西安交通大学考试题

成绩	

课　　程 计算方法 A

系　　别 ____________　　**考 试 日 期**　2002 年 1 月 16 日

专业班号 ____________

姓　　名 ________　　**学　　号** ________　　**期中** □　　**期末** □

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一.（10 分）填空：

（1）如果________________________________，

则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点集 $x=(x_1,x_2,..x_m)$ 上关于权函数

$\omega_1,\omega_2,...,\omega_m\ (\omega_i>0, i=1,2,...,m)$ 正交；

（2）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，若适当选取 n 次多项式

$p(x)=c_0+c_1x+...+c_nx^n$ 的系数 $c_0,c_1,...,c_n$，使偏差________________

最小，则称 $p(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 n 次最优一致逼近多项式.

（3）设有近似式 $I[f]\approx Q[f]$，则 $R[f]=I[f]-Q[f]$. 如果 f 是____________

____________时，均有 $R[f]=0$，而当 f 是________________

__________时，$R[f]\neq 0$，则称此近似式的代数精度为________.

（4）已知方程 $f(x)=0$ 的两个近似解为 x_k，x_{k-1}，则牛顿弦割法迭代求根公式为

____.

（5）在抛物型方程或双曲型方程的数值求解中，令 $U_1=(u_{0j},u_{1j},...,u_{mj})^T$，在 U_0 有误差变为 U_0' 时，按某种差分格式算出的 U_1 也会有误差，变成 U_1'。如果存在________，使得________________，则称此差分格式稳定，否则不稳定。

二.（5 分）

（1）改写 $\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)}$，使运算次数减少；

（2）设 $p>0$，$q>0$，$p\gg q$，使用两种算法计算 $y=-p+\sqrt{p^2+q}$

算法一：$\begin{cases} s=p^2 \\ t=s+q \\ u=\sqrt{t} \\ y=-p+u \end{cases}$ 算法二：$\begin{cases} s=p^2 \\ t=s+q \\ u=\sqrt{t} \\ v=p+u \\ y=q/v \end{cases}$

试分析两种算法的优劣。

三.（8 分）对方程组 $Ax=b$，设当右端向量发生扰动 δb 时，其解发生扰动 δx，证明此时有关系：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le Cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

证明：

四.（8 分）设 x_0,x_1,x_2 是互异实数，二次多项式 $p_2(x)$ 满足 $p_2(x_0)=f_0$，$p_2{}'(x_1)=f_1'$，

$p_2(x_2)=f_2$， f_0,f_1',f_2 为已知。要使 $p_2(x)$ 存在且唯一， x_0,x_1,x_2 应满足什么条件？

解：

五.（10 分）某物质的溶解度 y 和温度 x 的关系可确定为经验曲线 $y=ae^{bx}$，现有如下测量数据：

温度（F）	77	100	185	239
溶解度（%）	2.4	3.4	7.0	11.0

试确定经验常数 a 和 b.

解：

六.（8 分）证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{pmatrix}$ 对 $-\frac{1}{2}<a<1$ 是正定的，并且仅当 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 是，用 $Jacobi$ 迭代法求解方程组 $Ax=b$ 才是收敛的.

证明：

七．（8 分）已知$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx = A_0 f(x_0)$是一高斯型求积公式．试确定这一公式及其截断误差的表达式．

解：

八．（5 分）

1.常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

下面给出两种求解方法：

（1） $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$；

（2） $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_i - 4f_{i-1} + 2f_{i-2})$．

试用它们构造一组预测-校正公式．

解：

2.给出一种求解下面初值问题的求解公式：

$$y' = f(x', y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

解：

九．（8 分）一阶线性双曲型方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0,\ -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

有差分格式 $\dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + a\dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0$ 或 $u_{i,j+1} = u_{i,j} - \dfrac{1}{2}ar\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$，其中 $r = \tau / h$．试用傅里叶方法讨论此差分格式的稳定性，并说明格式的收敛性如何.

解：

十．（15 分）已知对模型问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(p\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+qu=f(x,y), \quad (x,y)\in G \\ u\big|_{\Gamma_1}=\varphi, \quad \left.\left(p\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\right|_{\Gamma_2}=\psi \end{cases}$$

用有限元方法求解时，有单元计算式

$$K_\Delta=\begin{pmatrix} k_{ll}^\Delta & k_{lm}^\Delta & k_{\ln}^\Delta \\ k_{ml}^\Delta & k_{ml}^\Delta & k_{ml}^\Delta \\ k_{ml}^\Delta & k_{ml}^\Delta & k_{ml}^\Delta \end{pmatrix}=\frac{p}{4\Delta}\begin{pmatrix} a_l a_l & a_l a_m & a_l a_n \\ a_m a_l & a_m a_m & a_m a_n \\ a_n a_l & a_n a_m & a_n a_n \end{pmatrix}+\frac{p}{4\Delta}\begin{pmatrix} b_l b_l & b_l b_m & b_l b_n \\ b_m b_l & b_m b_m & b_m b_n \\ b_n b_l & b_n b_m & b_n b_n \end{pmatrix}$$

$$+\frac{\Delta}{12q}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_\Delta=\begin{pmatrix} f_l^{(\Delta)} \\ f_m^{(\Delta)} \\ f_n^{(\Delta)} \end{pmatrix}=\frac{\Delta}{3}f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

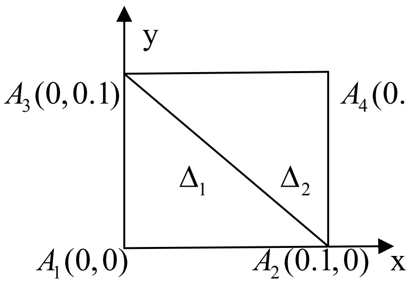
$$K_L=\begin{pmatrix} k_{jj}^{(L)} & k_{jk}^{(L)} \\ k_{kj}^{(L)} & k_{kk}^{(L)} \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\alpha l\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_L=\begin{pmatrix} f_j^{(L)} \\ f_k^{(L)} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\psi l\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试用有限元法求解下面问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+72u=1800(x+y), \quad (x,y)\in G \\ u\big|_{\Gamma_1}=0, \quad \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+12u\right)\right|_{\Gamma_2}=0 \end{cases}$$

其中，G 为如图所示的正方形区域 $A_1A_2A_4A_3$，边 A_3A_4 为 Γ_1，其余各边为 Γ_2 .



求解时，将 G 分为 Δ_1 和 Δ_2，如图所示，且在 Δ_1 中已算得

$$K_{\Delta}=\begin{pmatrix} k_{ll}^{\Delta} & k_{lm}^{\Delta} & k_{\ln}^{\Delta} \\ k_{ml}^{\Delta} & k_{ml}^{\Delta} & k_{ml}^{\Delta} \\ k_{ml}^{\Delta} & k_{ml}^{\Delta} & k_{ml}^{\Delta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.06 & -0.47 & -0.47 \\ -0.47 & 0.56 & 0.03 \\ -0.47 & 0.03 & 0.56 \end{pmatrix}，\quad f_{\Delta}=\begin{pmatrix} f_l^{(\Delta)} \\ f_m^{(\Delta)} \\ f_n^{(\Delta)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

试完成其余计算.