

灾情巡视路线寻优模型

罗卢杨 龙继东 唐小军

指导教师: 徐全智

(成都电子科技大学, 成都 610054)

编者按 本文对模型的叙述清晰、简明、有特色, 提出了一系列策略对巡视路线进行有效的调整.

摘要 本文讨论了灾情巡视路线的优化问题, 并总结出一些在这类图中求最优回路的有效法则. 文中首先将乡村公路示意图转化为赋权连通图, 并通过最小生成树分解法将原权图分为若干子图, 分析并给出在这些子图中寻找最佳回路的若干原则: 扩环策略、增环策略、换环策略. 依据这些原则, 求得不同条件下的巡视路线.

当巡视人员分为组时, 在要求总路程最短且尽可能均衡的条件下各组巡视路程分别为: 206.8km, 219.5km 159.3km. 当要求在24小时内完成巡视, 至少需分4组, 巡视完成时间为: 22.3小时. 当巡视人员足够多时, 完成巡视的最短时间为6.43小时, 巡视人员需分成22组.

一、问题重述 (略)

二、问题分析

如果巡视人员只分一组, 巡视路线是指巡视人员从县政府 O 出发, 沿乡村公路遍历各乡镇、村, 最后回到县政府. 把该问题抽象为图论的赋权连通图问题, 即有一赋权无向连通图 $G(V, E)$, $O \in V$, 两村之间公路的长度, 即为该无向图的边权 $\omega(e)$, 寻找一条最佳的路线, 即在图 $G(V, E)$ 中, 找到一条包含 O 的回路, 它至少经过所有的顶点 E 一次, 使总路程 (总时间) 最小. 这是一个一般推销员问题 (general salesman problem)^[1].

如果巡视人员分成若干组, 每组考察一部分区域, 且所有乡村都考察到. 如果能把这些乡村分块, 即图 $G(V, E)$ 中把图分为若干个连通的子图 G_i , 每个子图 G_i 中寻找一条包含 O 的回路 L_i , 则对每个子图 G_i 而言, 化为一般推销员问题.

完成巡视的时间应是各组巡视时间中最长的时间. 故为使巡视效率高, 应尽量使各组巡视时间接近, 反映在图 G 分块时应尽量均衡.

三、变量及符号说明

$G(V, E)$: 赋权连通图; G_i : $G(V, E)$ 的第 i 个子图; L_i : 子图 G_i 中的最佳回路;

$\omega(e)$: 边 e 的边权; $\omega(v)$: 点 v 的点权; l_i : L_i 的各边权之和;

c_i : L_i 的各点权之和; T : 巡视中在每个乡镇停留时间;

t : 巡视中在每个村的停留时间; \bar{V} : 汽车行驶速度.

为叙述方便起见, 我们在文中不加说明的使用上述变量或符号的变形形式, 它们的含义可通过上下文确定.

四、条件假设 (略)

五、模型的建立

把乡村公路示意图抽象为一赋权连通图 $G(V, E)$, 在权图 G 中, $v_i \in V(G)$ 对应示意图中的乡、村所在地, v_0 表示县政府所在地, $e_j \in E(G)$ 对应示意图中的公路. 边权 $\omega(e_j)$ 对应示意图中的公路长度, 点权 $\omega(v_i) = \begin{cases} T \times \bar{V}, & v_i \text{ 代表乡镇,} \\ t \times \bar{V}, & v_i \text{ 代表村} \end{cases}$, 其中 \bar{V} 表示车速.

建立的数学模型如下:

$$\forall e \in E(G), \exists \omega(e) \in N, \exists v \in V(G), \exists \omega(v) \in \{\bar{V} \times T, \bar{V} \times t\}, v_0 \in V(G),$$

求 G 中回路 $L_1, L_2, \dots, L_k (k > 1)$, 使得满足:

$$(1) v_0 \in V(L_i), i = 1, 2, \dots, k; \quad (2) \bigcup_{i=1}^k V(L_i) = V(G);$$

$$(3) \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e) = \min \quad (\text{目标为总距离最短}); \text{ 或 } \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e) + \sum_{v \in V(L_i)} \omega(v) \right\} = \min \quad (\text{目标为巡视时间最短});$$

六、模型的求解

问题 1 现要分三组巡视, 则需把图 G 分成三个子图 $G_i (i = 1, 2, 3)$, 在每个子图 G_i 中寻找最佳回路 $L_i (i = 1, 2, 3)$.

因为最小生成树能包含图 G 中所有顶点 E , 而且最小树的边权是相邻两顶点之间的距离, 它描述了顶点之间的相近程度, 故可考虑利用最小生成树初步分块.

根据最小生成树求解的 Kruskal 算法^[1], 我们找到图的最小生成树如图 1.

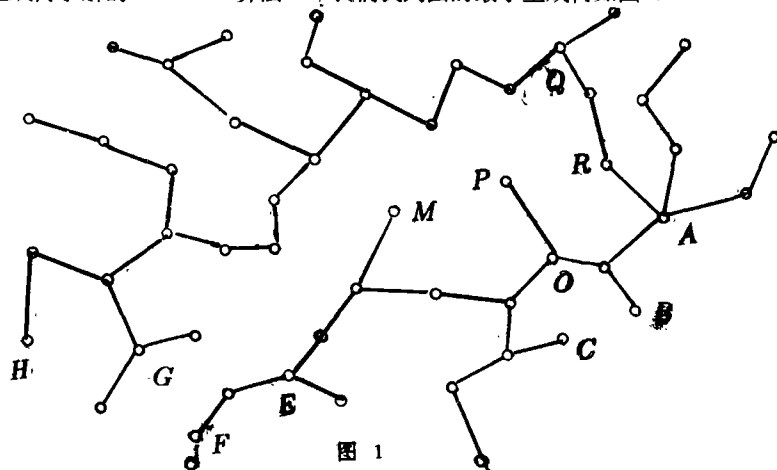


图 1

现要对已得到的最小生成树 T 分解, 以获得三个子图 G_i , 使得分解结果尽量均衡. 由于在最小生成树上, 边权接近, 可略认为均衡即各子图包含的顶点数接近, 故各子图包含的顶点尽量接近 $[(35 + 17)/3] = 17$ 个. 故有以下分解原则:

最小生成树分解原则:

(i) 分解点为 O 点或尽可能接近 O 点; (ii) 分解所得的三个子图 G_i 所包含的顶点数尽可能接近 17 个; (iii) 尽量使分解所得的子图 G_i 为连通图; (iv) 尽量使子图 G_i 与点 O 的最短路上的点在该子图内, 尽量使各子图的点在该子图内部形成环路.

根据以上分解原则, 我们得到分解结果如图 2 所示.

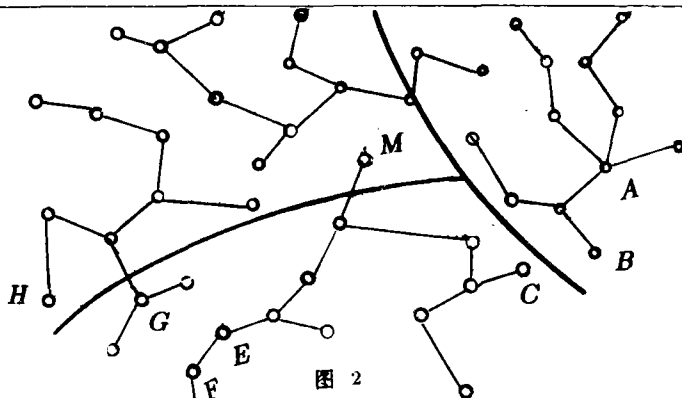


图 2

从而根据最小生成树的分解方法把图 $G(V, E)$ 划分为三个子图 $G_i, i=1, 2, 3$, 分别在 G_i 中寻找最佳巡视路线. 现给出几个在寻找最优回路的有效优化规则:

1 扩环策略:



图 3.1

如果在图 G 中的路径 C_i 中, 有孤立的枝存在, 如图 3.1 所示代表 1, 2, 3 三个顶点, 若 $\omega_{1,2} + \omega_{1,3} > \omega_{2,3}$, 则应考虑扩环. 扩环策略还可扩展到多个顶点的情况:

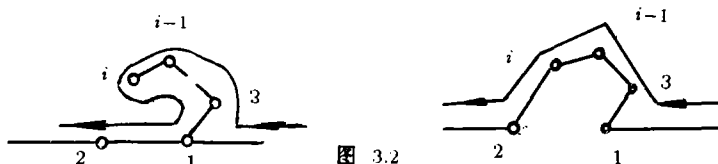


图 3.2

如图 3.2 所示: 扩环后相比扩环前其权和变化为:

$$\Delta = - \left\{ \omega_{1,2} + 2[\omega_{1,3} + \sum_{k=4}^i \omega_{k-1,k}] \right\} + \left\{ \omega_{1,3} + \sum_{k=4}^i \omega_{k-1,k} + \omega_{1,2} \right\}$$

若 $\Delta < 0$, 则应扩环. 当 $\omega_{1,2} < \omega_{1,3} + \dots + \omega_{i,2}$ 时, 扩环后总路程更少, 可进行扩环调整.

2 增环策略:

若环路上某顶点处长出两条枝, 且存在可使两枝成环的边, 可考虑增环. 增环前后其权和变化为:

$$\Delta = \omega_{i,i+1} - \left(\sum_{k=2}^i \omega_{k-1,k} + \omega_{j,2} \right)$$

若 $\Delta < 0$, 则应增环. 当 $\omega_{i,i+1} < \omega_{2,3} + \dots + \omega_{j,2}$ 时, 增环后总路程更少, 可进行增环调整.

我们对图 4 进行分析, 发现扩环策略与增环策略条件完全满足, 故这两种策略完全适用.

3 换枝策略:

若环路上某顶点长出一条枝, 而该枝末梢同环路中另一顶点距离接近, 可考虑换枝. 如图 5 所示, 若

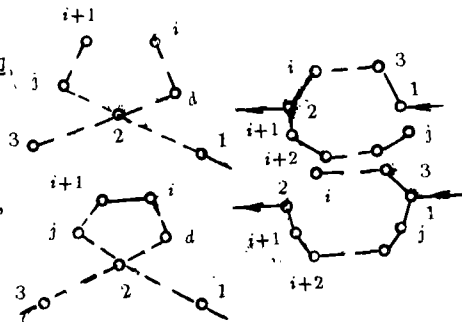


图 4

图 5

$\omega_{1,3} + \dots + \omega_{i,2} + 2(\omega_{2,i+1} + \dots + \omega_{j-1,j}) > \omega_{1,j} + \dots + \omega_{i+1,2} + 2(\omega_{1,3} + \dots + \omega_{i-1,i})$
 则应考虑换枝. 换枝的结果是使被重复的路减少.

根据以上的优化策略及分块结果, 在 $G_i, i = 1, 2, 3$, 中分别寻找一条从 O 出发, 遍历 V 并回到 O 的最短路线.

在图 $G(V, E)$ 中, 求三条从 O 出发并回到 O 的路 L_1, L_2, L_3 , 满足 $V = \bigcup_{i=1}^3 V_i, V_i (i = 1, 2, 3)$ 为 L_i 中经过点的集合, 使得 $\sum L_i$ 最小, 且 L_i 与 L_j 相差不多.

为求出 L_1, L_2, L_3 , 我们以下列步骤进行:

1. 作出 G 与 O 之间的最短路;

2. 以 O 与 G 连通的路径及原图 G 的最优树在 G_i 中保留的边为基础, 进行增环扩环调整, 使最后尽可能形成一个环路.

12, G_1 归入 G_3 , 因为它们可与 $F, 9, E$ 形成环路; M 归入 G_2 是因为 M 在 G_2 与 O 的最短路上. 现对 G_2 进行调整: 首先, 根据增环法添上 $e_{2,16}$, 根据对换法, 添上边 $e_{14,15}$, 去掉 $e_{J,18}$; 根据扩环法, 添加边 $e_{22,K}$, 去边 $e_{17,K}$, 再进行扩环, 加边 $e_{21,23}$, 去边 $e_{21,25}$; 加边 $e_{23,N}$, 去边 $e_{24,N}$, 得到图 6.1. 同样, 根据这些法则对 G_1, G_3 调整, 分别可得到图 6.2 和图 6.3.

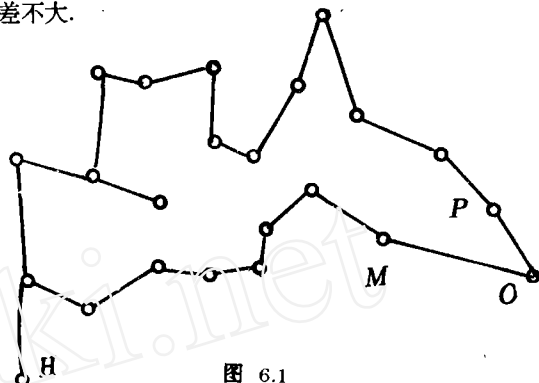


图 6.1

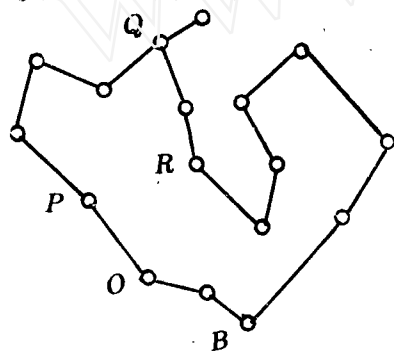


图 6.2

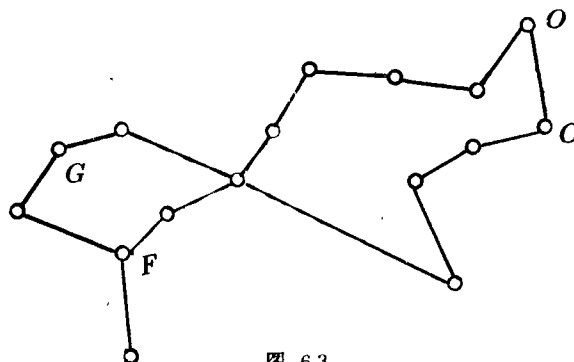


图 6.3

再由图计算得 $l_1 = 159.3, l_2 = 206.8, l_3 = 219.5(KM)$, 总路程长 585.6km. 如图所示.

问题 2 (限时巡视的最佳路线)

若分成 n 组巡视人员, 其各自所走的路径 L_i , 回路 L_i 中边权 $\omega(e_i)$, 点权 $\omega(v_i)$, 则有 $l_i = \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e_i)$, 点权和 $c_i = \sum_{v \in E(L_i)} \omega(v_i) = (2a_i + b_i) \times 35$, 其中 a_i 为乡相对应的点的数目, b_i 为与村相对应的数日, 巡视至少应分的组数 $n: n = \min \{n \mid \frac{l_i}{35} + 2a_i + b_i < 24\}, (i = 1, \dots, n)$.

可以证明 $n > 3$ (略).

考虑 $n = 4$, 同分三组的情况类似, 用最优树分解方法把图 G 分成子图 $G_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 子图中点权之和 $2a_i + b_i$ 尽量相同, 总的点权之和为 $17 \times 2 + 35 = 69$, 故平均每个子图中点权之和为 $[69/4] = 17$, 故参照分三组时的最小树分解原则, 分成 4 组时最小树分解原则为:

- 1) 使各子图中点权和尽量接近 17;
- 2) 分解后的各子图尽量为连通图;

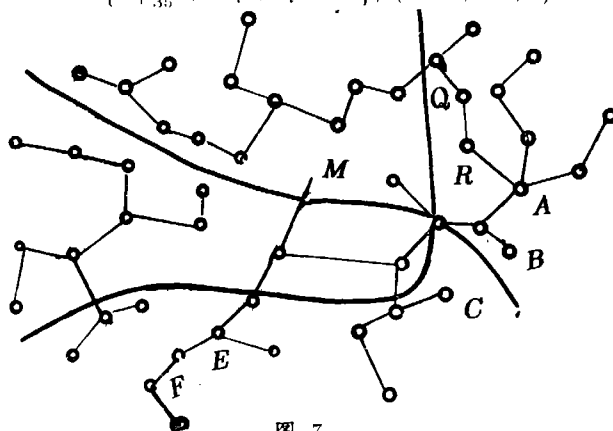
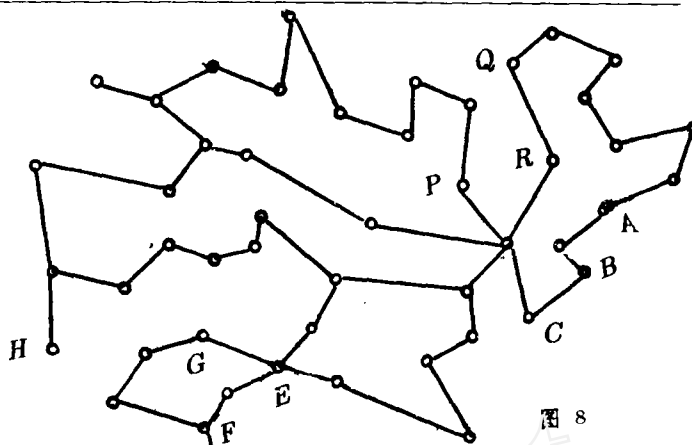


图 7

- 3) 分解点为 O 或尽量接近 O ;
 4) 生成的子图容易形成圈或接近圈. 为使尽量均衡, 大致划分如图所示:

通过增环、扩环、换枝等策略, 对各子图内部调整而寻找最佳巡视回路, 其结果如图 8 所示:

经计算得到如下结果:



组数	路程 (km)	巡视时间 (h)	巡视路线
1	140.1	22.0	$O, C, B, I, A, 34, 35, 32, 31, 32, 30, 29, R, O$
2	154.3	21.4	$O, P, 28, 27, 26, N, 23, 22, 17, 16, K, 21, 25, M, O$
3	185	22.3	$O, M, 25, 21, K, 18, I, 15, 14, H, 14, 13, J, 19, 20, L, 6, 5, 2, O$
4	152	21.1	$O, 2, 5, 6, 7, E, 11, G, 12, F, 10, 9, E, 8, 4, D, 3, C, O$

完成巡视的最小时间为 $t_{\min} = 22.3$ 小时. 其中路线重合部分的点, 播 $K, 21, 25, M$ 为二组巡视. $6, 5, 1$ 由三组巡视.

问题 3 巡视人员足够多, 到并设汽车也足够多, 甚至每个村、镇都可分配一组巡视员, 这些组的完成时间中最长的即为完成巡视的时间下限 t_{\min} , 从最短生成树上可以看出, H 离 O 距离 $l_{O,H}$ 最长, 且 H 的权最大 $= 2$, 故巡视 H 的那组所花的时间为完成整个巡视的时间下限, $t_{\min} = \frac{2l_{O,H}}{\sqrt{V}} + \omega_H = 6.43$. 因此, 需解决的问题是

$$\begin{aligned} \min n \\ \text{s.t. } \frac{2l_i}{35} + 2a_i + b_i \leq t_{\min} \end{aligned}$$

我们给出一种算法, 按此算法可比较好地解决这个问题. 算法如下:

- 1) 令 $i = 0$.
- 2) 选最短路树形图中未被标号的点中离点 O 最近的点, 设为 M , M 与 O 的距离为 l_m , 设第 i 个巡视点集 $V_i = \{M\}$, 计算 V 最多还可增加的点的权之和 $l_m = t_{\min} - \frac{2l_m}{\sqrt{V}} - \omega_m$.
- 3) 尽可能使并入 V_i 的点的权之和为 $[l'_m]$, 同时满足存在从 O 出发, 经历 V_i 中所有点并回到 O 点的路 L_i , 使 $\frac{l_i}{\sqrt{V}} + Ta_i + tb_i \leq lb_i \leq t_{\min}$, l_i 为 L_i 的长度, a_i, b_i 分别为中权为 T, t 的点的个数. 若同时存在几种并入方式, 选取并入的点到 O 距离之和最大的那一种.
- 4) 在图中把中含有的点标上号, 若还有点未标号, 令 $i = i + 1$ 转 (2), 否则, 停止. 通过这种算法, 得到应分为 22 组, 结果见表.

问题 4 设某种情况下, 即 \sqrt{V}, T, t 取某一组值时, 在满足 $\max t_i$ 取最小值的条件下的点集为 V_i , 对应路为 L_i , 其长度为 $l_i, i = 1, 2, \dots, n$. 令 $l_i = \frac{l_i}{\sqrt{V}} + Ta_i + tb_i$, 此时应满足 l_i, l_j 相差不大, 否则, 可将 l_i 中最大的点集去掉一个点, 并将其加到 l_j 中最小的点集中去.

当 \sqrt{V} 改变 $\Delta\sqrt{V}$ 时, l_i 的改变量为 $\Delta l_i = \frac{(\sqrt{V} - \sqrt{V'})}{\sqrt{V}}$.

分组	巡视路线	花费时间 (h)	路程 (km)
{H}	O, 2, 3, 8, 7, E, 11, Q, 12, H, 12, Q, 11, E, 7, 8, 3, 2, O	6.43	155
{14, 13}	O, 2, 5, 6, L, 19, J, 13, 14, 13, J, 19, L, 6, 5, 2, O	6.15	145.4
{15, 16}	O, 26, N, 23, 22, 16, I, 15, I, 18, K, 21, 25, M, O	6.37	153
{12, 11}	O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 12, G, 11, E, 7, 6, 5, 2, O	5.93	137.6
{10, 8}	O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 10, F, 9, E, 8, E, 7, 6, 5, 2, O	6.21	147.4
{G}	O, 2, 5, 6, 7, E, 11, G, 11, E, 7, 6, 5, 2, O	5.58	125.4
{I}	O, M, 25, 21, K, 18, I, 18, K, 21, 25, M, O	5.49	122.2
{F, 9}	O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 9, E, 7, 6, 5, 2, O	6.17	111.2
{J, 18}	O, 2, 5, 6, L, 19, J, 18, K, 21, 25, M, O	6.29	115.4
{17, 22, 20}	O, P, 26, N, 23, 22, 17, K, 21, 20, 25, M, O	6.31	115.8
{19, K}	O, M, 25, 21, K, 21, 20, 19, L, 6, 5, 2, O	6.18	111.2
{24, 23, 21}	O, P, 26, N, 24, 23, 21, 25, M, O	5.79	97.9
{E, 7, 6}	O, 2, 5, 6, 7, E, 7, 6, 5, 2, O	6.38	83.4
{L, 5, 25}	O, M, 25, 20, L, 6, 5, 2, O	6.36	82.8
{30, Q, 32}	O, R, 31, 32, 30, Q, 29, R, O	6.17	76.2
{35, 34, 33, 31}	O, 1, A, 34, 35, 33, 31, R, O	6.42	84.7
{4, D, 3}	O, 2, 3, D, 4, D, 3, C, 1, A, 1, O	5.99	69.8
{N, 27, 28}	O, P, 26, N, 26, 27, 28, P, O	6.27	79.5
{29, P, E}	O, R, 29, P, O	6.32	46.1
{31, 2, C}	O, R, 31, R, O, C, 3, 2, O	6.22	77.6
{26, M}	O, M, N, 26, P, O	4.86	65.1
{B, A}	O, 1, B, A, 1, O	5.15	40.4

由于 t_i 的不同, Δt_i 也不同, 当 \bar{V} 变化很大时, 可能使 t_i 相差很大, 从而需要重新调整巡视路线. 现以 $n = 3, V = 35, T = 2, t = 1$ 讨论变动对路线的影响.

首先, 从 1 中所得的三条巡视路线及对应巡视点集开始, 将 t_i 最大的点集中调整一个到 t_i 最小的点集中去, 直到 $\max t_i$ 不再减小为止, 我们得到三条路线, 对应长度分别为 194、205.3、206.8, 各巡视点集中权为 1、2 的点的个数分别为: $a_1 = 6, b_1 = 11, a_2 = 5, b_2 = 13, a_3 = 6, b_3 = 11$.

当 T 增加时, 对应时间分别为 $t_1 = 6\Delta T + 28.5, t_2 = 5\Delta T + 28.9, t_3 = 6\Delta T + 28.9$, 当 $\Delta T > 3.4$ 时, 可将 V_3 中的点 H 调入 V_2 中, 此时对应的时间为 $t'_1 = 6\Delta T + 28.5, t'_2 = 5\Delta T + 31.5, t'_3 = 6\Delta T + 26.3$ 均比 $\max\{t_1, t_2, t_3\} = t_3$ 小, 故应改变巡视路线.

七、模型的评价及改进

1. 该问题实际上是一个一般推销员问题, 是已被论证的 NPC 问题, 至今仍无有效的算法. 求最优 Hamilton 回路是该问题的常见的计算机近似算法, 它不能保证得到最优解, 运算量很大, 这种算法能很容易在图论文献中查到 [1, 2].

我们的策略改进方法也不能保证求得最优解, 但接近最优解. 并且所提出的策略能大幅度减少计算量, 以至于根据手算便能得到较为满意的结果.

2. 我们利用最优树分解方法对图分块, 但未能给出一个准确的原则定量地给出总路程最短同均衡性最好的制约关系.

参 考 文 献

- [1] E. 米涅卡 [美], 网络图的最优化算法, 中国铁道出版社, 北京, 1984.
- [2] 卢开澄, 图论及应用, 清华大学出版社, 北京, 1981.