第 29 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 29 No. 1
1999 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 1999

投资收益与风险的优化模型

曾劲松 俞 杰 薛大雷

指导教师： 雷英杰

(华北工学院理学系，太原 030054)

编者按 本文将二目标优化问题，对两个目标作加权组合化成单目标优化问题. 寻找最优解时采用了净收益率排序. 风险固定时净收率大者优先的原则. 逐项确定各投资项目的投资额. 对这一解法的合理性，文章给出了理论证明. 对试验题给出的数据解出了最佳投资方案. 解题步骤、理论依据均简明、清析.

摘 要 本文以投资效益为目标，对投资问题建立了一个优化模型. 由于不同的投资方式具有不同的收益和风险损失，该模型根据优化组合的原理，提出了两个准则，并根据准则从众多投资方式中选出若干种投资，组合成非劣投资，使在投资额一定的情况下，经济效益尽可能最大，风险尽可能最小.

一、符号说明

m_i— 购买 s_i 的购买资金； G— 总体净收益； F— 总体风险； A— 投资效益；
$(r_i-p_i)/(1+p_i)$— 投资效益率[1]
s_k— 在所有的投资项目中 $(r_i-p_i)/(1+p_i)$ 最大的那一投资项；
$g_i(m_i)$— 购买 s_i 的投资资金为 m_i 时的净收益； t— 投资项目数.

二、模型的建立与求解

银行存款可视为对 s_0 的投资，其平均收益率为 $r_0=5\%$，风险损失率 q_0 、购买费率 p_0 皆为 0. 由于各项投资量都比较大，为追求最大投资效益，对第 i 项的投资至少应大于等于 u_i.

$$\begin{aligned}A &= G-K\cdot F\\&=\sum_{i=0}^{n}g_i(m_i)-K\cdot\max\{q\cdot m_i\}\ (i=0,1,\cdots,n)\\&=\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)\cdot m_i-K\cdot\max\{q_i\cdot m_i\}\\&=\sum_{i=0}^{n}m_i(r_i-p_i)-k\cdot\max\{q_i\cdot m_i\}\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n}m_i(1+p_i)=M.$$

准则一 当总体风险一定，即 $F=\max\{qi\cdot m_i\}(i=0,1,2.\cdots,n)$ 一定时，投资效益 A 取最大的必要条件是 $(r_i-p_i)/(1+p_i)$ 值最大的那一项投资的购买额为 $F/q_k(F\le M\cdot q_k/(1+p_k))$.

1 投资效益率应为 $(m_ir_i-m_ip_i)/(m_i+m_ip_i)=(r_i-p_i)/(1+p_i)$，见 [2].

证 (略)

准则二 若总体风险 F, 总的资金 M 和投资项目为 s_k 的风险损失率 q_k, 购买费率 p_k 满足 $F \geq M \cdot q_k/(1+p_k)$ 且所有投资都用来购买 s_k 时, 投资效益 A 最大.

证 (略)

根据准则一, 当给定 $F(F \leq q_k \cdot M/(1+p_k))$ 时, 若要求 A 最大, 需把 $(r_i-p_i)/(1+p_i)$ 值最大的一项投资 s_k 作为优先投资项目, 对该项投资 F/q_k 后, 在后面的投资中仍需将 $(r_i-p_i)/(1+p_i)$ 值较大者作为优先投资项目, 如此将得到一个在 F 一定时的最优投资方案.

根据准则二, 当 $F > q_k M$ 时所有资金都用来购买 s_k, 对于题 (1) 所给的数据, 计算投资效益率 $(r_i-p_i)/(1+p_i)$ 得

$$(r_0+p_0)/(1+p_0) = 0.05 \qquad (r_1+p_1)/(1+p_1) = 0.2673$$
$$(r_2+p_2)/(1+p_2) = 0.1863 \qquad (r_3+p_3)/(1+p_3) = 0.1770$$
$$(r_4+p_4)/(1+p_4) = 0.1737$$

将投资效益率从大到小排列得

$$\frac{r_1-p_1}{1+p_1} > \frac{r_4-p_4}{1+p_4} > \frac{r_3-p_3}{1+p_3} > \frac{r_2-p_2}{1+p_2} > \frac{r_0-p_0}{1+p_0}$$

于是优先投资项的先后顺序为 s_1, s_2, s_3, s_4, s_0, 假定所给 M 为 1 时, 根据此方案, 对于不同风险的最佳投资方案如附表一 (略).

对于一般的情况, 可以对投资效益率排序, 按优先顺序先后投资, 且各投资量以不超过给定风险为限, 则可得最佳投资方案. 具体的计算过程如下

首先, 由 $\sum_{j=0}^{t-1} n\frac{F}{q_j}(1+p_j) \cdot \leq M \leq \sum_{j=0}^{t} \frac{F}{q_j} \cdot (1+q_j)$ 来确定 t 的值, 则

$$G = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (r_j - p_j) + \frac{M - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (1+p_j)}{1+p_t} \cdot (r_t - p_t)$$

其各项购买额 m_j 为当 $j < t$ 时, $m_j = \frac{F}{q_j}$; 当 $j = t$ 时,

$$m_j = \left[M - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (1+p_j) \right] \cdot \frac{1}{1+p_t},$$

当 $j > t$ 时, $m_j = 0$.

如对题中给定的数据, 利用我们建立的模型, 进行了最佳投资方案的计算, 所得结果可见附表二 (略).

以上计算过程中所使用的程序我们已附于文后, 详见附录一至四 (略).

模型评价与推广 (略)

参 考 文 献

[1] 赵国杰, 技术经济学, 天津大学出版社, 天津.

[2] 庄俊鸿等, 投资经济学, 华南理工大学出版社, 广州.

[3] 荆新等, 财务管理学, 中国人民大学出版社, 北京.