1997 年 1 月　　数学的实践与认识　　第 27 卷 1 期

洗衣机的节水优化模型

张斌珍　何继青　莫　展
(华北工学院，太原 0300051)
指导教师：杨　明

编者按　本文在把洗衣过程简化为一次性溶解、多次稀释的前提下，紧紧抓住每轮加水、脱水时污物浓度的变化来建模．叙述简明，求解 (最优加水和轮数) 过程清晰扼要，模型检验和应用部分也颇具特色．

文中建立的"动态规划模型"、"多阶段决策模型"．实际上用的仍是静态规划模型．

摘　要　本文通过分析洗衣机的洗衣过程，认为是一次性溶解、多次稀释的过程．据此建立动态规划模型，并利用迭代公式和最优化原理，得出最少用水量的判断公式和代数解．以海棠洗衣机为例，通过对比，利用我们的模型算出的用水量比厂家提供的数据要小，从而说明所建模型的优越性．最后，根据模型解，给出最小用水量与脏衣服的重量的关系图，并从中得出有趣的结论，也给厂家提供一个节约用水的程序．

一、基本假设及说明

1. 洗衣机一次用水量有最高限和最低限，能连续补充在限度内的任意水量．
2. 洗衣机每轮运行过程为：加水 — 漂洗 — 脱水．
3，仅在第一轮运行时加上洗涤剂，在后面的运行轮中仅有稀释作用．
4. 洗衣时所加的洗涤剂适量，漂洗时间足够，能使污垢一次溶解，忽略不能溶解的污垢．
5. 脱水后的衣服质量与干衣服的重量成正比．
6. 每缸洗衣水只用一次．

二、符号和变量说明

A_0：　污物的质量(kg)；

ρ_i：　第i次运行时污物浓度(kg/升)；

n：　洗衣服时洗衣机运行轮数 (次)；

x_i：　第i轮用水量 (升)；

M：　干衣服的质量 (kg)；

m：　衣服脱水后衣服含水质量 (kg)；

ε:　衣服的清洁度 (常量，洗净的衣服上污量与A_0之比);

S:　洗一次衣服总用水量 (升);

$M_{\max}$:　洗衣机一次洗衣的最大量 (kg);

α:　脱水后衣服含水质量与干衣服质量比 (常量);

$V_{\max}$:　洗衣机一次注水最高限 (升);

$V_{\min}$:　衣服完全浸泡的状态下为使洗衣机能正常运行需注入的最低水量 (升);

β:　单位质量的衣服完全浸泡最低所需水量 (常量);

$V_{\min}(M) = \beta M + V_{\min}$ (升)

三、模型的建立及求解

(一) 模型分析

(1) 从化学中的洗涤剂原理知，有助于洗涤作用的三个因素：

1. 表面活性 (以肥皂为代表的活性剂产生洗涤作用的各种物性之通称).
2. 界面电 (配入洗涤剂中的碱和磷酸盐等无机助剂的作用).
3. 机械力和流水力 (由于水的流动产生机械力).

在本题中，由于只在第一次加入洗涤剂，在第二次及以后，不再加入洗涤剂，从而使有助于洗涤的三个因素中的前两个不存在，只剩水的流动力的作用，洗涤作用因此很微弱. 于是假设污物第一次被洗涤，接下来的过程只是污物的稀释过程是合理的.

(2) 实际生活经验可知，在衣服完全浸泡的基础上，洗衣机还需有一定的富裕水量 $V_{\min}$ 才能使其正常运行. 一种衣服完全浸泡所需水量是衣服质量的 β 倍，则质量为 M 的衣服使洗衣机能洗的最少水量 $V_{\min}(M) = V_{\min} + \beta M$. 脱水后剩下水量是衣服质量的 α 倍，$m = \alpha M$. 对于普通衣服 α,β 可视为常数. 实验测定 1 kg 混合干衣服完全浸泡所需水量，脱水后衣服含水量与干衣服质量之比，如表 1.

表　1

M	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
水量	2.56	5.02	7.48	9.87	12.3	15.7	18.6
m	0.3	0.61	0.92	1.20	1.52	1.88	2.15

计算可得 α,β 的值，$\alpha = 0.60; \beta = 5.0$

(3) 各次运行时，污物的浓度为：

$$\rho_1 = \frac{A_0}{x_1},\ \rho_2 = \frac{\rho_1 m}{x_2 + m},\ \rho_3 = \frac{\rho_2 m}{x_3 + m}, \cdots, \rho_n = \frac{\rho_{n-1} m}{x_n + m}$$

经迭代得

$$\rho_n = \frac{A_0 m^{n-1}}{x_1(x_2+m)(x_3+m)\cdots(x_n+m)}$$

(二) 模型的建立

根据上述分析，可以建立以下的多阶段决策模型，来解决洗衣机的节水问题：

$$\begin{aligned}
\min \quad & S = \sum_{t=1}^{n} x_i \\
\text{s.t.} \quad & \frac{A_0 m^n}{x_1(x_2+m)(x_3+m)\cdots(x_n+m)} \le \varepsilon A_0 \\
& V_{\min}(M) \le x_1 \le V_{\max} \\
& V_{\min}(M) \le x_i + m \le V_{\max}, \qquad i = 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{1}$$

定理 1 对给定的 n, 若 (1) 存在最优解 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$, 则

$$x_1^* = x_2^* + m = \cdots = x_n^* + m \tag{2}$$

证明： 运用反证法

若 (2) 不成立，取

$$\begin{aligned}
& y = \sqrt[n]{x_1^*(x_2^*+m)\cdots(x_n^*+m)} \\
& x_1 = y \\
& x_i = y - m, \qquad i = 2, 3, \cdots, n \\
& x_1(x_2+m)\cdots(x_n+m) \ge \frac{m^n}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

则有

$$V_{\min}(M) \le x_1 \le V_{max}, \qquad V_{\min}(M) \le x_i \le V_{max}$$

从而得到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组可行解．又

$$x_1^* + \sum_{i=2}^{n}(x_i^*+m) > n\sqrt[n]{x_1^*(x_2^*+m)\cdots(x_n^*+m)} = x_1 + \sum_{i=2}^{n}(x_i+m)$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* > \sum_{i=1}^{n} x_i$$

这与 $x_1^*, x_2^*, \cdots x_n^*$ 是最优解相矛盾．

(三) n 的取值讨论

$$\frac{m^n}{x_1^*(x_2^*+m)\cdots(x_n^*+m)} < \varepsilon$$

(1) 当 $x_1, x_i + m (i = 2, 3, \cdots, n)$ 刚好为 $V_{\min}(M)$, 则有最多洗涤轮数：

由 $\frac{m^n}{(V_{\min}(M))^n} < \varepsilon$ 得

$$n_{max} = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln\left(\frac{m}{V_{\min}(M)}\right)}\right] + 1$$

(2) 当 $x_1, x_i+m(i=2,3,\cdots,n)$ 为 $V_{\max}$, 则最少轮数由 $\frac{m^n}{(V_{\max})^n}<\varepsilon$ 得

$$n_{\min}=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\dfrac{m}{v_{\max}}}\right]+1.$$

综上所述， n 的取值范围 $n_{\min}\le n\le n_{\max}$.

(四) 求最优解

(1) 当 n 取单值时， $n_{\min}=n=n_{\max}$ 有

$$\frac{m^n}{\left(V_{\min}(M)\right)^n}<\varepsilon$$

成立，所以 $x_1=x_2+m=x_3+m=\cdots=x_n+m=V_{\min}(M)$ 是可行解，也就是最优值

$$S=nV_{\min}(M)-(n-1)m.$$

(2) 当 n 取多值时满足 $n_{\min}\le n\le n_{\max}$, 设 n 取值为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 利用定理 1, 则原模型转为求

$$\min\left\{S_i\mid S_i=n_i\times x_i-(n_i-1)m\right\}$$

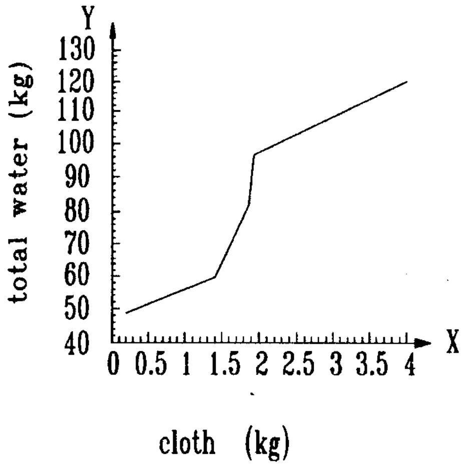
其中

$$x_i^*=\max\left\{\frac{m}{\sqrt[n_i]{\varepsilon}},\ V_{\min}(M)\right\},\qquad i=1,2,\cdots,k$$

四、模型结果与检验

以海棠洗衣机 XQB42-1 型为例.

以 $\varepsilon=0.005, M=3.1, V_{\min}=24$ 代入模型可得 $S=108.58$ 升，而实际中这种型号的洗衣机实用水 127 升，节约用水 8.42 升. 对于给定的一个 ε (例如 $\varepsilon=0.005$), 可根据程序用计算求出 $M-S$ 的对应关系 (见表 2 及图 1).



建议：洗衣机厂家向用户提供该图、表，以便用户节约用水.

五、模型评价及推广

模型的最大优点在于把洗衣机按固定挡水量方式改进成加水量随衣物的变化而连续变化的方式，且在每一次洗衣过程中利用动态规划优化，从两方面节约了水量.

模型还具有形式简单、适用范围广等优点. 对于不同型号的洗衣机，只要把程序中某些参数作为相应变化，就可得到节约用水的模型.

在实际过程中，单位质量的衣物随着种类、材料、尺寸的不同，其处于浸泡状态需最小水量 β 和脱水后衣服与干衣服质量比 α 的不同，最少用水量也要变化，但只要适当地改变 β 和 α 的值，该模型就能运用于这些情况.

表 2　衣服重量与用水情况表

衣物重量 (kg)	洗衣次数	第一次用水量 (kg)	第二次用水量 (kg)	第三次用水量 (kg)	总用水量 (kg)	衣服清洁度
0.20	2	24.76	24.44		49.20	0.0001
0.40	2	25.82	25.18		51.00	0.0006
0.60	2	26.88	25.92		52.80	0.0012
0.80	2	27.94	26.66		54.60	0.0020
1.00	2	29.00	27.40		56.40	0.0030
1.20	2	30.06	28.14		58.20	0.0040
1.40	2	31.68	29.44		61.12	0.0050
1.60	2	36.20	33.64		69.85	0.0050
1.80	2	40.73	37.85		78.58	0.0050
2.00	3	34.30	31.10	31.10	96.50	0.0008
2.20	3	35.36	31.84	31.84	99.04	0.0009
2.40	3	36.42	32.58	32.58	101.58	0.0011
2.60	3	37.48	33.32	33.32	104.12	0.0013
2.80	3	38.54	34.06	34.06	106.66	0.0015
3.00	3	39.60	34.80	34.80	109.58	0.0017
3.20	3	40.66	35.54	35.54	111.74	0.0019
3.40	3	41.72	36.28	36.28	114.28	0.0022
3.60	3	42.78	37.02	37.02	116.82	0.0024
3.80	3	43.84	37.76	37.76	119.36	0.0026
4.00	3	44.90	38.50	38.50	121.90	0.0028

参 考 文 献

[1] 北原文雄等，表面活性剂，化学出版社.

[2] 运筹学教材编写组，运筹学，清华大学出版社，北京.

[3] XOB42-1 海棠牌洗衣机说明书.