最优捕鱼策略的设计

石瑞萌　余希晨　周　丹

(复旦大学，上海 200433)

指导教师：廖有为

编者按　文章建立了可持续捕捞条件下的总产量最大的优化模型，用 Mathematic 求出最优捕捞强度系数和最大年捕捞量. 文章提出当 1 龄鱼恢复到无捕捞达平衡时的 1 龄鱼的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍时，则恢复生产能力有独到见解. 论文推理严密、表述清析，对模型结果的详尽准确.

摘　要　本问题是一个典型的可再生资源开发问题，因此我们以成熟的 Scheafer 模型为基础求解. 在建模过程中，我们对各年龄组鱼在同一年中的数量变化规律应用微分方程进行分析，建立捕捞期和产卵期两个阶段各组鱼群的数量随时间变化的指数型方程. 此后我们又对各组鱼群之间的数量关系建立按年份变化的离散型方程. 最终获得即简单又比较精确的离散型迭代方程组.

在模型求解过程中，我们结合了计算机分析求解的技术，应用 Mathematic 软件以及 Watcom$C/C++$ 编译器，通过编程序求出了问题的解，并以作图的方式给出了模型的直观表示. 我们还在数学上对于鱼类分布结构的收敛性给予了严格的证明，从而得出如下结论：

可持续性捕捞的最优捕捞强度系数 3 龄鱼为 7.2924/ 年，4 龄鱼为 17.3629/ 年，相应的年捕捞量为 3.88×10^{11} 克.

5 年连续捕捞的最优捕捞强度系数 3 龄鱼为 7.3836/ 年，4 龄鱼为 17.58/ 年，相应的年捕捞量为 2.34401×10^{11} 克，2.14852×10^{11} 克，$396176 \times 10^{11} A?K\#$,$3.77825 \times 10^{11}$ 克与 3.82216×10^{11} 克.

本模型具有较强的适用性和普遍性，建模过程中提出的对资源的开发和保护进行加权综合考虑的方法具有现实指导意义.

一、问题的分析

该问题是一个典型的可再生资源开发的数学模型. 因对年龄组的划分离散化，使该模型在整体上是离散的. 我们取每年开始捕捞时刻鱼数量计数时刻，考虑同 1 年龄组鱼在一年中生长过程的时间连续性，我们应用 Scheafer 模型在一年中建立连续的微分方程，分析在一年中的不同阶段分界点上鱼数量的关系.

在可持续捕捞的前提下，本模型表现为鱼数量在开始捕捞时刻不变，通过求解捕鱼量关于捕捞强度系数的表达式的极大值，得到最高年收获量及对应捕捞强度系数.

在求解渔业公司 5 年捕鱼问题时，我们利用计算机求出 5 年捕鱼量关于捕捞强度系数表达式的极大值及对应捕捞强度系数，验证了在此捕捞强度系数下对生产能力破坏不大，并求出了该公司每年捕鱼策略.

二、模型的假设及说明

a. 模型的假设

(一) 关于鱼的分类

1. 鱼分为 1 、 2 、 3 、 4 龄鱼；

2. 4 龄鱼存活一年后仍划为 4 龄鱼.

(二) 关于鱼的生长过程

1. 各年龄组鱼的自然死亡率为 0.8/ 年，且死亡是一连续过程，不是在某一时刻的突发；

2. 3 、 4 龄鱼在一年的最后 4 个月集中产卵，且在该 4 个月的开始时刻进行；

3. 3 龄鱼产卵量为 $0.5 \times 1.109 \times 10^5$/ 条， 4 龄鱼产卵量为 1.109×10^5 个 / 条；

4. 卵孵化成活为 1 龄鱼，成活率 (1 龄鱼与产卵率 n 之比) 为 $1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} + n)$.

(三) 关于鱼的捕捞

1. 捕捞在产卵孵化前 8 个月进行，且捕捞是一连续过程，不是在某一时刻发生；

2. 捕捞强度系数固定，只能捕捞 3 、 4 龄鱼，它们的捕捞强度系数之比为 0.42 : 1;

(四) 关于经济效益

经济效益以捕捞总量来衡量.

b. 对假设的说明：

1. 我们可以认为 4 龄鱼存活至下一年后，可被当作 4 龄鱼捕杀，且仍具有生殖能力，故可视为 4 龄逾；

2. 因为孵化需要时间，而产孵化集中完成，故认为产卵孵化开始时进行，这是对模型的简化，在后面的讨论中，我们将看到这种简化不影响模型的精确性；

3. 卵的成活率为 $1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} + n)$ 这个假设是正确的，它反映了当产卵数过多时，由于竞争必将导致成活率的减少.

三、模型的建立及求解

a. 参数的说明

参数	定义	值域	单位
T	年份	$0, 1, 2, \cdots,$	年
T	时间	R^+	年
Δ_t	间隔时间	$[0, 1]$	年
N_i	i 龄鱼的数量	R^+	条
r	自然死亡率	0.8	1/ 年
n	年产卵数量	R^+	个
E_3	3 龄鱼捕捞强度系数	R^+	1/ 年
E_4	4 龄鱼捕捞强度系数	R^+	1/ 年
α_3	3 龄鱼每年产卵量	$0.5 \times 1.109 \times 10^5$	个 / 条
α_4	3 龄鱼每年产卵量	1.109×10^5	个 / 条
β	为计算方便而引入	R^+	条

注： R^+ 表示正实数.

自然死亡率为单位时间死亡总数与鱼总数之比.

捕捞强度系数为单位时间捕捞量与各年龄组鱼群条数之比.

b. 模型的建立

考察 1 、 2 龄鱼的生长过程，根据 Scheafer 模型 [1]

$$\frac{dN_i}{dt} = -rN_1, \qquad i = 1, 2$$

得 $N_i(t) = N_0 \cdot e^{-rt}$.

T 年的 i 龄鱼在 $T+1$ 年变为 $i+1$ 龄鱼，所以

$$N_{i+1}(T+1) = e^{-r} \cdot N_i(T)$$

考察 3 、 4 龄鱼的生长过程，根据 Scheafer 模型，在前 8 个月，由于捕捞与存活均起作用，因而微分方程为

$$\frac{dN_i}{dt} = -(r+E_i)N_i \qquad i = 3, 4$$

得 $N_i(t) = N_0 \cdot e^{-(r+E_i)t}$. N_0 为每年年初的 i 龄鱼总数，由此可得，每时刻 t 的捕捞为 $E_iN_i(t)$, 则年捕捞量为

$$-\int_0^{\frac{2}{3}} E_i N_i(t)dt = \frac{E_i}{E_i + r} N_0 \left(1 - e^{-(E_i+r)\frac{2}{3}}\right) \tag{1}$$

在后 4 个月，只有存活率起作用，因而微分方程为

$$\frac{dN_i}{dt} = -rN_i$$

得

$$N_i(t) = N_0 \cdot e^{-rt} \tag{2}$$

N_0 为第 8 个月末时的 i 龄鱼总数 (在假设中我们曾提到产卵在产卵孵化期进行，这不影响模型的精确性. 现解释如下：在产卵期开始鱼条数为 N_0, 则鱼的平均值为

$$3\int_0^{\frac{1}{3}} N_0 \cdot e^{-rt}dt = \frac{3}{r} N_0 \cdot e^{-rt}\Big|_{\frac{1}{3}}^{0} \approx 0.88N_0, \qquad \text{接近于 } N_0$$

因此将产卵开始作为产卵时刻是合理的.)

计算得 T 年第 8 个月末 i 龄鱼数为

$$N_i(T) \cdot e^{-(r+E_i)\frac{2}{3}} \tag{3}$$

T 年末存活数 $(N_i(T) \cdot e^{-(r+E_i)\frac{2}{3}} = e^{-r\frac{1}{3}} = e^{-r} \cdot N_i(T) \cdot e^{-E_i\frac{2}{3}}$

根据以上分析，得出整理生存过程中满足

$$\begin{cases} n(T+1) = \alpha_3 \cdot N_3(T) \cdot e^{-(E_3+r)\frac{2}{3}} + \alpha_4 \cdot N_4(T) \cdot e^{-(E_4+r)\frac{2}{3}} \\ N_1(T+1) = \dfrac{1.22 \times 10^{11} \cdot n(T+1)}{1.22 \times 10^{11} + n(T+1)} \\ N_2(T+1) = e^{-r} \cdot N_1(T) \\ N_3(T+1) = e^{-r} \cdot N_2(T) \\ N_4(T+1) = N_3(T) \cdot e^{-(E_3\frac{2}{3}+r)} + N_4(T) \cdot e^{-(E_4\frac{2}{3}+r)} \\ E_3 = 0.42E_4 \end{cases} \tag{4}$$

其中 α_3, α_4, n 的定义见参数定义；

$N_i(T) \cdot e^{-(E_3+r)\frac{2}{3}}$ 为捕捞结束后在产卵点处的第 i 种鱼数目. (由公式 (3) 定义)

c. 模型的求解

1. 在可持续捕捞情况下

$N_i(T)$ 趋于平衡，因而 N_i 与 T 无关，可得以下方程组

$$
\begin{aligned}
&n = \alpha_3 \cdot N_3 e^{-(E_3+r)\frac{2}{3}} + \alpha_4 \cdot N_4 \cdot e^{-(E_4+r)\frac{2}{3}},\\
&N_1 = \frac{1.22 \times 10^{11} n}{1.22 \times 10^{11} + n},\\
&N_2 = e^{-r} \cdot N_1,\\
&N_3 = e^{-r} \cdot N_2,\\
&N_4 = N_3 \cdot e^{-(E_3\frac{2}{3}+r)} + N_4 \cdot e^{-(E_4\frac{2}{3}+r)},\\
&E_3 = 0.42 E_4,
\end{aligned}
$$

其中 N_i 为第 i 种鱼的平衡数量. 解得

$$
N_1 = \frac{1.22 \times 10^{11} \cdot n}{1.22 \times 10^{11} \times n}, \qquad N_2 = \frac{e^{-r} \times 1.22 \times 10^{11} \times n}{1.22 \times 10^{11} + n},
$$

$$
N_3 = \frac{e^{-2r} \times 1.22 \times 10^{11} \cdot n}{1.22 \times 10^{11} + n}, \qquad N_4 = \frac{1.22 \times 10^{11} \times n \times e^{-(\frac{2}{3}E_3+3r)}}{(1.22 \times 10^{11} + n)(1 - e^{-(\frac{2}{3}E_4+r)})},
$$

而 $n = \frac{\beta n}{1.22 \times 10^{11} + n}$ 其中 β 是为方便计算而设的变量.

$$
\beta = \alpha_3 \times 1.22 \times 10^{11} e^{-\left(\frac{2}{3}E_3 + \frac{3}{8}r\right)} + \alpha_4 \times \frac{1.22 \times 10^{11} \times e^{-\left(\frac{2}{3}E_3 + \frac{2}{3}E_4 + \frac{11}{3}r\right)}}{1 - e^{-\left(\frac{2}{3}E_4 + r\right)}}
$$

对以上方程组的结果作如下讨论：当 $\beta > 1.22 \times 10^{11}$ 时， $n = \beta - 1.22 \times 10^{11}$ 或 $n = 0$. 当 $\beta < 1.22 \times 10^{11}$ 时， $n = 0$.

事实上，当鱼群还未达到平衡状态时，由方程组 (4) 可得

$$
n(T+3) = \frac{\beta n(T)}{1.22 \times 10^{11} + n(T)}
$$

由于

$$
n(T+3) - n(T) = \frac{\beta n(T)}{1.22 \times 10^{11} + n(T)} - n(T) = n(T) \frac{\beta - 1.22 \times 10^{11} - n(T)}{1.22 \times 10^{11} + n(T)}
$$

所以当 $\beta > 1.22 \times 10^{11}, n(T) < \beta - 1.22 \times 10^{11}$ 时 n 关于 T 单调递增，当 $\beta > 1.22 \times 10^{11}, n(T) > \beta - 1.22 \times 10^{11}$ 时 n 关于 T 单调递减. 这表明无论 $n(T)$ 初值如何，最后必将趋于 $\beta - 1.22 \times 10^{11}$ 即达到 $\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}$ 平衡状态. (N_1, N_2, N_3, N_4 为 $n = \beta - 1.22 \times 10^{11}$ 时的值)

由此可知当 $\beta > 1.22 \times 10^{11}, n = 0$ 为非稳定解， $n = \beta - 1.22 \times 10^{11}$ 为稳定解.

当 $\beta < 1.22 \times 10^{11}$ 时，n 随 T 单调递减，这表明无论 $n(T)$ 初值如何，最终必趋于 $n = 0$, 即无鱼状态.

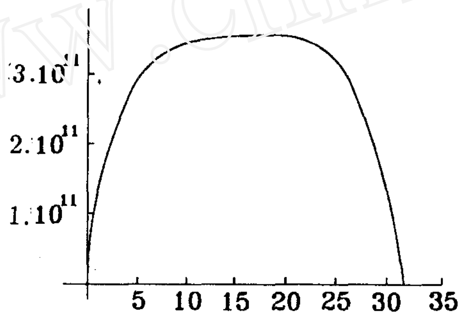
现在我们来求可持续捕捞时能获得最高年产收获量的 E_3, E_4 的值.

利用 (1) 式得年捕捞量

$$\mathrm{Weight}(E_4) = \max\left\{17.86 N_3 \frac{E_3}{E_3 + r}\left(1 - e^{-(E_3+r)\frac{2}{3}}\right) + 22.99 N_4 \frac{E_4}{E_4 + r}\left(1 - e^{-(E_4+r)\frac{2}{3}}\right), 0\right\}$$

(注：当 E_4 过大，$\beta < 1.22 \times 10^{11}$ 时，$n = 0$ 无鱼可捕，故 Weight 取 max 函数)

我们使用 Mathematica 对 Weight 求解，并画出它关于 E_4 的函数，如下图：



求出最大鱼量为 3.88707×10^{11} 克，对应得 $E_4 = 17.3629, E_3 = 7.292$, 此时鱼群分布结构为

$$N_1 = 1.19599 \times 10^{11}, \qquad N_2 = 5.37394 \times 10^{10},$$
$$N_3 = 2.41467 \times 10^{10}, \qquad N_4 = 8.39538 \times 10^{7},$$

同时，从上图可得 $E_4 = 31$ 处，Weight 退减成 0, 所以 $0 \le E_4 \le 31$ 为捕捞强度系数的限制范围.

2. 针对渔业公司的五年捕捞计划，我们利用已得到的迭代方程 (4) 在已知各个年龄组鱼的初始值 $\begin{pmatrix} N_{10} \\ N_{20} \\ N_{30} \\ N_{40} \end{pmatrix}$ 的前提下，可迭代地求出 $\begin{pmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \\ N_{3i} \\ N_{4i} \end{pmatrix}$ 即第 i 年的鱼量分布关于 E_4 的函数，其中 N_p 为 j 龄鱼第 i 年的条数.

根据 (1) 式可求出 5 龄的捕捞总数：

$$\mathrm{Weight}(E_4) = \left(\sum_{i=0}^{4} N_{3i}\right) \cdot 17.86 \frac{E_3}{E_3 + r}\left(1 - e^{-(E_3+r)\frac{2}{3}}\right) + \left(\sum_{i=0}^{4} N_{4i}\right) 22.99 \frac{E_4}{E_4 + r}\left(1 - e^{-(E_4+r)\frac{2}{3}}\right)$$

对此我们编制了程序 (程序略), 并作出 Weight 关于 E_4 的函数图象 (图略), 由图得最大捕鱼总量 $\mathrm{Weight}_{\max} = 1.6057 \times 10^{12}$ 克，对应 $E_3 = 7.3836, E_4 = 17.58$. 此时，每年的捕

鱼量分别为

$$W_1 = 2.34401 \times 10^{11}\text{克}, \quad W_2 = 2.14852 \times 10^{11}\text{克},$$
$$W_3 = 3.96176 \times 10^{11}\text{克}, \quad W_4 = 3.77825 \times 10^{11}\text{克},$$
$$W_5 = 3.82216 \times 10^{11}\text{克},$$

对于鱼群的生产能力破坏程度我们作如下分析：

在天然情况下鱼的生态系数总能趋于平衡，而对鱼的捕捞，使鱼的数量偏离了其平衡点．因而我们认为所谓的对鱼的生产能力的破坏实际就是指，5 年捕捞后鱼数量恢复所需的年数的分析．

首先我们求天然平衡点，在 $E_4 = 0$(即不捕捞情形下), 代入方程 (4) 得

$$N_1 = 1.21981 \times 10^{11}, \quad N_2 = 5.48098 \times 10^{11},$$
$$N_3 = 2.46276 \times 10^{11}, \quad N_4 = 2.00953 \times 10^{11},$$

此即为无捕捞下的平衡点．由方程组 (4), 知 $N_i(T)$ 呈指数分布, 故可认为当 $N_i(T) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}N_i$ 时鱼群已恢复生产能力．而鱼恢复的越快，即对鱼生产能破坏的越少，因此我们认为如在 5 年捕捞后的 4 年 (鱼的 1 个生长周期) 内恢复生产能力，那么捕捞就对生产能力没有太大的破坏．

为了验证我们所得到的使得 5 年捕捞量最大的 E_4 是符合不对鱼生产能力造成较大的破坏的要求，我们又编制程序 (程序略), 来观察当经过 5 年捕捞及停止捕捞后鱼的数量的恢复过程 (图略). 由图知停止捕捞两年鱼的生产能力就得到恢复，故我们可认为没有破坏鱼的生产能力，这是一个可接受的策略．

3. 对鱼的捕捞的进一步讨论

为了进一步研究，将 $r = 1, 2, \cdots, 10$ 的 r 年连续捕捞的收获总量关于捕捞强度系数的函数一起绘出 (图略). 此外，求出了连续捕捞 r 年的对应最佳捕捞强度系数 $r = 1, 2, \cdots, 10$.

$$\text{四年}: N_4 = 18.42, \quad \text{五年}: N_4 = 17.58,$$
$$\text{六年}: N_4 = 17.56, \quad \text{七年}: N_4 = 17.50,$$
$$\text{八年}: N_4 = 17.46, \quad \text{九年}: N_4 = 17.46,$$
$$\text{十年}: N_4 = 17.44,$$

从图象可知，在 1 、2 、3 年因产的卵不会在捕捞年限内生长为 3 、4 龄鱼．因此捕捞量随捕捞强度增大而增大，而 4—10 年均出现极值点．且随时间加长偏向于可持续捕捞情况下的最优捕捞强度系数，这是合乎情理的．事实上，由于 4—10 年最优捕捞强度系数与可连续捕捞的最优捕捞系数非常接近，我们可认为它们对生产能力的破坏均不大．而对于 1—3 年，我们必须对捕捞强度作出限制．一种折中的方法为引入两个加权系数 r_1, r_2. 通过对 $r_1\text{Weight} + \frac{r_2}{N}$ (N 为恢复年份) 求极值可得效益与保护生产能力的最佳结合点当 r_1 较大时侧重于捕捞量，当 r_2 较大时，侧重于生产能力的保护．此两系数可由渔业公司与环保部门共同制定，体现了灵活性．

五、模型结果及检验

a. 模型结果

在连续捕捞前提下，最高收获量为

$$\text{Weight}_{\max} = 3.88 \times 10^{11}\text{克}$$

相应的捕捞强度系数为

$$E_3 = 7.2924/\text{年}, \qquad E_4 = 17.3629/\text{年},$$

对于初始鱼群分布为

$$N_{1,0} = 122 \times 10^9, \qquad N_{2,0} = 29.7 \times 10^9,$$
$$N_{3,0} = 10.1 \times 10^9, \qquad N_{4,0} = 3.29 \times 10^9,$$

的情形. 连续 5 年捕获的最大产量为 $\text{Weight}_{\max} = 16.0547 \times 10^{11}$ 克，相应的捕捞墙壁系数为

$$E_3 = 7.3836/\text{年}, \qquad E_4 = 17.58/\text{年}.$$

捕捞策略为

$$\text{第1年} : 2.34401 \times 10^{11}\text{克}, \qquad \text{第2年} : 2.14852 \times 10^{11}\text{克},$$
$$\text{第3年} : 3.96176 \times 10^{11}\text{克}, \qquad \text{第4年} : 3.77825 \times 10^{11}\text{克},$$
$$\text{第5年} : 3.82216 \times 10^{11}\text{克},$$

捕捞后两年恢复生产能力.

如对经济效益及生产能力综合考虑，我们可引入加权系数 r_1, r_2. 并求 $r_1\text{Weight} + \frac{r_2}{N}$ (N 为恢复年数) 的最大值，可将开发和保护最佳结合，r_1, r_2 可由开发部门和保护部门协商决定.

b. 模型的检验

在模型求解过程中，我们曾讨论在 $0 \le E_4 \le 31$ 时，无论鱼群初始分布如何，最终必趋于非零稳定解，此解由 E_4 唯一决定. 在 $E_4 \ge 31$ 时，无论如何分布，最终必趋于零稳定解. 为此，我们验证这一点 1. $0 \le E_4 \le 31$, 取 $E_4 = 17.3629$

i. 初始分布 $N_{10} = 122 \times 10^9, N_{20} = 29.7 \times 10^9, N_{30} = 101 \times 10^9, N_{40} = 3.29 \times 10^9$ (图略).

ii. 初始分布 $N_{10} = 10 \times 10^9, N_{20} = 10 \times 10^9, N_{30} = 51 \times 10^9, N_{40} = 2.1 \times 10^9$, (图略). 此两种情形均匀收敛于同一分布，与初始分布无关.

2. $E_4 \ge 31$, 取 $E_4 = 40$

初始分布 $N_{10} = 122 \times 10^9, N_{20} = 29.7 \times 10^9, N_{30} = 10.1 \times 10^9, N_{40} = 329 \times 10^9$, (图略). 最终收敛于无鱼状态，从而与理论吻合.

六、模型的评价与应用

本模型以成熟的 Scheafer 模型为基础，结合离散模型和连续建模的方法，成功地解决了可持续捕捞问题最优解及已知初始分布的最优捕捞问题，得到了较为精确且合理的结果，并将捕捞期限推广至任意的求解.

本模型具有广泛的普遍性和适用性：只要改变其中的部分系数 (如自然死亡率，初始分布), 即可应用于其它种群的生存和开发问题. 以此模型为理论基础，可制定出开发可再生资源的最优策略，具有现实意义.

模型中提出对经济效益与保护资源的加权综合，对资源开发部门与保护部门的协调具有指导意义.

本模型还可作进一步改进，在实际生活中，经济效益还应与捕捞强度及鱼的价格有关：捕捞强度过大会导致成本过高，鱼的数目增多会导致鱼的价格下跌. 由于时间因素，我们未在本文中作详细讨论，有待于进一步的深入研究.