

关于洗衣机节水的数学模型

赵星涛 洪太海 欧阳雷

(山东大学, 济南 250100)

指导教师: 余 恬

编者按 本文简短扼要, 其特点是: 在建模之前, 首先注重对所研究的事物(“洗涤过程”)进行仔细观察, 并注意到衣物在脱水过程中对污物有“过滤”(还应有“吸附”)效应, 进而对这一效应进行了定量的实验与测量; 在此基础上再建立能够合理的反映洗涤过程的数学模型. 这种态度是应大力提倡的. 本题的很多答卷忽略了这一重要的现象. 本文不足之处是讨论不够细致, 如模型的假设, 求解方法的思路, 对计算结果的对比分析等等部分.

摘 要 本文从实验出发, 得出了两个重要的认识. 一是提出了评价洗衣机洗涤效果的定量标准——漂洗水的浊度; 二是发现衣物在脱水过程中对水中悬浮物的明显的过滤效应. 计入过滤效应, 对漂洗水浊度的变化过程建立了数学模型. 并按浊度标准, 计算了一般洗衣机达到洗净程度时所需的最少水量及工作循环次数. 结论是, 对于一般脏的衣物只须漂洗两遍, 每遍加水量相等, 都略少于洗衣机的最低加水量. 本文的结论及提出的洗涤效果判断和过滤效应, 对于实际洗衣机的设计与改进有积极的意义.

一、问题的重述与分析

假设在放入衣物和洗涤后洗衣机的运行程序为: 加水—漂洗—脱水—加水—漂洗—脱水—……—加水—漂洗—脱水(称“加水—漂洗—脱水”为一轮). 现为洗衣机设计一种程序(包括运行多少轮、每轮加水量等), 使得在满足一定洗涤效果的前提下, 总用水量最少.

解决这一问题的关键在于提出判断洗涤效果的定量依据. 因为本问题没有要求我们对洗衣机的结构提出改进意见, 故可假定洗衣机按现行的工作方式能确保污渍脱离衣物, 这样就只需考察漂洗效果. 显而易见, 决定漂洗效果的主要因素有二: 漂洗水的混浊程度及水中残存的洗衣粉浓度. 关于后者, 因为皮肤长期接触洗衣粉会对健康不利, 故理应使其尽量降低. 但从节约水角度出发, 不可能无限制地降低洗衣粉的浓度. 因此我们仅从漂洗水的混浊程度出发, 进行了一些力所能及的实验和观测. 根据取得的数据提出了漂洗效果的定量标准, 并以此为依据, 求出了洗衣机能达到此洗涤效果所必须的最小用水量及工作流程的循环次数.

本文所用变量的说明见表 1.

表 1

Q_0	脱水前, 湿衣所含水重 (kg)	P_b	净水浊度 (度)
Q_1	脱水后, 甩出的水重 (kg)	P_i	第 i 次漂洗后的浊度 (度)
Q_2	脱水后, 湿衣剩余水重 (kg)	Y	额定洗涤容量 (kg)
ρ_0	脱水前, 洗涤原液浓度 (mg/l)	W_0	初始洗涤水量 (kg)
ρ_1	脱水后, 排出水浓度 (mg/l)	W_i	第 i 次漂洗所加入水量 (kg)
S_0	第 1 次洗涤后衣物含污量 (kg)	a	脱水后的剩余水量 / 干衣重
S'_0	洗涤水中总的含污量 (mg)	\bar{S}_i	第 i 次漂洗后衣物含污量 (mg)
b	(湿衣重 - 干衣重) / 干衣量	A	脱水后衣物中剩余水量 (mg)
k	脱水后衣物含污量 / 脱水前衣物含污量		

二、模型的假设

I、假设开始所加入的洗涤剂足够, 即在充分搅动后完全溶解并足以使污物和衣物分离. 同时, 在漂洗液中污物是均匀分布的.

II、当模型得到的最小用水量远低于洗衣机的最低用水量时, 认为此时的讨论没有意义.

III、水的浊度与水中污物的浓度成正比.

三、模型的建立

(一) 对影响洗涤效果的因素分析

通常人们对于漂洗效果的直观判据就是漂洗水的清澈程度. 为把这种直观感觉量化, 我们引用了“浊度”这一概念. “浊度表现了水中悬浮物对光线透过时所发生的阻碍程度”. 一个浊度单位规定为“1 升蒸馏水中含有一毫克二氧化硅所构成的混浊度”^[1]. 我们对洗衣机的实际洗衣过程中各阶段排出的污水进行了取样测定, 得到不同水样的浊度, 如下表 2.

表 2

水样	浊度
很脏的洗涤水	2500 ~ 3500
比较脏的洗涤水	1500 ~ 2500
感觉“已漂洗干净了”的漂洗水	≤ 30

根据表 2, 我们把所要研究的问题确定为“洗涤时污水浊度在 2500 ~ 3500 度的额定量衣物需经几次漂洗, 每次至少用水多少, 才能使漂洗水浊度降至 ≤ 30 ?”

为了求出需要漂洗几次才能把漂洗水浊度降至 30 以下, 我们先测出单位重量衣物的吸水率 a : $a = \frac{A}{Y}$, 这里 Y 和 A 分别代表衣物的干重和漂洗脱水后吸附在衣物上的水的重量. 对于棉毛衣物, a 约为 0.38, 对于化纤和丝绸衣物, a 约为 0.15. (见附录)

如果脱水后衣物上留存的污物完全来自它所吸附的那些污水, 则再次加入体积为

W 的清水并充分漂洗后，水的浊度应为

$$P' = \frac{AP}{W + A}, \quad (P \text{ 为漂洗水的浊度})$$

按此公式计算，只需换一次水，就应能使水的浊度从 1500 降至 30 以下 (W 取 36 升， A 取 0.7 升)。然而事实并非如此：漂洗一遍后，水的浊度看上去远大于 30。显然，把衣物上残留的污物看成完全来自所吸附的污水是不妥的。这促使我们想到，在脱水时，脱水桶带动衣物高速旋转，脱水桶中的水全部 (除去衣物吸附的水以外) 都要透过衣物甩出去，在此过程中，作为悬浮物的污物将有一部分被衣物纤维过滤下来，留在衣物上，使脱水后衣物上污物的残留量远大于预想值。

为证实这一想法，我们做了这样的实验：

对洗涤液取样，然后把衣物从洗涤液中取出，略为拧干后放入脱水桶脱水，并对脱水时由衣物中甩出的水取样，化验两种样品的污物含量，得到了差别很大的结果。对漂洗水做了相同的实验，也得到了类似的结果。这些结果见表 3。

表 3

样品	单位体积水中的污物量/(mg/l)
洗涤液	1410.91
脱水甩出的洗涤液	567.27
一次洗涤液	69.09
脱水甩出的一次洗涤液	32.79
二次洗涤液	3.64
脱水甩出的二次洗涤液	1.82

从表 3 可以看到，衣物在脱水时，会对水中悬浮物有明显的过滤作用。为描述衣物的过滤效应，我们定义过滤系数 k ：

$$k = \frac{\rho_0 Q_0 - \rho_1 Q_1}{\rho_0 Q_0} = \text{脱水后衣物含污量/进入脱水桶的全体污物量}$$

k 值根据一定的关系和实验数据可确定下来。(详细求解过程见附录)。对于一般的棉、毛衣物， $k = 0.64$ 。

计入过滤效应后，每次漂洗过程导致的衣物中的污物量的下降情况可用下式描述：

$$S = kbY S' / W$$

其中 S' 为各次漂洗前衣物中的污物量， S 为漂洗脱水以后衣物中的污物量， W 为漂洗过程中所加的水的量， bY 为 Y 公斤干衣浸湿后所带的水。

(二) 漂洗过程中浊度变化的数学描述

由假设 III 可设

$$P = \alpha \rho$$

这样，我们可从污物的浓度变化得知污水的浊度的变化。

我们以衣物中的污物量为中间变量，导出第 n 次漂洗液的浊度与洗涤原液的浊度之间的关系。

设 S'_0 为衣物洗涤前所含的总污物量, P_0 为洗涤原液的浊度. 第一次洗涤脱水后污渍余量

$$S_0 = k \frac{bY}{W_0} \cdot S'_0 = kbY\rho_0 = kbY\alpha P_0$$

第一次加入水漂洗, 脱水后污渍余量

$$S_1 = k \frac{bY}{W_1 + A} \cdot S_0 = K^2 b^2 Y^2 \alpha P_0 / (W_1 + A)$$

第二次加入水漂洗, 脱水后污渍余量

$$S_2 = k \frac{bY}{W_2 + A} S_1 = k^3 b^3 Y^3 \alpha P_0 / [(W_1 + A)(W_2 + A)]$$

第 n 次加入水漂洗, 脱水后污渍余量

$$S_n = k \frac{bY}{W_n + A} S_{n-1} = k^{n+1} b^{n+1} Y^{n+1} \alpha P_0 / [(W_1 + A)(W_2 + A) \cdots (W_n + A)],$$

第 n 次漂洗后的浓度

$$\rho_n = \frac{S_{n-1}}{W_n + A} = k^n b^n Y^n \alpha P_0 / [(W_1 + A)(W_2 + A) \cdots (W_n + A)]$$

其值应不大于 ρ_0 , 即 $\rho_n \leq \rho_0$. 因为 $P_0 = \alpha\rho_0$, $P_b = \alpha\rho_0$ 所以本问题即求

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^n W_i \right) \\ \text{s.t. } P_n \leq P_b \end{cases}$$

求解: 对于固定的 n 值, 求 $\min(\sum_{i=1}^n W_i) \iff$ 求 $\min \sum_{i=1}^n (W_i + A)$

$$\sum_{i=1}^n (W_i + A) \geq n \sqrt[n]{(W_1 + A)(W_2 + A) \cdots (W_n + A)} \geq nkbY \sqrt[n]{\frac{P_0}{P_b}}$$

所以

$$\sum_{i=1}^n W_i \geq nkbY \sqrt[n]{\frac{P_0}{P_b}} - nA$$

当且仅当 $W_1 = W_2 = \cdots = W_n$ 时 $\sum_{i=1}^n W_i$ 取最小值 $nkbY \sqrt[n]{\frac{P_0}{P_b}} - nA$, 此时

$$W_i = k b Y \sqrt[n]{\frac{P_0}{P_b}} - A \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

四、模型分析

(一) 代入数据求解：由附录知

$$b = 1.87, \quad k = 0.64, \quad P_b = 2700, \\ P_0 = 30 \text{度}, \quad Y = 2 \text{公斤}, \quad A = 0.37 \times 2,$$

当 $n = 2$ 时

$$W_i = 0.64 * 1.87 * 2 * \sqrt{90} - 0.37 * 2 = 21.97 \text{升} \\ SUM(W) = 2 * W_i = 43.94 \text{升}$$

当 $n = 3$ 时

$$W_i = 0.64 * 1.87 * 2 * \sqrt[3]{90} - 0.37 * 2 = 9.99 \text{升}, \quad \text{最低水位, 故无意义}$$

(二) 结论

对于一般脏的衣物, 只需洗涤一次, 漂洗二次, 对于两公斤衣物, 每次漂洗用水 21.97 升, 即可达到满意效果.

五、模型运用

通过以上分析, 我们对厂方有如下建议:

- (1) 厂家宜生产多水位控制状态的节水型洗衣机;
- (2) 改波轮式洗衣机为生产滚筒式洗衣机, 尽量减少最小水量.

六、模型的评价

我们的模型完全建立在实验的基础上. 由于时间紧迫, 我们来不及取得更多的实验数据来减小数据的误差, 因此导出的结果会有一定的不准确, 但无论如何, 我们的模型来源于实验, 必然对实践有一定的指导意义.

参 考 文 献

- [1] 奚旦立等, 环境监测, 高等教育出版社, 北京, 1987, p38.

附 录

过滤系数 k 的推导

Q_0 : 脱水前, 湿衣所含水重 (公斤), Q_1 : 脱水后, 甩出的水重 (公斤),
 Q_2 : 脱水后, 湿衣剩余水重 (公斤), ρ_0 : 漂洗前, 洗涤原液浓度 (mg/l),
 ρ_1 : 脱水后, 排出水浓度 (mg/l), $S = \rho_0 Q_0$: 甩前湿衣总的含污量 (克),
 S_1 : 第 i 次脱水后衣物含污量 (克),

在脱水前, 衣物含污量为: $\rho_0 Q_0$; 在脱水后, 甩出的水中含污量为: $\rho_1 Q_1$; 在脱水后衣物中含污量为: $\rho_0 Q_0 - \rho_1 Q_1$.

我们假设 Q_0, Q_2 均与 Y 成正比, 即 $Q_0 = bY, Q_2 = aY$, 所以, $Q_1 = Q_0 - Q_2 = (b-a)Y$. 由实验测得, $a = 0.38$ (对于一般毛织物), 0.15 (对于化纤丝绸); $b = 1.87$

$$k = \text{脱水后衣物含污量} / \text{脱水前衣物含污量} \\ = (\rho_0 Q_0 - \rho_1 Q_1) \rho_1 / \rho_0 Q_0 = 1 - (b-a)/(b\rho_0) = 0.64.$$