

# 简易神经网络

## 简介

可以识别 0-9 手写字体的简易神经网络

读取  $m \times n$  像素的图片文件，本神经网络采用  $m = n = 28$ ，你自然可以修改

提供训练集 `mnist_train.csv`，拥有 60000 条数据，每条数据第一个为标签，其余  $28 * 28 = 784$  个数字为每点像素值

提供测试集 `mnist_test.csv`，格式与训练集相同

[http://www.pjreddie.com/media/files/mnist\\_train.csv](http://www.pjreddie.com/media/files/mnist_train.csv)

[http://www.pjreddie.com/media/files/mnist\\_test.csv](http://www.pjreddie.com/media/files/mnist_test.csv)

你也可以自己利用图片组成测试数据

## 原理

### 概述

神经网络由输入层、隐藏层和输出层组成，隐藏层仅有一层，规模为  $784 * m(\text{隐藏层神经元数量}) * 10$ ，输出是大小为 10 的数组，代表各个数字为答案的概率，取概率最高者为最终识别结果

输入层与隐藏层、隐藏层与输出层之间链接由权重矩阵  $W_{ih(784 \times m)}$ ,  $W_{ho(m \times 10)}$  构成。输入为 784 个元素的向量  $X_{in}$ ，代表 784 个像素值

$$W_{mn} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix}$$

### 激活函数

除输入层外，每层神经元激活函数选用 `sigmoid()`，即

$$\text{sigmoid}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$\text{sigmoid}(x) \in (0, 1)$ ，因此保持输入值在  $(0, 1)$  为佳

每层输入、输出关系为

$$X_{out} = \text{sigmoid}(X_{in})$$

### 信号传递

$X$  层、 $Y$  层之间信号传递表示为

$$Y_{in} = W_{XY}^T X_{out}$$

对于此简易网络 ( $I$  层、 $H$  层、 $O$  层)，可以完整表示为

$$O_{out} = \text{sigmoid}(W_{ho}^T \text{sigmoid}(W_{ih}^T I_{out}))$$

$$I_{in} = I_{out}$$

## 误差

对于输出层，误差即为与标签的差值，对于隐藏层，误差为输出层误差根据 $W_{ho}$ 权重按比例分配

$$e_{hidden,i} = \frac{\sum_k w_{ik} e_{out,k}}{\sum_k w_{ik}}$$

同一个神经元计算式中分母均相同，为了显式按比例分配，分母可以不要，使得表示、计算简便，因而有

$$e_{hidden,i} = \sum_k w_{ik} e_{out,k}$$

矩阵表示为

$$E_{hidden} = W_{ho} E_{out}$$

## 权重修正

权重初始采用随机值，通过训练修正

采用梯度下降方法对 $i$ 神经元到 $j$ 神经元链接权重 $w_{ij}$ 更新。设学习率为 $\alpha$ ，误差函数为 $e_j$ ，则有

$$w_{ij} = w_{ij} - \alpha \frac{\partial e_j}{\partial w_{ij}}$$

其中

$$e_j = (target_j - output_j)^2$$

得到

$$\frac{\partial e_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial e_j}{\partial output_j} \cdot \frac{\partial output_j}{\partial w_{ij}} = -2(target_j - output_j) \cdot \frac{\partial sigmoid(\sum_k w_{kj} \cdot output_k)}{\partial w_{ij}}$$

又有

$$\begin{aligned} \frac{\partial sigmoid(x)}{\partial x} &= sigmoid(x) \cdot (1 - sigmoid(x)) \\ sigmoid(\sum_k w_{kj} \cdot output_k) &= sigmoid(input_j) = output_j \\ \frac{\partial \sum_k w_{kj} \cdot output_k}{\partial w_{ij}} &= output_i \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_j}{\partial w_{ij}} &= -2(target_j - output_j) \cdot sigmoid(\sum_k w_{kj} \cdot output_k) \cdot (1 - sigmoid(\sum_k w_{kj} \cdot output_k)) \cdot output_i \\ &= -2(target_j - output_j) \cdot output_j \cdot (1 - output_j) \cdot output_i \end{aligned}$$

写为矩阵形式， $E_j = Target_j - Output_j$ 为误差向量，舍弃系数2，得到权重更新方程

$$W_{ij} = W_{ij} + \alpha \cdot E_j \cdot Output_j (I - Output_j) \cdot Output_i^T$$

其中

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 结果

隐藏层神经元数量设为 100，学习率 0.1，采用 1000 条数据训练的神经网络识别准确率可达到 95%以上