

1994 年第 3 届全国大学生数学建模竞赛

A 题 逢山开路

要在一山区修建公路，首先测得一地点的高程，数据见表1（平面区域 $0 \leq x \leq 5600$ ， $0 \leq y \leq 4800$ ，表中数据为坐标点的高程，单位：米）。数据显示：在 $y = 3200$ 处有一东西走向的山峰；从坐标（2400，2400）到（4800，0）有一西北——东南走向的山谷；在（2000，2800）附近有一山口湖，其最高水位略高于1350米，雨季在山谷中形成一溪流。经调查知，雨量最大时溪流水面宽度 $w$ 与（溪流最深处的） $x$ 坐标的关系可近似表示为

$$w(x)=\left(\frac{x-2400}{2}\right)^{\frac{3}{4}}+5\left(2400 \leq x \leq 4000\right) .$$

公路从山脚（0，800）处开始，经居民点（4000，2000）至矿区（2000，4000）。已知路段工程成本及对路段坡度 $\alpha$ （升高程与水平距离之比）的限制如表2。

- (1) 试给出一种线路设计方案，包括原理、方法及比较精确的线路位置（含桥梁、隧道），并估算该方案的总成本。
- (2) 如果居民点改为 $3600 \leq x \leq 4000$ ， $2000 \leq y \leq 2400$ 的居民区，公路只须经过民区即可，那么你的方案有什么改变。

表一            ↑ 北

4800	1350	1370	1390	1400	1410	960	940	880	800	690	570	430	290	210	150
4400	1370	1390	1410	1430	1440	1140	1110	1050	950	820	690	540	380	300	210
4000	1380	1410	1430	1450	1470	1320	1280	1200	1080	940	780	620	460	370	350
3600	1420	1430	1450	1480	1500	1550	1510	1430	1300	1200	980	850	750	550	500
3200	1430	1450	1460	1500	1550	1600	1550	1600	1600	1600	1550	1500	1500	1550	1550
2800	950	1190	1370	1500	1200	1100	1550	1600	1550	1380	1070	900	1050	1150	1200
2400	910	1090	1270	1500	1200	1100	1350	1450	1200	1150	1010	880	1000	1050	1100
2000	880	1060	1230	1390	1500	1500	1400	900	1100	1060	950	870	900	930	950
1600	830	980	1180	1320	1450	1420	1400	1300	700	900	850	840	380	780	750
1200	740	880	1080	1130	1250	1280	1230	1040	900	500	700	780	750	650	550
800	650	760	880	970	1020	1050	1020	830	800	700	300	500	550	480	350
400	510	620	730	800	850	870	850	780	720	650	500	200	300	350	320
0	730	470	550	600	670	690	670	620	580	450	400	300	100	150	250
Y/X	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800	5200	5600

表二

工程种类	一般路段	桥梁	隧道
工程成本（元 / 米）	300	2000	1500（长度 $\leq 300$ 米）； 3000（长度 $> 300$ 米）
对坡度 $\alpha$ 的限制	$\alpha < 0.125$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0.100$

B 题 锁具装箱

某厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有 5 个槽，每个槽的高度从  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  6 个数（单位略）中任取一数. 由于工艺及其它原因，制造锁具时对 5 个槽的高度还有两个限制：至少有 3 个不同的数；相邻两槽的高度之差不能为 5. 满足以上条件制造出来的所有互不相同的锁具称为一批.

从顾客的利益出发，自然希望在每批锁具中“一把钥匙开一把锁”. 但是在当前工艺条件下，对于同一批中两个锁是否能够互开，有以下试验结果：若二者相对应的 5 个槽的高度中有 4 个相同，另一个槽的高度差为 1，则可能互开；在其它情形下，不可能互开.

原来，销售部门在一批锁具中随意的取 60 个装一箱出售. 团体顾客往往购买几箱到几十箱，他们抱怨购得的锁具会出现互开的情形. 现聘你为顾问，回答并解决以下的问题：

- （1）每一批锁具有多少个，装多少箱.
- （2）为销售部门提出一种方案，包括如何装箱（仍是 60 个锁具一箱），如何给箱子以标志，出售时如何利用这些标志，使团体顾客不再或减少抱怨.
- （3）采取你提出的方案，团体顾客的购买量不超过多少箱，就可以保证一定不会出现互开的情形.
- （4）按照原来的装箱办法，如何定量地衡量团体顾客抱怨互开的程度（试对购买一、二箱者给出具体结果）.