

最后说到本题的数学知识要求和数学应用的思想方法问题。在参赛队充分理解本题的要求和进行求解之后,我们可以看到,只要有初等数学知识,完全不用计算机就能完成本题的全部解析计算。然而计算结果是否正确的前提和关键却是时间参数之间的逻辑关系分析是否正确。因此本题数学考验的核心是逻辑数学,是工序之间的“关系”,特别是时间参数的“衔接关系”。实际工业应用数学问题大量的是“离散数学”问题,要善于综合应用“肯定型”、“概率型”和“逻辑型”的数学工具。如果只习惯于自然科学中的“肯定型—连续型”数学问题的分析思路和解法,我们就常会在实际生产问题和管理问题面前束手无策。因为这些问题经常是离散的、概率型、逻辑型问题。本赛题最后提出的时间参数随机问题的讨论就是基于这样的背景提出的。许多答卷能够按平均时间的正态分布或统筹法中数学期望时间的正态分布或统筹法中数学期望时间的 β 分布来讨论时间参数对生产的影响都是正确的。然而这里也要指出一些参赛队不恰当地把有计划的生产调度问题用随机排队模型来套。殊不知一条轨道上的 N 台天车到达某一工作点根本不是随机自由到达。套用不恰当的模型而得出不正确的结果,失之偏颇也就难免了。可以说,深入浅出的运用数学工具解决实际问题应用数学的“Know How”;而相反用了高深的数学理论却脱离了问题的实际,实乃数学建模之“大忌”。

“科技兴国”的号角召唤着有志于“科学技术面向经济建设”的学子。要使我们经济运行的质量赶超世界的先进水平,应用数学的参与大有作为。数学建模竞赛给有志者一个小试锋芒的机遇。我们期待着更多的优秀者脱颖而出,取得更好的成绩!

天车与冶炼炉的作业调度

邱玉平 谭小术 干 斌

(四川轻化工学院, 自贡 643033)

指导教师: 武亦文

编者按:本文主要优点是能抓住主要的影响因素建立了“瓶颈模型”,通过详细、正确的数学论证分析了使用一至五台天车的可能性,并对使用三台天车的情形给出了详细的各天车的工序清单、天车炉子作业运行图。本文还用层次分析法给出了一种评估三、四、五台天车是否最优的模型,从而认为使用三台天车为最优。

摘要:本模型首先考虑该车间工序的相互影响,抓住主要的影响因素(即各环节的过程速度)在满足生产条件和假设条件的情况下,利用“递推法”找到其钢年产量的决定因素,建立了较为实用的“瓶颈模型”,应用层次分析法确定了天车的台数为3台,再运用排队理论制定了天车调度的最优方案,求出了在所给条件下钢的年产量为:282.76万吨。

关键词:瓶颈模型,排队论,层次分析法。

一、问题的提出(略)

二、基本假设

1. 设备在工作过程中一切正常,不会出现偶然事故;
2. 原料装配不在该生产工序范围之内(即该模型不考虑 F、Q 两处的装料时间);
3. 在 A 组炉处加半钢和加辅料之间的时间间隔忽略不计;而且在此条件下的两天车之间不会发生碰撞;
4. 加料均为一次性加足;
5. 各天车运行时的速度都相同(即各相邻工作地点之间的距离都相同);
6. 有足够的原料罐,半钢罐和辅料罐;
7. A 组炉和 B 组炉的加料时间间隔相同。
8. 任何一台天车没有不必要的工作状态(即:任何一台天车不会出现吊着料等待放卸)。

三、建立模型

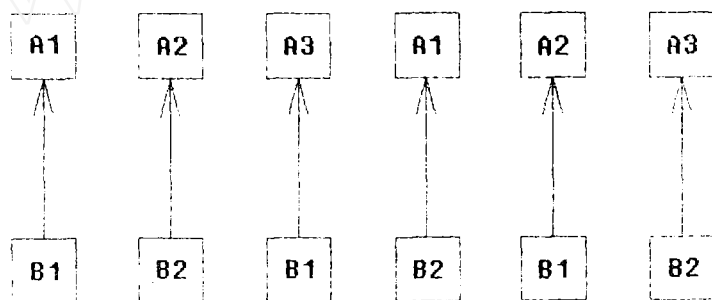
(一) 模型中使用参数的说明:

- T_A 表示 A 组炉中任意一台炉在一个周期内的工作时间;
- T_B 表示 B 组炉中任意一台炉在一个周期内的工作时间;
- T_i 表示天车 T_i 在一个周期内的工作时间;
- m 表示对应两工作点的单位距离段数;
- n 表示天车 T_1 工作的次数;
- k 表示每台转炉每年的作业天数;
- $t_a(n)$ 表示 A 组炉中某一炉开始加料的时刻;
- $t_b(n)$ 表示 B 组炉中某一炉冶炼结束的時刻;
- $t_i(n)$ 表示天车 T_i 开始作业的时刻($i=1,2,3$);
- W 表示成品钢的年产量;
- W_a A 组炉平均每炉成品钢产量;
- t_a A 组炉中冶炼一炉的成品钢所需时间(输出时间计入 t_a 中);
- t_b B 组炉中冶炼一炉半钢所需时间(输出时间计入 t_b 中);
- t_i B 组炉处放下原料罐所需时间;
- t_o B 组炉处吊起原料空罐所需时间;
- t_c B 组炉处放下空半钢罐所需时间;

- t_d B 组炉处吊起半钢罐所需时间;
 t_e 在 A 组炉处倒入半钢所需时间;
 t_f 在 A 组炉处加入辅料所需时间;
 t_g 在 P 处吊起辅料槽所需时间;
 t_h 在 P 处放下空槽所需时间;
 t_y 在 Q 处吊起原料罐所需时间;
 t_k 在 Q 处放下空原料罐所需时间;
 t_x 两相邻工作点之间天车运行时间;

(二) 问题的分析:

由于 A 组转炉数与 B 组冶炼炉数不相等, A 组转炉与 B 组冶炼炉之间不能一一对应, 因此 A 组转炉与 B 组冶炼炉之间只能交叉对应, 其关系如下:



在我们要解决的问题中, A 组炉和 B 组炉在生产过程中反复出现, 并同时要求天车的作业率均衡, 所以我们应考虑生产过程为周期性变化。根据实际情况, 我们把以上框图内的内容作为一个工作周期, 然而我们要建立一个钢产量尽量高的模型这就必须使生产过程中的周期最短, 利用在连串反应中反应最慢的环节决定着整个反应的反应速度的原理(即: 连串反应的速度控制原理), 分析所给问题, A 组炉在一个周期内的工作时间 T_A 与 B 组炉在一个周期内的工作时间 T_B 为两个相对独立的变量, 如果考虑到 B 组炉供应 A 组炉的生产工序, 则 T_A 和 T_B 相互影响, 并决定着成品钢的产量, 而且 T_A 与 T_B 的关系满足以上所述的速度控制原理, 因此我们可以根据这个原理来建立一个“瓶颈模型”。

(三) 模型建立:

在我们要建立的模型中, T_A 和 T_B 满足连串反应速度控制原理, 所以我们应该先确定 A, B 中反应最慢的环节, 即确定 A, B 两组炉生产过程由 $\max[T_A, T_B]$ 来决定, 其中 T_A , T_B 如下:

$$\begin{aligned}
 T_A &= 2(t_a + t_e + t_f) \\
 T_B &= 3(t_b + t_i + t_d + m \cdot t_x)
 \end{aligned}$$

由 $\max[T_A, T_B]$ 我们可以进行下一步寻找能够满足条件的天车运行工序, 其具体寻找方法为:

(1) 如果 $\max[T_A, T_B] \times 70\% > \max[T_1, T_2, T_3]$, 则由 $\max[T_A, T_B]$ 所对应的那组炉来确定天车的运行工序, 并由其确定循环周期;

(2) 如果 $\max[T_A, T_B] \times 70\% < \max[T_1, T_2, T_3]$, 则由 $\max[T_1, T_2, T_3]$ 所对应的天车按 A 组炉与 B 组炉的关系确定运行工序, 并由其确定循环周期。

由于所建模型不能直接提出调度方案, 因此我们只能用所给数据演示模型具体求解过程, 给出其调度方案。由上面步骤, 我们可先求出 T_A, T_B 的大小如下, (对应如上的 A 组炉与 B 组炉的循环过程):

$$T_A = 2(t_u + t_v + t_f) = 2 \times (48 + 5 + 2) = 110 \quad (\text{单位: min})$$

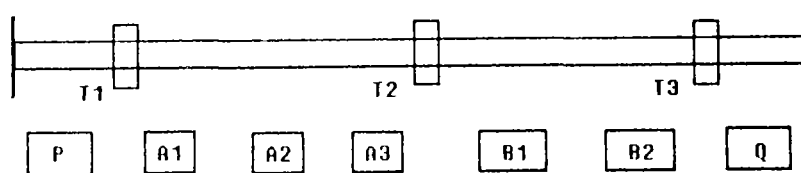
$$T_B = 3(t_k + t_l + t_d + m \cdot t_r) = 3 \times (27 + 3 + 3 + 0.25m) = 99 + 0.75 \quad (\text{单位: min})$$

由于 $n \leq 6$ (由厂房布局图可知), 所以 $T_A > 103.5 \geq T_B$, 即 A, B 两组炉生产过程的速度由 T_A 决定。

现在我们由 T_A 来进行下一步寻找满足条件的天车运行工序:

(1) 通过计算, 只有一台天车和只有两台天车时, 都不能满足天车的作业率小于 70%, 故我们不再考虑生产过程中只有一台或只有两台天车的情况。

(2) 考虑有三台天车的情况: 先假设一种最简单的情况——即辅料 P 处与 A 组炉之间有一台天车, A 组炉与 B 组炉之间有一台天车, B 组炉与原料 Q 处有一台天车, 分布如下:



按这种情况, 我们求出每一台天车在一个周期内的工作时间, 分别为:

$$T_1 = 36 \text{ min} \quad T_2 = 67.5 \text{ min} \quad T_3 = 64.5 \text{ min}$$

因为 $T_A \times 70\% > \max[T_1, T_2, T_3]$, 所以在整个生产过程中, A 组炉决定着整个生产工序, 当有四台或五台天车时, 按相同的方法得知, 仍是 A 组炉决定着整个生产工序。但考虑到效益, 产量, 安全, 调度难度, 设备投资等主要影响因素, 通过层次分析法 (详见附录) 我们得出了调用三台天车为最佳。

下面我们来求有三台天车时的最佳调度方案: 首先可以设其中一循环以 A1 开始, 从此时开始计时, 由于在同一个周期内, A1, A2, A3 是按 A1, A2, A3, A1, A2, A3 的顺序加料的, 且每相邻加料时间间隔相同 (即 $\frac{T_A}{6} = 18.33 \text{ min}$), 故 A 组炉中任一炉的开始加料时刻为:

$$t_a(n) = \frac{T_A \cdot (n-1)}{6} = 18.33(n-1) \quad (1)$$

在满足假设 8 的条件下, A 组中每一炉的加料时刻决定了 B 组中对应冶炼炉的冶炼结束时刻, 还决定了天车 T1 的开始吊料时刻和天车 T2 开始吊料的时刻, 而 B 组炉的冶炼结束时刻决定了天车 T3 的开始吊料时刻, 各时刻的求解式如下:

$$t_b(n) = t_a(n) - m \cdot t_x \quad (2)$$

$$t_1(n) = t_a(n) + t_e - (m \cdot t_x + t_g) \quad (3)$$

$$t_2(n) = t_a(n) - m \cdot t_x \quad (4)$$

$$t_3(n) = t_b(n) - (m \cdot t_x + t_y) \quad (5)$$

(注: 以上四式中的 m 并非表示同一意义, 而是表示与其情况对应的相关工作点之间的单位距离段数。)

成品钢的年产量为:

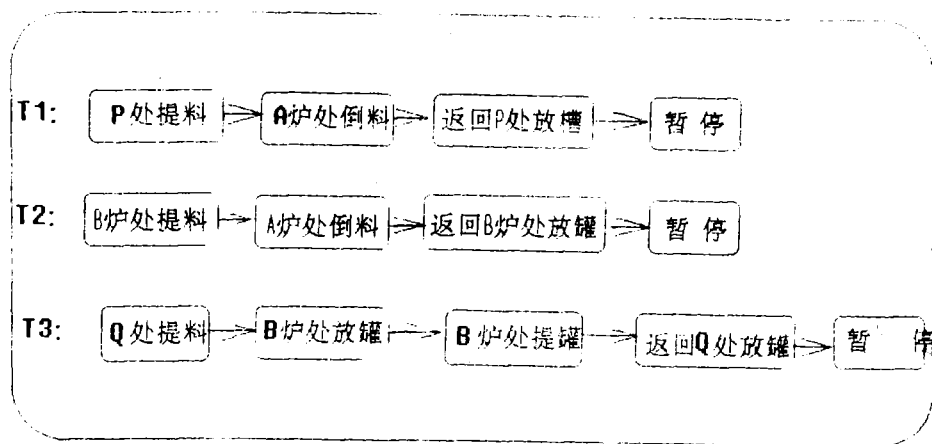
$$W = 24 \times 60 \times 6 \times \frac{W_a \cdot k}{T_A} = 8640 \times \frac{W_a \cdot k}{T_A} \quad (6)$$

(6) 式中 6 为一个工作周期内生产成品钢的炉数, 在以上 (1)~(6) 表达式中, (3)、(4)、(5)、(6) 就是我们建立的模型 (注: 该模型是经判断确定以 T_A 为基准的条件下才适用)

(四) 调度方案

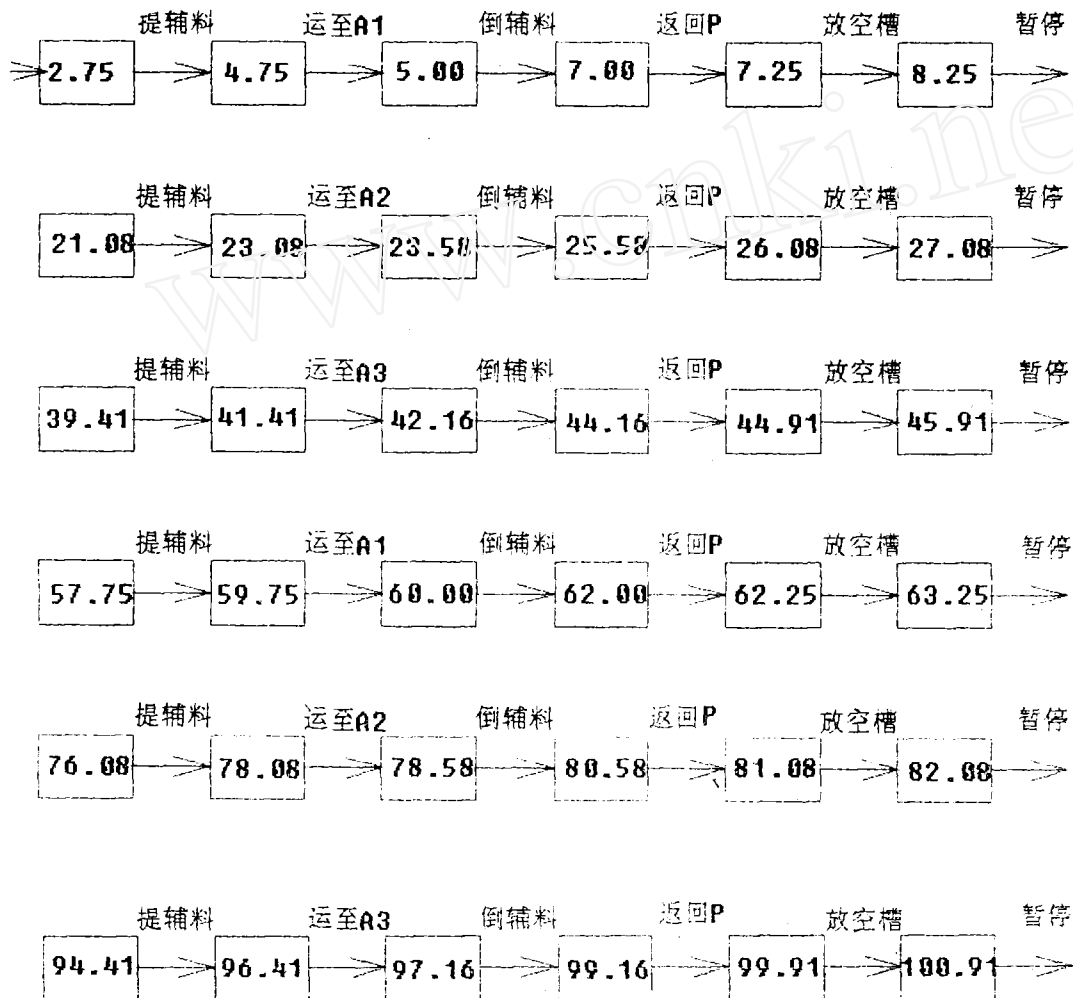
1. 工序清单

(1) 各台天车的工序清单:



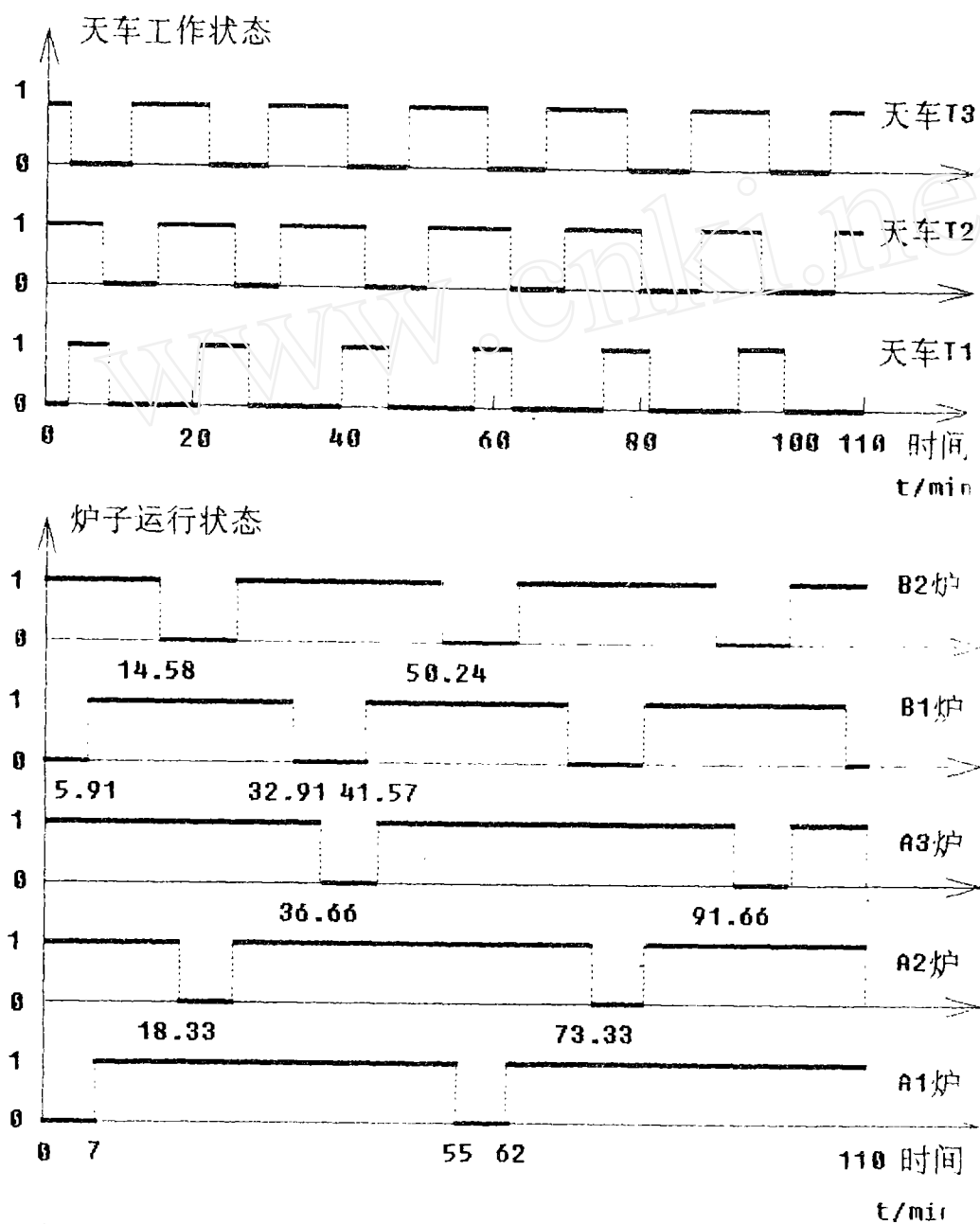
(2) 各台天车在一个工作周期内的工序清单:

T1: 天车 T1 在一个周期内的工序清单



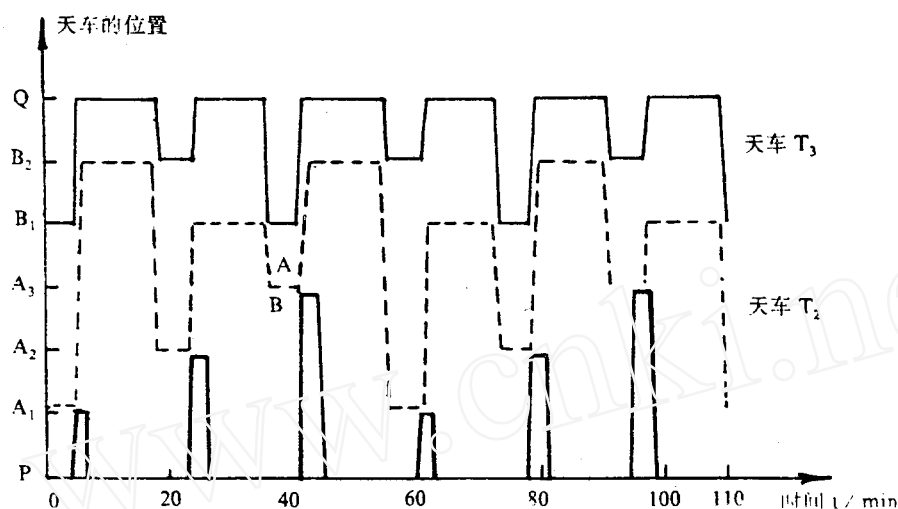
T2: 天车 T2 在一个周期内的工序清单(略) T3: 天车 T3 在一个周期内的工序清单(略)

2. 天车—炉子作业运行图



在以上图中,天车和炉子的作业运行图由以下分段函数来表示:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{停止状态} \\ 1 & \text{工作状态} \end{cases}$$



由于我们假设在 A 组炉处天车 T1 与天车 T2 进料是连续的,无时间间隔,但不会发生碰撞,所以图中 T1 与 T2 在相同时刻处于同一个位置,(如上图所示的 A,B 两点)并不是违背条件的。

(五) 调度规则说明书

各天车的调度时刻分别由下面对应的式子确定:

$$t_1(n) = t_a(n) + t_e - (m \cdot t_x + t_g)$$

$$t_2(n) = t_a(n) - m \cdot t_x$$

$$t_3(n) = t_b(n) - (m \cdot t_x + t_y)$$

各天车被调度后就按(一)中对应的工序正常工作。

各天车在一个工作周期内的调度时间如下表:

	1	2	3	4	5	6
T1	2.75	21.8	39.41	57.75	76.08	94.41
T2	-3.75	14.58	32.91	51.25	69.58	87.91
T3	-40.98	-22.34	-4.25	14.33	32.41	51.00

(六) 各台天车在所给方案下的作业率:

用前面的计算结果(天车 T1,T2,T3 在一个工作周期内的作业时间)求得对应天车的作业率见下表:

	T1	T2	T3
作业率	32.73%	61.36%	58.64%

(七) 该车间成品钢的年产量为:

$$W = 8640 \cdot \frac{w_a \cdot k}{T_A} = 8640 \times \frac{120 \times 300}{110} = 2827600(\text{吨}) = 282.76(\text{万吨})$$

四、模型结果分析

由于我们所建模型时把随机性参数 t_a, t_b, \dots, t_k 取为其平均值, 考虑为定值参数, 这使所建模型运行后结果产生误差。对于 T_1, T_2, T_3 , 由于天车有足够的休息时间, 而且由 A 组炉决定其工作状态, 按正态分布计算其概率接近于 100%, 对于成品年产量 W , 按正态分布计算其概率近似于 87.5%。

在不改变生产工艺条件的情况下, 该车间成品钢年产量达 300 万吨的概率几乎为 0, 因此, 要使钢年产量达到 300 万吨, 我们必须对生产工序或每年的作业日作一定的调整, 比如: 缩短工作周期, 增加年作业日等。经过计算, 我们发现仅增加作业日, 则需增加 18.3 天才能达到年产量 300 万吨; 如增加工作日的同时缩短生产周期, 则当缩短 4 分钟/(周期)时, 只需增加 7 天就能达到年产量 300 万吨, 如仅缩短工作周期, 则只需缩短 6.3 分钟/(周期)。比较三者, 我们建议采用适当增加作业日同时适当缩短工作周期来达到年产量 300 万吨, 这样就避免了因工作周期过短而使天车的作业率超过 70% 和作业日过多而造成职工抱怨强烈。

五、模型的改进和推广

由于我们时间有限, 只能以演示的方式给出由 A 组炉决定整个生产过程的模型, 而不能给出由 B 组炉或天车 T_i 决定整个生产过程的模型, 因此, 我们模型的改进方向是建立由 B 组炉或天车 T_i 决定整个生产过程的模型, 达到对任何情况我们都可在判断后直接利用模型制定调度方案。

我们所建立的模型不仅可用于天车调度, 而且可用于工作时间与其它时间有矛盾时的人员的安排。交通(尤其是火车)调度等。

六、模型优缺点

1. 我们的“瓶颈模型”是按“递推法”逐渐满足条件而建立的, 建模方法简单易懂, 尽管建模过程中应用了层次分析法和排队理论, 但仍可以只用初等数学方法便能制定出调度方案。

2. 所建模型的调度时刻清晰, 便于操作。

3. 我们的模型先是按一般情况考虑的, 具有一定的通用性, 如遇到其它情况, 只需抓住问题的“颈”, 然后利用我们模型中回归递推的方法进行求解。有很强的适用性。

4. 由于我们在模型假设中有一些地方进行了连续化处理, 这可能使模型在实际运用过程中对调度和操作的要求增强。

参考文献

1. 《物理化学》，天津大学物理化学教研室编(第三版)，高等教育出版社
2. 《运筹学》，《运筹学》教材编写组编，清华大学出版
3. 《运筹学导论》，[美]B. E. 吉勒特著，机械工业出版社
4. 《排队论及其应用》，陆凤山编，湖南科学技术出版社
5. 《概率论》，同济大学数学教研室 编，高等教育出版社
6. 《层次分析法引论》，王莲芬 许树柏 编著，中国人民大学出版社
7. 《大学生数学建模竞赛辅导教材》，叶其孝 主编，湖南教育出版社

附录一 用层次分析法确定天车的台数

对采用三台,四台,五台天车都能满足工艺要求的情况下,要确定选取哪一种情况为最优方案时,可以将决策问题分解为三个层次

运用一九尺度分别写出准则层对目标层(A 矩阵)及方案层对准则层的判断矩阵(B1,B2,B3,B4,B5 矩阵):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad B5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

由 Perron 定理可知:设 n 阶方阵 $A > 0$, λ_{\max} 为 A 的模最大的特征根,那么有:

- (1) λ_{\max} 必为正特征根,而且它所对应的特征向量为正向量;
- (2) A 的任何其它特征根 λ 恒有 $|\lambda| < \lambda_{\max}$;
- (3) λ_{\max} 为 A 的单特征根,因而它对应的特征向量除差一个常数因子外是唯一的。

对于正矩阵 A 的最大特征根 λ_{\max} 及特征向量 ω 可根据 Perron 定理,利用数值计算中的幂法求取;同时利用 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$ 对每个判断矩阵进行一致性检验,查找相应阶数的平均随机一致性指标 RI (阶数 $n=3$ 时 $RI=0.52$, $n=5$ 时 $RI=1.12$),并用 $CR = \frac{CI}{RI}$ 求得一致性比例 CR ,当 $CR > 0.1$ 时说明判断矩阵不合实际,应进行重新判断,直到 $CR < 0.1$ 时通过检验,当每一判断矩阵都通过一致性检验时,得到如下表所示值;然后进行组合权向量的计算。

k	1	2	3	4	5
$\omega_k^{(B)}$	0.58155	0.08194	0.63376	0.57143	0.68173
	0.30900	0.23628	0.19186	0.28571	0.23634
	0.10945	0.68178	0.17438	0.14286	0.08193
λ_k	3.00367	3.00119	3.00884	3.00000	3.00148
CI_k	0.00184	0.00060	0.00442	0.00000	0.00074

从上表中可以看出各判断矩阵均通过一致性检验,并可得到

$$\omega^{(A)} = (0.34727, 0.33210, 0.11764, 0.08291, 0.12009)^T$$

记: $W = [\omega_1^{(B)}, \omega_2^{(B)}, \omega_3^{(B)}, \omega_4^{(B)}, \omega_5^{(B)}]$, 可得第三层对第一层的排序向量:

$\omega_{31} = (0.43296, 0.26041, 0.30662)$, 此向量中权重最大的一项就是最优项(即我们要寻找的最优项);

以上各计算步骤都是通过 BASIC 程序实现的。

附录二: AHP 层次分析源程序(略)