编号）	
1	0	17	18	19	16	
.....						
MATERIAL（材料信息）		1（材料数）				
0（材料编号）		2E+10（材料弹性模量）	0.17（材料泊松比）		21000（材料重度）	
.....						
BOUND（约束信息）		18（约束数）				
0（约束编号）		0（约束相关结点编号）	0（约束相关结点方向）		0（约束相关结点方向的位移值）	
1		0	1		0	
.....						
FACELOAD（面力信息）		20（面力分拆之后的数目）				
0（面力编号）	8（面力相关的第 1 个结点编号）	9（面力相关的第 2 个结点编号）	0（面力相关的第 1 个结点处的 x 方向的面力值）	0（面力相关的第 2 个结点处的 x 方向的面力值）	-10000（面力相关的第 1 个结点处的 y 方向的面力值）	-10000（面力相关的第 2 个结点处的 y 方向的面力值）
1	9	26	0	0	-10000	-10000
.....						
NODELOAD（集中力信息）		1（集中力数）				

0 (集中力编号)	10(集中力 x 坐标)	1 (集中力 y 坐标)	0 (集中力 x 方向分量)	-10000 (集中力 y 方向分量)
.....				

位移和应力值输出到结果文件 FEMout.txt 中，便于后期整理与查看。输出形式如下：

NoodeID		X-Displacement	Y-Displacement
0		-7.392e-25	-2.181e-25
1		-7.864e-25	1.447e-26
.....	
ElementID	X-NormalStress	Y-NormalStress	XY-ShearStress
0	-7.520e+06	-5.306e+05	-3.168e+05
1	-6.699e+06	1.211e+05	-5.387e+04
.....
NodeID	X-NormalStress	Y-NormalStress	XY-ShearStress
0	-7.520e+06	-5.306e+05	-3.168e+05
1	-6.390e+06	-4.668e+05	-3.188e+05
.....

②空间 8 结点六面体等参单元

数据从 txt 文本文件中输入，数据的输入形式如下：

Node（结点信息）		16（结点总数）								
0.0（结点 x 坐标）			0.0（结点 y 坐标）			0.0（结点 z 坐标）				
1.0			0.0			0.0				
.....										
Element（单元信息）		3（单元总数）				8（单元最大结点数）				
8（单元结点数）	0（单元材料编号）	0（单元的相关结点）	1	6	7	8	9	14	15	
8	0	0	2	3	4	5	10	13	14	
.....										
Material（材料信息）		1（材料总数）								
2E+10（材料弹性模量）			0.17（材料泊松比）			21000（材料重度）				
.....										
Bound（约束信息）		18（约束总数）								
0（约束相关结点编号）			0（约束相关结点方向，0-x，1-y，2-z）			0（约束相关结点方向的位移值）				
0			1			0				
.....										
Faceload（面力信息）		20（面力总数）								
8（结点编号）	9（结点编号）	14（结点编号）	15（结点编号）	0（法向值）	-10000（法向值）	-10000（法向值）	0（法向值）			
9	10	13	14	-10000	-20000	-20000	-10000			
.....										
Nodeload（集中力信息）		2（集中力总数）								

3 (结点编号)	0.0 (集中力 x 分量)	0.0 (集中力 y 分量)	10000 (集中力 z 分量)
.....			

位移和应力值输出到结果文件 FEMout.txt 中，便于后期整理与查看。输出形式如下：

NooeID	X-Displacement		Y-Displacement		Z-Displacement	
0	-6.224e-26		-4.785e-27		-1.928e-26	
1	-1.744e-05		-1.185e-06		-2.619e-05	
.....	
ElementID	X- NormalStress	Y- NormalStress	Z- NormalStress	XY- ShearStress	YZ- ShearStress	ZX- ShearStress
0	-6.708e+00	-3.384e+01	-2.931e+03	-5.366e-11	1.455e-11	-7.583e+04
1	2.973e+00	8.611e+01	-5.441e+03	1.000e-11	-7.276e-12	-4.485e+04
.....
NodeID	X- NormalStress	Y- NormalStress	Z- NormalStress	XY- ShearStress	YZ- ShearStress	ZX- ShearStress
0	-6.708e+00	-3.384e+01	-2.931e+03	-5.366e-11	1.455e-11	-7.583e+04
1	-1.868e+00	2.614e+01	-4.186e+03	-2.183e-11	3.638e-12	-6.034e+04
.....

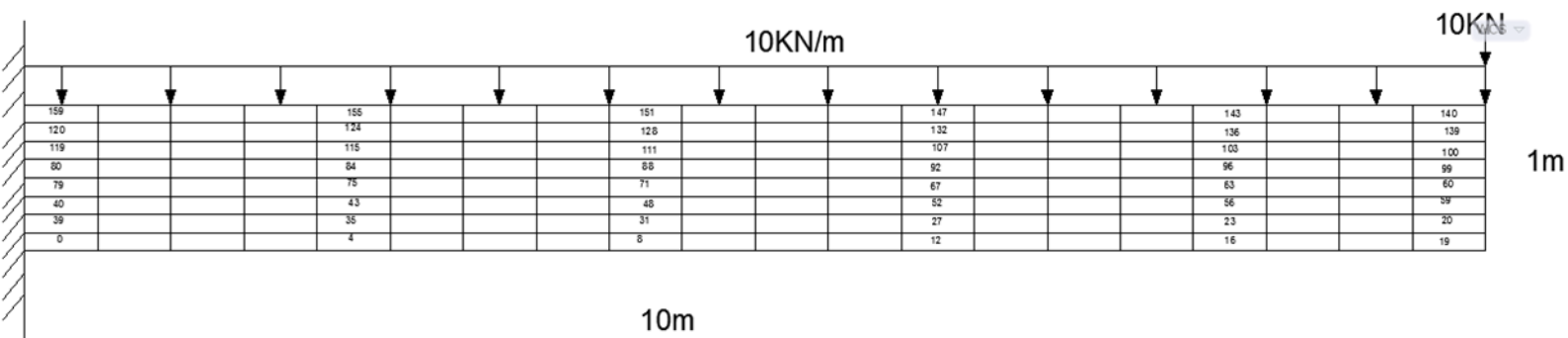
3.计算实例

3.1.算例 1

3.1.1.几何模型

悬臂梁，受自重、均布荷载、集中荷载作用。

梁高 1m，长 10m，承受均布荷载 10KN/m，集中荷载 10KN，弹性模量 20GPa，泊松比 0.17，重度 21，取厚度 1m，视为平面问题处理。（暂时不考虑强度不够是否毁坏等问题）



坐标系：左下角为原点，水平向右为 x 正向，铅垂向上为 y 正向。

3.1.2.有限元数据文件

选取部分如下：

```

NODE 189
0 0.0 0.0
1 0.0 0.125
2 0.0 0.25
3 0.0 0.375
4 0.0 0.5
5 0.0 0.625
.....
ELEMENT 160
0 0 0 17 16 1
1 0 17 18 19 16
2 0 18 35 34 19
3 0 35 36 37 34
4 0 36 53 52 37
5 0 53 54 55 52
.....
MATERIAL 1
0 2E+10 0.17 21000
.....
BOUND 18
0 0 0 0
1 0 1 0
2 1 0 0
3 1 1 0
4 2 0 0
5 2 1 0
.....
FACELOAD 20
0 8 9 0 0 -10000 -10000
1 9 26 0 0 -10000 -10000
2 26 27 0 0 -10000 -10000
3 27 44 0 0 -10000 -10000
4 44 45 0 0 -10000 -10000
5 45 62 0 0 -10000 -10000
.....
NODELOAD 1
0 10 1 0 -10000
.....
    
```

3.1.3.计算结果

选取部分如下：

NoodelID	X-Displacement	Y-Displacement	
0	-7.392e-25	-2.181e-25	
1	-7.864e-25	1.447e-26	
2	-5.141e-25	1.658e-26	
3	-2.551e-25	2.060e-26	
4	4.114e-28	2.060e-26	
5	2.545e-25	2.038e-26	
.....			
ElementID	X-NormalStress	Y-NormalStress	XY-ShearStress
0	-7.520e+06	-5.306e+05	-3.168e+05
1	-6.699e+06	1.211e+05	-5.387e+04
2	-6.050e+06	-2.393e+04	-1.289e+05
3	-5.395e+06	6.171e+03	-1.058e+05
4	-4.784e+06	3.393e+01	-1.022e+05
5	-4.209e+06	1.281e+03	-9.558e+04
.....			
NodeID	X-NormalStress	Y-NormalStress	XY-ShearStress
0	-7.520e+06	-5.306e+05	-3.168e+05

1	-6.390e+06	-4.668e+05	-3.188e+05
2	-4.191e+06	-3.279e+05	-3.147e+05
3	-2.077e+06	-1.702e+05	-3.041e+05
4	-3.545e+02	-2.449e+03	-2.998e+05
5	2.077e+06	1.651e+05	-3.048e+05
.....			

列出 PARAVIEW 处理的 vtk 数据文件的部分结果，如下：

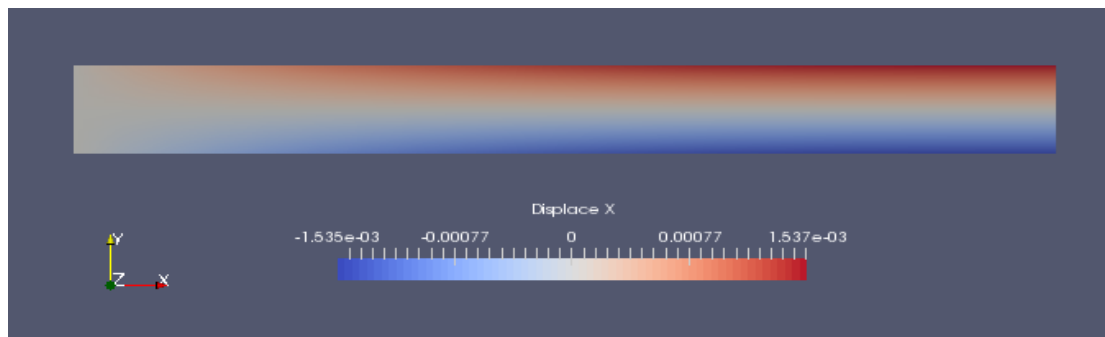


Fig3.1.3-1 X 位移

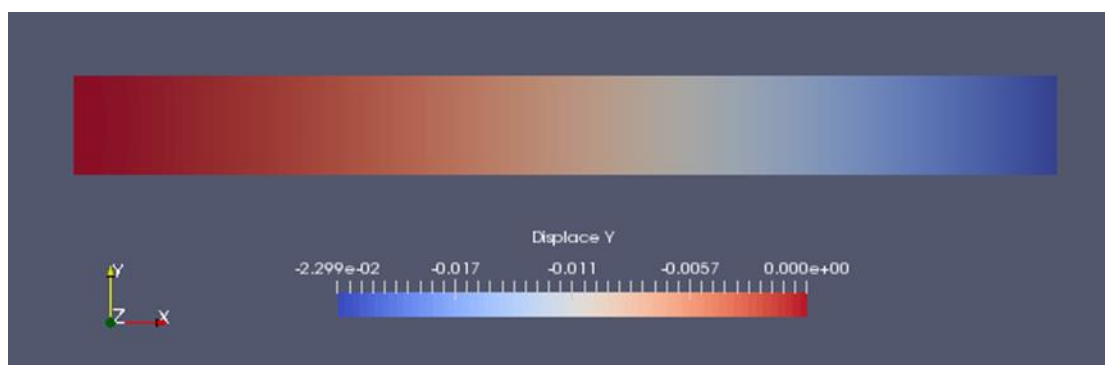


Fig3.1.3-2 Y 位移

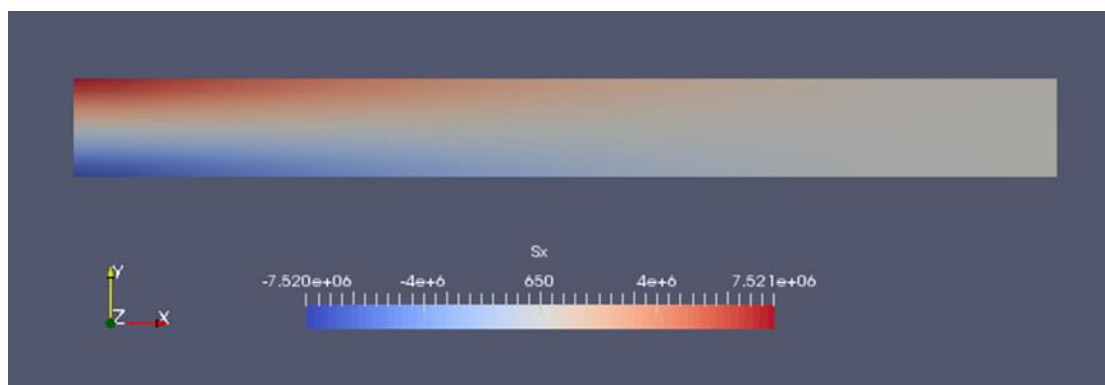


Fig3.1.3-2 σ_x

3.1.4. 结果分析

列表比较图中标记的单元（上部分）中心点应力的理论值和计算值：

单元编号	159	120	119	80	155	124	115	84
理 论 值	8247.6	5891.1	3534.7	1178.2	5294.5	3781.8	2269.1	756.4

(KPa)								
PCG 法 EBE 计 算 值 (KPa)	7521	5262	3120	1034	4784	3420	2054	684.9
误差	-9.66%	-11.96%	-13.29%	-13.95%	-10.67%	-10.58%	-10.47%	-10.44%

单元编号	151	128	111	88	147	132	107	92
理论值 (KPa)	2992.3	2137.4	1282.3	427.4	1341.2	958	574.8	191.6
PCG 法 EBE 计算 值(KPa)	2705	1935	1163	387.9	1214	870.1	523.3	174.7
误差	-10.62%	-10.46%	-10.26%	-10.18%	-10.48%	-10.10%	-9.84%	-9.67%

单元编号	143	136	103	96	140	139	100	99
理 论 值 (KPa)	341.1	243.6	146.2	48.7	18.2	13	7.8	2.6
PCG 法 EBE 计 算 值 (KPa)	310.7	225.2	136.6	46.04	24.03	14.98	7.78	1.356
误差	-9.78%	-8.17%	-7.03%	-5.78%	24.26%	13.22%	-0.26%	-91.74%

程序计算结果与理论值的误差大致在 10%范围内，部分超过 10%的位置位于梁的两端，可初步假定若要提高两端的结果的可靠性，可对两端的网格加密。

3.2.算例 2

3.2.1.几何模型

根据实际工程的桥梁模型简化，简支梁，受自重、均布荷载作用。

梁高 1m，宽 2m，长 10m，承受均布荷载 10KN/m，弹性模量 20GPa，泊松比 0.17，重度 $21 \text{ kN} / \text{m}^3$ 。（不考虑强度不够是否毁坏等问题）

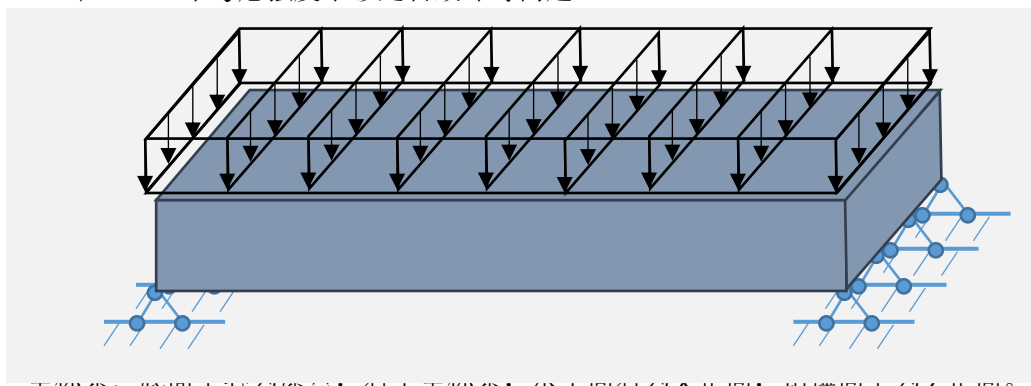


图 3-2-1 算例 2 的几何模型

3.1.2.有限元数据文件

选取部分如下：

```

Node      525
-5.00    -1.00    0.00
-4.50    -1.00    0.00
-4.00    -1.00    0.00
-3.50    -1.00    0.00
-3.00    -1.00    0.00
.....
Element 320 8
8   0   0   1   22   21   105 106 127 126
8   0   1   2   23   22   106 107 128 127
8   0   2   3   24   23   107 108 129 128
8   0   3   4   25   24   108 109 130 129
8   0   4   5   26   25   109 110 131 130
.....
Material 1
2E+10    0.17 21000
.....
Bound    30
0   0   0
0   1   0
0   2   0
21  0   0
21  1   0
21  2   0
.....
Faceload 80
420 421 442 441 -10000 -10000 -10000 -10000
421 422 443 442 -10000 -10000 -10000 -10000
422 423 444 443 -10000 -10000 -10000 -10000
423 424 445 444 -10000 -10000 -10000 -10000
424 425 446 445 -10000 -10000 -10000 -10000
.....
Nodeload    0
    
```

3.1.3.计算结果

选取部分如下：

NoodeID	X-Displacement	Y-Displacement	Z-Displacement			
0	-9.119e-26	-1.248e-26	-3.891e-26			
1	-4.723e-05	-7.495e-06	-1.232e-04			
2	-6.452e-05	-4.293e-06	-2.651e-04			
3	-7.418e-05	-2.386e-06	-4.089e-04			
4	-7.716e-05	-3.700e-07	-5.492e-04			
.....						
ElementID	X-NormalStress	Y-NormalStress	Z-NormalStress	XY-ShearStress	YZ-ShearStress	ZX-ShearStress
0	-1.157e+06	-1.485e+05	-2.825e+05	-4.135e+04	-2.455e+04	-4.874e+05
1	-6.484e+05	4.463e+03	-1.399e+03	2.174e+04	1.141e+04	-9.815e+04
2	-3.885e+05	-5.995e+01	-1.444e+02	1.674e+04	-1.897e+03	-7.273e+04
3	-1.801e+05	4.602e+03	2.160e+03	1.443e+04	4.852e+02	-7.078e+04
4	7.309e+03	7.560e+03	2.224e+02	1.252e+04	2.302e+02	-6.131e+04
.....						
NoodeID	X-NormalStress	Y-NormalStress	Z-NormalStress	XY-ShearStress	YZ-ShearStress	ZX-ShearStress
0	-1.157e+06	-1.485e+05	-2.825e+05	-4.135e+04	-2.455e+04	-4.874e+05
1	-9.026e+05	-7.201e+04	-1.419e+05	-9.806e+03	-6.572e+03	-2.928e+05
2	-5.185e+05	2.202e+03	-7.719e+02	1.924e+04	4.754e+03	-8.544e+04
3	-2.843e+05	2.271e+03	1.008e+03	1.558e+04	-7.058e+02	-7.175e+04
4	-8.641e+04	6.081e+03	1.191e+03	1.348e+04	3.577e+02	-6.605e+04
.....						

列出 PARAVIEW 处理的 vtk 数据文件的部分结果，如下：

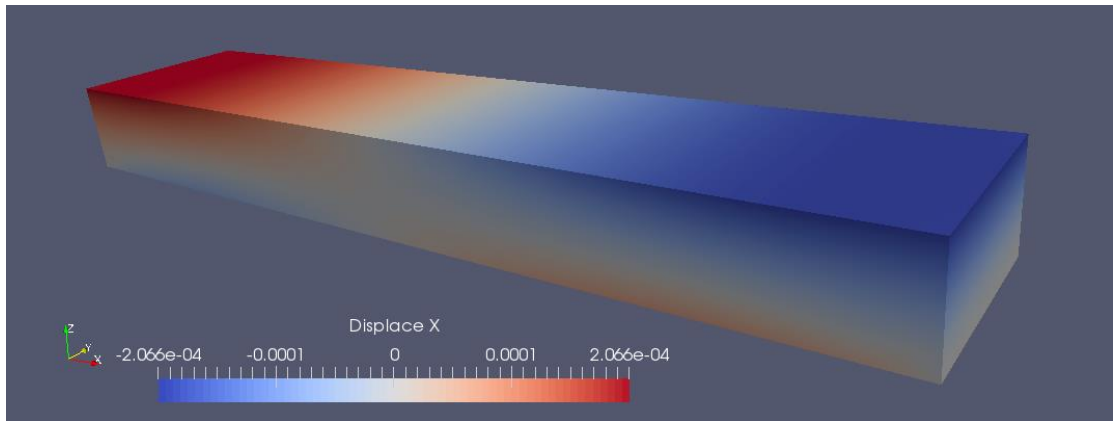


Fig3.2.3-1 X 位移

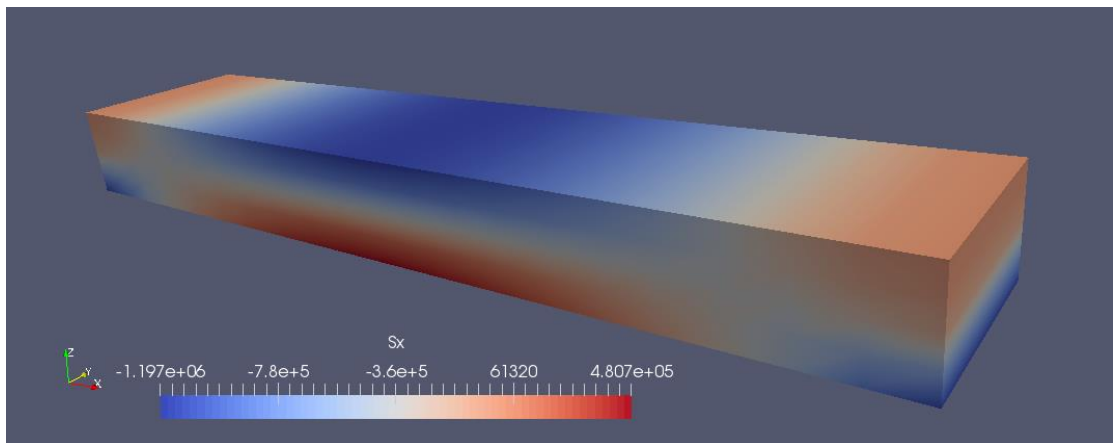


Fig3.2.3-2 σ_x

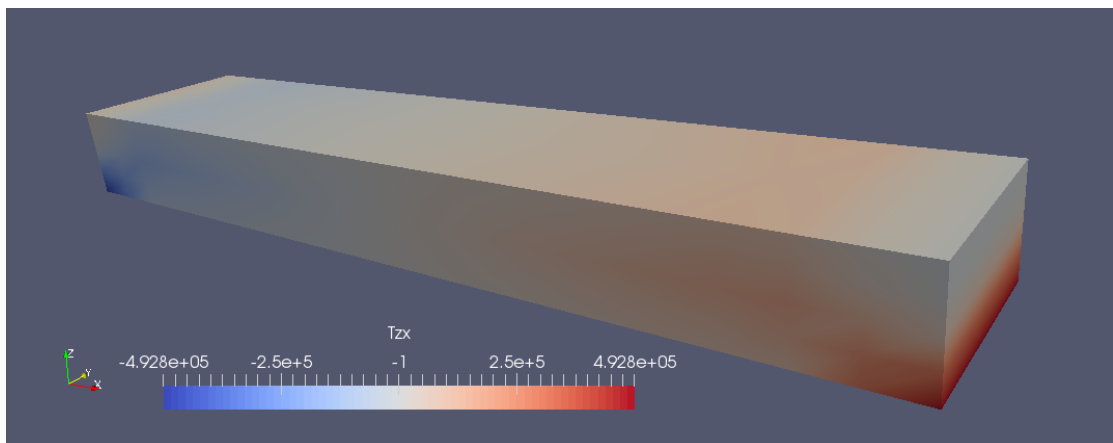


Fig3.2.3-3 τ_{zx}

3.2.4. 结果分析

将此桥梁模型简化为二维问题，利用弹性力学解答：

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{M}{2}z - q\frac{z}{h}\left(4\frac{z^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right) \\ \sigma_z = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\left(1 + \frac{2z}{h}\right)^2 \\ \tau_{xz} = \frac{F_s S}{bI} \end{cases}$$

其中, M 为 y - z 横截面弯矩: $M = \frac{q}{2}(l^2 - x^2)$, F_s 为 y - z 横截面剪力: $F_s = -qx$, q 为分布力,

h 为梁高, $S = \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}$, $I = \frac{h^3}{12}$ 。

此外, 还应叠加上自身重力。

仅就位移、应力分布规律讨论, x 方向的位移关于 y - z 面对称, σ_x 上下绝对值对称, τ_{xz} 沿 x 方向线性分布, 仅在左右两端受集中支撑反力处出现扰动。认为数值结果和理论解答一致性较好。

4. 小结和展望

- ①可以考虑多种单元混合的程序设计。
- ②可以针对程序运行, 开发出图形界面的形式。