第 28 卷 第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1998

截断切割优化模型

祁洪全　　李焕新　　万　珍

指导教师：马传秀

(湖南大学，长沙 410082)

编者按　本文对截断切割问题的数学模型的描述、优化准则、参数分析等方面作了深入的讨论，有一定特色.

摘　要　本文讨论的是长方体的切割方式选择问题. 首先，我们从理论上表述了对“考虑切割方式”理解，其次利用一个等效转化方法将 $r\neq 1$ 的情形作简化，再分类思想对所需考虑的切割方式进行分类找出每一类的最优切割方式，最后用简明直观的图解方法建立了数学模型. 另外，我们通过机理分析探讨了模型二 —— 规划模型的可行性，并作了一定的深入讨论. 对于较特殊的情况，我们还给出了简明的优化方法.

一、问题的提出 (略)

二、符号说明

a,b,c：待加工长方体的长、宽、高；　d_1,d_2,d_3：两长方体左侧面、正面、底面之间的距离；
l_1,l_2,l_3：两长方体右侧面、反面、上平面之间的距离；　a_1,b_1,c_1：成品长方体的长、宽、高；
C：第 i 个面的面积；　k：垂直切割单位面积费用；　e：调整一次刀具额外费用 e.
P：费用；　r：水平切割单位面积费用与垂直切割单位面积费用之比；

三、问题的分析

对于 6 个面共有 $P_6^6=720$ 种不同的加工次序，一般来说，各种加工次序使得各加工费用互不相等，但可以肯定的是这 720 种切割次序中有相当多的一部分是加工费用很大的切割，因此对这部分切割方式我们不予考虑. 为此，先提出我们对问题中“需考虑的不同切割方式”的理解：对于两个相对的平行平面不管它们之间是否穿插有其它平面的切割，两者之间进行切割的先后次序已经确定，即总是先切掉厚度大的部分，再考虑切厚度小的部分 (其中厚度定义为待切长方体六个面到内部成品长方体相应平面的距离). 因此，“需考虑的不同切割方式”是指：在满足两个平行平面的切割先后次序是先切厚度大的，

再切厚度小的的条件下的不同的切割方式. 事实上, 我们可以对上述考虑方式的可行性作出证明：以待加工长方体的 1 、2(图略) 两个平行侧面为例，假设 $d_1>l_1$，由于切割 1 、2 两面的费用相同 (设为 P_0)，它们的切割都对以后的 3 、4 、5 、6 面的切割产生影响，不妨假设 3 、4 、5 、6 面均未进切割，并设 $r=1,e=0$ ，则先

1) 切 1，再依次切 3 、4 、5 、6，则费用为

$$P_1=P_0+2(a-d_1)ck+2b_1(a-d_1)k=P_0+2(a-d_1)(c+b_1)k$$

2) 先切 2, 再依次切 3 、4 、5 、6，则费用为

$$P_2=P_0+2(a-l_1)ck+2b_1(a-l_1)k=P_0+2(a-l_1)(c+b_1)k$$

显然，当 $d_1>l_1$ 时 $P_1<P_2$, 因此对两平行平面只考虑厚度大的先切割这一种次序.

类似地可证：对于 3 、4 、5 、6 面全部或部分已切割的情形上述结论也成立.

四、模型假设

假设成品长方体处于一般的位置，即需要切 6 刀才能从待切长方体中切割而得.

五、模型的建立及求解

1. 确定考虑的不同切割方式的总数

为从一个长方体中加工出一个已知尺寸、位置预定的长方体，我们根据两个长方体的对应平面是平行的以及对"需考虑切割方式"的理解，可以利用排列组合的知识求出"需考虑的不同切割方式"的总数.

在六个空格中任选两个放左右侧面 1 、2, 因为依据 d_1,l_1 已先确定了 1 、2 的先后顺序，故其放法有 C_6^2 种. 同理，正反面 3 、4 一共有 C_4^2 种放法， 5 、6 则放剩下的两个空格且只有一种放法. 综上所述，需考虑的不同切割方式的总数为

$$C_6^2C_4^2 = 90 \text{ 种}$$

2. 加工费用优化的切割方式模型

模型一、首先给出两个说明：

1) 先假定：左、右两侧面要切割部分厚度大的面为 1 面，另一侧为 2 面；徽反两面要切割部分厚度大的面为 3 面，另一侧为 4 面；上、下两面要切割部分厚度大的面为 5 面，另一侧为 6 面.

2) 为使问题简化，在所有 $r\neq1$ 的问题求解中，我们都首先将单位面积切割费用统一化，具体做法是：如果水平单位面积切割费用是垂直面单位面积切割费用 k 的 r 倍时，我们利用等效转换的方法，将长方体的高都缩短（伸长）至原来的 $\frac{1}{r}$ 倍，则统一的单位面积切割费用都为 rk.

根据 (1) 一共有 90 种切割方式，我们利用计算机编程将 90 种需考虑的切割方式进行遍历，并根据切割次序确定调刀次数.

据题目条件，我们调整刀具最多 3 次，至少为 1 次，所以，我们在程序中将 90 种切割方式按调刀次数 $i=1,2,3$ 进行分类，并分别求出相应类最小面积 Min(i) 表达式，以及对应的切割方式.

则额外调刀 1, 2, 3 次切割方式的最小总费用分别为：

$$P_1 = \mathrm{Min}\,(1)kr + e \qquad P_2 = \mathrm{Min}\,(2)kr + 2e \qquad P_3 = \mathrm{Min}\,(3)kr + 3e$$

在具体的确定某种材料切割方式的方案中，我们只需要输入 a,b,c,a_1,b_1,c_1 和 d_1,d_2,d_3 及 k,r 的值，则计算机会输出相应的关于 e 的函数表达式 $P_i=\mathrm{Min}\,(i)kr+ie,(i=1,2,3)$, 其中的 $\mathrm{Min}\,(i)kr$ 是一个常数.

如果 e 已是一个确定的数，则我们可以直接代入比较 P_1,P_2,P_3 的大小，不妨设 P_i 最小，则 P_i 所对应的切割方式就为最优的切割方式.

模型二、设 n 为所需截断切割次数， $n=6$；

设长方体各面号安排规则为左面为 1 号面，右面为 2 号面，上平面为 5 号面，底面为 6 号面，正面为 3 号面，反面为 4 号面；

设 C_{ks} 是指第 t 面在第 次进行切割所需的费用，构造如下的切割费用矩阵 $C=(C_{ks})$.

设 Y_{ts} 口用来指示第 t 号面是否在第 s 次进行切割，于是，整个长方体的各面加工次序可用如下的切割次序矩阵来表示 $Y=(Y_{ks})$ 其中

$$Y_{ts} = \begin{cases} 1, & \text{若}\, t\ \text{号面在第}\, s\ \text{次进行切割;} \\ 0, & \text{若}\, t\ \text{号面不是在第}\, s\ \text{次进行切;} \end{cases}$$

由于 Y_{ts} 只取 0, 1 值，故 Y 矩阵的每一个具体值都对应一个排序方案，且 Y_{ts} 必满足约束方程组 1：

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_{ks} = 1;\ s = 1,2,\cdots,n; \\ \sum\limits_{s=1}^{n} Y_{ks} = 1;\ t = 1,2,\cdots,n; \end{cases}$$

设 C_t 为切割第 t 号面的费用：

$$C_t = Y_{t1} \cdot C_{t1} + Y_t \cdot C_{t2} + \cdots + Y_{tn} \cdot C_{tn};$$

由此加工一个长方体的总费用为：

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} [Y_{ks} C_{ks}]$$

那么要求使加工费用最少的各面加工次序，即要求满足方程组 1 的约束的，使 Z 取最小值的切割次序矩阵 Y、我们构造了如下的规划模型

$$\begin{cases} \min Z, \\ \sum\limits_{s=1}^{n} Y_{ts}, \qquad t = 1, 2, \cdots, n; \\ \sum\limits_{t=1}^{n} Y_{ts}, \qquad s = 1, 2, \cdots, n; \end{cases}$$

设 h_s 为第 s 次切割的面号.

下面对模型中的切割费用矩阵 C 进行量化

C_{ts} 是与 h_1 至 h_{s-1} 有关的. 设 h_1 对 h_2 面的切割费用有影响 m_1,h_2 对 h_3 面的切割费用有影响 m_2, 则由 m_1, m_2 可以求出 h_1 面和 h_2 面对 h_3 面切割费用的影响. 以此递推，可得到 h_1 至 h_{s-1} 面对 h_s 面切割费用的影响.

设 X_{ij} 表示切第 i 面对随后切第 j 面的费用的影响，即对切割面积费用的影响，于是我们建立一个费用影响矩阵 X 来表示任一个面对在它随后切割的其它面的费用影响 $X=(X_{ij})$ 则

$$C_{ts} = C_{t1} - \left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i1} X_{it} + \sum_{i=1}^{n} Y_{i2} X_{it} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} Y_{i(s-1)} \cdot X_{it} \right] + F_{ts}$$

其中 F_{ts} 表示第 t 面在第 s 次切割所需的调刀费用求 X_{ij} 分三种情况：

a：当 $i=j$ 时， $X_{ij}=0$;

b：当 $j=i+(-1)^{i+1}$ 时，即 j 面是 i 面的平行面时， $X_{ij}=0$;

c：当 $j\neq i+(-1)^{i+1}$ 且 $j\neq i$ 时，即一般情况时：

X_{ij} 的大小与假设当以 j 面为顶面，它的相邻的两对对称侧面中的那对不包含 i 面的侧面是否切过有关.

例 $i=1,j=5$, 则 X_{ij} 与第 3 、 4 面是否切过有关，而第 3 、 4 面是否切过可以用 Y_{ts} 来表示.

设先切第 i 面，随后切 j 面，以 j 面为顶面的两个侧面号为 p,q.

$$X_{ij} = \sum_{s=1}^{n} [Y_{ps} \cdot \text{若}\, p\, \text{面已切对}\, j\, \text{面省去的切割面积费用}\, G_p] + \sum_{s=1}^{n} [Y_{qs} \cdot (\text{若}\, q\, \text{面已切对}\, j\, \text{面省去的切割面积费用} G_q]$$

若 p 面已切对 j 面省去的切割面积费用又与 i 的平行面 W 是否切割有关.

例 $i=1,j=5,p=3,G_3$ 又与 i 的平行面 2 是否已切有关，而面 2 是否已切可用 Y_{ts} 表示.

当 W 面已切时， $G_p=p$ 面已切对 j 面的最大的省去切割面积费用 $-W$ 面已切对 G_p 的最大影响. 当 W 面没切时， $G_p=p$ 面已切对 j 的最大的省去切割面积费用).

例 $i=1,j=5,p=3$ 时，$W=2$ 若 2 面已切 $G_p=$ 切割所有阴影部分的费用一切割阴影部分 1 的费用).

设 t_{pj} 是指 p 面已切对 j 面最大的省去切割费用，我们建立一个最大省费矩阵 T 来表示 p 面对 j 面的最大省去切割费用，通过计算，我们得到如下的 T：

$p \backslash j$	1	2	3
1	0	0	$C\cdot d_i$
2	0	0	$C\cdot[a-(a_i+d_i)]$
3	$C\cdot d_2$	$C\cdots d_2$	0
4	$C\cdot[b-(d_2+b_1)]$	$C\cdot[b-[d_2+b_1)]$	0
5	$b\cdot[C-(C_1+b_3)]$	$b\cdot[C(C_1+d_3)]$	$a\cdot[C-(C_1+d_3)]$
6	$b\cdot d_3$	$b\cdot d_3$	$a\cdot d_3$

$p \backslash j$	4	5	6
1	$C\cdot d_1$	$b\cdot d_1$	$b\cdot d_1$
2	$C\cdot[a-(a_1+d_1)]$	$b\cdot[a(a_1+d_1)]$	$b\cdot[a-(a_i+d_1)]$
3	0	$a\cdot d_2$	$a\cdot d_2$
4	0	$a[b-[d_2+b_1)]$	$a[b-(d_2+d_1)]$
5	$a\cdot[C-(C_1+b_3)]$	0	0
6	$b\cdot d_3$	0	0

设 r_{wp} 表示 W 面已切对 G_p 的最大影响，从而建立一个矩阵 R 来表示 W 面已切对 G_p 的最大影响，通过计算，我们得到如下的 R：

$p \backslash j$	1	2	3
1	0	0	$d_1\cdot d_2$
2	0	0	$d_2\cdot[a-(a_1+d_1)]$
3	$d_1\cdot d_2$	$d_2\cdot[a-(a_1+d_1)]$	0
4	$d_1[b-(b_1+d_2)]$	$[a-(a_1+d_1)]\cdot[b-(b_1+d_2)]$	0
5	$d_1\cdot[a-(a_1+d_1)]\cdot[C-(C_1+d_3)]$	$d_2\cdot[C-(C_1+d_3)]$	$d_2\cdot[C-(C_1+d_3)]$
6	$d_1\cdot d_3$	$[a-(a_1+d_1)]$	$d_2\cdot d_3$

$p \backslash j$	4	5	6
1	$d_1\cdot[b-(b_1+d_2)]$	$d\cdot[C-(C_1+d_3)]$	$d_1\cdot d_3$
2	$[a-(a_1+d_1)]\cdot[b-(b_1+d_2)]$	$\cdot[a-(a_1+d_1)]\cdot[C-(C_1+d_1)]$	$d_3\cdot[a-(a_1+d_1)]$
3	0	$d_2\cdot[C-(C_1+d_3)]$	$d_2\cdot d_3$
4	0	$[b-(b_1+d_2)]\cdot[C-(C_1+d_2)]$	$d_3\cdot(b-(b_1+d_2)]$
5	$[b-(b_1+d_2)]\cdot[C-(C_1+d_3)]$	0	0
6	$d_3\cdot[b-(b_1+d_2)]$	0	0

所以 $G_p=\left(t_{pj}\sum_{s=1}^{n}Y_{ws}r_{wp}\right)\cdot k\cdot r$ 同理 $G_q=\left(t_{qj}\sum_{s=1}^{n}Y_{ws}r_{wq}\right)\cdot k\cdot r$ 其中

$$p=\left[n-\left(\frac{i+i\,\mathrm{mod}2}{2}+\frac{j+j\,\mathrm{mod},2}{2}\right)\right]\cdot 2-1;$$

$$q=p-(-1)^p;\qquad W=i-(-1)^i.$$

于是

$$X_{ij}=\sum_{s=1}^{n}[Y_{ps}\cdot G_p]+\sum_{s=1}^{n}[Y_{qs}\cdot G_q]$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\left[Y_{ps}\left(t_{pj}-\sum_{s=1}^{n}Y_{ws}r_{wp}\right)\right]+\sum_{s=1}^{n}\left[Y_{qs}\cdot\left(t_{qj}\sum_{s=1}^{n}Y_{ws}r_{wq}\right)\right]$$

当 $e=0$ 时 $F_{ks}=0$. $(k=1,2,\cdots,n,s=1,2,\cdots,n)$ 可以由上述规划模型求得最优的切割方式；

当 $e\neq0$ 时，$F_{ts}\neq0$，只要求出 F_{ts} 的表达式，就能求出 C_{ts}，据此也可以根据前述的规划模型的表达式求出使加工费用最小的切割方式.

模型三、（$e=0$ 时的准则模型）

特别当 $e=0$ 时，我们得到一个简明的优化准则：首先依等效转换方法将高缩短（伸长）使垂直面、水平面单位面积切割费用化归为 kr，然后依次切割待切割部分厚度最大的。如果有 n 个待切厚度相同，则厚度相同的 n 个待切部分对应的面的编号作全排列，得到 $n!$ 种最优切割方式。这个准则实际上就是一种最优的数学模型，我们称之为准则模型．下面给出了最优性证明：

任意选两个满足条件的长方体，假设经过 $i\ (i<5)$ 次切割之后侧面 1 、正面 3 还未切割，且 $d_1>d_2$、不妨设此时待切长方体的长为 a，宽为 b，高为 c，则

1）先切 1、再切 3 的两次切割总费用为：

$$P_{13}=[bc+(a-d_1)c]kr=(bc+ac-d_1c)kr$$

2）先切 3，再切 1 的两次切割总费用为：

$$P_{31}=[ac+(b-d_2)c]kr=[bc+ac-d_2]kr$$

显然 P_{13} 与 P_{31} 的费用分别与厚度 d_1,d_2 有关，先切厚度大的侧面 1，再切正面 3 的总费用更小.

我们将六个面按厚度从大到小的顺序依次记为 j_1、j_6，这就是按 $e=0$ 时的准则模型得到的最优加工次序.

根据上述证明可知，某一部门的"每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割"切割准则不是最优的．因为该准则相当于"每一次都选取面积最小的面进行切割"，而我们已验证 $e=0$ 时，每次都选取厚度大的待切部分进行切割．显然，厚度 $h=V/S$，式中 V,S 分别为待切部分的体积和面积，当 S 为最小时，因受体积 V 的影响，h 并不一定为最大，所以在切割时不仅仅要考虑待切割部分的面积，还必须同时考虑待切割部分的体积．另外，我们利用所给问题 5 的 (b) 情形，也可以验证这不是最优的，因为按每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割的费用为 461.5 元，而通过我们的准则，最少费用为 437.5 元.

六、模型的应用与检验

给出待加工长方体和成品长方体的长、宽、高分别为 10,14.5,19 和 3,2,4，二者左侧面、正面、底面之间的距离分别为 6 、 7 、 9(单位均为厘米)．垂直切割费用为每平方厘米 1 元.

此时待加工长方体的左、右、正、反、上、下的编号分别为 1 、 2 、 3 、 4 、 6 、 5.

1．对 a．$r=1,e=0$，b．$r=1.5,e=0$；c．$r=8,e=0$ 三种情形，我们根据模型中 $e=0$ 的简明

r	e	e_1	最优切割方式	最少费用
1	19	4	531642 536142	374
1.5	$19\times\frac{2}{3}$	4×3	351462 315462	437.5
8	$19\times\frac{1}{8}$	2	314526	540.5

注：表中的 c, c_1 均为经过等效转换后的长方体的高.

2. $r=1.5, e\in[2,15]$ 所有的最优解

依据模型一将待定的长、宽、高、厚度、k、r 输入程序一中，则计算机将所考虑的 90 种切割方式依调整刀具的次数分类后将每一类的最小费用表达式分别表示为：

$$l_1 : P_1 = 442.5 + e; \qquad \text{调整一次刀具}$$

对应的切割方式： 354162

$$l_2 : P_2 = 456.5 + 2e; \qquad \text{调整二次刀具}$$

对应的切割方式： 135462

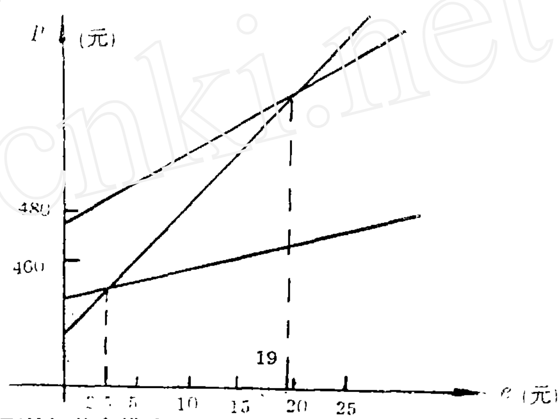
$$l_3 : P_3 = 437.5 + 3e; \qquad \text{调整三次刀具}$$

对应的切割方式： 315462 和 351462

我们先求出直线 l_1, l_2, l_3 在 $e\in[0,\infty)$ 区间中的交点

$$e_1 = 2.5,\ e_2 = 19.$$

并在坐标中画出图形.



我们利用图解法可知：

1) $e\in[2,2.5]$ 时，最小费用表达式为 $P=P_3=437.5+3e$ (对应于直线 l_3)，其对应的最佳切割方式为 315462 和 351462;

2) $e\in[2.5,1.5]$ 时，最小费用表达式为 $P=P_1=442.5+e$ (对应于直线 l_1)，其对应的最佳切割方式为： 354162;

另外，我们通过计算机可以对 90 种不同的切割方式进行枚举，所得到的结果与我们计算出来的结果是相一致的.

七、模型的评价和推广

我们从问题的要求出发，分析了应该考虑的各种情况，建立了较一般的数学模型，并进行了理论论证和实例验证；对于特殊情况，我们也给出了一种简明的数学模型，并作了论证. 事实证明，我们建立的模型能较好地解决问题.

对于另外一类特殊的情况，即目标长方体可能有某几个面不需切割时，可将对应的厚度视为 0，于是上面给出的三个模型仍然是适用的.

但是，我们的模型二也存在一定的缺陷，即对于求解使切割费用最小的切割次序的规划模型，仅从理论上得到了最优切割方式，由于第 t 面在第 s 次切割时的调刀次数没能找到一个数学表达式来表达，故此规划模型可能还只适用于 $e=0$ 时的情况. 根据规律求出调刀次数的表达式，使得规划模型能适用于 e 为任何值的情况，是该模型改进的方向.

附 录 (略)

参 考 文 献

[1] 叶其孝主编，数学建模教育与国际数学建模竞赛，工科数学杂志社， 8, 1994.

[2] 钱颂迪等主编，运筹学，清华大学出版社，北京， 1988.

[3] D.P. 柏塞克斯著，李人厚、韩宗昭译，动态规划确定性和随机模型，西安交通大学出版社，西安， 1990.