飞行管理问题答卷评述

谭永基
(复旦大学,上海 200433)

本题是以空域飞行管理为背景,经简化和整理而成的一个赛题。该问题主要可以归结为非线性规划模型或经一定简化,建立线性规划模型。由于实际的需要,提出的算法应在计算机上快速地实现。

一、非线性规划模型及求解

设六架飞机在调整时的方向角为 θ_i,调整后的方向角为 $\theta'_i=\theta_i+\triangle\theta_i(i=1,2,\cdots,6)$,设任意两架飞机在区域内的最短距离为 $d_{ij}(\theta_i,\theta_j,)$,那么问题的非线性规划模型为

$$min\sum_{i=1}^{6}|\triangle\theta_i|$$

使得

$$d_{ij}(\theta_i+\triangle\theta_i,\theta_j+\triangle\theta_j)>8 \qquad 1\leqslant i,j\leqslant 6,i\neq j$$
$$|\triangle\theta_i|\leqslant 30°$$

绝大多数答卷能正确建立模型,有的答卷在建模时,出于某些考虑加强了不碰撞的要求,如要求在调整后的 $0.2\sqrt{2}$ 小时内不发生碰撞或永远不允许发生碰撞,从而简化了 d_{ij} 的表述。

求解此模型的一种方法是枚举法,但是枚举工作量极大,必须采取逐步求精(细分)、隐式枚举、枚举和二分法相结合等技巧,方能在较短时间内求得符合精度的最优调整方案。参赛答卷中采用了许多提高枚举效率的措施。有的答卷在枚举时采用了 Monte--Carlo 法,随机产生大量 $\{\triangle\theta_i\}$ 组合,从其中的可行解中选出最优解。这种方法可显著提高计算速度,有一定新意。

另一种解法是引进惩罚函数,将问题化为无约束极值,然后将其极小化。在答卷中采用了丰富多采的无约束化和极小化技术。有的方法,如能量梯度化有一定的特色。然而,非线性规划方法能否快速找到全局最优解,十分强烈地依赖于初值的选取。有的试卷用步长较粗的枚举得到的解作为初值,然后再用极小化的方法得到最优解,计算速度很快,可以实时调整,达到了实用的要求。

有不少答卷用 $\sum_{i=1}^{6}|\triangle\theta_i|^2$、$\max_{1\leq i\leq 6}|\triangle\theta_i|$ 作为优化的目标,这都是合理的。

二、线性规划模型

若不考虑区域的范围,用相对运动的观点不难得出两架飞机调整方向角后不发生碰撞,调整角度应满足的条件。为简单起见,排除某些特殊的情形,条件是:

$$①\ 若\ \theta'_i < \theta'_j,\ \alpha_{ij} < (\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta'_i + \theta'_j}{2}) mod\ 360° < 360° - \alpha_{ij}$$

或

$$②\ 若\ \theta'_i > \theta'_j,\ \alpha_{ij} < (\frac{\pi}{2} + \frac{\theta'_i + \theta'_j}{2}) mod\ 360° < 360° - \alpha_{ij}$$

其中,$\theta'_i, \theta'_j \in [0, 360°)$,$\alpha_{ij} = arc\ sin(\frac{8}{r_{ij}})$,$r_{ij}$ 为调整时两飞机的距离,角度均以自 i 架飞机位置指向第 j 架飞机的矢量为始边计算。

若以 $\sum_{i=1}^{6}|\triangle\theta_i|$,$\max_{1\leq i\leq 6}|\triangle\theta_i|$ 作为目标函数,以上述不碰撞条件和 $|\triangle\theta_i| \leq 30°$ 作为约束条件,是一个可归化为多个线性规划问题的规划问题。求解这一系列线性规划,比较它们的目标函数值就能得到原问题的最优解。

许多答卷用类似的方法将问题归结为线性规划求解。但有不少答卷在建立不碰撞条件时疏忽了一些情形从而条件不够完整。对某些飞机初始位置,可能产生错误。

由于变量较少,线性规划求解速度较快,这是采用这一模型的优点。然而,若必须排除在区域外的碰撞,由于条件不是线性的,归结为线性规划问题就有一定困难。有的答卷提出了一些克服这一困难的方法。较有成效的方法有两种。一种是在 $\triangle\theta_i$ 不大时,将条件展开略去高阶项,另一种用低维枚举确定 $\triangle\theta_i + \triangle\theta_j$ 的允许范围,再用线性规划求解。