

多旅行商路线的几个问题*

俞文斌

(上海华东理工大学应用数学研究所 200237)

摘 要 本文对 98B 题 (全国大学生数学建模竞赛) 的几个较为深入的问题进行讨论, 包括: 最小的 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系, 目标函数的处理, 最小组数问题. 特别, 对于 98B 题第三小题, 22 组是否为最小组数, 我们给出了肯定的结论.

旅行商问题是运筹学中的一个典型问题, 多旅行商问题是它的扩充, 它可应用于车辆路线组织, 作业调度等方面^[1], 全国大学生数学建模竞赛 98B 题正是这样一类问题. 一般来说, 这类问题不存在好算法. 由于实际要求的不同, 这类问题中的目标函数与约束条件又可以有多种形式, 这样, 结合具体问题的特殊性, 进行较为深入的讨论, 仍然是可能的.

本文对 98B 题的几个较为深入的问题进行讨论. 在 §1, 我们讨论无向图上最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系, 指出二者何时相同、何时可能不相同的一些判断. 在 §2, 针对 98B 中的目标函数的处理, 讨论如何将双目标化为单目标的问题, 以及如何把点权化为边权的问题. 我们在 §3 讨论, 在给定的时间下, 如何确定最小组数的问题. 特别, 98B 题第三小题中, 当给定时间限定为 6.4286(小时), 可断言 22 组是最小组数, 也就是说, 21 组是不可行的, 对此, 我们在 §4 介绍了集合覆盖问题, 在 §5 讨论了有关 98B 题第三小题的性质, 最后在 §6 给出证明.

为节省篇幅, 我们对 98B 题不再复述, 因为在本期杂志的若干文章中均有叙述. 98B 题的图形亦略, 但有关数据列在附录中, 以保持本文的完整性.

§1 最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系

我们限于讨论无向图的情形.

给定一个连通图 $G = (V, E, w)$, 其中 V 为顶点集, E 为边集, w 为定义在 E 上的权 (非负). G 的一个 Hamilton 回路是顶点集上的一个循环排列 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1}$ ($\sigma_{n+1} = \sigma_1$), 其中一切 $\sigma_i \sigma_{i+1} \in E$, $w(\sigma)$ 定义为 σ 上所有边权之和. 当 $w(\sigma)$ 达到最小, σ 称为最小 Hamilton 回路. G 的一个旅行商路线是顶点集 V 的可重复但不遗漏的一个循环排列, 多旅行商路线则是顶点集 V 的可重复但总体上不遗漏的多个循环排列, 其余有关概念类同于 Hamilton 回路.

对于 G 为完全图的情形, 不难得到以下二个结论^[2].

结论 1 如果完全图 $G = (V, E, w)$ 的权不受限制, 那么存在例子使得: G 的最小 Hamilton 回路不是 G 的最优旅行商路线.

结论 2 如果完全图 $G = (V, E, w)$ 的权满足三角形不等式:

$$\forall i, j, k \in V, \quad w_{i,k} \leq w_{i,j} + w_{j,k}, \quad (1.1)$$

那么 G 的最小 Hamilton 回路必是 G 的最优旅行商路线.

对于 G 为连通但不是完全图的情形, 容易注意到: G 可能不存在 Hamilton 回路, 这时也就不存在最小 Hamilton 回路; 还可以想到: G 的最优旅行商路线可到完全图 G' 上去找, 这个完全

*“优化理论与算法”为国家自然科学基金资助项目.

图 $G' = (V, E', w')$, 其中边集 E' 包含 V 的一切点对, 而 w'_{ij} 定义为 G 上顶点 i 与顶点 j 之间的距离 (最短路长度), 它必定满足三角形不等式.

结论 3 连通图 $G = (V, E, w)$ 所相应的完全图 $G' = (V, E', w')$ 的最小 Hamilton 回路 H' 必定给出 G 的最优旅行商路线, 其中 H' 中的边用 G 中的最短路 (其两端点与该边的二端点相同) 来代替.

结论 3 具有直观解释, 它可用反证法加以证明.

从 98B 题的竞赛答案来看, 不少答卷提到上述结论 2 与结论 3, 但是在叙述结论 2 时, 一些答卷未指明这一结论只适用于完全图, 在叙述结论 3 时, 一些答卷也未强调 G 与 G' 的差别. 这样, 也就产生了一个疑问: 结论 2 能否推广到非完全图呢? 这时, 相应于三角形不等式 (1.1) 的条件要变为:

对任 $(i, k) \in E$ 及从 i 至 k 的任一条路 P ,

$$w_{i,k} \leq \sum_{(j,l) \in P} w_{j,l}. \quad (1.2)$$

也就是说, 对任 $(i, k) \in E$, $w_{i,k}$ 恰等于 $G = (V, E, w)$ 中顶点 i 与 k 之间的最短路长. 对于上述疑问的结论如下:

结论 4 有例子表明, 即使 $G = (V, E, w)$ 满足 (1.2) 且存在 Hamilton 回路, 但 G 的最小 Hamilton 回路不是 G 的最优旅行商路线.

证 如图 1, $G = (V, E, w)$, V 由 10 个顶点组成, 而 E 由 13 条边组成, 权 w_{ij} 分别标出在每一条边旁, 其中 x 大于 1. 显然, 对此图 G , (1.2) 是成立的. 图 G 有唯一的 Hamilton 回路 ABCDEFGHIA, 其长度 (即最小的 Hamilton 回路长度) 为

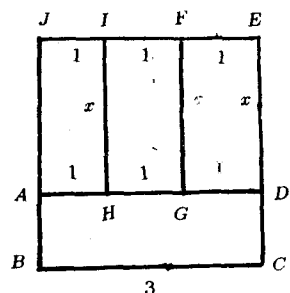


图 1

$$l_1 = 8 + 4x. \quad (1.3)$$

但图 G 的旅行商路线 ABAHGCDEFIJA 的长度为

$$l_2 = 10 + 2x. \quad (1.4)$$

由于 $x > 1$, 必有 $l_2 < l_1$, 这样就得到了结论 4. 证毕

尚待研究的问题是, 对满足 (1.2) 且存在 Hamilton 回路的图, 再增加什么合理的条件, 可保证 G 的最小 Hamilton 回路必是最优旅行商路线呢?

§2 关于目标函数的处理

在 98B 题第一小题中, 要求设计三组“总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线”. 以 C_1, C_2, C_3 表示三组巡视路线的长度, 上述要求可表示为如下双目标函数的优化:

$$\min (C_1 + C_2 + C_3), \quad \min \left(\max_{1 \leq i \leq 3} C_i - \min_{1 \leq i \leq 3} C_i \right).$$

从问题的实际背景出发, 可考虑替代为下列目标函数的优化:

$$\min \max_{1 \leq i \leq 3} C_i. \quad (2.1)$$

它与上述双目标在含义上有一致的地方, 但不尽相同.

在 98B 题第二小题中, 容易确定最小组数为 4 (参见本文 §3). 在 98B 题中已将 35 个村编号为从 1 到 35, 现再将 17 个乡的字母编号依次改为从 36 至 52, 将县城编号为 53, 引入点权 (顶点上的权) 如下:

$$v_i = 35 \quad (1 \leq i \leq 35), \quad v_i = 70 \quad (36 \leq i \leq 52), \quad v_{53} = 0, \quad (2.2)$$

其中已将在村与乡的巡视时间依照汽车行驶速度 (35 公里 / 小时) 化成了公里数. 以 $G = (V, E, w)$ 表示 98B 题的图, 以 $G' = (V, E', w')$ 表示相应的完全图 (w' 表示任二点之间的距离), 以 H_1, H_2, H_3, H_4 表示 G' 上的 4 个旅行商路线, 其全体能覆盖 V , 且每个 H_i 均包含顶点 53 (县城). 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 令

$$C_i = \sum_{(j,k) \in H_i} w'_{j,k}, \quad D_i = \sum_{j \in H_i} v_j.$$

类似于 (2.1), 对 98B 题第二小题, 可考虑 $G' = (V, E', w')$ 上列目标函数的优化:

$$\min \max_{1 \leq i \leq 4} (C_i + D_i). \quad (2.3)$$

但是, (2.3) 与 (2.1) 的区别是明显的, (2.1) 中的目标函数含有边权, 而 (2.3) 中的目标函数兼含边权与点权. 为了把 (2.3) 转换为与 (2.1) 相同的形式, 引入另一完全图 $G'' = (V, E', w'')$, 其中

$$\forall (j, k) \in E', \quad w''_{j,k} = w'_{j,k} + \frac{1}{2}v_j + \frac{1}{2}v_k \quad (2.4)$$

易知, 边权 w'' 仍满足三角形不等式. 这样, 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 令

$$C''_i = \sum_{(j,k) \in H_i} w''_{j,k},$$

利用 (2.4) 容易证明, 必成立 $C''_i = C_i + D_i$. 从而, 可以得到下列优化问题

$$\min \max_{1 \leq i \leq 4} C''_i. \quad (2.5)$$

结论 5 $G' = (V, E', w')$ 上的优化问题 (2.3) 等价于 $G'' = (V, E', w'')$ 上的优化问题 (2.5), 其中权边权 w'' 由 (2.4) 给出.

结论 5 的意义在于, G' 上的边权与点权都化成了 G'' 的边权, 从而使第二小题的问题与第一小题的问题 (2.1) 成为相同的形式 (只是组数不同), 它们可采用相同的近似算法来处理. 我们发现, 在 98B 题的个别答卷, 提到过把点权化为边权的思想, 但要把这一思想明确地形成一个结论, 还需联系到目标函数的具体形式, 以上讨论了单目标函数 $\max C_i$ 的情形, 对前述双目标的情形和下一节的最小组数问题, 讨论是类似的.

§3 最小组数问题

给定长度约束, 求解多旅行商路线的最小组数, 是一个有实际意义的重要问题. 98B 题中第二小题与第三小题均涉及这样的问题. 用 §2 中的记号, 它可以表示成如下形式. 给定一个连通图 $G = (V, E, w)$ (98B 题的相应数据见附录), 求相应的完全图 $G' = (V, E', w')$ 上多旅行商路线 H_i ($i = 1, 2, \dots, r$), 使其全体能覆盖 V , 其每一个旅行商路线均含有顶点 53 (县城), 且达到:

$$\min r, \quad (3.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in H_i} v_j + \sum_{(j,l) \in H_i} w'_{j,l} \leq L, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (3.2)$$

其中 v_j 为点权, L 为给定的长度上限.

一般来说, 求解最小组数问题 (3.1)–(3.2), 或者说, 要确定最小组数 r , 包括两个方面, 一方面, 要构造 G' 的 r 个旅行商路线, 满足相应的长度约束, 另一方面, 要证明 r 是组数的下界, 即证明 $r-1$ 组是不可行的.

对 98B 第二小题来说, 问题 (3.1)–(3.2) 中的长度上界 L 为 840 公里, 相应的时间上界为 24 小时. 给出 4 组可行的旅行商路线是不困难的, 多数答卷都能做到, 但要证明 4 组是一个下界, 不少答卷都做得不好, 只有少数试卷给出了简洁的论证. 以下是一个这样的论证. 假如 3 组可行的旅行商路线能符合长度约束或相应的时间约束, 由于从县城至所有点 (村或乡) 的距离的最大值为 $d = 77.5$ (公里), 而 $2d$ 是 G' 的多旅行商问题的一个简单下界, 这样, 由 (3.2) 可得:

$$3 \cdot 840 \geq \sum_{i=1}^{52} v_i + 2d = 69 \times 35 + 155 = 2570,$$

便得矛盾.

对于一般的长度上界 L (相应的时间上界为 $T = L/35$), 最小组数问题 (3.1)–(3.2) 的解答会是相当困难的, 计算量也会很大. 对 98B 第三小题来说, 问题 (3.1)–(3.2) 中的长度上界 L 为 225 公里, 它相当于时间上界 6.4286 小时. 很多答卷给出 23 组可行的旅行商路线, 不少答卷给出 22 组可行的旅行商路线, 但 22 组是否为最小组数呢? 对此, 未发现有一个答卷能够给出正确的论证. 当然, 这与答卷时间有限也是有关的. 我们将在 §5 与 §6 中证明下列结论.

结论 6 当 $L = 225$ 时, 最小组数问题 (3.1)–(3.2) 具有下界 $r = 22$.

§4 集合覆盖问题及其下界

为证明结论 6 做准备, 我们在本节叙述集合覆盖问题的概念及关于下界的一个结论. 集合覆盖问题的提法如下:

给定集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个子集族 F , 在 F 中寻找最小个数 (称最小覆盖数) 的子集族 $F' \subseteq F$, 使得 N 的每一个元素至少属于 F' 中的一个子集.

在计算复杂性理论中, 该问题是一个 NP 困难问题. 同时, 对于一般情况, 也很难得到什么结论. 为了得到有用的结论, 我们对 N 与 F 的形式做出一些限制.

假设 1 对任何 $S \in F$, S 的子集亦属于 F .

假设 2 记 F_j 为子集族 F 中元素个数为 j 的那些子集组成的族, 假设成立

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4.$$

假设 3 设 $N = A \cup B$, 记 $F_{j,l}$ 为子集族 F 中 A 元素个数为 j 、 B 元素个数为 l 的那些子集组成的族, 假设成立

$$F_3 = F_{3,0} \cup F_{2,1} \cup F_{1,2}, \quad F_4 = F_{4,0} \cup F_{3,1}. \quad (4.1)$$

上述二个假设等价于

$$F_5 = \emptyset, \quad F_{0,3} = \emptyset, \quad F_{2,2} = F_{1,3} = F_{0,4} = \emptyset.$$

这表明, 比起 A 中的元素来说, B 中的元素的“权”较重, 从而, F_3 中没有 3 元素皆属于 B 的三点子集, F_4 也有类似的性质.

结论 7 若 N 的子集族 F 满足假设 1–3, 设 $|N| = n$, $|B| = b$, 又 $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 的最大分离子集数为 q , 则集合覆盖问题的最小覆盖数 r 满足:

$$r \geq \lceil (n + b - q) / 4 \rceil.$$

该结论的证明从略, 有兴趣的读者可以自己研究.

该结论给出了最小覆盖数的一个下界, 它特别适合于 $F_{1,2}$ 与 $F_{3,1}$ 所含子集个数较少的情形. 此外, 在有关假设满足时, 另有二个明显的下界 $\lceil n/4 \rceil$ 与 $\lceil b/2 \rceil$.

§5 合格组的一些性质

首先, 简述一下 §2 中提到过的顶点编号. 顶点集 N 分为 A (村) 与 B (乡), 其中

$$A = \{1, 2, \dots, 35\}, \quad B = \{36, 37, \dots, 52\}$$

与最小组数问题 (3.1)–(3.2) 相一致, 根据 98B 第三小题的要求, 我们引入下列定义.

定义 1 $N = A \cup B$ 的一个子集 S 称为合格组, 如果

$$\sum_{j \in S} v_j + \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq 225, \quad (5.1)$$

其中点权 v_i 由 (2.2) 给出, $\text{LTSP}(\cdot)$ 表示这些点的旅行商路线的最优长度.

这样, 每个合格组确定了一个可行的旅行商路线, 98B 题第三小题中的要求就是要确定寻找组数最少的合格组, 使其全体能覆盖所有村与乡.

合格组的全体构成 N 的子集族 F . 如前, 以 F_j 表点数为 j 的合格组的全体. 经过计算与分析, 我们得到:

$$|F_1| = 52, \quad (5.2)$$

$$|F_2| = 795, \quad (5.3)$$

$$|F_3| = 1354, \quad (5.4)$$

$$|F_4| = 58, \quad (5.5)$$

$$|F_5| = 0, \quad (5.6)$$

现对上述诸式作简要的说明如下. (5.1) 右端 225(公里) 相当于时间上界 6.4286 小时, 它恰是 $v_j + \text{LTSP}(\{j, 53\})$ 对一切 j 的最大值, 所以每一个点(村或乡)均是一个合格组, 因此显然成立 (5.2). (5.3) 与 (5.4) 可通过穷举法算得. 为了较快地确定 F_4 , 即确定一切 4 点合格组, 可考虑 F_3 中哪些 3 点合格组可以扩充, 例如, 假如 3 点合格组 $\{i, j, k\}$ 能扩充为 4 点合格组, 它至少应满足

$$\sum_{j \in S} v_j + \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq 190,$$

即它至少有松弛量 35(公里), 相当于 1 小时. 同时, 假如它扩充为 4 点合格组 $\{i, j, k, l\}$, 那么还应有 $\{i, j, l\} \in F_3$, $\{i, k, l\} \in F_3$, $\{j, k, l\} \in F_3$. 这样, 4 点合格组的候选者就少得多了, 从而 F_4 可以较快地计算出来, 便得 (5.5). 当然, 以上 F_2, F_3, F_4 的计算都要借助于计算机来完成.

下面, 我们证明 (5.6). 不然的话, 设存在 5 点合格组 $S = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$. 由点权 (2.2) 及定义 1, S 中至多一个点为 B 的点(乡). 假如 S 中确有一个点为 B 的点, S 中点权之和为 210, 于是对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 有

$$w'(k_i, 53) \leq \frac{1}{2} \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq \frac{1}{2}(225 - 210) = 7.5, \quad (5.7)$$

其中 $w'(i, j) = w'_{i,j}$ 表示点 i 与点 j 之间的距离. 容易检验, 满足 (5.7) 的只有一个点 (点 1), 不可能有 5 个点, 便得矛盾. 假如 S 中所有点为 A 的点, S 中点权之和为 175, 于是对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 有

$$w'(k_i, 53) \leq \frac{1}{2} \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq \frac{1}{2}(225 - 175) = 25. \quad (5.8)$$

同样, 对 $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ($i \neq j$), 有

$$w'(k_i, k_j) \leq \frac{1}{2} \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq 25. \quad (5.9)$$

容易检验, A 中点满足 (5.8) 的有 9 个, 其全体记为 $A^* = \{1, 2, 3, 5, 26, 28, 29, 31, 33\}$. 也容易检验, 只有 A^* 中的点 $k_i = 1$, 存在 A^* 中其他四个点 k_j 能满足 (5.9). 但 (5.9) 要求这样的点 k_i 有 5 个, 所以亦得矛盾.

如前, 以 $F_{j,l}$ 表示 A 中点数为 j , B 中点数为 l 的合格组的全体. 用 (5.6) 的推理过程同样可证明

$$|F_{0,3}| = |F_{2,2}| = 0, \quad (5.10)$$

从而更有 $F_{1,3} = F_{0,4} = \emptyset$. 由 (5.1) 所确定的合格组构成的子集族 F 满足假设 1, 是显然的. (5.6) 与 (5.11) 表明 F 满足假设 2--3. 根据计算, $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 包含下列 15 个合格组:

$$\begin{aligned} &\{1, 36, 37\}, \quad \{1, 36, 38\}, \quad \{1, 36, 52\}, \quad \{1, 37, 38\}, \quad \{1, 37, 50\}, \\ &\{1, 37, 52\}, \quad \{1, 38, 50\}, \quad \{2, 37, 38\}, \quad \{2, 38, 39\}, \quad \{3, 37, 38\}, \\ &\{3, 38, 39\}, \quad \{29, 50, 52\}, \quad \{1, 2, 3, 37\}, \quad \{1, 2, 3, 38\}, \quad \{2, 3, 5, 38\}. \end{aligned}$$

由于上述 15 个合格组只涉及 11 个点, 而上述每个合格组为 3 点或 4 点, 所以 $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 至多有 3 个分离的合格组. 通过简单列举, 可知 $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 的最大分离合格组个数为

$$q = 3. \quad (5.11)$$

§6 结论 6 的证明

由 $|N| = 52$, $|b| = 17$ 及 (5.11), 根据结论 7 可算得复盖 N 的最小组数的一个下界为 $\lceil (|N| + |B| - q)/4 \rceil = \lceil 66/4 \rceil = 17$, 但它与结论 6 (22 组为下界) 相去甚远. 因此, 我们还要讨论子集族 F 的更多性质, 以发掘与利用覆盖 N 的合格组的结构.

以 $F_j(k)$ 表示 F_j 中含有点 k 的合格组的全体 (也是子集族), 类似地引入记号 $F_{j,l}(k)$. 对计算结果进行检验, 根据 $F_2(k) = \emptyset$ 等要求可以发现 N 的下列子集:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{42, 43, 44\}, & A_1 &= \{10, 12, 13, 14, 15, 16\}, \\ B_2 &= \{41, 45, 46\}, & A_2 &= \{8, 9, 11, 17, 18, 19, 22, 24\}. \end{aligned}$$

它们分别具有下列性质:

$$\forall k \in B_1, \quad F_2(k) = \emptyset, \quad (6.1)$$

$$\forall k \in A_1, \quad F_{1,1}(k) = \emptyset, \quad F_3(k) = \emptyset, \quad (6.2)$$

$$\forall k \in B_2, \quad F_{0,2}(k) = \emptyset, \quad F_3(k) = \emptyset, \quad (6.3)$$

$$\forall k \in A_2, \quad F_{1,2}(k) = F_{2,1}(k) = \emptyset, \quad F_{3,0} \neq \emptyset, \quad F_4(k) = \emptyset. \quad (6.4)$$

设 $T = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ 由 r 个合格组组成, 它能覆盖点集 $N = A \cup B$. 由于满足假设 1, 可设不同合格组是互相分离的. 由性质 (6.1), T 必含有 3 个单点合格组, 不妨设

$$S_1 = \{42\}, \quad S_2 = \{43\}, \quad S_3 = \{44\}.$$

由性质 (6.2)–(6.3), 覆盖 $A_1 \cup B_2$ 的必是两点合格组. 进一步, 可以发现, 二点均在 $A_1 \cup B_2$ 中的二点合格组只有 4 个, 更具体地说, 有

$$F'_2 = F_2 \cap (A_1 \cup B_2)^2 = \{\{12, 13\}, \{13, 14\}, \{13, 16\}, \{15, 16\}\}. \quad (6.5)$$

由 (6.5) 易知 F'_2 中分离的 2 点合格组至多有 2 个, 因此只可能有以下三个情形:

情形 1 $|T \cap F'_2| = 2$; **情形 2** $|T \cap F'_2| = 1$; **情形 3** $|T \cap F'_2| = 0$.

以情形 1 来分析, 其它二情形的分析是类似的. 在情形 1, $T \cap F'_2$ 的二个 2 点合格组能覆盖 $A_1 \cup B_2$ 中的 4 个点, T 必还有 5 个合格组覆盖 $A_1 \cup B_2$ 的另外 5 个点. 由于 (6.2)–(6.3), 这 5 个合格组必定皆为 2 点合格组. 它们的全体亦覆盖 $A_1 \cup B_2$ 之外的 5 个点 i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 , 且这 5 个点皆属于 A (即不能属于 B). 现不妨设覆盖 $A_1 \cup B_2$ 的 7 个 2 点合格组为 S_4, S_5, \dots, S_{10} , 且令

$$T_1 = \{S_{11}, S_{12}, \dots, S_r\}, \quad (6.6)$$

$$N_1 = N \setminus (B_1 \cup A_1 \cup B_2 \cup \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}). \quad (6.7)$$

于是, T_1 覆盖 N_1 . 经计算可检验如下性质: A_2 的任三点不能组成一个合格组, 即

$$F_3 \cap (A_2 \times A_2 \times A_2) = \emptyset. \quad (6.8)$$

由于 $|A_2| = 8$, $A'_2 = A_2 \setminus \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ 至少有 3 个点. 同时, (6.8) 保证这 3 个点至少属于二个合格组. 因此, 不妨设 $i_6 \in A'_2 \cap S_{11}$, $i_7 \in A'_2 \cap S_{12}$. 由 (6.4), 可分以下情形:

情形 1.1 $|S_{11}| = |S_{12}| = 3$; **情形 1.2** $|S_{11}| \leq 2$ 或 $|S_{12}| \leq 2$.

其实, 情形 1.2 又可分成若干情形. 现只分析情形 1.1, 因其他情形亦类似. 分析的整个思路可参见图 2. 不妨设

$$S_{11} = \{i_6, i_8, i_9\} \in F_{3,0}, \quad S_{12} = \{i_7, i_{10}, i_{11}\} \in F_{3,0}.$$

接着 (6.6)–(6.7), 令

$$T_2 = T_1 \setminus \{S_{11}, S_{12}\} = \{S_{13}, S_{14}, \dots, S_r\},$$

$$N_2 = N_1 \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{11}\} = A' \cup B',$$

其中 $A' \subset A$, $B' \subset B$. 实际上,

$$A' = A \setminus (A_1 \cup \{i_1, i_2, \dots, i_{11}\}),$$

$$B' = B \setminus (B_1 \cup B_2).$$

$$\text{所以 } |A'| = 35 - 17 = 18,$$

$$|B'| = 17 - 6 = 11,$$

$$|N_2| = 29.$$

由于 T_2 覆盖 N_2 , 根据结论 7 与 (5.10), 可得 T_2 中组数的下界如下:

$$r - 12 \geq \lceil (29 + 11 - 3)/4 \rceil = \lceil 37/4 \rceil = 10.$$

所以 $r \geq 22$. 结论 6 证毕.

注 如果要校核上述证明中的计算是否正确, 实际上不必要算出 F_2, F_3, F_4 的全部合格组 (见 (5.3)–(5.5)), 而只需校核对推理过程起作用的以下内容: (4.1), (5.11), (6.1)–(6.4) 以及 (6.8).

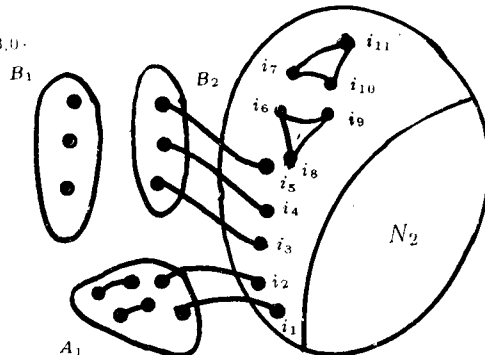


图 2

附 录

98B 题的图形所相应的图 $G = (V, E, w)$ 的有关数据如下, 以备必要时可复算. $w(32, 33) = 19$ 不满足三角形不等式 (1.2), 该值被略去.

$w(53, 1) = 6,$	$w(53, 2) = 9.2,$	$w(53, 38) = 11.5,$	$w(53, 48) = 19.8,$
$w(53, 50) = 10.1,$	$w(53, 52) = 12.9,$	$w(1, 36) = 10.3,$	$w(1, 37) = 5.9,$
$w(1, 38) = 11.2,$	$w(2, 3) = 4.8,$	$w(2, 5) = 8.3,$	$w(3, 38) = 7.9,$
$w(3, 39) = 8.2,$	$w(4, 8) = 20.4,$	$w(4, 39) = 12.7,$	$w(5, 6) = 9.7,$
$w(5, 39) = 11.3,$	$w(5, 48) = 11.4,$	$w(6, 7) = 7.3,$	$w(6, 47) = 11.8,$
$w(6, 48) = 9.5,$	$w(7, 39) = 15.1,$	$w(7, 49) = 7.2,$	$w(7, 47) = 14.5,$
$w(8, 40) = 8,$	$w(9, 40) = 7.8,$	$w(9, 41) = 5.6,$	$w(10, 41) = 10.8,$
$w(11, 40) = 14.2,$	$w(11, 42) = 6.8,$	$w(11, 45) = 13.2,$	$w(12, 41) = 12.2,$
$w(12, 42) = 7.8,$	$w(12, 43) = 10.2,$	$w(13, 14) = 8.6,$	$w(13, 42) = 8.6,$
$w(13, 44) = 16.4,$	$w(13, 45) = 9.8,$	$w(14, 15) = 15,$	$w(14, 43) = 9.9,$
$w(15, 44) = 8.5,$	$w(16, 17) = 6.8,$	$w(16, 44) = 11.8,$	$w(17, 22) = 6.7,$
$w(17, 46) = 9.3,$	$w(18, 44) = 8.2,$	$w(18, 45) = 8.2,$	$w(18, 46) = 9.2,$
$w(19, 20) = 9.3,$	$w(19, 45) = 8.1,$	$w(19, 46) = 7.2,$	$w(20, 21) = 7.9,$
$w(20, 25) = 6.5,$	$w(20, 47) = 5.5,$	$w(21, 23) = 9.1,$	$w(21, 25) = 7.8,$
$w(21, 46) = 4.1,$	$w(22, 23) = 10,$	$w(22, 46) = 10.1,$	$w(23, 24) = 8.9,$
$w(23, 49) = 7.9,$	$w(24, 27) = 18.8,$	$w(24, 49) = 13.2,$	$w(25, 48) = 12,$
$w(25, 49) = 8.8,$	$w(26, 27) = 7.8,$	$w(26, 49) = 10.5,$	$w(26, 50) = 10.5,$
$w(27, 28) = 7.9,$	$w(28, 50) = 12.1,$	$w(28, 51) = 8.3,$	$w(29, 50) = 15.2,$
$w(29, 51) = 7.2,$	$w(29, 52) = 7.9,$	$w(30, 32) = 10.3,$	$w(30, 51) = 7.7,$
$w(31, 32) = 8.1,$	$w(31, 33) = 7.3,$	$w(31, 52) = 9.2,$	$w(32, 35) = 14.9,$
$w(33, 35) = 20.3,$	$w(33, 36) = 7.4,$	$w(34, 35) = 8.2,$	$w(34, 36) = 11.5,$
$w(34, 37) = 17.6,$	$w(36, 37) = 12.2,$	$w(36, 52) = 8.8,$	$w(37, 38) = 11,$
$w(44, 45) = 15.8,$	$w(48, 49) = 14.2,$		

参 考 文 献

- [1] 杜端甫, 运筹图论, 北京航空航天大学出版社, 北京, 1994.
 [2] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, The Traveling Salesman Problem, Wileys, Chichester, 1995.

Some Problems on Multiple Traveling Salesman Routes

YU WEN-CI

(East China University of Science and Technology, Shanghai 200237)