第 29 卷第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 29 No. 1
1999 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1999

资本市场的最佳投资组合

闫　珺　　王　璐　　韩嘉睿

指导教师：　邓明华

(北京大学数学科学学院，北京 100871)

编者按　本文作者对投资理论相当熟悉，对问题的讨论也更多地解决投资组合问题，而不拘泥于数学表达. 尤其是作者在最后对模型的评价更显示出他们对投资决策有相当全面的理解. 本文在数学上也极有特色. 他们的解法出乎常规：通过随机投点法描出有效投资组合前沿，前沿由直线段所组成，再结合经济上的考虑给出适当的解答. 这样做是颇有创见的.

摘　要　市场上有多种可提供投资者选择的资产. 本文试图对各种收益和风险进行分析，在一定的标准下给出全部资产组合的效益前沿，即有效资产组合，为投资者提供参考.

在建立模型时，考虑到资本市场的实际情况，我们对题目的条件作了适当的简化和补充. 由于用于投资的资金 M 很大，我们忽略了单位资产的交易费用 u_i，同时我们允许从银行贷款进行投资，以增加投资的灵活性. 我们把资产的平均收益率和风险损失率作为各种资产及组合的收益和风险地定量描述，用计算机模拟了各种可能的投资组合，得到了完整的风险 -- 收益图，直观地给出了有效资产组合的区域，并给出了精确的计算方法计算资产组合集合的效率前沿，使不同类型的投资者都可以找到最佳的投资组合.

最后，我们指出了一些在模型中没有考虑进去的因素，并分析了这些因素可能对模型产生的影响，并提出了模型的改进方向，以满足对预测的可靠程度要求更高的投资者的需求.

1　问题的表述 (略)

2　市场上的投资组合模型

2.1 基本假设及其合理性

(1)　一项资产的平均收益率是在一个投资周期内各种可能收益值在总投资中所占的百分比的统计平均. 单项资产的收益用其平均收益率来衡量，由若干项资产所组成的资产组合的收益用构成该资产组合的各项资产的平均收益率的权重平均来表示.

(2)　一项资产的风险损失率是在一个投资周期内资产在发生风险时最大可能的损失在总投资中所占的百分比. 单项资产的风险用其风险损失率来衡量，由若干项资产所组成的资产组合的风险用构成该资产组合的各项资产中最大的一个风险来衡量.

(3)　公司 (投资者) 按照其对投资所具有的期望收益和风险程度的估计做出投资决策.

(4)　进行投资决策时坚持 "最大化原则". 即给定一定的风险水平，投资者将选择期望收益最高的资产或资产组合；给定一定的期望收益，投资者将选择风险最低的资产或资产组合.

(5)　公司 (投资者) 只能按照市场价格买入或卖出资产，且这种单期的买卖行为不会对资产的价格产生影响.

(6)　资本市场是无障碍的，即交易费用为零，资产的交易数量不限，公司 (投资者) 可根据其财力在市场上按市场价格购买任何一种资产.

(7) 公司 (投资者) 可以用相同的利率水平 (r_0) 无风险无限制地从银行借入或借出资金.

前两条假设确定了对资产的收益和风险的度量，第 3 、 4 、 5 项假设是基本符合实际的．由于 M 是一笔数额相对很大的资金，我们忽略了 u_i 的作用作了第 6 项假设．事实上，以表 3.1 中的数据为例， u_i 至多造成

$$103\times 1\%+198\times 2\%+52\times 4.5\%+40\times 6.5\%=9.93(\text{元})$$

的损失，在 M 很大时是可以忽略不计的．．后一条假设虽然与实际情况略有出入，但不会影响到结论的正确性，对我们分析问题、简化模型提供了帮助．

2.2 建立模型

设占资金 M 中比例为 α_i 的部分被用来购买资产 $S_i(i=1,\cdots,n)$．令 $\alpha_0=1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$，当 $\alpha_0>0$ 时，将剩余的资金 $\alpha_0 M$ 存入银行；当 $\alpha_0<0$ 时，从银行中借出资金 $\alpha_0 M$．借入借出资金的利率均为 r_0，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$．

对给定的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，购买资产 S_i 的资金为 $\alpha_i M$，忽略 u_i 的作用，实际用于资产 S_i 的投资为 $\alpha_i M\frac{1}{1+p_i}$．从而资产 S_i 的预期收益为 $\alpha_i M\frac{1}{1+p_i}r_i$，投资组合的总收益为 $\sum\limits_i\alpha_i M\frac{1}{1+p_i}r_i$；购买资产 S_i 的风险损失率为 q_i，风险为 $\alpha_i M\frac{1}{1+p_i}q_i$，总体风险为 $\max\{\alpha_i M\frac{1}{1+p_i}q_i\}$．称

$$\bar{r}_i=\frac{r_i}{1+p_i},\tag{2.1}$$

为实际收益率

$$\bar{q}_i=\frac{q_i}{1+p_i},\tag{2.2}$$

为实际风险率，总体收益率 $E=\sum\limits_i\alpha_i\bar{r}_i$，总体风险率 $Q=\max\{\alpha_i\bar{q}_i\}$．问题的实质即在 $\sum\limits_i\alpha_i=1$ 的条件下求出 α_i 的值，使总体收益率 R 尽量大，总体风险率 Q 尽量小．

2.3 多项风险资产的组合

我们首先来考察四项风险资产的组合投资问题．在计算中我们使用 $n=4$ 时的相关数据如表 3.1 所示．

表 3.1

S_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	u_i(元)	$\bar{r}_i(\%)$	$\bar{q}_i(\%)$
S_1	28	2.5	1	103	27.7	2.48
S_2	21	1.5	2	198	20.6	1.47
S_3	23	5.5	4.5	52	22.0	5.26
S_4	25	2.6	6.5	40	23.4	2.44

表中的 $\bar{r}_i$ 和 $\bar{q}_i$ 是根据 (2.1) 和 (2.2) 计算出来的．将这四项风险资产按一定比例组合在一起，便构成了四项风险资产的组合．我们用计算机对可能的投资组合进行了随机模拟，绘制了图 3.1．图中的横轴表示总体风险率，纵轴表示总体收益率．

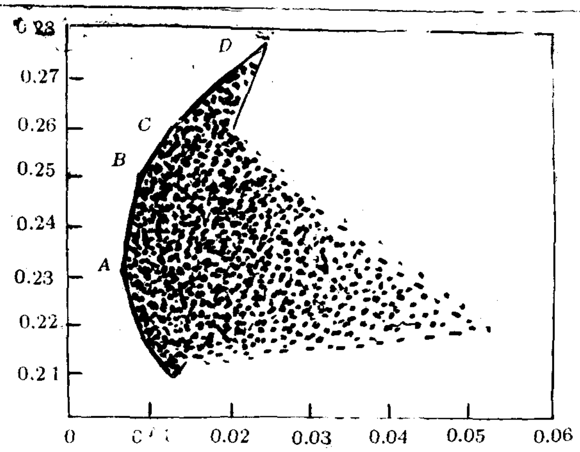


图 3.1

对每一个随机产生的资产组合，我们把该组合的总体风险和收益用风险 — 收益图中一个点来表示．图 2.1 中的黑色部分近似地表示了 4 项资产构成的各种资产组合的集合，投资者的任何一种投资组合对应图中的一个点．我们观察到在这个区域的边缘存在一条折线 $ABCD$, 对于投资者的任何一种选择，在该折线上都可找到一种投资组合具有更高的收益和更低的风险．因此投资者将只在折线 $ABCD$ 上选择他所需要的资产组合，我们称折线 $ABCD$ 为这一资产组合集合的效率前沿．

下面我们给出一种方法，通过表 3.1 确定出点 A, B, C, D 的坐标，从而得到资产组合的效率前沿．

首先将资产 S_1, S_2, S_3, S_4 重新排序，使 $\bar{r}_i$ 递减排列，得到新的表 3.2.

表 3.2

No	S_i	$\bar{r}_i(\%)$	$\bar{q}_i(\%)$	$\bar{q}_i^{-1}$
1	S_1	27.7	2.48	40.3
2	S_4	23.4	2.44	41.0
3	S_3	22.0	5.26	19.0
4	S_2	20.6	1.47	68.0

对表 3.2 的最后一列求和并取倒数，作为点 A 的横坐标；将表 3.2 的第二列与第四列对应数据乘积的和与刚才得到的横坐标相乘，作为点 A 的纵坐标．即点 A 的横坐标为

$$(40.3 + 41.0 + 19.0 + 68.0)^{-1} = 0.0059,$$

点 A 的纵坐标为

$$(27.7\%{}^*40.3 + 23.4\%{}^*41.0 + 22.0\%{}^*19.0 + 20.6\%{}^*68.0)^*0.0059 = 0.230.$$

去掉表格的最后一行，重复上述步骤可以得到点 B 的纵坐标为

$$(40.3 + 41.0 + 19.0)^{-1} = 0.0100,$$

点 B 的横坐标为

$$(27.7\%{}^*40.3 + 23.4\%{}^*41.0 + 22.\%{}^*19.0)^*0.0100 = 0.249.$$

依此类推可算出点 C 的坐标为 $(0.0123, 0.256)$，点 D 的坐标为 $(0.0248, 0.277)$．在坐标纸上描出折线 $ABCD$ 即得到了投资组合的效率前沿．投资者可依自身对风险的偏好程度在效率前沿上选择适当的投资组合．效率前沿的性质及计算方法的严格证明请参见附录（略）．

2.4 风险资产与无风险资产的组合

如果公司（投资者）还可以选择在无风险资产上进行投资，则其投资策略将更加灵活，资产组合的集合及效率前沿也会发生较大的变化．我们选用银行存款的利率 r_0 为无风险资产的平均收益率，设对风险资产的投资组合的总体收益率为 R，总体风险率为 Q．总投资由 a 比例风险资产和 $(1-a)$ 比例无风险资产组成．则这种投资组合的总体风险率为 $\overline{Q}=aQ$，总体收益率为 $\overline{R}=(1-a)r_0+aR=a(R-r_0)+r_0$．一般来说，风险投资的收益率 R 应大于无风险投资的收益率 r_0，所以当风险资产所占比例 $0 \le a \le 1$ 时，在风险 — 收益图上得到一条向右上方倾斜的线段，如图 4.1 所示．该线段向右上方的延长线对应 $a > 1$，此时我们认为公司以无风险收益率 r_0 从银行借入占总资产 $(a-1)$ 的资金．从图中可以看到，随着贷款的增加，风险和收益都呈线性上升． $a > 0$ 的部分是该资产组合的效率前沿．

在一项无风险资产和多项风险资产的组合投资中，对风险资产的每一种投资组合，效率前沿都是从点 $(0, r_0)$ 出发，过点 (Q, R) 的直线．这是因为，所有可行的风险资产组合也可视为一种风险资产．在 2.3 的讨论中我们知道风险资产的投资组合应在一条折线上选取，因此总体投资的效率前沿应为折线上的点与点 $(0, r_0)$ 的连线中斜率最大的一条，如图 4.2 所示，

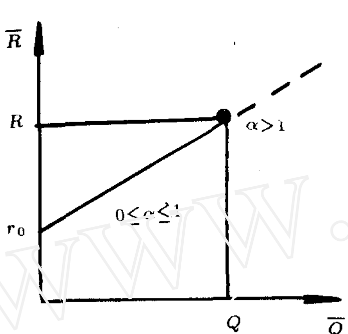


图 4.1

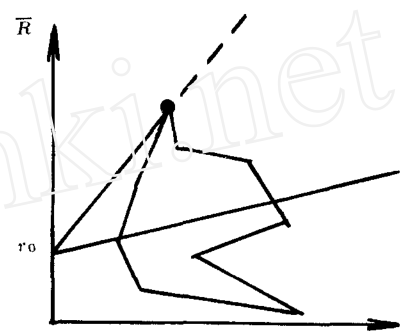


图 4.2

$\overline{Q}$

应用 2.3 中的方法，我们已经可以对多种风险投资的效率前沿进行精确的计算，在得到效率前沿各顶点的坐标后，分别比较它们与点 $(0, r)$ 的连线的斜率，即可得到总投资的效率前沿．

2.5 风险投资的比率

在前面两节的讨论中，我们已经得到了投资组合的效率前沿．由于实际中无风险资产的存在，一般来说，这个效率前沿是一条射线．对这条射线上的每一点所对应的投资组合，我们已经知道了它的风险和收益．在效率前沿上，风险是随着收益的增加而增加的．对投资者来说，选择哪一种投资组合，取决于投资者对风险的喜好程度．对于风险回避型（risk averse）的投资者来说，他会选择风险较低的投资组合，在效率前沿上，对应的点接近 $(0, r_0)$，即他会把多数的资金投入银行．另一方面，对于风险喜好者（risk loving）来说，他会选择高风险高收益的投资组合，在效率前沿上，对应的点远离 $(0, r_0)$，他有可能从银行贷款进行风险投资．

下面我们来计算具体的投资比例．对 n 种风险资产 $S_i (i = 1 \cdots n)$ 和相应的实际收益率 $\bar{r}_i$ 与实际风险率 $\bar{q}_i$ 说，不妨设 $\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \cdots > \bar{r}_n$ 应用 2.3 的方法，我们可以算出风险投资的效率前沿折线的 n 个顶点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，其中点 P_i 的坐标为

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{\bar{q}_i}+\frac{1}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{1}{\bar{q}_i}}, \frac{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1}+\frac{\bar{r}_2}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{\bar{r}_i}{\bar{q}_i}}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{1}{\bar{q}_i}}\right)$$

从这 n 个顶点向点 $(0, r_0)$ 所引的直线的斜率为

$$\left(\frac{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1}+\frac{\bar{r}_2}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{\bar{r}_i}{\bar{q}_i}}{\frac{1}{\bar{q}_1}+\frac{1}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{1}{\bar{q}_i}},\ \frac{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1}+\frac{\bar{r}_2}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{\bar{r}_i}{\bar{q}_i}}{r}{}_0\right)\Bigg/\frac{1}{\frac{1}{\bar{q}_1}+\frac{1}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{1}{\bar{q}_i}}$$

$$=\frac{\bar{r}_1-r_0}{\bar{q}_1}+\frac{\bar{r}-1-r_0}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{\bar{r}_i-r_0}{\bar{q}_i}$$

由于已经假设 $\bar{r}_1>\bar{r}_2>\cdots>\bar{r}_n$, 为了使直线的斜率尽可能大，只需 $i_0=\max\{i\,|\,r_i>r_0\}$, 则风险投资组合的投资比率为对 $1\le k\le i_0$, 风险投资中比率为 $\frac{\frac{1}{\bar{q}_k}}{\frac{1}{\bar{q}_1}+\frac{1}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{1}{\bar{q}_{i_0}}}$ 的资金被用来购买资产 S_k, 而其余资产则不投入资金．若投资者根据自己的偏好确定了投资风险资产的比率 α, 则总的投资组合为向 S_k 投入资金 $\frac{\frac{1}{\bar{q}_k}}{\frac{1}{\bar{q}_1}+\frac{1}{\bar{q}_2}+\cdots+\frac{1}{\bar{q}_{i_0}}}(1\le k\le i_0)$, 而将其余的占比率为 $(1-\alpha)$ 的资金存入银行（当 $\alpha>1$ 时为从银行借出占比率 $(\alpha-1)$ 的资金用于风险投资）.

下面我们将这一结果应用于题目中给出的两组数据．

对于第一组数据，参见表 2.2 可知所有的 $\bar{r}_i$ 均大于 r_0, 从而风险投资中投向资产 S_1, S_2, S_3, S_4 的比率分别为 23.95%, 24.36%, 11.29%, 40.46%. 在风险——收益图上，效益前沿为过点 $(0, 0.05)$ 和点 $(0.0059, 0.230)$ 的线段．

对于第二组数据，相应的数据如表 5.1 所示，仍然有所有 $\bar{r}_i$ 均大于 r_0, 于是风险投资中投向资产 $S_1, S_2, \cdots, S_{15}$ 的比率分别为： 2.0%, 1.5%, 1.4%, 2.0%, 72.1%, 2.0%, 1.3%, 2.5%, 1.6%, 2.1%, 2.7%, 1.6%, 1.8%, 1.6%, 3.8%. 当公司在这种比例下进行风险投资时可以达到投资组合的效率前沿．效率前沿为

表 5.1

s_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	$u_i(\%)$ (元)	$\bar{r}_i(\%)$	$\bar{q}_i(\%)$
s_1	9.6	42	2.1	181	9.40	41.14
s_2	18.5	54	3.2	407	17.93	52.33
s_3	49.4	60	6.0	428	46.60	56.60
s_4	23.9	42	1.5	549	23.55	41.38
s_5	8,1	1.2	7.6	270	7.53	1.12
s_6	14	39	3.4	397	13.54	37.72
s_7	40.7	68	5.6	178	38.54	64.39
s_8	31.2	33.4	3.1	220	30.26	32.40
s_9	33.6	53.3	2.7	475	32.72	51.90
s_{10}	36.8	40	2.9	248	35.76	38.87
s_{11}	11.8	31	5.1	195	11.23	29.50
s_{12}	9	5.5	5.7	320	8.51	52.03
$s_1 13$	35	46	2.7	267	34.08	44.79
s_{14}	9.4	5.3	4.5	328	9.00	50.72
s_{15}	15	23	7.6	131	13.94	21.38

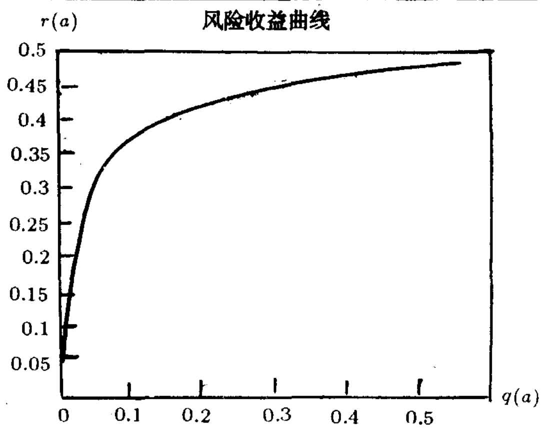


图 5.1

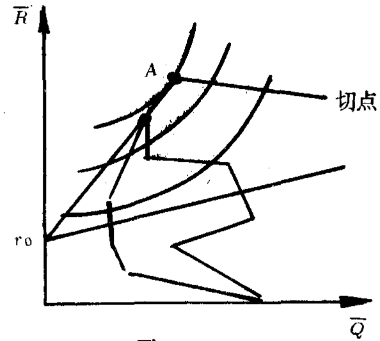


图 6.1

过点 (0, 0.05) 和点 (0.0081, 0.1155) 的直线.

从计算结果中我们看到，如果选择点 (0.0081, 0.1155) 附近的投资组合，风险已经降至 1% 以下，而收益高于 10%. 因此多项资产构成的投资组合可以大幅度地减少投资风险. 对市场投资的调查表明，想有效地减少风险，至少要有十种左右的资产， 15 种资产是比较好的数量. 这里计算结果和实际情况是相符的. 在图 5.1 中，我们给出了风险投资的效率前沿折线，折线的顶点用小圆圈标出. 该折线在风险较大时收益的增加速度很慢. 这表明在风险投资中，如果选择了高收益的投资组合，则势必造成风险的上升. 而且风险上升的速度随收益的增加而加快. 因此，在决策时不能片面地追求高收益而冒无畏的风险.

2.6 投资组合的决策

为了定量的描述风险与收益在决策时所起的作用，对一个特定的投资者而言，下面我们引入该投资者的无差异曲线. 在经济学上，效用是指人们从某事物中所得到的主观上的满足程度. 由于在效率前沿上的投资组合较其余选择更为有效，投资者不会选择效率前沿以外的资产组合. 而在效益前沿上，投资者将追求使效用最大的投资组合. 每一组 (风险，收益) 对投资者的效用是确定的，于是我们可在风险 — 收益图上描出一族曲线，每一条曲线上的点所对应的效用相等，称这样的一条曲线为无差异曲线. 我们把一族无差异曲线画在图 4.1 上，得到了图 6.1. 则切点 A 对应于投资者在效率前沿上的选择. 对于题目中所给的两组数据，我们已经给出了效率前沿的范围. 下面我们针对公司决策者的不同类型来给出不同的效用函数.

(1) 风险喜好型 (risk loving) 效用函数可取作 $f_L(Q,R)$，此时的无差别曲线族为 $f_L(Q,R) = C(0 < C < \infty)$，无差异曲线见图 6.2(1) 和图 6.2(2)；

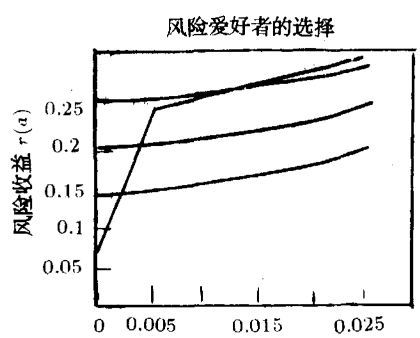


图 6.2(1) 风险指数 $q(a)$

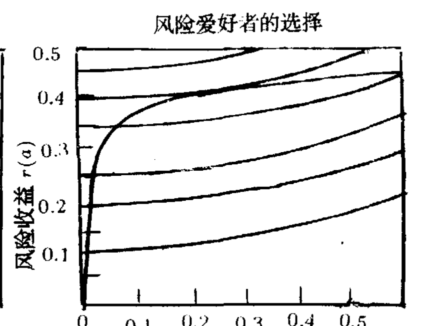


图 6.2(2) 风险指数 $q(a)$

(2) 风险中性 (risk neutral) 效用函数可取作 $f_n(Q,R)$，此时的无差别曲线族为 $f_N(Q,R) =$

$C(0 < C < \infty)$ 无差异曲线见图 6.3(1) 和图 6.3(2);

(3) 风险回避型 (risk averse) 效用函数可取作 $f_A(Q,R)$，此时的无差别曲线族为 $f_A(Q,R) = C(0 < C < \infty)$，无差异曲线见图 6.4(1) 和图 6.4(2).

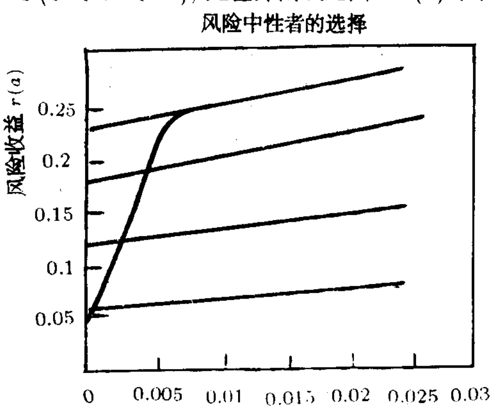


图 6.3 (1)　风险指数 $q(a)$

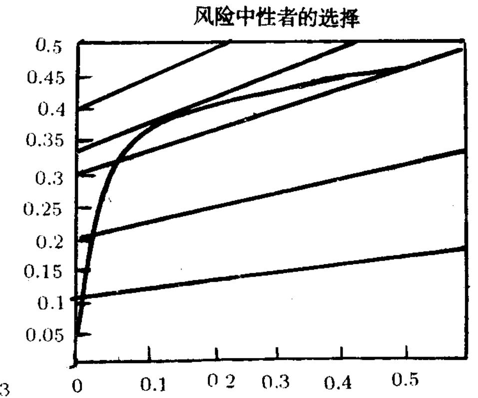


图 6.3 (2)　风险指数 $q(a)$

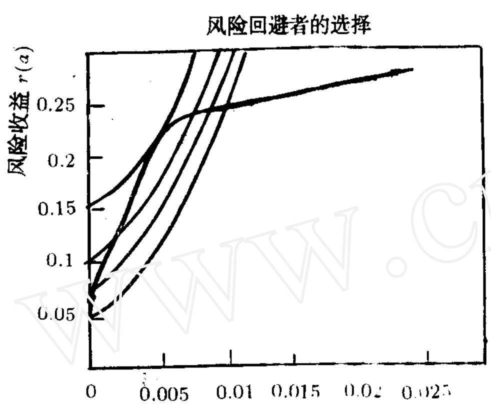


图 6.4(1)　风险指数 $q(a)$

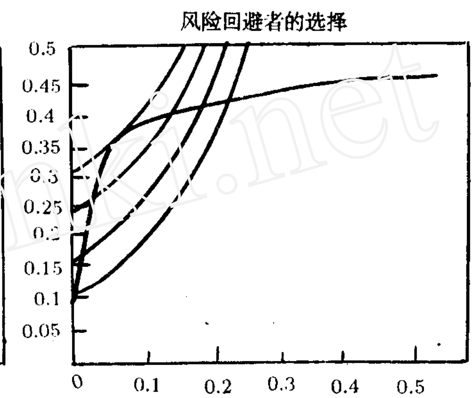


图 6.4(2)　风险指数 $q(a)$

3　对模型的评价和讨论

利用上面的数学模型解出的效率前沿可以帮助投资者作出有效的投资组合. 但最终对投资组合的选择，还要靠投资者的风险承受能力决定. 这一模型对投资的指导意义在于，人们可以利用计算机对大量风险资产的历史数据进行处理，通过对历史数据的分析研究预测出资产的平均收益率和风险损失率，根据模型便可以计算出资产组合集合的效率前沿.

当然, 模型中也存在不足. 用平均收益率和风险损失率代表收益和风险与实际情况有所不同, 而且没有提出精确的预测收益和风险的方法，这就不能在模型内部保证预测的准确程度. 在实际的市场运作中，各种风险资产之间是有一定关联的. 比如在某一时期货币汇率的下跌往往伴随着股市的下跌，这时如果同时在外汇市场和股票市场上进行了投资，则实际的风险要高于这两个投资风险中的任何一个. 在假设用所有投资中最大的风险代表混合投资的风险时，我们没有体现出这一点，这也降低了模型的合理性.

尽管如此，这个模型还是对组合投资的决策提供了重要的启示和指导：为了减少风险，我们应该在多种资产上进行投资, 并且少量的资产组合就可以大幅度地减少风险; 在一定条件下, 投资者可以从银行贷款进行投资，以获得更大的收益；在进行投资决策时，投资者应尽可能获得完整的市场信息，以作出合理的预测. 这些在实际投资中被总结出来的重要经验，在模型中都得到了不同程度的反映.

确定一个有效的资产组合是一个非常复杂的决策过程. 我们已经知道，风险中的一部分可以通过增加资产组合中的资产数目而消除，这一部分风险称作非系统风险. 非系统风险是由个别资产本身的

各种因素造成的收益的不稳定，例如政府对汇率的干预、股市上的传闻等等，都会对某类资产产生短期的影响．还有一部分风险是反映各资产共同状况的，不能通过改变资产组合的办法加以消除．例如全球范围内的经济紧缩、大的自然灾害、爆发战争等，所有的资产都会受到作用而产生共同运动表现出整体收益的不稳定性．研究表明，下述四个因素对大多数资产和证券的收益有着显著的影响：

(1) 通货膨胀率的意外变化； (2) 工业生产的意外变化；

(3) 风险补偿的意外变化； (4) 利率结构的意外变化．

在度量风险和收益时，投资者还可以选择其他的标准，例如期望收益率和标准差、离差率等等．在进行决策分析时，也可以选择其他的模型例如资本资产定价模型（CAPM）等对收益和风险进行预测．为了获得更为合理的结果，我们对模型提出了一些改进的方向，以适应不同投资者的需求：

一、单位资产的价格．对于个人投资者来说，资产的单价也是相当重要的．以表格 5.1 中的数据为例，在投资分配不利时，投资者有可能多付出

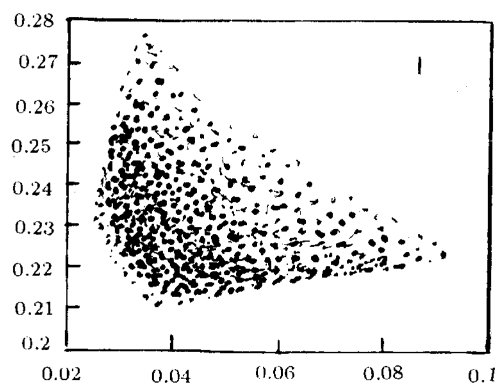
$$181^*2.1\% + 407^*3.2\% + 428^*6.0\% + \cdots + 131^*7.6 = 243.053(\text{元})$$

在多次买卖中，这些损失可能会对总体的收益和风险产生一定的影响．因此在制定投资策略时，应尽量使购买每一种资产的资金都是单位资产成本的整数倍，一减少手续费的损失．

二、从银行贷款．银行的贷款利率一般要高于存款利率，但仍小于风险投资的收益率．因此在效率前沿上，对应于从银行贷款投资的射线的斜率应略小于在银行存款的那条线段的斜率．而且从银行贷款有偿还的责任，不能任意的追加投资，因此实际上的风险要比名义上的风险损失率大，投资者贷款时必须要极端慎重．如果确定要贷款，在衡量风险时应考虑到投资者偿还贷款的能力．

三、风险资产之间的相互关系．前面已经提到，风险资产之间有着一定的相互作用．为了更精确的刻画这种关系，我们可以选用其他的方式来衡量资产的风险．例如用标准差来衡量风险的程度．这时在计算资产组合的风险时不仅要考虑各项资产的标准差的权重平均，而且要将每两种资产的相关程度计算在内，这便可以反映出资产之间的联系和相互作用．

四、衡量风险的标准．在我们的模型中，衡量风险只单纯考虑了资产在一个投资周期后发生的损失，忽略了在购买资产时付出的手续费．为了更精细的估算，我们可在衡量总体风险时综合考虑手续费的损失，这时的总体风险函数应为 $Q=\max\{\alpha_i q_i\}+\sum\alpha_i p_i$．在这种情况下，可以类似的证明有关效率前沿的性质和计算方法．下图给出了在采用这样的风险估计时效率前沿在风险 — 收益图上的形状（对应于题目中的第一组数据）．



此外，在实际操作中还要综合考虑到通货膨胀、市场操纵、投机等多种因素对已作出的投资组合的方案进行调整，才能得到最佳的资产组合方案．

附 录(略)