

高等计算固体力学程序作业

姓名：谢卓雨 学号：

邮箱：mechanics_xzy@163.com

1 程序基本信息介绍

1.1 编程语言

选用 MATLAB 作为 FE 程序的实现语言，主要关注 FE 的主要思想，不就前处理与后处理过程进行讨论。

1.2 程序流程图

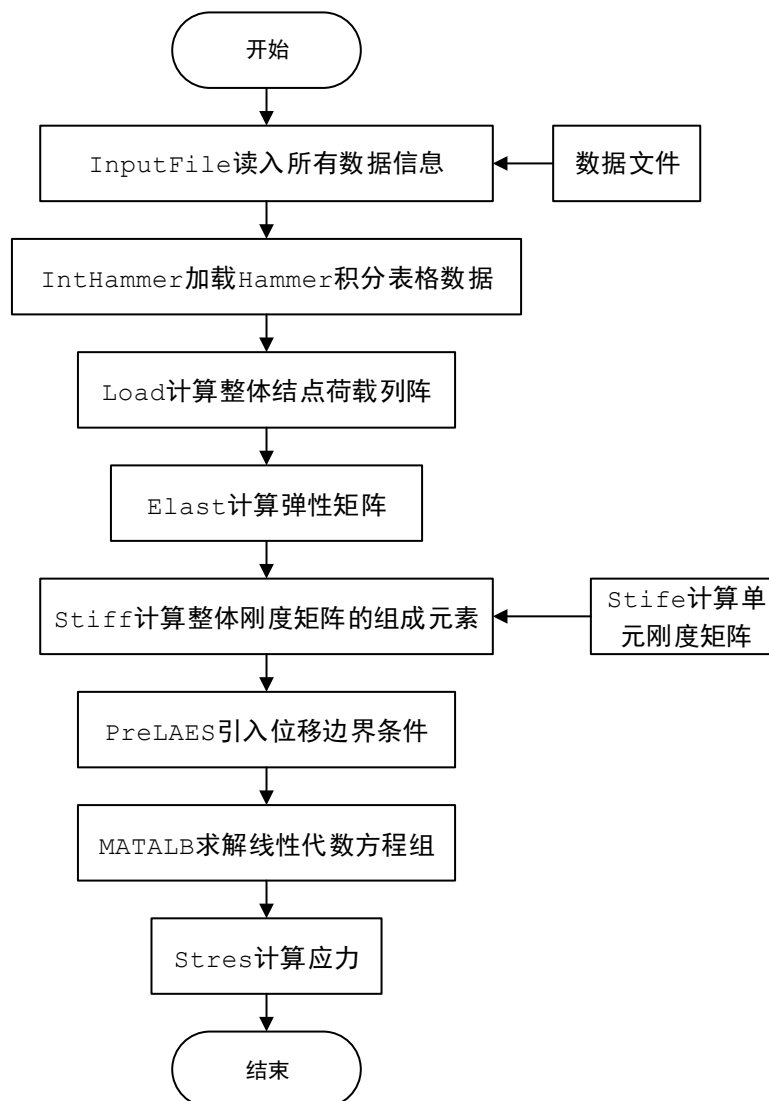


图 1 主程序流程图

1.3 程序主要变量

表 1 变量表

变量名	含义	变量名	含义
npoin	结点总数	nelem	单元总数
nvfix	约束数目	ntype	问题类型
nnode	单元结点数	nmats	材料数目
nhamm	Hammer 积分阶次	noutp	结果输出控制参数
elemM	单元材料号	elemN	单元结点号
nodeC	结点坐标	mater	材料信息
model	单元模式号	iplod	载荷控制参数
lodpt	集中载荷信息	posiH	Hammer 积分点位置
weigH	Hammer 权重系数	loadP	整体结点荷载列阵
stifK	整体刚度矩阵	asdis	结点位移
D	弹性矩阵	B	应变矩阵
J	Jacobian 矩阵	detJ	Jacobian 矩阵行列式

2 基本公式

2.1 几何系数

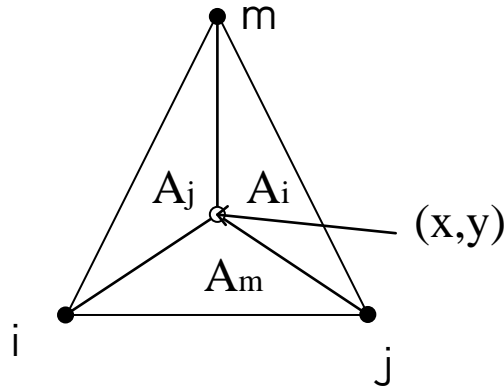


图 2 3 结点三角形单元

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}, b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix}, c_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} \quad (1)$$

2.2 形函数 N

- 面积坐标(L_1, L_2):

$$\begin{cases} L_i = \frac{A_i}{A} = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), i = 1, 2 \\ L_3 = 1 - L_1 - L_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $A = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ 。

- 3 结点三角形单元:

$$N_i = L_i, i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- 6 结点三角形单元:

$$\begin{cases} N_i = L_i(2L_i - 1), i = 1, 2, 3 \\ N_4 = 4L_1L_2 \\ N_5 = 4L_2L_3 \\ N_6 = 4L_3L_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.3 应变矩阵 B

- 3 结点三角形单元:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

- 6 结点三角形单元:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.4 Jacobian 矩阵 J

- 3 结点三角形单元:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

- 6 结点三角形单元:

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N'_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N'_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N'_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N'_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N'_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\xi \equiv L_1, \eta \equiv L_2$ 。

2.5 弹性矩阵 D

$$D = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix}, D_0 = \frac{E_0}{1-\nu^2} \quad (11)$$

- 平面应力问题:

$$E_0 = E, \nu_0 = \nu \quad (12)$$

- 平面应变问题:

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (13)$$

2.6 单元刚度矩阵 K

$$\begin{aligned} K^e &= \int_{\Omega^e} B^T D B t dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} B^T D B t dL_2 dL_1 \end{aligned} \quad (14)$$

2.7 Hammer 积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-L_1} F(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_1 &= A_1 F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + B_3 \{F(a, a, b) + F(a, b, a) + F(b, a, a)\} \\ &\quad + C_3 \{F(c, c, d) + F(c, d, c) + F(d, c, c)\} \end{aligned} \quad (15)$$

表 2 二维 Hammer 积分的权系数和积分坐标

积分点数	权系数	积分点坐标	精度阶次
1	$A_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
3	$B_3 = \frac{1}{6}$	$a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$	2
4	$A_1 = -\frac{27}{96}, B_3 = \frac{25}{96}$	$a = \frac{1}{5}, b = \frac{3}{5}$	3
7	$A_1 = 0.112 \ 500 \ 000 \ 0$ $B_3 = 0.062 \ 969 \ 590 \ 3$ $C_3 = 0.066 \ 197 \ 076 \ 4$	$a = 0.101 \ 286 \ 507 \ 3$ $b = 0.797 \ 426 \ 985 \ 3$ $c = 0.470 \ 142 \ 064 \ 1$ $d = 0.059 \ 715 \ 871 \ 7$	5

注: 1 阶为一个积分点, 2 阶为 3 个积分点, 3 阶为 4 个积分点, 5 阶为 7 个积分点

2.8 积分精度

积分精度的选择, 主要是要保证数值积分中的积分点数目能完全表现出被积函数的特征。

● 3 结点三角形等参单元

$$K^e = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} B^T DB t dL_2 dL_1 \quad (16)$$

由于 3 结点三角形等参单元的 B, D 矩阵为常量阵, 为此, 选择积分精度阶次为 1 即足够。

● 4 结点四边形等参元

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB t |J| d\xi d\eta \quad (17)$$

当 $|J| = \text{const}$ 时 (单元为平行四边形或矩形), B 为 ξ, η 的 1 次函数, K^e 为 ξ, η 的 2 次函数, 按 Gauss 积分方案, 选取 2×2 的积分点即可满足精度要求。

● 8 结点四边形等参元

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB t |J| d\xi d\eta \quad (18)$$

当 $|J| = \text{const}$ 时 (单元为平行四边形或矩形), B 为 ξ, η 的 2 次函数, K^e 为 ξ, η 的 4 次函数, 按 Gauss 积分方案, 选取 3×3 的积分点即可满足精度要求。但是, 这里采用 2×2 的缩减积分方案。

2.9 等效结点载荷

● 3 结点三角形

$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{Bmatrix} = \int_{S\sigma^e} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} t ds = \left\{ qt \int_{-1}^1 L_i ds \right\} = \left\{ \frac{qth}{2} \right\} \quad (19)$$

● 4 结点四边形

$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{Bmatrix} = \int_{S\sigma^e} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} t ds = \left\{ qt \int_{-1}^1 N_i ds \right\} = \left\{ \frac{qth}{2} \right\} \quad (20)$$

● 8 结点四边形

■ 边角点

$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{Bmatrix} = \int_{S\sigma^e} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} t ds = \left\{ qt \int_{-1}^1 N_i ds \right\} = \left\{ \frac{qth}{6} \right\} \quad (21)$$

■ 边中点

$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{Bmatrix} = \int_{S\sigma^e} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} t ds = \left\{ qt \int_{-1}^1 N_i ds \right\} = \left\{ \frac{2qth}{3} \right\} \quad (22)$$

3 作业 1

3.1 问题描述

在现有程序基础上增加 3 结点和 6 结点三角形平面应力和平面应变单元, 要求采用面积坐标和 Hammer 积分方案, 单元记为 T3 和 T6。结点编号要求如下:

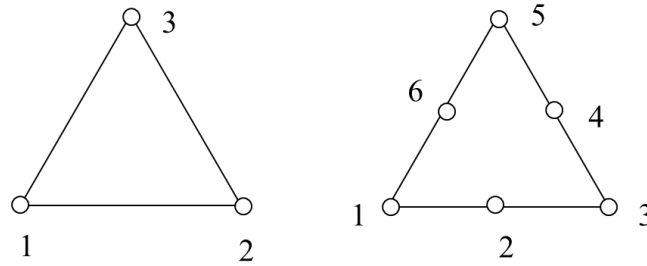


图 3 单元结点编号

3.2 解答

由于现有程序（Femmain.for）为 Fortran 固定格式，不熟悉其语法规则，增改程序之后，细节过于繁杂，调试不成功。在重点关注 FE 实现思想的前提下，选择 MATLAB 编写程序。MATLAB 程序代码见附件，主程序为：“FEM.m”。

说明：6 结点数据文件生成繁琐，暂未调试成功。

4 作业 2

4.1 问题描述

分别用 3, 4, 8 结点单元分析图示带方孔正方形板的拉伸问题，假设板边长为 8，孔边长为 2，x 方向受均布拉伸载荷 $q=100$ ，杨氏模量 $E=1$ ，泊松比为 0.3，要求给出孔边中点处的位移和应力。

提示：只需对 1/4 板进行网格划分，要求给出不同网格划分时解的收敛情况，具体包括对板的 1/2 边分别划分为 4, 8, 12, 16 等分的情况。只需要在子程序 K_matx 中加入生成三角形单元的刚度矩阵的子程序，在结果输出部分加入三角形单元的应力输出功能即可，其它大部分程序可以通用。

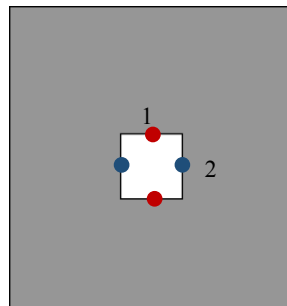


图 4 带方孔正方形板

4.2 结果分析

根据问题选择适当的参数进行计算分析。

表 3 程序选用参数信息说明

信息说明	
问题类型	平面应力问题
积分精度	三角形 3 结点 1 (精确积分)
	四边形 4 结点 3 (精确积分)
	四边形 8 结点 2 (缩减积分)
应力	由形函数直接计算结点处应力，绕点平均
计算程序	三角形 3 结点 MATLAB-FEM.m
	四边形 4 结点 FORTRAN- Femmain.for
	四变形 8 结点 FORTRAN- Femmain.for

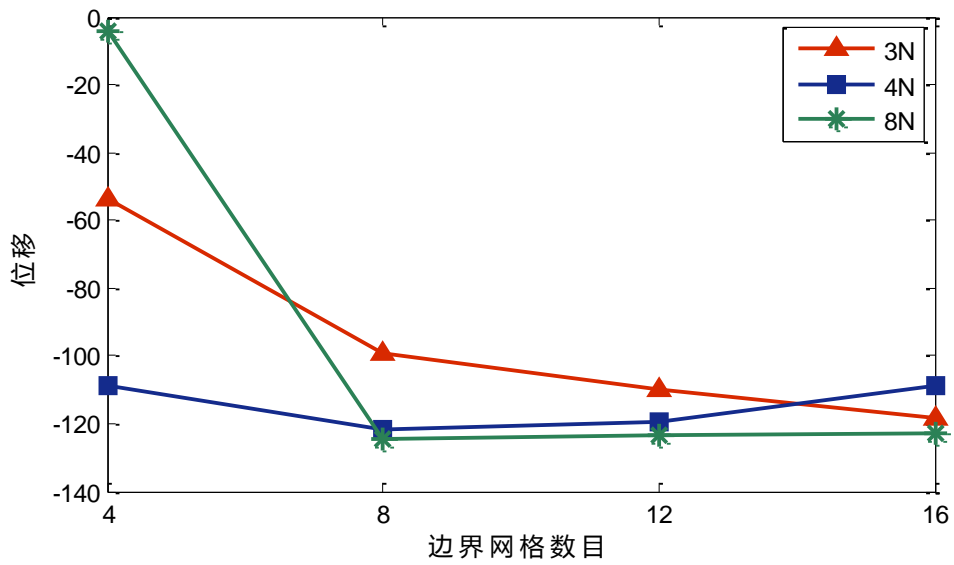


图 5 一号结点: y 方向位移

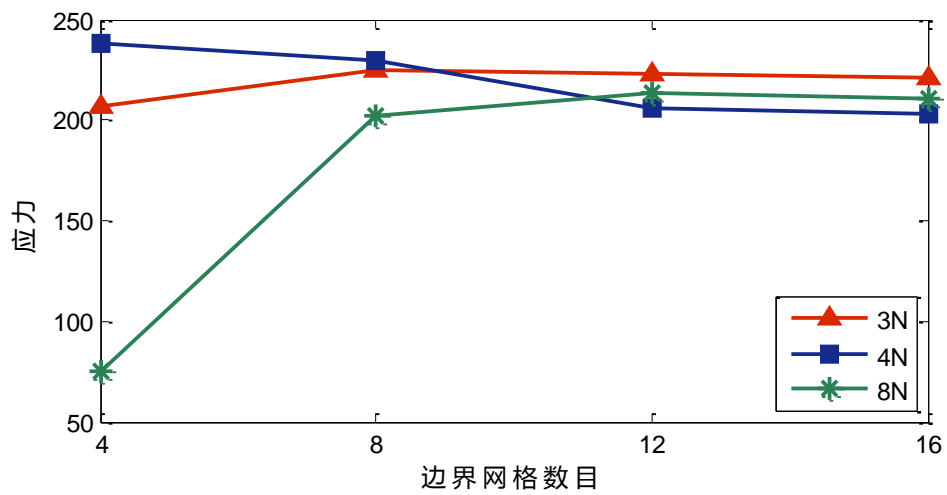


图 6 一号结点: σ_x

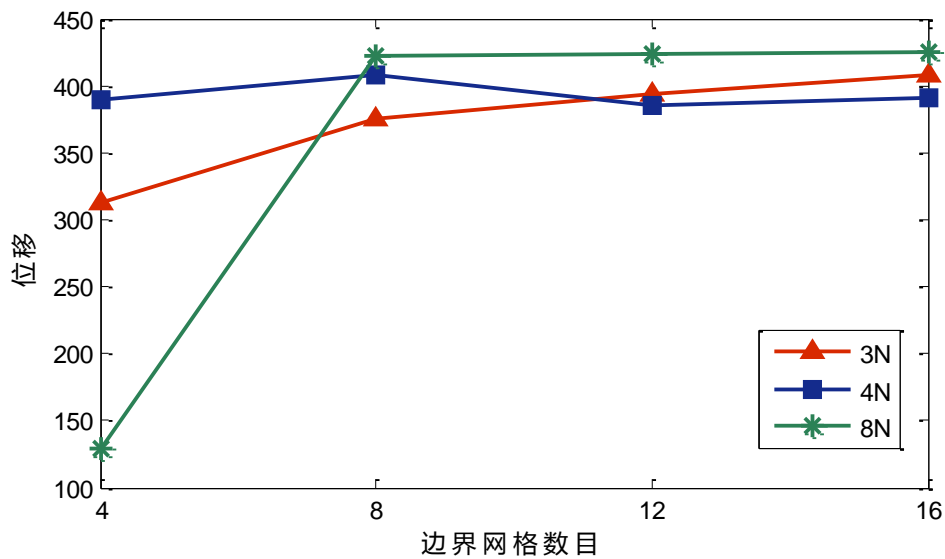


图 7 二号结点: x 方向位移

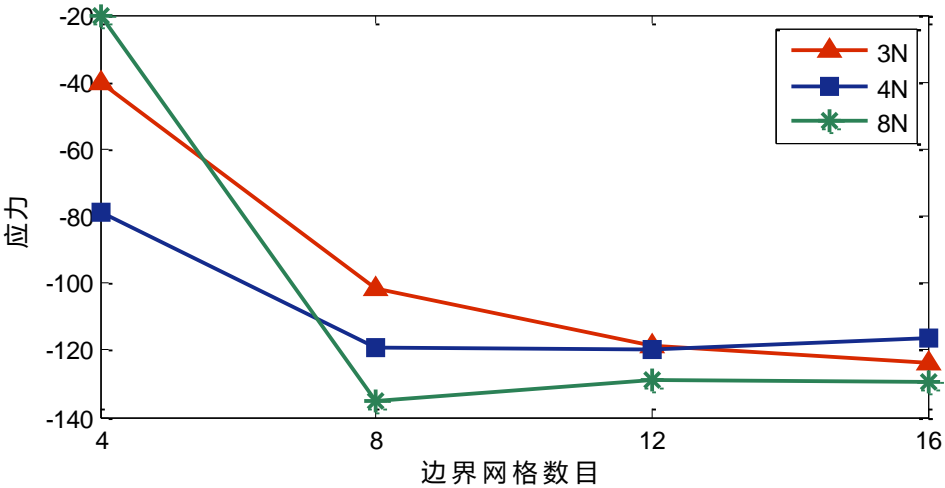


图 8 二号结点: σ_y

从图 5、图 6、图 7 和图 8 可以看出，随着网格数目增加，孔边中点（1、2 号点）的位移值、应力值逐渐趋近于某一值，即结果收敛。

另外，针对 3 结点三角形单元的积分精度，数值实验表明，更高阶精度的积分方案对结果没有影响，因为其刚度矩阵的被积函数为常数。8 结点四边形单元，选择 3×3 的精确积分方案对结果影响不大， 2×2 的缩减积分方案具有较好精度且计算量较小。

5 附件说明

- 数据文件

如：3N5x5_1x1.dat（输入文件），4N5x5_2x2.out（输出文件）。

3	N	5	x	5	=	1	x	1
3 结点	边界结点数	边界结点数		积分点数目		积分点数目		

其他文件命名规则类似。

● MATLAB 程序

程序名	主要功能
FEM.m	主程序
InputFile.m	读入网格数据文件
IntHammer.m	加载 Hammer 积分方案的表格数据
Elast.m	计算弹性矩阵
ShapN.m	计算形函数矩阵
JacoJ.m	计算 Jacobian 矩阵
StraB.m	计算应变矩阵
Stife.m	计算单元刚度矩阵
Stiff.m	计算整体刚度矩阵
Load.m	计算整体等效结点荷载列阵
PreLAES.m	边界条件的引入（大数法）
Stres.m	计算单元结点应力
