第 30 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 30 No. 1
2000 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan. 2000

自动化车床管理建模分析

孙山泽

(北京大学概率统计系, 北京 100871)

摘要: 本文分析了 1999 年全国大学生数学建模竞赛 A 题, 介绍了两种解和参赛论文评阅中的一些问题

今年全国大学生数学建模竞赛采用了一道有随机因素的优化题——自动化车床管理 (A 题). 该题有较强的实际应用背景, 在一般数学建模教材和可靠性书藉中, 通常将工序流程中的定期检查和预防性保全刀具更换作为两个论题, 分别进行讨论 该题将这两个措施同时用於一个工序流程, 另外除刀具故障外还涉及非刀具故障, 这两点增加了问题的难度, 此次竞赛中许多队完全不考虑非刀具故障, 显然降低了难度

解决此问题, 当然首先要建立损失函数(效益函数). 日本质量管理专家田口玄一博士在其著作《线上质量管理》一书中曾讨论过这一问题, 给出了本题第一问情形下的损失函数式 此次竞赛中, 有些同学查到了有关的参考书藉, 如 1988 年, 学术期刊出版社出版的《现代质量管理统计方法》 这次我们也选刊了一篇利用田口的损失函数式解题的参赛论文 但从这些论文可以看到, 多数同学对这一损失函数式的来龙去脉并不是了解得很清楚 下面我们对此解法作一较详细的分析, 然后再讨论此次参赛中较多的队采用的另一种解法

1 解法一

1. 首先我们明确一下解题的假设, 该题给出了 100 次刀具故障记录, 应该看到这批数据产生的经验分布或由它们拟合的连续型分布是一个条件分布, 是在无刀具故障, 新刀起始点已知的条件下, 刀具的寿命分布 当工序流程中存在非刀具故障, 且出现非刀具故障进行修复时, 不必换刀(实际工作中一般是这样处理的), 这样工序流程没有明显的周期状态 我们随机地在工序流程中取一点作为管理的始点, 在这种考虑下, 假定在流程中各点发生故障的无条件概率均相同, 是一个合理的假定 这一假定与前述刀具寿命的条件分布是正态分布或其他类型分布不是一回事, 两者并不相悖

工序检查和刀具更换均考虑固定间隔

现在我们将模型的基本假设复述如下:

1) 刀具每加 u 件零件后定期更换, 更换费用为 k.

2) 每生产 n 件零件定期进行检查, 检查费用为 t, 通常 $n \ll u$, 为简化计算, 不妨设 $u = sn$.

3) 在 1)、2) 下, 工序的平均故障间隔记为 c(件), 此时平均故障率 $p = 1/c$

4) 检查时发现零件不合格, 认定为工序故障, 进行修复, 修复的平均费用为 d.

5) 每件不合格品的损失费为 f.

6) 刀具寿命的分布由所给数据确定记为 $F(x)$.

2. 效益函数可考虑为生产每个零件的平均费用 L. 从理论上讲, 考虑为每个合格零件

的平均更为合理, 但由于工序故障率较小, 在不同的换刀间隔和检查间隔下, 生产的合格零件数与全部零件数之比变化很小, 因而两种考虑下建立的效益函数的最优解不会有大的差异, 而考虑为生产每个零件的平均费用时, 效益函数会简单些. L 包括预防保全费用 L_1, 检查费用 L_2, 和故障造成的不合格品损失和修复费用 L_3.

3. 第一问的效益函数: 按每个零件分摊

$$L_1 = \frac{k}{u}, L_2 = \frac{t}{n}, L_3 = [(m + h)f + d]/c$$

其中 m 为相邻两次检查的后一次检查发现故障时, n 件零件中不合格品的平均数, h 为检查发现故障至停止生产的过程中, 产生的零件数, 此数对问题的解法无影响, 不妨设 $h = 0$. 于是问题为确定 u, n 使

$$L = \frac{k}{u} + \frac{t}{n} + \frac{mf}{c} + \frac{d}{c} \tag{1}$$

最小. 式中的 m, c 可如下计算

m 的计算 由假设 3), 在相邻两次检查的后一次发现故障的条件下, 出现 i 件不合格品的概率为 $(1-p)^{n-i} \cdot p / [1-(1-p)^n]$, $i = 1, \cdots\cdots n$, 于是

$$m = \sum_{i=1}^{n} i(1-p)^{n-i} p / [1-(1-p)^n] \tag{2}$$

上式经运算可得

$$m = \frac{n+1}{2} + \frac{n^2-1}{12} p + O(p^2) \doteq \frac{n+1}{2}$$

其中由于 $p = \frac{1}{c}$ 很小, 将 $O(p)$ 忽略, 代入(1)得

$$L = \frac{k}{u} + \frac{t}{n} + \frac{(n+1)f}{2c} + \frac{d}{c} \tag{3}$$

c 的计算 首先根据给出的 100 个数据算出无预防性更换时, 刀具故障平均间隔为 $a = 600$ 件由题设刀具故障占 95%, 非刀具故障占 5%, 故非刀具平均故障间隔为 $b = a \cdot \frac{95}{5} = 11400$ 件.

其次由 100 个数据确定刀具寿命的经验分布或拟合分布 $F(x)$.

当进行预防保全定期 u 更换刀具时, 刀故障的平均间隔

$$a_u = \frac{1}{F(u)}\left(\sum_{i=1}^{u-1} i \cdot (F(i) - F(i-1) + u(1 - F(u))\right) \tag{4}$$

若 $F(x)$ 为连续型分布, 有密度函数 $f(x)$, 则可有

$$a_u = \frac{1}{F(u)}\left(\int tf(t)\,\mathrm{d}t + u(1 - F(u))\right)$$

工序的平均故障间隔 c 由 a_u 和 b 决定, 满足 $1/c = 1/a_u + 1/b$,

$$c = \frac{1}{1/a_u + 1/b} \tag{5}$$

所以 c 是 u 的函数

4. 对目标函数(3)的参数优化可如下进行. 给定 u, 计算出 c, 则 L 是 n 的函数, 由(3)不难求得

$$n = \sqrt{\frac{2ct}{f}} \tag{6}$$

L 达到极小, 按一定的步长, 比如步长取 50, 对 $u = 100, 150, 200, \cdots$ 逐个求出 L 的极小值及相应的 n 值, 其中使 L 最小者所对应的 u 和 n 即为所求

有部分参赛队, 对两参数的目标函数, 固定第一个参数, 求得另一参数的最优值　然后在此最优值下, 求第一个参数的优化值, 例如在 $n = 1$ 或不考虑检查时求出最优的 u 值 u_1, 固定 u_1 再求出 n 的优化值 n_1, 认为 (u_1, n_1) 即为最优解, 这种单参数分别寻优的做法是不正确的　此种做法只有在目标函数非常规则的情况下才能找到最优点

5. 第二问的效益函数要考虑两种误判　一是工序正常时检查到不合格品误判停机, 将使检查的费用增加; 二是工序故障时检查到合格品, 将继续生产直到下一次检查, 使不合格品损失增加, 此时两次故障间由此产生的不合格品平均数为

$$\frac{n+1}{2} + W \cdot n\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{j} iW^{i-1}(1-W)\right)\frac{(1-p)^{(j-1)n} - (1-p)^{(jn)}}{1-(1-p)^{u}}\right]$$

$$\doteq \frac{n+1}{2} + n\frac{W}{1-W} \tag{7}$$

式中 $W = 40\%$ 为工序故障时的合格品率, p 为工序在生产一零件时的平均故障率, $u = sn$. 故在第二问的条件下, 效益函数应为

$$L = \frac{k}{u} + \frac{1}{n}\left[t + (1-p)^{n} ve\right] + \frac{f}{c}\left(\frac{n+1}{2} + n\frac{W}{1-W}\right) + \frac{d}{c} \tag{8}$$

式中 $v = 2\%$ 是工序正常时零件的不合格品率, $e = 1500$ 为第一种误判产生停机的损失费

确定目标函数后, 解的其他过程与第一问类似

6. 第三问是一个开放性的问题　有充分的空间可供讨论思考. 这次竞赛中有不少队提出了自己的想法, 主要可归纳为二类　一类是建议为减少误判, , 在检查时不限於检查一个零件, 适当时可再查一个零件. 另一类是建议在刀具新使用时采用大的检查间隔, 而刀具使用一定时间后采用小的检查间隔, 但讨论大多比较抽象, 没有具体的计算结果支持.

2　解法二

1. 本次竞赛中多数队采用有更新点的周期计算效益函数　此解法需假定工序故障后一律换刀具, 不论是刀具故障还是非刀具故障均更换新刀, 形成更新点　主要的几点假定可明确如下:

1) 工序故障均换刀, 从新刀至下一次工序故障或预防性换刀构形一个周期

2) 非刀具故障在任一零件处发生的概率均相同, 记为 q.

3) 无非刀具故障的条件下, 从更新点起刀具寿命为 $F(x)$ (以下设 $F(x)$ 为连续型分布, 有密度函数 $f(x)$).

4) 检查的固定间隔记为 n, 预防性换刀的固定间隔 $u = sn$.

计算一个周期内每一零件平均费用.

2. 不考虑非刀具故障时, 分两种情况考虑费用

1) 刀具至 u 未坏, 费用为 $c_1 = (s-1)t + k$

2) 刀具在 u 前故障, 费用为

$$c_2=\sum_{i=1}^{s-1}\left(it+d+f\cdot\frac{n+1}{2}\right)\frac{F(in)-F((i-1)n)}{F(u)}$$
$$+\left((s-1)t+k+f\frac{n+1}{2}\right)\frac{F(u)-F((s-1)n)}{F(u)}$$

两种情况的加权平均费用

$$c_a=c_1(1-F(u))+c_2F(u)\doteq\left(d+f\frac{n+1}{2}\right)F(u)$$
$$+k(1-F(u))+\frac{t}{n}\left(u-\int F(x)\,\mathrm{d}x\right)\tag{9}$$

而在一周期内完成零件的平均数

$$T_a=\int xf(x)\,\mathrm{d}x+u(1-F(u))=u-\int F(x)\,\mathrm{d}x\tag{10}$$

每一零件平均费用

$$L=\frac{C_a}{T_a}\tag{11}$$

有一部分参赛队对两种情况分别求每一零件平均费用,然后再加权平均 也应该是合理的

3. 考虑非刀具故障 可算出在工序中每一零件处非刀具平均故障率 $q=1/11400$.

u 之前出现非刀具故障的费用

$$C_o=\sum_{j=1}^{u-1}\left(\left(\frac{j}{n}\right)t+d+f\frac{n+1}{2}\right)(1-q)^{j-1}q+\left((s-1)t+k\right)(1-q)^{u-1}\tag{12}$$

u 之前出现非刀具故障,平均产出零件数

$$T_o=\sum_{j=1}^{u-1}j(1-q)^{j-1}q+u(1-q)^{u-1}=\frac{1-(1-q)^u}{q}\tag{13}$$

无非刀具故障条件下,平均费用 C_a,产出零件平均数 T_a,如 2. 中所叙 故加权平均的费用和零件数

$$C=C_o\left[1-(1-q)^u\right]+C_a(1-q)^u$$
$$T=T_o\left[1-(1-q)^u\right]+T_a(1-q)^u\tag{14}$$

每一零件平均费用为

$$L=\frac{C}{T}\tag{15}$$

由此目标函数可确定最优的 (u,n).

有些同学忽略了刀具寿命分布 $F(x)$ 是无非刀具故障条件下的条件分布,出现各种情况加权时,权的总和不等於 1 的错误

4. 有许多参赛队采用修正刀具寿命分布 $F(x)$ 的办法,得到工序故障间隔的分布(包括刀具故障和非刀具故障) 按照前述 2. 确定目标函数 修正的方法有下列几种:

1) 设 x_1 为刀具故障间隔(刀具寿命),x_2 为非刀具故障间隔,$Y=\min(x_1,x_2)$ 为工序故障间隔,求得 Y 的分布 $G(x)$,以 $G(x)$ 取代 $F(x)$.

2) 直接将刀具故障间隔 x_1,乘艺 0.95,取 $Y=0.95x_1$,作为工序故障间隔 以 Y 的分布 $G(x)$ 取代 $F(x)$.

3) 以 $G(x)=0.95F(x)+0.05H(x)$,其中 $H(x)$ 是非刀具故障间隔的分布,取代 $F(x)$.

这三种修正办法, 1) 似乎比较合理, 2) 和 3) 则较为粗糙

5. 第二问和第三问的考虑与解法一差不多, 需要对目标函数中的某些费用作适当调整, 发表的参赛论文中有较详细的考虑, 这里不再赘述

以上是关于基本模型和基本解法的分析 另外在具体的数值计算上, 有些参赛队在选用适宜的数学软件和编程上也存在一些问题 在模型基本正确的情况下, 解出的最优解与正确答案相去甚远

参考文献:

[1] 田口玄一著. 线上质量管理. 日本标准协会, 1979 (日文).

[2] 现代质量管理统计方法编写组编. 现代质量管理统计方法. 学术期刊出版社, 1988.

Some Analysis on Maintenance Strategies of the Automatic Lathe

SUN Shan-ze

(Peking University, Beijing 100871)

Abstract: This paper analysed the problem A of CMCM in 1999. Two kinds of answers and some cases in the submited papers from provinces are presented.