第 30 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 30 No. 1
2000 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan. 2000

ing method, graph theory method, sight method and operation-in-graph mehtod. For the given numerical examples, the obtained solution to problem (1) is 4 and the available old drillings are P_2, P_4, P_5, P_{10}; the solution to problem (2) is 6 and the available old drillings are P_1, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{11}. Finally, for problem (3), this paper gives a sufficient and necessary condition for n old drillings being available.

"钻井布局"问题评述

林诒勋

(郑州大学数学系, 郑州 450052)

摘要: 本文评述 1999 年全国大学生数学建模竞赛赛题"钻井布局", 就背景、模型、解法途径及进一步研究等方面作出总结.

1 问题来源

80 年代一位地质工程师在从事一项研究中与笔者讨论过此题的原型, 当时研究的情况比较复杂, 如网格的纵横间隔可以选择, 但不能太小, 转角也有限制, 尽可能利用全部旧井. 本题就是从中提取出来的一个形式比较简明的问题. 后来又经过组委会几位同志的精心设计, 才得到专科组的两小题和本科组的三小题(赛题参见前面的介绍).

数值例子的数据不是真实的. 由于此题原先是入选为D 题(专科组)的, 希望计算上容易些, 故意使某些点的坐标的小数部分比较密集. 这样就造成了一个缺陷: 数据对计算方案的不敏感性.

笔者在评阅工作过程中, 受到一些优秀答卷的启发, 并听取了评阅专家的讨论意见, 对这道赛题的认识有很大的提高. 现在谈一些看法, 供大家参考.

2 基本概念

解此题不需要专门的知识, 方法是初等的, 但一些基本概念要清楚. 一些好的答卷都是由于把握住这些概念; 而大部分答卷中的错误都是源于这些方面的疏忽.

(1) 取整运算

研究网格点与其它点的关系必然要用取整运算. 常用的有如下两种:

$[x]=$ 不大于 x 的最大整数(x 的整数部分),

$r(x)=[x+\frac{1}{2}]$(x 按四舍五入规则的取整).

前者相当于计算机中的函数 INT, 后者相当于函数 ROUND (对非负数而言). 此外, 有时还会用到上取整(ceiling) 和下取整(floor). 这里$[x]$相当于下取整. 我们可以分别表示按下取整及四舍五入取整的小数部分为

$$\{x\}=x-[x],\quad f(x)=|x-r(x)|.$$

用这些记号来表示一个点与格点的距离是方便的

(2) 距离概念

本题考虑两种距离 给定两点 $P(a, b)$ 及 $X(x, y)$, 第一种距离是所谓 l_∞ 模距离:

$$d(P, X) = \max\{|x - a|, |y - b|\},$$

在平面上通常称为纵横距离 第二种距离是欧氏距离, 即 l_2 模距离:

$$\rho(P, X) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

在平面上也称直线距离

大部分答卷都通过对坐标"去整运算"(去掉整数部分), 将 n 个点 P_i 变换到单位正方形

$$Q = [0, 1; 0, 1] = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

内 一个关键之处是上述变换使距离概念发生了变化 事实上, 由于函数 $\{x\}$ 的周期性, 正方形 Q 的左边界与右边界是粘合的, 上边界与下边界是粘合的 因此, 严格地说, Q 不再是一个平面区域, 而是一个环面(象汽车轮胎一样的曲面), 其中的距离发生了变化: 在 Q 中两点 $\overline{P_i}(\overline{a_i}, \overline{b_i})$ 及 $\overline{P_j}(\overline{a_j}, \overline{b_j})$ 的纵横距离变为

$$\begin{aligned} d'(\overline{P_i}, \overline{P_j}) &= \max\{\min\{|\overline{a_i} - \overline{a_j}|, 1 - |\overline{a_i} - \overline{a_j}|\}, \min\{|\overline{b_i} - \overline{b_j}|, 1 - |\overline{b_i} - \overline{b_j}|\}\} \\ &= \max\{f(|\overline{a_i} - \overline{a_j}|), f(|\overline{b_i} - \overline{b_j}|)\}, \end{aligned}$$

这里 $\overline{a_i} = \{a_i\}$, $\overline{b_i} = \{b_i\}$.

我们并不强求学生的答卷明确写出这种变换后的距离公式, 但要意识到这种距离的变化 好的答卷都对此做了处理 例如, 将正方形 Q 向外扩展一定程度, 将粘合的边界摊开, 然后运用原来平面上的距离 或者当要求 $d'(\overline{P_i}, \overline{P_j}) \le 2\epsilon$ 时, 等价地写出

$$\begin{cases} |\overline{a_i} - \overline{a_j}| \le 2\epsilon \text{ 或 } |\overline{a_i} - \overline{a_j}| \ge 1 - 2\epsilon, \\ |\overline{b_i} - \overline{b_j}| \le 2\epsilon \text{ 或 } |\overline{b_i} - \overline{b_j}| \ge 1 - 2\epsilon \end{cases}$$

而那些不考虑距离变化的答卷就必然导出错误的结论

(3) 关于"同时被利用"

对集合上的一种性质来说, 如集 A 具有这种性质能推出 A 的任意子集也具有, 数学上便称它为"独立性." 这种独立性十分普遍, 例如: (a) 一组向量线性无关, (b) 图 G 中一组边的导出子图不含圈, (c) 图 G 中一组边(顶点)构成匹配(独立集), (d) 一组随机事件相互独立 在我们的问题中, 一组旧井可以同时被利用, 则它的一部分亦然; 所以"同时被利用"也是一种独立性 在这种意义上, 我们的问题实质上是一类最大独立集问题 现在要问: 一个集合中任意两个元素组成的子集是独立的(两两独立)能否推出整个集合是独立的? 在上述例子 (a)～(d) 中, 除 (c) 之外, 回答都是否定的(例如, 三个向量中任意二者线性无关不能推出三者线性无关). 对目前的问题来说, 我们却有如下有趣的结论:

(i) 在坐标轴方向固定的情形, 对纵横距离而言, 一组旧井可以同时被利用当且仅当其中任意两口井可以同时被利用

(ii) 在坐标轴方向固定的情形, 对欧氏距离而言, 一组旧井可以同时被利用当且仅当其中任意三口井可以同时被利用

在坐标轴方向不固定的情形, 难以得到此类结论

根据结论(i), 不少同学利用两口井同时被利用的条件建立一个二元关系, 进而将问题转化为图论中的最大团问题, 这是对的, 而且对问题作了很好的刻划 但是, 对欧氏距离, 甚至坐标轴方向不固定的情形也这样做就错了. 在这一点上犯错误的答卷相当多. 根据结论

(ii), 用覆盖方法去解决问题就容易实现了(详见§5).

3　数学模型

关于数学模型的写法, 较多答卷采用语言描述方式, 实际上可以写得更确切些. 不妨设 $a_i, b_i \geq 0\ (i=1, 2, \cdots, n)$, 即所有井点 P_i 处在原坐标系 Oxy 的第一象限. 在网格 N 上, 取第一象限中离原点 O 最近的结点为 (s, t), 其中 $0 \leq s < 1,\ 0 \leq t < 1$. 这个结点看作是网格 N 上一个参照点或新坐标系的原点, 它可以在上述单位正方形 Q 内移动. 于是 N 的任一结点可表为 $(s+p, t+q)$, 其中 $p, q \in Z$ (这里 Z 表示整数集). 对问题 1) 而言, 当且仅当 ϵ—邻域

$$U_\epsilon(P_i) = \{(x, y) \mid a_i - \epsilon \leq x \leq a_i + \epsilon, b_i - \epsilon \leq y \leq b_i + \epsilon\}$$

中存在结点, 即不等式组

$$\begin{cases} a_i - \epsilon \leq s + x_i \leq a_i + \epsilon \\ b_i - \epsilon \leq t + y_i \leq b_i + \epsilon \\ 0 \leq s,\ t < 1 \\ x_i,\ y_i \in Z \end{cases} \tag{3.1}$$

有解时, P_i 是可利用的. 对给定的 (s, t), (3.1) 有解的充要条件是

$$\begin{cases} a_i - \epsilon - s \leq [a_i + \epsilon - s] \\ b_i - \epsilon - t \leq [b_i + \epsilon - t]. \end{cases} \tag{3.2}$$

当 P_i 可利用时记 $u_i = 1$, 否则 $u_i = 0$. 这样一来, 问题 1) 归结为如下的最优化问题:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} u_i \\ \text{s.t.}\quad (a_i - \epsilon - s - [a_i + \epsilon - s]) u_i \leq 0, i = 1, \cdots, n \\ \qquad (b_i - \epsilon - t - [b_i + \epsilon - t]) u_i \leq 0, i = 1, \cdots, n \\ \qquad 0 \leq s, t < 1 \\ \qquad u_i \in \{0, 1\}, i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

这是一个非线性的混合整数规划.

问题 2) 也可以写成数学规划的形式, 但较复杂, 我们换一种写法. 为简单起见, 假定坐标系经旋转 $\varphi \left(0 \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 之后, 点 P_i 的坐标仍记为 (a_i, b_i). 所以现在的 a_i 及 b_i 是 φ 的函数 (坐标变换式从略). 在网格 N 上, 处于第一象限内而离原点最近的结点仍记为 (s, t). 欧氏距离的 ϵ- 邻域为

$$S_\epsilon(P_i) = \{(x, y) \mid (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq \epsilon^2\}.$$

显然 $S_\epsilon(P_i) \subset U_\epsilon(P_i)$. 当 (3.2) 成立时, 含于 $U_\epsilon(P_i)$ 中唯一的结点是

$$(s + [a_i + \epsilon - s],\ t + [b_i + \epsilon - t]).$$

因此, P_i 是可利用的当且仅当

$$\begin{cases} a_i - \epsilon - s \leq [a_i + \epsilon - s] \\ b_i - \epsilon - t \leq [b_i + \epsilon - t] \\ (s + [a_i + \epsilon - s])^2 + (t + [b_i + \epsilon - t])^2 \leq \epsilon^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

这样一来, 问题 2) 是如下的最优化问题:

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i(s, t)$$

其中

$$u_i(s, t) = \begin{cases} 1, & \text{当}(3.3)\text{成立} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$0 \leq s, t < 1.$$

虽然问题1), 2)的数学模型写起来有点麻烦, 但设计参数至多只有三个(s, t, φ), 所以在实际应用时是容易运用数值方法求解的. 绝大部分答卷都能设计出遍历搜索算法, 并算出数值例子的正确解答. 不少答卷还给出加速搜索的算法及误差分析等.

关于问题3), 答卷中的做法各式各样, 但归纳起来是如下两种途径. 但不管哪种途径, 问题3)是一个尚待深入研究的问题. 事实上, 问题3)要求给出n口旧井均可利用的判定条件, 一个不言而喻的要求是: 这判定条件只能运用已知的n个点的坐标, 并且检查这条件成立与否是可以用有效算法来实现的. 我们只是在一些特殊情形达到了这一要求.

4 代数途径

首先考虑纵横距离, 并假定坐标轴方向(转角φ)已给定, P_i的坐标为(a_i, b_i). 所谓代数途径, 就是研究不等式组的整数解存在性问题. 根据前一节的数学模型, n口井同时被利用的充要条件是对$i = 1, 2, \cdots, n$的不等式组(3.1)有解, 即如下两个不等式组有解:

$$\begin{cases} a_i - \epsilon \leq s + x_i \leq a_i + \epsilon (i = 1, \cdots, n) \\ x_i \in Z\ (i = 1, \cdots, n), \quad 0 \leq s < 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} b_i - \epsilon \leq t + y_i \leq b_i + \epsilon (i = 1, \cdots, n) \\ y_i \in Z\ (i = 1, \cdots, n), \quad 0 \leq t < 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

它们的形式是一样的, 只要研究其中一组, 比如(4.1). 由于

$$a_i - \epsilon - 1 < a_i - \epsilon - s \leq x_i \leq a_i + \epsilon - s \leq a_i + \epsilon,$$

所以

$$[a_i - \epsilon] \leq x_i \leq [a_i + \epsilon].$$

注意: 左边的不等式是由$a_i - \epsilon - 1 < x_i$及x_i为整数得到. 记$\alpha_i = [a_i - \epsilon]$, $\beta_i = [a_i + \epsilon]$. 根据题目的实际意义, 可以约定$\epsilon < \frac{1}{4}$. 由此可知$0 \leq \beta_i - \alpha_i \leq 1$. 所以(4.1)的整变量$x_i$只有两个可能值$\alpha_i$及$\beta_i$.

命题 当且仅当如下二条件之一成立时, 不等式组(4.1)有解:

(i) $\max\limits_{1 \leq i \leq n}(a_i - \epsilon - \alpha_i) \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n}(a_i + \epsilon - \alpha_i)$,

(ii) $\max\limits_{1 \leq i \leq n}(a_i - \epsilon - \beta_i) \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n}(a_i + \epsilon - \beta_i)$.

证明 当(i)成立时, 取s满足$\max(a_i - \epsilon - \alpha_i) \leq s \leq \min(a_i + \epsilon - \alpha_i)$, $x_i = \alpha_i (i = 1, \cdots, n)$; 当(ii)成立时, 取$s$满足$\max(a_i - \epsilon - \beta_i) \leq s \leq \min(a_i + \epsilon - \beta_i)$, $x_i = \beta_i (i = 1, \cdots, n)$, 便得到(4.1)的解.

反之, 设(4.1)有解$x_1, \cdots, x_n$及s. 若$s \geq \frac{1}{2}$, 则可断言$x_i = \alpha_i (i = 1, \cdots, n)$. 若不然, 则$x_i = \beta_i = \alpha_i + 1$, 从而

$$\frac{1}{2}+a_i-\epsilon<\frac{1}{2}+[a_i-\epsilon]+1\leq s+x_i\leq a_i+\epsilon,$$

于是 $\epsilon>\frac{1}{4}$, 与假设矛盾. 这样一来,

$$a_i-\epsilon-\alpha_i\leq s\leq a_i+\epsilon-\alpha_i\quad(i=1,\cdots,n)$$

故条件(i)成立. 同理, 若 $s\leq\frac{1}{2}$, 则可断言 $x_i=\beta_i$, 从而(ii)成立. 证毕.

结合此命题关于(4.1)及(4.2)的结论, 即得

定理 1 设坐标轴方向给定, 对纵横距离而言, n 口旧井可同时被利用的充分必要条件为

$$\max_{1\leq i\leq n}(a_i-\epsilon-[a_i-\epsilon])\leq\min_{1\leq i\leq n}(a_i+\epsilon-[a_i-\epsilon]) \text{ 或 }$$
$$\max_{1\leq i\leq n}(a_i-\epsilon-[a_i+\epsilon])\leq\min_{1\leq i\leq n}(a_i+\epsilon-[a_i+\epsilon]),$$
$$\max_{1\leq i\leq n}(b_i-\epsilon-[b_i-\epsilon])\leq\min_{1\leq i\leq n}(b_i+\epsilon-[b_i-\epsilon]) \text{ 或 }$$
$$\max_{1\leq i\leq n}(b_i-\epsilon-[b_i+\epsilon])\leq\min_{1\leq i\leq n}(b_i+\epsilon-[b_i+\epsilon]).$$

注意: 验证此判定条件的计算复杂性为 $O(n)$. 这是因为计算每一个 max 或 min 的比较次数都是 $n-1$.

这种途径, 对欧氏距离及旋转角度 φ 变动的情形, 未能得到简洁的判定条件.

5 几何途径

首先假定坐标轴方向是固定的, 并考虑纵横距离. 如前所述, 大部分答卷都运用几何直观, 将点 $P_i(a_i,b_i)$ 变换为 $\overline{P_i}(\overline{a_i},\overline{b_i})$, 其中 $\overline{a_i}=\{a_i\}=a_i-[a_i]$, $\overline{b_i}=\{b_i\}=b_i-[b_i]$, $i=1,\cdots,n$. 这就使 $\overline{P_1},\overline{P_2},\cdots,\overline{P_n}$ 落入单位正方形 $Q=[0,1;0,1]$ 之中. 同时, 一个由参照点 (s,t) 确定的网格的所有结点都变换到 Q 中同一个点 (s,t). 对这样的变换来说, 点 P_i 与其最接近的结点的距离等于 $\overline{P_i}$ 与 (s,t) 的距离. 因此, $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 可同时被利用当且仅当 $\overline{P_1},\overline{P_2},\cdots,\overline{P_n}$ 同时被利用.

定理 2 设坐标轴方向给定. 对纵横距离而言, n 口旧井可同时被利用的充分必要条件为: 对任意 $i,j\ (1\leq i,j\leq n)$ 均有

$$\begin{cases}\left|\overline{a_i}-\overline{a_j}\right|\leq2\epsilon \text{ 或 } \left|\overline{a_i}-\overline{a_j}\right|\geq1-2\epsilon\\ \left|\overline{b_i}-\overline{b_j}\right|\leq2\epsilon \text{ 或 } \left|\overline{b_i}-\overline{b_j}\right|\geq1-2\epsilon\end{cases}$$

证明 根据§2 关于 Q 中的距离概念, 此条件等价于 $d'(\overline{P_i},\overline{P_j})\leq2\epsilon$. 若 n 口井同时被利用, 则存在参照点 $X(s,t)\in Q$ 使 $d'(\overline{P_i},X)\leq\epsilon(i=1,\cdots,n)$. 故对任意 i 和 j, $d'(\overline{P_i},\overline{P_j})\leq d'(\overline{P_i},X)+d'(\overline{P_j},X)\leq2\epsilon$. 反之, 若对任意 i 和 j, $d'(\overline{P_i},\overline{P_j})\leq2\epsilon$, 则可取距离最大的两点 $\overline{P_{i_0}},\overline{P_{j_0}}$, 作包含它们且各边平行于坐标轴的最小正方形 K. 易证: K 覆盖所有点 $\overline{P_i}(i=1,\cdots,n)$ 且 K 的边长 $\leq2\epsilon$. 取 K 的中心为参照点 X, 则 $d'(\overline{P_i},X)\leq\epsilon(i=1,\cdots,n)$, 从而 n 口井同时被利用. 证毕.

容易看出, 定理 2 的条件与定理 1 的条件是等价的. 但是, 验证定理 2 判定条件的计算复杂性是 $O(n^2)$, 因为其中有 $n(n-1)$ 个不等式. 定理 2 有多种等价的写法. 例如, 运用诸点原来的坐标表示:

$$\max\{f(|a_i - a_j|), f(|b_i - b_j|)\} \leq 2\epsilon,$$

其中 $f(x) = |x - r(x)|$, $r(x) = [x + \frac{1}{2}]$(见§2 的取整运算).

其次, 讨论欧氏距离, 并假定坐标轴方向(转角 φ)已给定. 如前, 通过去整运算, 将诸点变换到正方形 Q 内. 注意到环面 Q 的周期性, Q 中两点的直线距离也发生了变化(特别对那些接近 Q 的边界的点). 为避免这种周期性的影响, 许多答卷都将 Q 的边界向外扩展, 并将接近边界的点变为两个或三个点(新点称为镜像点). 这样, 两点间的距离就变成一点及其镜像点与另一点及其镜象点之间的最短距离. 下面的"切补法"也是可行的. 首先将 $Q = [0, 1; 0, 1]$ 分成三部分:

$$A = [0, \frac{1}{4}; 0, 1], \quad B = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 0, 1], \quad C = [\frac{3}{4}, 1; 0, 1].$$

若 A, C 内均有井点, 则 B 内不可能有井点(否则 B 内井点到 $A \cup C$ 内井点的最大距离 $> \frac{1}{2} > 2\epsilon$, 它们不可能同时被利用, 这种情形可以排除). 于是可以把区域 A 切补到 $[1, 1+\frac{1}{4}; 0, 1]$ 的位置, 得到正方形 Q'. 同理可对 Q' 作纵向的处理, 得到正方形 Q''. 这样就可以在 Q'' 内直接运用欧氏距离了.

我们仍不妨假定 n 个井点分布于单位正方形 Q 中. 从几何上说, n 个井点同时被利用就是存在一个半径为 ϵ 的圆域覆盖住这 n 个点, 其圆心就是网格 N 的参照点 (s, t). 下面是一个判定条件.

定理 3 平面上 n 个点可以被一个半径为 ϵ 的圆域所覆盖, 当且仅当如下二条件成立:

(i) 任意两点距离 $\leq 2\epsilon$;

(ii) 任意形成锐角三角形的三点的外接圆半径 $\leq \epsilon$.

证明 必要性显然. 充分性实质上是证明这样一个对偶命题: 包含 n 个点的圆域半径的最小值等于任意"三点确定的圆域"的半径的最大值. 这里, 所谓三点确定的圆域是指包含它们的最小圆域, 即当三点构成锐角三角形时, 它就是外接圆, 否则就是以斜边为直径的圆. 我们把其中以两点联线为直径的圆称为第一类圆(满足条件(i)), 锐角三角形的外接圆称为第二类圆(满足条件(ii)). 根据条件(i)和(ii), 这些圆的半径的最大值 $r \leq \epsilon$. 现在作覆盖 n 个给定点的最小圆域, 设其圆周为 C, 半径为 r^*. 由覆盖性知 $r^* \geq r$. 由最小性知, C 上至少有两个给定点. 若恰有两个, 则 C 为第一类圆, 从而 $r^* \leq r$. 下设 C 上的给定点为 $P_1, P_2, \cdots, P_t (t \geq 3)$. 在 C 上取出包含这 t 个点的最小圆弧 A. 分如下三种情形:

(a) 若 A 小于半圆, 则可以过 A 的两端点作出半径小于 r^* 的圆域包含 n 个给定点, 与 C 的最小性矛盾.

(b) 若 A 恰为半圆, 则 C 是以 A 的两个端点联线为直径的圆, 即第一类圆, 故 $r^* \leq r$.

(c) 若 A 大于半圆, 则在 $P_1, P_2, \cdots, P_t$ 中可找到三点构成锐角三角形, 从而 C 是第二类圆, 故 $r^* \leq r$.

综上得到 $r^* = r \leq \epsilon$. 证毕.

推论 设坐标轴方向给定. 对欧氏距离而言, n 个井点可同时被利用的充要条件是任意三点可同时被利用.

至于如何检验定理 3 的条件, 可以先作出包含这 n 个点的最小凸多边形(凸包), 然后在

它的顶点中找距离最大的两点和“最分散”的三点 如用穷举法,至多求 $O(n^3)$ 个外接圆半径

以上是关于坐标轴方向给定的一些结果 对于坐标轴方向不给定,即转角 φ 未知的情形,不少答卷作了不同程度的探索 其中分析得最为深入的结果可参见本期上发表的优秀论文

6　进一步研究的问题

通过这一道题目的竞赛,开阔了思路,引出了许多值得研究的问题

(1) 对问题 3),目前只就坐标轴方向已给定的情形得到较简明且易于实现的判定条件 坐标轴方向不定(转角 φ 未知)的情形较难,涉及较多关于整点分布的性质,值得深入研究

(2) 关于问题 1) 中数值解法的搜索步长选择,不少答卷进行了讨论 由于例子中所有数据只有两位小数,以 0.01 为步长一定可以搜索到最优解,不会漏掉 但对问题 2),要对角度 φ 进行搜索 $(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$,步长和搜索点都是有理数(以 $\frac{\pi}{2}$ 为一单位来看). 如果最优的 φ 为无理数,会不会搜索不到最优解呢?

(3) 有些答卷将问题 1) 转化为一个组合问题——求一种特殊图的最大团 虽然求一般图的最大团是 NP—完全问题,但对此题构造的特殊图,求最大团未必是难题 如果能得出好的纯组合算法是很有意义的

(4) 在几何方法中,根据定理 3 的条件找覆盖 n 个点的最小圆域,能否找到更有效的算法?

(5) 可以考虑更多的距离概念,如常用的 l_1 模距离(rectilinear 距离).

(6) 在实际问题中,网格 N 的格子可以不是单位正方形,而是边长有一定限制的矩形 应如何推广我们的模型

钻井布局问题是一类较复杂的选址(Location) 问题,不仅要选择网格参照点的位置 (s, t),而且要选择倾斜角 φ 对它的深入研究必将对选址理论的发展产生影响

Commentary on the Layout Problem of Exploratory Wells

LIN Yi-xun

(Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052)

Abstract: This paper presents a review on problem B of the CUMCM '99: the layout problem of exploratory wells, in which the background, models, different approaches and further studies are summarized.