最优捕鱼策略问题

朱京义　张　纯　廖海润

(南昌大学，南昌 330000)

指导教师：李向军

编者按　文章假设合理、建模思路清晰、描述准确、推理严谨、计算结果正确．特别在承包期总产量模型中对“五年后鱼群的生产力不受到太大破坏”的分析，寓在新意．全文叙述流畅，简明扼要．是一篇很好的数学模型论文．

摘　要　本文以生态经济着眼，首先用微分方程组建立了基本模型，从理论上完整地描述了各年龄鱼的变化情况．其次，从基本模型出发，我们构造出年度最优模型，得到了可持续捕获应满足的条件及在此条件下可获得的年最高收获量，在对“鱼的生产能力不受到太大破坏”进行详细分析和合理描述的基础上，巧妙构思，建立了承包期总产量模型，给出了公司应采取的捕捞策略及相应的承包期最高收获量．

一、问题的提出及分析

可再生资源管理应使生物资源最终不丧失生产力以便能持续利用，一般以得到最大持续产量 (MSY) 为目标．

就渔业捕捞而言，公司的最优策略应满足以下要求：

(1) 可持续捕获，即在生态上可行，具体地希望达到这样的要求，使得每年开始捕捞时渔场的各年龄组的鱼群大小不变．

(2) 产量最大，即经济上可行．第一问中要求收获量最大，即 $M = m_3a_3 + m_4a_4$ 取最大值．

(3) 技术上可行，不能直接人为地提高卵率和成活率，采用固定努力量捕捞，每年捕捞强度系数保持不变．

其中，要求 (3) 已由题设进行了规范，要求 (2) 是模型所要达到的目标，要求 (1) 给出达到最优解的前提．

二、模型的基本假设与符号说明

(一) 基本假设

1. 渔场是非开放式渔场，不与其它水域发生关系，从而构成独立的生态群落；

2. 鱼群是一个独立的种群，不存在与其它生物的竞争；或者虽有竞争，但其影响只局限在鱼的死亡率内；

3. 假设同一年龄组的个体之间是同质的，只考虑平均水平，不讨论个体的差异；

4. 各年龄组的鱼经过一年后即进入高一级的年龄组，但 4 龄鱼经过一年后仍视为 4 龄鱼；

5. 假设 3 、 4 龄鱼全部具有生殖能力，或者虽然雄性不产卵，但平均产卵量掩盖了这一差异；

6. 鱼的自然死亡可在一年内任何时间发生，产卵可在后四个月内任何时间论发生，两者在各自的时间段内是均匀分布的；

7. 对鱼的捕捞用固定努力量捕捞方式，每年的捕捞强度系数保持不变，且捕捞只在前八个月进行.

(二) 符号说明

$n_i(t)$: t 时刻 i 龄鱼的数量；

n_{i1}^{k} : 第 k 年底 i 龄鱼的数量；

$n_{i0}^{(k)}$: 第 k 年初 i 龄鱼的数量；

m_i : 第 i 年龄鱼的平均重量，相应的值向量为 $(5.07, 11.55, 17.86, 22.99)$ (单位：克)；

r : 自然死亡率，值为 0.8(1/ 年)；

c : 4 龄鱼的平均产卵量，值为 1.109×10^5 个；

$Q^{(k)}$: 第 k 年度的产卵总量 (单位：个)；

β_i : 对 i 龄鱼的捕捞强度系数， $\beta_1,\beta_2\beta_3,\beta_4$ 满足 $(0:0:0.42:1)$；

a_i : 对 i 龄鱼的年捕捞量 (单位：条)；

M : 年总数收获量即 $m_3a_3+m_4a_4$ (单位：克)；

MM : 即 $\sum_{i=1}^{5}M_i$, 5 年的总收获量 (单位：克).

三、模型的建立

(一) 基本模型

我们首先建立基本模型，来对鱼群的变化及每年收获量进行描述. 因为不捕捞 1 、 2 龄鱼有

$$\begin{cases}\dfrac{dn_i(t)}{dt}=-rn_i, \\ n_i^{(t)}|_{t=0}=n_{i0},\end{cases}\qquad i=1,2,$$

得 $n_i=n_{i0}\cdot e^{-rt}, i=1,2$, 对 3 、 4 龄鱼有

$$\begin{cases}\dfrac{dn_i(t)}{dt}=-rn_i-H\left(t-\dfrac{2}{3}\right)\beta_i\cdot n_i, \\ n_i|_{t=0}=n_{i0},\end{cases}\qquad i=3,4$$

得 $n_i=n_{i0}e^{-[r+H(t-\frac{2}{3})\beta_i]t}, (i=3,4)$ 其中

$$H\left(t-\frac{2}{3}\right)=\begin{cases}0, & t\geq\dfrac{2}{3}, \\ 1, & t<\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

令 $n_{i1}^{(k)}$ 为 i 龄鱼在第 k 年底时的数目， $n_{i0}^{(k)}$ 为 i 龄鱼在第 k 年初时的数目，得

$$\begin{cases}n_{11}^{(k)}=n_{10}^{(k)}\cdot e^{-r}, \\ n_{21}^{(k)}=n_{20}^{(k)}\cdot e^{-r}, \\ n_{31}^{(k)}=n_{30}^{(k)}\cdot e^{-r-\frac{2}{3}\beta_3}, \\ n_{41}^{(k)}=n_{40}^{(k)}\cdot e^{-r-\frac{2}{3}\beta_4},\end{cases}\tag{1}$$

由假设 4 月到年底，第 i 龄鱼全部转化为 $(i+1)$ 龄鱼 $(i=1,2,3)$, 同时由孵化产生 1 龄鱼，得

$$\begin{cases} n_{20}^{(k)} = n_{11}^{(k-1)}, \\ n_{30}^{(k)} = n_{21}^{(k-1)}, \\ n_{40}^{(k)} = n_{31}^{(k-1)} + n_{41}^{k-1}, \\ n_{10}^{(k)} = \dfrac{D \times Q^{(k-1)}}{D + Q^{(k-1)}}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $D = 1.22 \times 10^{11}, Q^{(k-1)}$ 为 $(k-1)$ 年度的总产卵量，且

$$\begin{aligned} Q^{(k-1)} &= \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left(\frac{1}{2} n_3^{(k-1)} + n_4^{(k-1)} \right) \frac{c}{\frac{1}{3}} dt \\ &= 28553.4 n_{30}^{(k-1)} e^{-\frac{2}{3}\beta_3} + 57166.8 n_{40}^{(k-1)} e^{-\frac{2}{3}\beta_4} \end{aligned} \tag{3}$$

此外，我们可求得每年对 3 、 4 龄鱼的总捕捞重量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{2}{3}} (m_3\beta_3 n_3(t) + m_4\beta n_4(t)) dt \\ &= \frac{m_3\beta_3}{r+\beta_3} \left[1 - e^{-\frac{2}{3}(r+\beta_3)} \right] n_{30}^{(k)} + \frac{m_4\beta_4}{r+\beta_4} \left[1 - e^{-\frac{2}{3}(r+\beta_4)} \right] n_{40}^{(k)} \\ &= m_3 a_3 + m_4 a_4 \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$a_3 = \frac{\beta_3}{r+\beta_3} \left[1 - e^{-\frac{2}{3}(r+\beta_3)} \right] n_{30}^{(k)}, \qquad a_4 = \frac{\beta_4}{r+\beta_4} \left[1 - e^{-\frac{2}{3}(r+\beta_4)} \right] n_{40}^{(k)}$$

(1)--(3) 式联立刻划了鱼群各年龄组每年的变化情况， (4) 式是每年在捕捞强度系数 $(0,0,\beta_3,\beta_4)$ 下的总收获重量，它们一起构成了我们的基本模型.

(二) 年度产生最优模型

为实现可持续捕获，即要求 $n_{i0}^{(k)} = n_{i0}^{(k-1)}$, 并在此前提下获得最大年收获量，由基本模型，即得年度最优模型.

$$\max\ M = \max\{m_3 a_3 + m_4 a_4\}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} n_{11}^{(k)} = n_{10}^{(k)} e^{-r} \\ n_{21}^{(k)} = n_{20}^{(k)} e^{-r} \\ n_{31}^{(k)} = n_{30}^{(k)} e^{-r-\frac{2}{3}\beta_3} \\ n_{41}^{(k)} = n_{40}^{(k)} e^{-r-\frac{2}{3}\beta_4} \\ n_{20}^{(k)} = n_{11}^{(k-1)} \\ n_{30}^{(k)} = n_{21}^{(k-1)} \\ n_{40}^{(k)} = n_{31}^{(k-1)} + n_{41}^{(k-1)} \\ n_{10}^{(k)} = \dfrac{D \times Q^{(k-1)}}{D + Q^{(k-1)}} \\ Q^{(k-1)} = 28553.4 n_{30}^{(k-1)} e^{-\frac{2}{3}\beta_3} + 57206.8 n_{40}^{(k-1)} n_{40}^{(k-1)} e^{-\frac{2}{3}\beta_4} \end{cases}$$

利用 $n_{i0}^{(k)} = n_{i0}^{(k-1)}$, 也即 $n_{i0}^{(k)}, n_{i1}^{(k)}, Q^{(k)}$ 等与时间 k 无关，化简得

$$\max M = \max\{m_3 a_3 + m_4 a_4\}$$
$$\text{s.t}\begin{cases} n_{10} = \dfrac{D \times Q}{D + Q} \\ n_{40} = e^{-(3r+\frac{2}{3}\beta_3)} n_{10} + e^{-(r+\frac{2}{3}\beta_4)} n_{40} \\ Q = 28553.4 e^{-2r-\frac{2}{3}\beta_4} n_{10} + 57106.8 e^{-\frac{2}{3}\beta_4} n_{40} \end{cases}$$

利用 Mathematica 软件求极值得 (原程序略)

$$\beta_4 = 17.0243, \qquad \beta_3 = 7.15021, \qquad M_{\max} = 3.87673 \times 10^{11}\text{克}$$

此外，各龄鱼鱼群数为

$$n_1 = 1.19153 \times 10^{11}, \qquad n_2 = 5.37004 \times 10^{10},$$
$$n_3 = 2.41292 \times 10^{10}, \qquad n_4 = 9.22395 \times 10^{7}.$$

显然 $M, n_1 n_2, n_3, n_4$ 均是关于 β_4 的函数，解 $n_4 = 0, n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0$ 中任一方程，可得 $\beta_i^* = 30.9276$, 此表示当捕捞强度系数达到 β_4^* 时，将导致种群灭绝，达到新的平衡点即零点，故为实现可持续捕获，应使 $\beta_4 < 30.9267$.

另外，由 M 与 β_4 的图可看出，捕捞重量 M 是 β_4 的单峰函数. 故我们可知盲目增大捕捞强度并不能导致捕获量的增加.

(三) 承包期总产量模型

为对 "五年后生产能力不受到太大破坏" 进行合理描述，我们考虑无捕捞时鱼群的变化情况.

首先，在年度最优模型中，令 $\beta_3 = \beta_4 = 0$, 我们可以得到无捕捞时，鱼群繁殖达到稳定状况 (即每年渔场中各年龄组条数恒定) 的鱼群分布. 此时，各年龄组鱼条数为

$$n_1^* = 1.20694 \times 10^{11}, \qquad n_2^* = 5.43123 \times 10^{10},$$
$$n_3^* = 2.44406 \times 10^{10}, \qquad n_4^* = 1.69663 \times 10^{8},$$

其次，以 $n_1 = n_1^*, n_2 = n_2^*, n_3 = n_4 = 0$ 为初值，用基本模型 (1)—(3) 式进行递推计算，可经过六年左右时间，鱼群即达到稳态；类似地以 $n_1 = n_2 = 0, n_3 = n_3^*, n_4 = n_4^*$ 为初值进行递推计算，可经过二年至三年时间，鱼群即达到稳态；用其他初值进行计算可有类似的结论.

据此，我们认为要使生产能力不受到太大破坏，只需保证 5 年后即 6 年初 3 、4 龄鱼的数量保持在一定范围内即可. 另外，由于多数生物学家的观点：只有种群减至低于最大持续产量水平时，资源才算开发过渡 [3]. 为此，我们构造目标函数：

$$\min Y = \min \sqrt{(W_3(n_{30}^{(6)} - n_3))^2 + (W_4(n_{40}^{(6)} - n_4))^2}$$

其中 n_3, n_4 为可持续捕获条件下鱼群的数量.

据以上分析，我们可得如下承包期总产量模型 $\max Z = \max\{MM - Y\}$ 其中 $M = \sum_{i=1}^{5} M_i$ 为五年产量之和

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
n_{11}^{(k)} = n_{10}^{(k)} e^{-r} \\
n_{21}^{(k)} = n_{20}^{(k)} e^{-r} \\
n_{31}^{(k)} = n_{30}^{(k)} e^{-r-\frac{2}{3}\beta_3} \\
n_{41}^{(k)} = n_{40}^{(k)} e^{-r-\frac{2}{3}\beta_4} \\
n_{20}^{(k)} = n_{11}^{(k-1)} \\
n_{30}^{(k)} = n_{21}^{(k-1)} \\
n_{40}^{(k)} = n_{31}^{(k-1)} + n_{41}^{(k-1)} \\
n_{10}^{(k)} = \dfrac{D \times Q^{(k-1)}}{D + Q^{(k-1)}} \\
Q^{(k-1)} = 28553.4 n_{30}^{(k-1)} e^{-\frac{2}{3}\beta_3} + 57206.8 n_{40}^{(k-1)} e^{-\frac{2}{3}\beta_4}
\end{cases}
$$

利用 Mathematica 软件解上述模型，得 (原程序略)

$$\beta_4 = 17.224, \qquad Z_{\max} = 1.60096 \times 10^{12}, \qquad MM_{\max} = 1.6.117 \times 10^{12}\text{克}.$$

第六年初鱼群数为

$$n_1 = 1.19325 \times 10^{11}, \qquad n_2 = 5.36016 \times 10^{10},$$
$$n_3 = 2.41115 \times 10^{10}, \qquad n_4 = 8.56297 \times 10^{7},$$

五年均采用固定努力量捕捞方式进行捕捞，每年对 3 、 4 龄鱼的捕捞强度系数分别为 8.612 和 17.224, 此时每年的产量分别为

$$M_1 = 2.33937 \times 10^{11}\text{克}, \qquad M_2 = 2.14399 \times 10^{11}\text{克},$$
$$M_3 = 3.95302 \times 10^{11}\text{克}, \qquad M_4 = 3.76518 \times 10^{11}\text{克},$$
$$M_5 = 3.81011 \times 10^{11}\text{克}.$$

另外，渔业管理部门可知，当承包者以上策略捕捞时，各鱼群数目与年度最优捕捞方案中可持续捕捞鱼群数保持大致相等，保证了渔场的可持续捕捞.

四、模型误差分析

文中基础假设合理，所建模型数学推导严谨、理论可靠、模型结构简单．求解后两个模型均采用 Mathematica 软件，故误差仅由软件和计算机精度产生，模型具有较好的稳定性.

五、模型优缺点及改进方向

我们的模型有以下优点：

1. 易于推广，承包期总产量模型构思巧妙，用我们给出的程序可对任意承包年数均给出捕捞的最优策略；
2. 稳定性好，模型给出的策略使各年龄组条数保持平衡，从而满足了可持续捕捞的要求；
3. 适用范围广，模型对于其它生态经济现象 (如树木生长与采伐) 同样适用；
4. 基本模型对问题的描述精确、合理、推导严谨、理论性强；
5. 模型本身不存在近似误差，计算误差由 Mathematica 软件和计算机精度决定.

模型的缺点：

主要是没有很好地联系经济来讨论，如没有反映市场特性对捕捞策略的影响，而对渔业公司来说这些因素是很重要的.

模型的改进方向：

对于一定承包年限内的最优捕捞问题，可以采用动态规划的方法，变动各年度的捕捞强度 β, 将使公司收获量更大.

参 考 文 献

[1] 叶其孝，大学生数学建模竞赛辅导教材，湖南教育出版社，长沙， 1993.
[2] Z.C.Pielou 著，卢泽愚译，数学生态学，科学出版社，北京， 1987.
[3] C.W. 克拉克著，周勤学等译，数学生态经济学，农业出版社，北京， 1983.

科学家谈数学

The creation of mathematical/statistical models and the development of algorithms for computer simulation to obtain solutions for problems of industry are what we in a strict sense call industrial mathematical sciences or, simply, industrial mathematics.

A. Friedman, J. Lavery, How to start an industrial mathematics program in the university,—Science and Industry Advance with Mathematics —, SLAM, 1993, p7.

英译中： 为获得工业问题的解决的数学／统计模型的创造以及计算机模拟算法的研究就是在严格意义下所谓的工业数学科学，或简称为工业数学

(叶其孝试译)