

法需要的仅仅是求关于三个变量的  $n^2$  个不等式是否有解, 可以用穷举的办法来解决, 不需要用优化方法来解题

#### 参考文献:

- [1] 周承高, 廖 园《优化方法及应用程序设计》中国铁道出版社, 1989
- [2] 张培强《MATLAB 语言》中国科技大学出版社, 1995 11
- [3] 刘来福, 曾文艺《数学模型与数学建模》北京师范大学出版社, 1997, 8

## Location Arrangement Model of Drilling Well

CHEN Gang, GUO Cheng-liang, WU Ting-bin

(Dalian University of Technology, Dalian 116024)

**Abstract** The key idea of this paper is to determine the invariants with respect to coordinate transformations. For the first problem, the authors find that all the wells can be moved into a single grid, and the distance from each well to the nearest crunode is a constant, therefore the question is greatly simplified. For the second question, since the Euclidean distance between two wells is constant under coordinates transformations, a series of necessary conditions are obtained to conclude whether the all given wells can be used. Furthermore, a optimization model is established to get a necessary and sufficient condition. The arithmetic of the second question fits the third question as well. We can use the same method to treat the third question as in the second one.

## 钻 井 布 局

徐胜阳, 陈思多, 金 豪  
指导教师: 数学建模教练组

(武汉汽车工业大学, 武汉 430070)

**编者按:** 本文对前两问的解答采用了正确的穷举算法, 得到了正确的结果. 对问题三的解答有特点: 第一, 给出了一个好用的充分条件:  $\forall i, j, D_{ij} \in \epsilon$ . 第二, 通过算法给出了求  $n$  个点的最小外接圆的方法, 该圆的半径即可作为判别  $n$  个源点是否可用的条件. 此处反应出作者们较强的创造性.

**摘要:** 本文将旧井的利用问题归结为 0-1 规划问题, 由此建立了目标函数. 提出映射原理, 将旧井的位置映射到一个单位网格中, 从而大大地简化了模型的求解. 应用映射原理和穷举方法, 求解出有方向约束条件下的可利用点为 4 个, 经过转化, 推广到无方向约束条件下的可利用问题, 解得 6 个点可利用. 研究了目标成立的充分条件, 给出了三种特殊情形下的判定方法. 提出了中垂线上的二分逼近法.

## 1 问题重述(略)

## 2 符号约定

$xoy$  为绝对坐标系, 记为  $S$ ;

$x_1o_1y_1$  为题设给定的点所在平面的坐标系, 记为  $S_1$ ;

$x_2o_2y_2$  为网格所在平面的坐标系, 满足坐标轴与网格上的边平行, 坐标原点与网格上某一结点重合, 记为  $S_2$ ;

$D_{ij}$  为  $P_i^*$  与  $P_j^*$  之间的距离 ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

## 3 模型的建立

旧井要么被利用, 要么被舍弃, 这便形成了一种 0-1 规划问题 由此得到目标函数:

$$z_{\max} = Z_i, Z_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个旧井被利用} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个旧井被舍弃} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

我们要寻求目标函数的最大值, 即  $w = z_{\max}$ .

每个  $Z_i$ , 都由同一个激活函数<sup>[1]</sup> $f$  确定 在给定某种距离  $D$  下,  $D \leq \epsilon$  时有激活函数  $f(P_i) = 1$ , 否则为 0 即有阈值<sup>[1]</sup> $\epsilon$  当源点  $P_i$  与距离最近的结点的距离不大于给定误差  $\epsilon$  时, 点  $P_i$  被激活可用

由题设, 采用向量的  $p$ -范数定义距离 问题一为  $\|\cdot\|_1$ , 平面上的  $\epsilon$ -邻域为边长  $2\epsilon$  的正方形域; 问题二为  $\|\cdot\|_2$ , 平面上的  $\epsilon$ -邻域为半径  $\epsilon$  的圆域

## 4 模型求解

### 4.1 问题一: 有方向约束下的求解问题

**引理** 设有非负实数  $a$ , 非负整数  $m, n$ , 则有:  $(a+m) \bmod 1 = (a+n) \bmod 1$  (证略).

**映射原理** 给定边长为 1 单位的正方形网格, 以其上某结点为原点建立直角坐标系  $S_1$ , 令坐标轴与网格纵横边平行, 并满足所有点均处于第一象限 根据上述引理, 对应坐标系

上任意一点  $P_i(x_i, y_i)$ , 在矩形区域  $C = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$  中有唯一的点  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$

$$\begin{cases} x_i^* = x_i \bmod 1 \\ y_i^* = y_i \bmod 1 \end{cases}$$

与之对应 把所有旧井的坐标  $P_i$  (以下称为源点) 映射到这个矩形区域  $C$  内,

它包含了所有经过映射后的点  $P_i^*$  (以下称为像点), 我们称区域  $C$  为映射区

$P_i$  映射到  $P_i^*$  后, 相对于包含它的单个网格的相对位置不变, 故源点与像点的激活状态完全相同, 即有  $f(P_i^*) = f(P_i)$ . 问题转化成在映射区中寻找像点  $P_i^*$  分布最为密集的边长为  $2\epsilon$  的正方形区域, 该区域内所有像点  $P_i^*$  所对应的源点  $P_i$  均在  $\epsilon$ -邻域内可供利用

这种映射算法按一个常数倍数减小了时间复杂度

根据问题一所设, 用  $\|\cdot\|_1$  定义距离下  $P^*$  的  $\epsilon$ -邻域, 对包含所有像点  $P_i^*$  的映射区  $C$  作穷举, 激活  $\epsilon$ -邻域内的所有像点, 以确定目标函数

在映射区内, 按照平移方式穷举, 移动步长为  $s$  步长  $s$  的选取要权衡复杂度与精度的问题, 以保证在不漏掉可能的最优解的情况下使运算时间最短

**边界问题** 图 2 中, 由粗线围成的区域为映射区, 与其内部的细线围成环状区域, 其宽度为  $\epsilon$  由旧井方位  $P_1$  与  $P_2$  映射而成的两点  $P_1^*$  与  $P_2^*$  分别分布在映射区两条对边的附近, 与对应边的距离均不超过给定误差  $\epsilon$  它们可能同时成为可利用点 如果直接用  $\epsilon$ —邻域在映射区穷举, 则不可能同时容纳这两点 为了不漏掉可能的最优解, 下面给出边界问题的解决方法

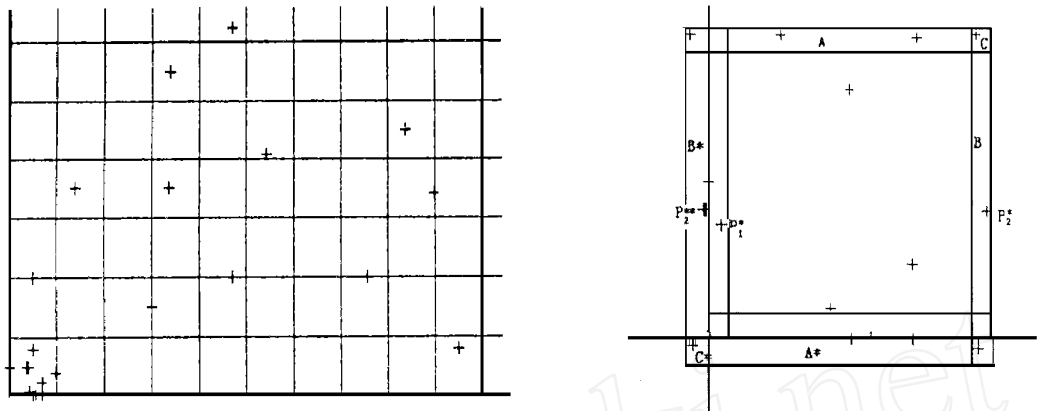


图 1 旧井及其映射点的方位

图 2 边界问题示意图

如图 2, 网格的右、上两条边附近有区域  $A, B, C$ , 将这些区域及其上的所有点分别复制到对应区域  $A^*, B^*, C^*$ . 为了易于编制程序, 将左上角与右下角区域也补齐, 形成一个边长为  $1 + \epsilon$  的扩大的正方形搜索区域. 那么原有的点与点之间的关系将全部反映到映射后的网格上, 从而解决了边界问题, 得到了完善的算法 在计算机上求解得出, 在第一象限内, 距原点最近的网格结点, 相对于原点的横向偏移为 0.4, 纵向偏移为 0.5, 可利用点为第 2, 4, 5, 10 点

4.2 问题二: 无方向约束的求解问题

显然, 问题一是问题二的特殊情况 下面探讨无方向约束下的求解问题 为了方便研究, 在约定中给定了三种坐标系  $S, S_1, S_2$

我们所关心的是源点坐标系  $S_1$  与网格坐标系  $S_2$  之间的相互关系 如图 4, 令源点坐标

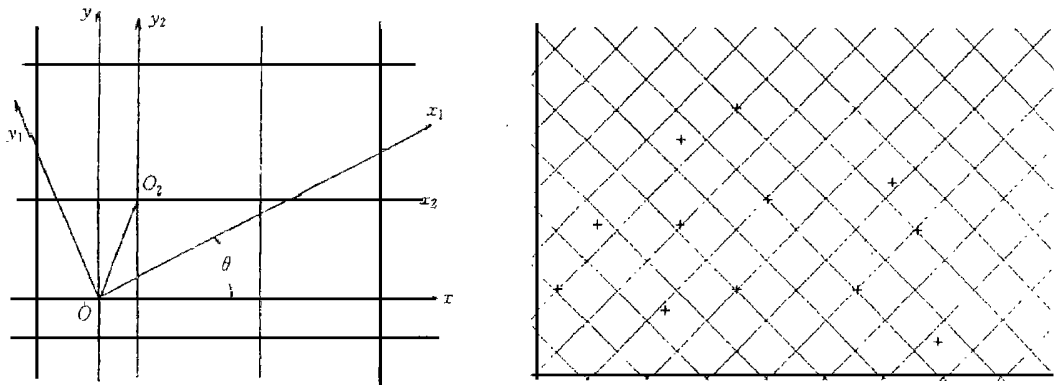


图 3 三个坐标系

图 4 最优解下网格的覆盖方式

系  $S_1$  的原点  $O_1$  与绝对坐标系  $S$  的原点  $O$  重合, 则  $S_1$  可由  $S$  绕原点  $O$  旋转  $\theta$  得到; 令网格坐标系  $S_2$  的方向与绝对坐标系  $S$  的方向相同, 则  $S_2$  可由  $S$  平移位移量  $(u, v)$  得到. 这样, 坐标系  $S_1$  与  $S_2$  之间的相互关系便由转角  $\theta$  与位移量  $(u, v)$  唯一确定.

考虑到网格由正方形构成, 转角  $\theta$  只需变化  $\pi/2$  便可以穷举, 故可取转角  $\theta$  为网格纵边或横边与  $x$  轴的正向夹角, 并满足  $0 < \theta < \pi/2$ . 由于假设网格足够大, 可任意确定一网格结点为坐标系  $S_2$  的原点  $O_2$ , 为了方便, 我们取为绝对坐标系  $S$  第一象限上距原点  $O$  最近的点, 易证, 位移向量  $(u, v)$  在映射区  $C$  内.

以相互独立的参数  $\theta, u, v$  作为状态分量, 得到三维状态空间  $A$  [2].  $A$  中每一状态  $(\theta, u, v)$  均唯一确定一个目标函数值  $z(\theta, u, v)$ .

令转角  $\theta$  以足够小的步长从  $0$  到  $\pi/2$  变化. 每当转角  $\theta$  确定时, 源点所在平面已经固定在绝对坐标系  $S$  上了, 剩下的工作便是固定方向平移网格, 寻找目标函数的最优解. 此时的工作与问题一相比, 除  $\epsilon$ —误差邻域是  $\epsilon$ —定义距离下的之外, 其它完全相同, 可以全盘借用问题一算法, 故不赘述.

运算结果 (如图 4) 为: 夹角  $\theta = 0.779$ , 位移量  $(0.950, 0.730)$ . 可利用点为第 1, 6, 7, 8, 9, 11 点.

#### 4.3 问题三: 完全利用的问题

所有旧井均可利用的充分条件是: 当所有源点旋转角度  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) 形成一个映射区 (称为  $\alpha$ —映射区) 后, 所有像点必须落在一个半径  $R = \epsilon$  的圆 (即  $\epsilon$ —邻域) 内, 即  $w = n$ . 并且  $D_{ij} \leq 2\epsilon$ . 我们称其为误差圆. 对于完全利用问题, 可用如下判据作优先判断:

**判据一** 在  $\alpha$ —映射区内, 若存在两点间的距离  $D_{ij} > 2\epsilon$ , 则  $n$  口旧井不能同时利用. 因为相距  $D_{ij} > 2\epsilon$  的两点不可能同时在一个误差圆内.

**判据二** 若  $\alpha$ —映射区内任意两点间距离  $D_{ij}$  满足  $D_{ij} \leq \sqrt{3}\epsilon$ , 则有  $w = n$ , 即这  $n$  个像点能全部被包含在误差圆内, 这时  $n$  口旧井能全部利用.

**证明** 如图 5, 作误差圆的内接正三角形  $ABC$ , 边长为  $\sqrt{3}\epsilon$ . 分别以  $A, B, C$  为圆心作半径为  $\sqrt{3}\epsilon$  的圆, 得到其交集区域  $E$  (阴影区域). 由于映射区内任何一点到  $A, B, C$  的距离都不超过  $\sqrt{3}\epsilon$ , 必落在区域  $E$  中. 证之.

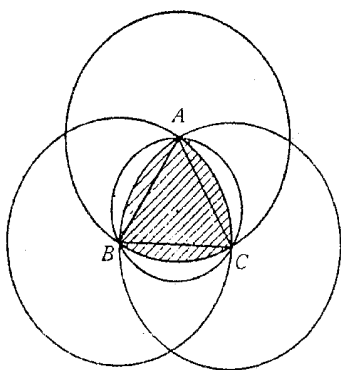


图 5 判据二的示意图

**判据三** 任意连接三个像点成三角形, 若成锐角或直角三角形, 则其外接圆是能将三个顶点完全包围的最小圆; 若成钝角三角形, 则以钝角的对边为直径所作的圆为能将三个顶点完全包围的所有圆中的最小圆. 当最小圆半径  $R > \epsilon$  时, 则  $w < n$ . 这就是说如果存在三个点不能同时在一个误差圆中, 这时  $n$  口旧井就一定不能同时被利用.

有一种更简洁的求最小圆的算法:

**中垂线上的二分逼近法** 如图 6, 为了在映射区中找到能覆盖全部像点的最小圆域, 作包含  $n$  个像点的凸  $m$  ( $m \geq n$ ) 边形, 作其直径  $PQ$  的中垂线交多边形于  $S, T$ . 从  $PQ$  与  $ST$  的交点  $O$  出发, 在中垂线上搜索所求圆的圆心, 步骤如下:

1. 取点  $O$  为圆心,  $R = |OP| = |OQ|$  为半径作圆;



problem, the objective function is built. We present the mapping principle, to map the locations of the original wells into a unique unit block of the mesh, so as to simplify the solution of the model. Using the mapping algorithm and the ergodic algorithm, we solve the problem under the direction constraint. Then we generalize the algorithms to the solution without the direction constraint. We studied the sufficient conditions and give some criteria of the availability on three particular conditions. The method of bisection on perpendicular at midpoint is presented.

## 钻井布局的数学模型

胡海洋, 陈建, 陆鑫  
指导教师: 陈晖, 姚天行

(南京大学, 南京 210093)

**摘要:** 本文对钻井布局问题的研究, 是从全局搜索入手, 逐步深入讨论了各种算法的有效性、适用性和复杂性, 得到不同条件下求最多可利用旧井数的较好算法。

对问题 1, 我们给出了全局搜索模型、局部精化模型与图论模型, 讨论了各种算法的可行性和复杂度。得到的答案为: 最多可使用 4 口旧井, 井号为 2, 4, 5, 10。对问题 2, 我们给出了全局搜索、局部精化和旋转矢量等模型, 并对局部精化模型给出了理论证明, 答案为: 最多可使用 6 口旧井, 井号为 1, 6, 7, 8, 9, 11, 此时的网格逆时针旋转 44.37 度, 网格原点坐标为 (0.47, 0.62)。

对问题 3, 给出判断  $n$  口井是否均可利用的几个充分条件、必要条件和充要条件及其有效算法。

### 1 模型假设及符号说明(略)

### 2 问题分析与模型准备

如果一个已知点  $P_i$  与某个网络结点  $X_j$  距离不超过给定误差  $\epsilon(0.05)$  单位, 则认为  $P_i$  处的旧井资料可以利用。因此, 在棋盘(欧氏)距离定义下, 可以以  $P_i$  为中心,  $2\epsilon$  单位为边长作一个正方形(半径为  $\epsilon$  的圆)。若网络在平移过程中, 网络中的某个结点  $X_j$  落在以  $P_i$  为中心的正方形(圆)内或边上, 可认为  $X_j$  可利用旧井  $P_i$  的相应资料。同样可以以  $X_j$  为中心,  $2\epsilon$  单位为边长作一个正方形(圆)。若网络在平移过程中,  $P_i$  落在以  $X_j$  为中心的正方形(圆)内或边上, 可认为  $X_j$  可利用旧井  $P_i$  的相应资料。这两种方法分别对应于网格移动和坐标平移, 显然它们是等价的。以下的讨论将不明显区别这两种方法。为了简化讨论, 引入以下法则。

**映射法则:**

将点  $i$  映射至以  $(a, b)$ ,  $(a+1, b+1)$  为对角顶点的正方形内的点  $i$ ,  $i_x = i_x - [i_x] + a$ ;  $i_y = i_y - [i_y] + b$ , 其中  $[x]$  为  $x$  的整数部分。

**覆盖法则:**

将所有旧井映射至  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$ ;  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ;  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ;  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  为对角顶点的四个正方形上。以  $2\epsilon$  为边长作小正方形, 该正方形形心在  $(-0.5, -0.5)$ ,