

## 切割次序的优化

王玉波 谷云洪 伍士刚

指导教师：数模组

(杭州电子工学院, 杭州 310037)

**编者按** 本文用图论模型描述截断切割问题, 对优化准则也作了论证.

**摘 要** 这是一个如何安排加工次序的组合优化问题, 文章首先建立了一般问题的数学模型, 在对其求解过程中我们采取了分枝限界法, 保证了所得结果的最优性, 且具有很高的时效性. 其次针对某部门所采取的贪婪算法给予了评价, 在评价中以其近似解与最优解的接近程度、得到最优解的概率为标准, 利用计算机模拟对其进行评估, 发现对于该问题贪婪算法并不能保证解的最优性, 但近似程度较好. 而后我们对调整刀具费用为 0 的情形进行了讨论, 首先给出了一个引理, 然后给出了一个简明的优化准则: 当对各切割平面按其厚费比以不升序排列时, 所得次序为最优加工次序. 最后利用题中所给数据进行了验证, 再次表明了所得结论的正确性.

### 一、问题重述 (略)

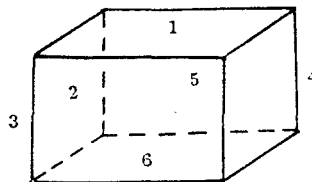
### 二、问题的分析

某些工业部门在生产加工过程中, 对同一块原材料的截割存在着多种切割方式, 在各种切割方式中各切割平面的截割面积有所变化, 而且各种切割方式相应的刀具调整次数也有所不同, 又由于水平切割单位面积的费用是垂直切割单位面积的倍, 且调整刀具时需支出额外费用  $\epsilon$ , 从而对同一材料的加工存在多种切割费用. 从经济角度出发, 应该选择使加工费用最少的切割方式.

为叙述方便起见, 我们将长方体的六个面分别赋一标号, 如下图.

(上底面为 1, 下底面为 6, 左侧面为 2, 正面为 3,  
右侧面为 4, 后面为 5, 2,4 平行, 3,5 平行,  
以后所提到的切割平面  $i$  是指以平面  $i$  进行切割)

在安排加工工序时, 由于工艺上的要求, 与水平工作台接触的长方体底面是事先指定的. 所以在加工过程中, 水平切割面和垂直切割面被唯一确定. 考虑到在切割过程中需要对原材料进行固定, 而对固定的限制直接影响到可行切割次数, 根据对固定的限制, 有如下两种情形:



I) 对工件可多次固定, 则共有  $6! = 720$  种可行切割方案, 考虑到如果在某一切割方式中存在相邻的两切割面平行的情况时, 将它们进行对调后不改变加工费用, 根据组合学原理, 至多有 426 种不同的加工费用.

II) 当与水平工作台接触的长方体的底面被指定后, 对原料进行固定, 且在今后的加工过程中不允许再对其进行固定, 则切割平面 6 应安排在最后, 否则其后工件将无法固定, 以进行后继切割, 所以应待其它切割平面全部切割后再对其进行切割, 从而共有  $5! = 120$  种可行切割方式. 只需在前 5 个平面的各种切割方式中找到费用最小的切割方式, 再加上切割平面 6 即得到最优解. 鉴于与 (I) 中相同的原因, 此时至多有 78 种不同的加工费用.

虽然在不同约束下, 本问题有不同的可行切割方式, 但就模型建立, 求解而言 (I)、(II) 无本质区别, 以下我们首先就情形 (I) 进行讨论, 所得结论对 (II) 仍然适用.

由于调整刀具时需支出额外费用  $\epsilon$ , 使问题的求解困难. 所以以下我们首先就一般问题建立模型, 然后讨论它的求解方法. 其次对于特殊情形如  $\epsilon = 0$ , 希望能找到一种简明最优准则.

### 三、模型假设

1. 由于工艺要求, 与水平工作台接触的长方体的底面是事先指定的.

2. 加工前后两长方体的对应表面是平行的.

#### 四、符号定义及说明

$s_i$ : 表示某一次截断的切割面;  $f_i$ : 表示切割  $s_i$  时单位面积的切割费用;  
 $d_i$ : 表示切割  $s_i$  的厚费比, 这里厚费比是指以  $s_i$  进行切割后长方体中被割离部分的厚度  $g_i$  与  $f_i$  之比, 即  $d_i = \frac{g_i}{f_i}$ , 如图所示;  
 $F$ : 总的加工费用;  $e$ : 调整刀具时额外的支出费用;  
 $r$ : 水平切割单位面积的费用与垂直切割单位面积的比值;  $k$ : 刀具调整次数; 其余符号在文中用到时再作说明.

#### 五、模型的建立及求解

根据对问题的分析, 长方体的每一种切割方式与各切割平面的一种排列一一对应, 对任一组排列  $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$  唯一对应着一个加工费用  $F = F(P)$  而问题就是要求出这样一组排列  $P^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*)$ , 使得  $\min F = F(P^*)$  对各切割平面的所有排列可用一棵树来表示 (如图一所示).

这棵树中每一条从根节点到叶子的路对应着一种切割方式及一个加工费用. 对这棵树进行遍历, 当遍历完所有叶子后, 也就找到了最优解, 但其运算量无疑是很大的. 为了尽快地搜索到最优解, 我们采用了深度、广度并行搜索的分枝限界法, 目的就是使最优解尽早被发现, 而非最优解所在的枝尽早被剪掉.

对树上的每一个节点, 我们定义一个状态, 这个状态记录了如下数据:

- (1) 该节点所对应的切割平面;
- (2) 该节点在树上的层次;
- (3) 从根节点到该节点的路及这条路费用;
- (4) 沿着这条路切割下来所得到的新长方体的各边边长;
- (5) 在该节点前是否已发生过刀具调整和一个费用下界 (即沿着该节点搜索下去所得各种切割方式的费用下界).

称当前正被访问的状态为活动状态, 若它是一个叶子节点 (最后一层上的结点), 则停止搜索, 输出该状态, 否则为每一个不在从根节点到该节点路上的切割平面创建子节点, 子节点的状态称为新状态, 新状态的各项值用下述方法得到:

- 1) 层次为父节点 (活动状态) 的层次加 1;
- 2) 路为父节点的路加上该新状态对应的切割平面;
- 3) 下界由随后定义的下界函数计算;
- 4) 费用为父节点的费用加上在父节点的长方体上切割该平面所支出的切割费用;
- 5) 切割后得到的长方体即为新状态的长方体;

将新状态挂起, 按其费用下界的大小插入等待序列 (该序列按从小到大的次序排列) 中, 使其处于等待状态, 而原活动状态则被撤消, 不复存在.

每一次从等待序列首部摘下一个状态, 使它成为活动状态, 重复上面的工作, 直到出现一个叶子节点上的状态. 由状态的插入规则, 可知每一个活动状态的费用下界都不大于在等待序列上的状态的费用下界, 而所有新节点的费用下界都不小于其父节点的费用下界, 故活动状态的费用下界是所有现存及将要出现的状态中最小的. 当其成为叶子时, 费用下界就是当前切割方式的费用, 从而由费用下界的定义可知, 它就是最优解.

现在我们来定义费用下界函数  $B(\text{status})$ :

设搜索到某节点时还有  $N$  个面未切割, 当  $e=0$  时, 将它们按其厚费比以不升序排列, 设以该种加工次序加工时的加工费为  $F_N$ ; 当  $e \neq 0$  时, 最小加工费为  $F'_N$ . 根据本模型在后文提出的优化准则 (参见第七节), 当  $e=0$ , 按厚费比排列得到的切割方式是最优的, 有  $F_N < F'_N$  这样我们可以取  $F_N$  和当前支出费用的和作为该状态的下界  $B$ , 即  $B = \text{当前支出费用} + F_N$ .

另外由于在每一种切割方式中, 至少发生一次调整刀具, 这样我们利用在状态  $\text{status}$  中的记录, 若当前没有发生过刀具调整, 则修整费用下界, 将其加上  $e$ .

数据结构与算法如下:

数组  $A[6]$  存储按厚费比从大到小排序的各个切割平面;

记录  $\text{status}$ :

$a, b, c$  : 当前状态下的长方体各边边长;  $i$  : 该状态对应的切割平面;  
 数组 route, 记载从根节点到当前节点的路; ptr 该节点在树中的层次;  
 bonder 费用下界; flag 标记位记录是否已发生过刀具调整;  
 cost 当前支出费用; 链表 list 其上挂着按费用下界从小到大排列的等待状态。

#### 算法

**Step 1** 初始化数组与链表。将各切割平面按厚费比从大到小排列, 然后依次填入到数组中。构造一个初始状态 (即为树图中的根节点), 它的当前费用为 0, 所在层次为 0 层, 刀具调整的标记为没有发生过调整, 它所记录的长方体为未切割的原长方体。将这个状态作为链表的唯一节点挂入链表中;

**Step 2** 从链表首部取下一个状态, 使它成为活动状态, 如果它是叶子, 则转 STEP3, 否则为每一个不在从根节点到活动状态的路中出现的切割平面创建新状态, 计算每个新状态的各项值, 并将它们按费用下界的大小插入到链表 (链表中所记录的状态按升序排列) 中, 转 STEP2 (循环);

**Step 3** 已找到一种最优加工方式, 输出结果。

### 六、关于贪婪算法的评价

在实际生产加工中, 由于条件或其它因素限制, 一些部门在安排各切割面的加工次序时, 采用了贪婪准则, 即每次选择一个加工费用最小的待切割面进行切割。但此准则在该问题中并不能保证得出最优解。例如: 对问题 (5) 中的 (a) 组数据, 其最少加工费用为 374 元, 相应的加工工序为 (6、3、1、2、5、4) 或 (6、3、2、1、5、4), 而利用贪婪算法所得的解为: 最少加工费用为 404 元, 加工工序为 (1、3、6、2、5、4) (注: 以上数据是对情形 I 求解, 情形 II 雷同)。

为了评定由贪婪算法所得近似解的好坏, 可从两个方面出发, 首先是时间复杂性方面的要求, 即要求有一个多项式时间界, 对于贪婪算法满足该项要求。其次是性能方面的要求即希望所得的近似解尽可能接近最优解, 以下我们从两种角度对其进行了度量。

1) 以算法在通常情况下的行为标准, 研究以贪婪准则得到的近似解与最优解的接近程度,

$$\eta = \frac{\text{最优解}}{\text{近似解}};$$

2) 以算法在平均情况下的行为标准, 研究得到最优解的概率  $p$ 。

由于对 (1)、(2) 难以给出严格的理论分析, 为了对其进行评价, 我们采用了计算机模拟技术, 在各加工参数由计算机随机产生的基础上, 得到下表:

测试次数	$\eta$	$p$
10000( $\epsilon=0$ )	86.8%	84%
10000( $\epsilon \neq 0$ )	86.7%	50%

由上表可以看出就本问题而言贪婪算法近似程度较高, 适用于一些工作条件简陋的场所, 或对时间要求较高的场所。

### 七、当 $\epsilon = 0$ 时简明的优化准则

当  $\epsilon=0$  时, 是否存在简明的优化准则呢? 为了能够找出其中的规律, 我们利用计算机对几组拟订的加工数据进行了列表分析后, 发现最优加工工序总是按各切割面所截立体厚费比以不升序排列, 这与我们在日常生活中的常识相符合, 而后我们又进行了大量的随机检验, 发现其普遍成立。进而通过理论证明得到如下结论:

**引理** 当仅对一长方体进行 2 次截断切割时, 若要使加工费用最少, 应采取如下切割方式:

- 1) 如果两切割平面  $S_1, S_2$  平行, 则加工费用与两个切割面的加工次序无关;
- 2) 如果两切割平面  $S_1, S_2$  垂直, 则应该选取厚费比大的切割平面先进行切割。如果它们的厚费比相同, 则加工费用与加工次序无关。(图略)

**证** 设切割面  $S_1, S_2$  的单位面积费用分别为  $f_1, f_2, F_{12}, F_{21}$ 。表示分别按  $S_1, S_2$  和  $S_2, S_1$  工序切割时所需费用,  $L_1, L_2$  分别为  $S_1, S_2$  的长度,  $g_1, g_2$  分别为  $S_1, S_2$  所截立体的厚度,  $d_1 = \frac{g_1}{f_1}, d_2 = \frac{g_2}{f_2}$  为  $S_1, S_2$  的厚费比。

- 1) 如果  $S_1$  与  $S_2$  平行, 则  $F_{12} = F_{21} = hL_1f_1 + hL_2f_2$ ,  
 2) 如果  $S_1$  与  $S_2$  垂直相交, 则有  $F_{12} = hL_1f_1 + h(L_2 - g_1)f_2$ ,  $F_{21} = hL_2f_2 + h(L_1 - g_2)f_1$ ,

所以

$$F_{12} - F_{21} = hg_2f_1 - hg_1f_2 = hf_1f_2(d_2 - d_1) \quad (*)$$

当  $d_2 > d_1$  时, 由 (\*) 式得  $F_{12} > F_{21}$ , 则应以  $S_2, S_1$  工序切割; 同理当  $d_2 < d_1$ , 则应以  $S_1, S_2$  工序切割;  $d_2 = d_1$  时,  $F_{12} = F_{21}$ , 则费用与次序无关. 证毕

根据引理, 我们对  $\epsilon = 0$  的情形给出了如下简明的优化准则.

**定理 (优化准则)** 当调整刀具所需的额外费用  $\epsilon = 0$  时, 将各切割平面按其厚费比以不升序进行排列, 所得序列, 即为使加工费用最小的加工工序.

证 设  $S_1, S_2, \dots, S_i, S_{i+1}, \dots, S_n$  为一个切割次序, 相应的厚费比为  $d_1, d_2, \dots, d_i, d_{i+1}, \dots, d_n$ , 按该次序进行加工所需费用为  $F$ .

若  $d_i < d_{i+1}$ , 将  $S_i, S_{i+1}$  进行对调, 得到加工次序  $S_1, S_2, \dots, S_{i+1}, S_i, \dots, S_n$ , 在该次序下, 切割  $S_1, \dots, S_{i-1}$  及  $S_{i+2}, \dots, S_n$  所需费用与第一种次序中相同, 而由引理可知, 切割  $S_i, S_{i+1}$  的费用应以第二种为好, 即将  $S_i, S_{i+1}$  对调后会使得总费用  $F$  减少, 所以如果第一种加工工序的厚费比没有按照不升序排列, 则可通过两两对调后调整为按厚费比的不升序排列, 而每次对调均使总费用减少, 由此定理得证.

另外由引理可知, 当在某一切割方式中存在相邻的两个切割面平行的情况时, 调换它们间的次序, 不会改变加工费用, 所以对所有的不升序排列, 通过对调相邻的两平行面, 可得出在  $\epsilon = 0$  时的全部最优加工工序.

## 八、模型验证及结果分析

为了进一步验证我们所给算法、所编程序的正确性, 我们对问题中所给数据进行了计算, 得到如下结果: (注: (I)、(II) 所述情形详见问题分析)

A)  $\epsilon = 0$

I) 下底面 6 无须留待最后切割, 可行方案为 720 种;

II) 下底面 6 必须留待最后切割, 可行方案为 120 种;

数 据	$r$	$\epsilon$	I		II	
			最优加工次序	最小费用	最优加工次序	最小费用
1		0	6、3、1、2、5、4	374	3、1、2、5、4、6	446.5
			6、3、2、1、5、4		3、2、1、5、4、6	
1.5		0	3、2、6、5、1、4	437.5	3、2、5、1、4、6	455.5
			3、6、2、5、1、4			
8		0	3、2、5、6、4、1	540.5	3、2、5、4、1、6	542.5

(注: 上底面为 1, 下底面为 6, 左侧面为 2, 正面为 3, 右侧面为 4, 后面为 5) B)  $\epsilon \neq 0$

由于在各种不同的切割方式下的刀具的调整次数  $k$  只与垂直切割平面的切割次序有关, 设这四个面为  $a_1, a_2, b_1, b_2$  (其中  $a_1 // a_2, b_1 // b_2$ ), 根据组合知识, 不同排列方式下  $k$  的取值只有三种, 如下:

次序				调整次数 $K$
$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	1
$a_1$	$b_1$	$b_2$	$a_2$	2
$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	3

设刀具的调整次数为  $k$  ( $k=1, 2, 3$ ) 时的最优切割方式为  $X_k$ , 相应的切割各表面费用的和为  $c_k$ , 则总费用  $F_k = c_k + ke$ ; ( $F_k$  为调整次数为  $k$  时的最少总费用)

所以全体的最优解

$$F_{\min} = \min_{k=1,2,3} \{F_k\} = \min_{k=1,2,3} \{c_k + ke\},$$

如果  $e$  在某范围内连续变化时, 我们可对它进行如下讨论: 当  $e$  满足

$$\begin{cases} c_1 + e \leq c_2 + 2e, \\ c_1 + e \leq c_3 + 3e, \end{cases} \quad \text{即 } e \geq \max \left\{ c_1 - c_2, \frac{1}{2}(c_1 - c_3) \right\} \text{ 时, } X_i \text{ 为最优切割方式.}$$

同理, 当  $c_2 - c_3 \leq e \leq c_1 - c_2$  时,  $X_2$  为最优切割方式;

当  $e \leq \min \{c_2 - c_3, \frac{1}{2}(c_1 - c_3)\}$  时,  $X_3$  为最优切割方式.

求解  $X_k (k=1,2,3)$  时, 可以将原分枝限界法稍作修改, 使其仅在调整次数不超过  $k$  时才进行分枝, 以得到  $X_k$  及  $c_k$ ; 另外, 值得一提的是, 我们可以利用  $e=0$  时的简单准则作出一个切割方式  $X$ , 设其调整次数为  $k$ , 则必有  $X_{k0}=X$ , 从而减少了一次分枝限界过程;

根据以上讨论, 对数据 (4) 进行求解 ( $r=1.5, 2 \leq e \leq 15$ ), 得

	$e$ 的取值范围	最优加工次序	最小加工费用
I	$2 \leq e \leq 25$	3、2、6、5、1、4	437.5+3
		3、6、2、5、1、4	
	$2.5 \leq e \leq 15$	3、6、5、2、1、4	$432.5+e$
II	$4.75 \leq e \leq 15$	3、2、5、1、4、6	455.5+3
		3、5、2、1、4、6	
		5、3、2、1、4、6	$465+e$

### 九、模型的评价

本文讨论的是切割加工问题, 首先我们针对一般性的问题建立了数学模型, 并在求解中自然地引入了分枝限界法. 尽管在最坏的情况下它的搜索量很大, 但对于实际问题, 最坏情况很难取到, 且由于分枝限界法的时效在很大程度上取决于下界函数, 而对于一个好的下界函数而言, 其在实际情况下的时效可能很好. 在制定下界函数时, 我们充分地利用了  $e=0$  时的优化准则, 并将刀具的调整考虑在内, 使得在求解问题时, 为得到最优解平均只需搜索 10 次, 这个时效相对于本问题的规模而言, 是相当不错的. 为了进一步检验这个算法的时效, 我们作了大量的实践检验. 我们知道, 通过遍历前文提到的那样一棵树来寻找最优解需要很大的运算量, 为了便于比较, 我们将被访问节点的个数作为衡量这个算法时效的一个标准. 检验如下: 使切割长方体的各个参数 (边长等) 均在 0---100 范围内变化, 并符合该区间上的均匀分布;  $r$  值在 (0—50) 内变化, 对每一种情况下  $e$  的进行 10000 次计算机模拟检验, 得到下表:

$e$ 值	10	20	30	50	100	1000
平均访问个数	8	8	9	9	10	22
最多访问个数	26	35	44	38	69	253
最少访问个数	6	6	6	6	6	6

由上表可以看出, 当时  $e=100$ , 平均访问个数也只有 10 个, 而这个  $e$  值相对于所给的长方体参数已是很大的了. 可见在实际情况下的该算法的时效是非常好的.

当  $e=0$  时, 我们所给出的优化准则, 其操作比贪婪准则更简明易行, 并能保证得到最优解, 同时我们给出了严格的理论证明. 另外厚费比的概念又被应用于求解分枝限界法的下界之中, 从而得到了一个高效算法用于求解  $e \neq 0$  时的情形.

由于时间有限, 对贪婪准则的评价, 我们只是采用计算机模拟技术对其进行评价, 而没能从理论上给予更严格的分析, 有待今后进一步深入研究.

### 参 考 文 献

- [1] A. V. Aho 等著, 唐守文等译, 数据结构与算法, 科学出版社, 北京, 1987.
- [2] 谢政、李建平著, 网络算法与复杂性理论, 国防科技大学出版社, 北京, 1995.
- [3] 卢开澄著, 组合数学算法与分析, 清华大学出版社, 北京, 1893.
- [4] 江裕钊、辛培清编著, 数学模型与计算机模拟, 电子科技大学出版社, 1989.
- [5] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz 著, 刘振宏、蔡茂诚译, 组合最优化算法和复杂性, 清华大学出版社, 北京, 1988.