最优捕鱼策略

唐进　曾宁　李静
(中南工业大学，长沙 410043)
指导教师：刘新歌

编者按　该文对问题一的推导正确，叙述简练，得到的结果具有参考价值.

摘　要　社会经济生活中，我们常遇到商业活动在一段时期内的最大收益问题，如森林管理等. 这时，我们不仅要考虑商业活动的当前经济效益，还要考虑生态效益及由此产生的对整体经济效益的影响.

本文涉及的问题是渔业管理，即对一固定的渔场，在一段时间内，如何实现最大的收益，同时保证渔场能稳定生产. 我们的基本思路是：考虑渔场生产过程中的两个相互制约的因素，年捕捞能力和再生产能力，从而确定最优管理策略. 我们用微分方程来描述渔场鱼群数量随时间变化的规律，在此基础上确定整体效益为我们的目标函数，以渔场生产的稳定性要求为约束条件，分别对长期生产和固定期生产两种情况建立了规划模型.

在对长期生产模型的求解中，我们利用约束条件将目标函数化为一元函数，用计算机数值法确定近似的最优解. 而在对固定期生产模型求解中，我们则构造一个整体效益函数，综合考虑年捕捞能力和年再生产能力，用计算机数值解法进行搜索逐年确定各年的最优策略，从而得出五年的总最优策略.

最后，我们对模型的稳定性进行敛定量的分析，并对模型进行了检验，确定模型较好地反映渔场最优捕鱼策略问题.

一、问题的重述

为了保护人类赖以生存的自然环境，可再生资源 (如渔业、林业资源) 的开发必须适度. 一种合理、简化的策略是在实现可持续收获的前提下，追求最大产量或最佳效益. 要求研究的问题是：对某种鱼的最优捕捞策略.

1.1 鱼的情况：假设这种鱼分 4 个年龄组：1、2、3、4 龄鱼. 各年龄组每条鱼的平均重量分别为 5.07, 11.55, 17.86, 22.99(克); 各年龄组的鱼自然死亡率均为 0.8(1/ 年); 这种鱼为季节性集中产卵繁殖，平均每条 4 龄鱼的产量为 1.109×10^5(个), 3 龄鱼的产卵量为这个数的一半，2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后 4 个月；卵孵化并成活为 1 龄鱼，成活率 (1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比) 为 $1.22\times10^{11}/(1.22\times10^{11}+n)$.

具体数据如下表

i	$m_i(g)$	r(1/ 年)	u_i(个 / 条)
1	5.07	0.8	0
2	11.55	0.8	0
3	17.86	0.8	0.5545×10^5
4	22.99	0.8	1.109×10^5

其中，i 表示 i 龄鱼，m_i 表示 i 龄鱼的质量，r 表示 i 龄鱼的自然死亡率，u_i 表示平均每条 i 龄鱼的产卵量.

该鱼的产卵和孵化期为每年的最后 4 个月，卵孵化成活 1 龄鱼，成活率 (1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比) 为 $1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} + n)$.

又渔业管理部门规定，每年只允许在产卵孵化期前的 8 个月内进行捕捞作业. 如果每年投入的捕捞能力 (如渔船数、下网次数等) 固定不变，这时单位时间捕捞量将与 i 成正比，比例系数称捕捞强度系数 ki. 通常使用 13mm 网眼的拉网，这种网只能捕捞 3 、4 龄鱼，其两个捕捞强度系数之比为 $k_3 : k_4 = 0.42 : 1, k_1 = k_2 = 0$. 渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

1.2 问题

1) 建立数学模型分析如何实现可持续捕捞 (即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼条数不变), 且在此前提下得到最高的年收获量 (捕捞总量).

2) 某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年，合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受太大的破坏. 已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, 如果仍用固定努力量的捕捞方式，该公司采取怎样的策略才能使总收获量最高.

二、记号的约定

x_i(t) : i 龄鱼在 t 时刻的数量；(t 以年为单位， $i = 1, 2, 3, 4$)

p_i: i 龄鱼的捕捞；($i = 3, 4$)

M: 捕捞总质量；

Q : 每年的产卵中能孵化成 1 龄鱼的数量；

N : 每年的产卵量.

三、模型的建立

由于鱼的数量随时间变化，我们视 $x_i(t)$ 为连续函数，它的变化与时间 t 、自然死亡率 r 、单位时间捕捞量 k_i 、卵的成活率有关.

基本假设

假设 I : 一年中，鱼的产卵是集中在 8 月底一次性完成，捕捞工作只在前 8 个月进行.

假设 II : 各龄鱼 (不包括 4 龄鱼) 只在年末瞬时才长大一岁. 鱼卵在年终才孵化完毕，成为 1 龄鱼. 这样在计算产卵量时， 3 、 4 龄鱼的条数为 $t = 8/12$.

定义 单位死亡率

$$\frac{dx_i}{dt} = -rx_i, \qquad r = 0.8,$$

单位时间捕捞量

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i x_i, \qquad k_s : k_4 = 0.42 : 1, k_1 = k_2 = 0$$

则捕捞时

$$\frac{dp_i}{dt} = -(r + k_i)x_i,$$

对各龄鱼存在以下方程 (令 $k=k_4$, 则 $k_3=0.42k$)

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=-0.8x_1, \quad t\in[0,1],$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-0.8x_2, \quad t\in[0,1],$$
$$\begin{cases}\dfrac{dx_3(t)}{dt}=-(0.8+0.42k)x_3, & t\in[0,8/12],\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=-0.8x_3, & t\in[8/12,1],\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dfrac{dx_4(t)}{dt}=-(0.8+k)x_4, & t\in[0.8/12,1],\\ \dfrac{dx_4(t)}{dt}=-0.8x_4, & t\in[8/12,1],\end{cases}$$

由此可解得

$$\begin{aligned}
&x_1(1)=\exp(-0.8)x_1(0),\\
&x_2(1)=\exp(-0.8)x_2(0),\\
&x_3(8/12)=\exp(-(0.8+0.42k)\times 2/3)x_3(0),\\
&x_4(8/12)=\exp(-(0.8+k)\times 2/3)x_4(0),\\
&x_3(1)=\exp(-(0.8+0.28k))x_3(0),\\
&x_4(1)=\exp(-(0.8+2k/3)x_4(0),
\end{aligned}$$

收获量为

$$p_3=\int_0^{\frac{8}{12}}0.42kx_3(t)dt, \qquad p_4=\int_0^{\frac{8}{12}}x_4(t)dt,$$

要实现持续捕获，即每年初，各个年龄组鱼群数量不变，同时须满足以下等式 (n 为卵量， u 为平均每条 4 龄鱼产卵量), 由此可建立模型 II

$$\begin{aligned}
&\max(M),\\
&M=p_3m_3+p_4m_4,\\
&\text{s.t.}\begin{cases}x_1(0)=Q,\\ x_2(0)=x_1(1),\\ x_3(0)=x_2(1),\\ x_4(0)=x_3(1)+x_4(1)\end{cases}
\end{aligned}$$

其中

$$N=(1.109x_3/2+1.109x_4\times 10^5, \qquad Q=1.22\times 10^{11}\times N/(1.22\times 10^{11}+N).$$

模型 II 的求解：

利用约束关系，将 $x_1(0),\cdots x_4(0)$ 均用 K 来表示，从而得出 M 关于 K 的一元函数

关系.

$$
\begin{aligned}
&M = m_3 \times p_3 + m_4 \times p_4,\\
&p_3 = 0.42 \times k \times x_3(0) \times (1 - \exp(-0.8 + 0.42k) \times 2/3))/(0.8 + 0.42k),\\
&p_4 = k \times x_4(0) \times (1 - \exp(-(0.8 + k) \times 2/3))/(0.8 + k),\\
&x_3(0) = 0.2463 \times 10^{11} - 3.7504 \times 10^{6} \times \exp(0.28k),\\
&\qquad \times (2.226 - \exp(-2 \times k/3)/(2.226 + \exp(-2 \times k/3)),\\
&x_4(0) = \exp(-0.28k) \times 10^{11}/(9.0272 - 4.0598 \times \exp(-2 \times k/3)),\\
&\qquad - 1.22 \times 10^{6}/(0.7241 + 0.3252 \times \exp(-2 \times k/3)),
\end{aligned}
$$

用计算机搜索，得出 K 的近似解. 计算结果为

年最大收获量：　$M^*(0) = 3.88685 \times 10^{11}$克

最佳捕捞强度系数：　$K^* = 17.7600$克

此时

$x_1^*(0) = 1.193 \times 10^{11}$条，　$x_2^*(0) = 5.360 \times 10^{10}$条，

$x_3^*(0) = 2.409 \times 10^{10}$条，　$x_4^*(0) = 7.661 \times 10^{7}$条，

$Q^*(0) = 1.193 \times 10^{11}$条.

四、模型的结果及实用性讨论

问题 (1) 的最优解

当 $K \in [0, 31.38]$ 时，渔场可实现持续捕捞，即满足了持续捕捞条件 $M \geq 0$. 在此前提下，取得最优的捕捞系数，3 龄鱼的捕捞系数为 7.4592, 4 龄鱼的捕捞系数为 17.76 年最大捕捞量为 3.88685×10^{11}(克).