复习试题

一、填空题：

1、$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$，则 A 的 LU 分解为 $A=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$。

答案：$A=\begin{bmatrix}1 & & \\ -1/4 & 1 & \\ 0 & -4/15 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ & 15/4 & -1\\ & & 56/15\end{bmatrix}$

2、已知 $f(1)=1.0,\ f(2)=1.2,\ f(3)=1.3$，则用辛普生（辛卜生）公式计算求得 $\int_1^3 f(x)dx\approx$ ________,用三点式求得 $f'(1)\approx$ ____________。

答案：2.367，0.25

3、$f(1)=-1,\ f(2)=2,\ f(3)=1$，则过这三点的二次插值多项式中 x^2 的系数为______，拉格朗日插值多项式为______________________。

答案：-1，$L_2(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)-2(x-1)(x-3)-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$

4、近似值 $x^*=0.231$ 关于真值 $x=0.229$ 有(2)位有效数字；

5、设 $f(x)$ 可微，求方程 $x=f(x)$ 的牛顿迭代格式是( );

答案 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-f(x_n)}{1-f'(x_n)}$

6、对 $f(x)=x^3+x+1$，差商 $f[0,1,2,3]=$(1)，$f[0,1,2,3,4]=$(0)；

7、计算方法主要研究(截断)误差和(舍入)误差；

8、用二分法求非线性方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内的根时，二分 n 次后的误差限为($\frac{b-a}{2^{n+1}}$)；

9、求解一阶常微分方程初值问题 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的改进的欧拉公式为($y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$)；

10、已知 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(4)=5.9$，则二次 Newton 插值多项式中 x^2 系数为(0.15)；

11、 两点式高斯型求积公式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ ≈($\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[f(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}})+f(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}})]$)，代数精度为(5)；

12、 解线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的高斯顺序消元法满足的充要条件为(A 的各阶顺序主子式均不为零)。

13、 为了使计算 $y=10+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{6}{(x-1)^3}$ 的乘除法次数尽量地少，应将该表达式改写为_ $y=10+(3+(4-6t)t)t,\ t=\frac{1}{x-1}$ _，为了减少舍入误差，应将表达式 $\sqrt{2001}-\sqrt{1999}$ 改写为___ $\frac{2}{\sqrt{2001}+\sqrt{1999}}$ ___。

14、 用二分法求方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在区间[0,1]内的根,进行一步后根的所在区间为__0.5，1___,进行两步后根的所在区间为__0.5，0.75___ 。

15、 计算积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x$,取 4 位有效数字。用梯形公式计算求得的近似值为__0.4268__，用辛卜生公式计算求得的近似值为__0.4309__，梯形公式的代数精度为__1__，辛卜生公式的代数精度为__3__。

16、 求解方程组 $\begin{cases} 3x_1+5x_2=1 \\ 0.2x_1+4x_2=0 \end{cases}$ 的高斯—塞德尔迭代格式为_ $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(1-5x_2^{(k)})/3 \\ x_2^{(k+1)}=-x_1^{(k+1)}/20 \end{cases}$ _，该迭代格式的迭代矩阵的谱半径 $\rho(M)=$___ $\frac{1}{12}$ __。

17、 设 $f(0)=0, f(1)=16, f(2)=46$，则 $l_1(x)=$___ $l_1(x)=-x(x-2)$ __， $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为__ $N_2(x)=16x+7x(x-1)$ _。

18、 求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的代数精度以(高斯型)求积公式为最高，具有($2n+1$)次代数精度。

19、 已知 $f(1)=1, f(3)=5, f(5)=-3$，用辛普生求积公式求 $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ ≈(12)。

20、 设 $f(1)=1$， $f(2)=2$，$f(3)=0$，用三点式求 $f'(1)\approx$(2.5)。

21、如果用二分法求方程 $x^3+x-4=0$ 在区间 $[1,2]$ 内的根精确到三位小数，需对分（ 10 ）次。

22、已知 $S(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c & 1\le x\le 3 \end{cases}$ 是三次样条函数，则

a=(3)，b =（ 3 ），c =（ 1 ）。

23、$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 是以整数点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则

$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=$ (1)，$\sum_{k=0}^{n} x_k l_j(x_k)=$ (x_j)，当 $n\ge 2$ 时 $\sum_{k=0}^{n}(x_k^4+x_k^2+3)l_k(x)=$ (x^4+x^2+3)。

24、解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的改进欧拉法 $\begin{cases} y_{n+1}^{[0]}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{[0]})] \end{cases}$ 是____2____阶方法。

25、区间 $[a,b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有直到____2____阶的连续导数。

26、改变函数 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ （ $x\gg 1$ ）的形式，使计算结果较精确 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ ________。

27、若用二分法求方程 $f(x)=0$ 在区间[1,2]内的根，要求精确到第 3 位小数，则需要对分 10 次。

28、设 $S(x)=\begin{cases} 2x^3, & 0\le x\le 1 \\ x^3+ax^2+bx+c, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 是 3 次样条函数，则

a=__3__, b=_-3__, c=__1__。

29、若用复化梯形公式计算 $\int_0^1 e^x dx$，要求误差不超过 10^{-6}，利用余项公式估计，至少用___477 个求积节点。

30、写出求解方程组 $\begin{cases} x_1+1.6x_2=1 \\ -0.4x_1+x_2=2 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代公式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-1.6x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=2+0.4x_1^{(k+1)} \end{cases}, k=0,1,\cdots$，迭代矩阵为_$\begin{pmatrix} 0 & -1.6 \\ 0 & -0.64 \end{pmatrix}$，此迭代法是否收敛__收敛_。

31、设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ ___9___。

32、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，则 $\boldsymbol{U}=$ ___ $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ _____。

33、若 $f(x)=3x^4+2x+1$，则差商 $f[2,4,8,16,32]=$ ___3___。

34、数值积分公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{9}[f(-1)+8f(0)+f'(1)]$ 的代数精度为___2___。

35、 线性方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 的最小二乘解为___ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ___。

36、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 分解为 $A=LU$，则 $U=$ ___ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} \end{bmatrix}$ ___。

二、单项选择题：

1、 Jacobi 迭代法解方程组 $Ax=b$ 的必要条件是（ C ）。

A．A 的各阶顺序主子式不为零　　B． $\rho(A)<1$

C． $a_{ii} \neq 0, i=1,2,\cdots,n$　　D． $\|A\| \leq 1$

2、设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$，则 $\rho(A)$ 为(C).

A． 2　　B． 5　　C． 7　　D． 3

3、三点的高斯求积公式的代数精度为(B)。

A． 2　　B． 5　　C． 3　　D． 4

4、求解线性方程组 $Ax=b$ 的 LU 分解法中，A 须满足的条件是(B)。

A． 对称阵　　B． 正定矩阵

C． 任意阵　　D． 各阶顺序主子式均不为零

5、舍入误差是(A)产生的误差。

A． 只取有限位数　　B． 模型准确值与用数值方法求得的准确值

C． 观察与测量　　D． 数学模型准确值与实际值

6、3.141580 是 π 的有(B)位有效数字的近似值。

A． 6　　B． 5　　C． 4　　D． 7

7、用 $1+x$ 近似表示 e^x 所产生的误差是(C)误差。

A． 模型　　B． 观测　　C． 截断　　D． 舍入

8、解线性方程组的主元素消去法中选择主元的目的是(　A　)。

A．控制舍入误差　　　　B．　减小方法误差

C．防止计算时溢出　　　　D．　简化计算

9、用 $1+\frac{x}{3}$ 近似表示 $\sqrt[3]{1+x}$ 所产生的误差是(　D　)误差。

A．　舍入　　　B．　观测　　　C．　模型　　　D．　截断

10、-324．7500 是舍入得到的近似值，它有(　C　)位有效数字。

A．　5　　　B．　6　　　C．　7　　　D．　8

11、设 $f(-1)=1, f(0)=3, f(2)=4$,则抛物插值多项式中 x^2 的系数为(　A　)。

A．　–0．5　　　B．　0．5　　　C．　2　　　D．　-2

12、三点的高斯型求积公式的代数精度为(　C　)。

A．　3　　　B．　4　　　C．　5　　　D．　2

13、(D)的 3 位有效数字是 0.236×102。

(A) 0.0023549×103　(B) 2354.82×10－2　(C) 235.418　(D) 235.54×10－1

14、用简单迭代法求方程 f(x)=0 的实根，把方程 f(x)=0 表示成 x=φ(x)，则 f(x)=0 的根是(　B　)。

(A) y=φ(x)与 x 轴交点的横坐标　　　(B) y=x 与 y=φ(x)交点的横坐标

(C) y=x 与 x 轴的交点的横坐标　　　(D) y=x 与 y=φ(x)的交点

15、用列主元消去法解线性方程组 $\begin{cases}3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1\\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0\\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1\end{cases}$，第 1 次消元，选择主元为(　A　)。

(A) －4　　(B) 3　　(C) 4　　(D)－9

16、拉格朗日插值多项式的余项是(B　),牛顿插值多项式的余项是(C　)。

(A) f(x,x0,x1,x2,…,xn)(x－x1)(x－x2)…(x－xn－1)(x－xn),

(B) $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

(C) f(x,x0,x1,x2,…,xn)(x－x0)(x－x1)(x－x2)…(x－xn－1)(x－xn),

(D) $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

17、等距二点求导公式 f′(x1) ≈(A)。

(A) $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (B) $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_0-x_1}$ (C) $\frac{f(x_0)+f(x_1)}{x_0-x_1}$ (D) $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1+x_0}$

18、用牛顿切线法解方程 f(x)=0, 选初始值 x0 满足(A),则它的解数列{xn}n=0,1,2,…一定收敛到方程 f(x)=0 的根。

(A) $f(x_0)f''(x)>0$ (B) $f(x_0)f'(x)>0$ (C) $f(x_0)f''(x)<0$ (D) $f(x_0)f'(x)<0$

19、为求方程 x3—x2—1=0 在区间[1.3,1.6]内的一个根，把方程改写成下列形式，并建立相应的迭代公式，迭代公式不收敛的是(A)。

(A) $x^2=\frac{1}{x-1}$,迭代公式 : $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

(B) $x=1+\frac{1}{x^2}$,迭代公式: $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$

(C) $x^3=1+x^2$,迭代公式 : $x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$

(D) $x^3-1=x^2$,迭代公式 : $x_{k+1}=1+\frac{x_k^2}{x_k^2+x_k+1}$

20、求解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 欧拉法的局部截断误差是();改进欧拉法的局部截断误差是();四阶龙格—库塔法的局部截断误差是(A)

(A)O(h2) (B)O(h3) (C)O(h4) (D)O(h5)

21、解方程组 $Ax=b$ 的简单迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 收敛的充要条件是（ ）。

（1） $\rho(A)<1$， (2) $\rho(B)<1$， (3) $\rho(A)>1$， (4) $\rho(B)>1$

22、在牛顿-柯特斯求积公式： $\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\sum_{i=0}^{n}C_i^{(n)}f(x_i)$ 中，当系数 $C_i^{(n)}$ 是负值时，公式的稳定性不能保证，所以实际应用中，当（ ）时的牛顿-柯特斯求积公式不使用。

（1） $n\ge 8$， （2） $n\ge 7$， （3） $n\ge 10$， （4） $n\ge 6$，

23、有下列数表

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

所确定的插值多项式的次数是（ ）。

（1）二次； （2）三次； （3）四次； （4）五次

24、若用二阶中点公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n))$ 求解初值问题 $y'=-2y,y(0)=1$，试问为保证该公式绝对稳定，步长 h 的取值范围为（ ）。

(1) $0<h\le 1$， (2) $0\le h\le 1$， (3) $0<h<1$， (4) $0\le h<1$

25、取 $\sqrt{3}\approx1.732$ 计算 $x=(\sqrt{3}-1)^4$，下列方法中哪种最好？（　　　　）

(A) $28-16\sqrt{3}$；　(B) $(4-2\sqrt{3})^2$；　(C) $\frac{16}{(4+2\sqrt{3})^2}$；　(D) $\frac{16}{(\sqrt{3}+1)^4}$。

26、已知 $S(x)=\begin{cases}x^3 & 0\le x\le 2\\ 2(x-1)^3+a(x-2)+b & 2\le x\le 4\end{cases}$ 是三次样条函数，则 a,b 的值为(　　　　)

(A)6，6；　(B)6，8；　(C)8，6；　(D)8，8。

27、由下列数表进行 **Newton** 插值，所确定的插值多项式的最高次数是（　　　　）

x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x_i)$	-1	0.5	2.5	5.0	8.0	11.5

(A) 5；　(B) 4；　(C) 3；　(D) 2。

28、形如 $\int_a^b f(x)dx\approx A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+A_3f(x_3)$ 的高斯（**Gauss**）型求积公式的代数精度为（　　　　）

(A) 9；　(B) 7；　(C) 5；　(D) 3。

29、计算 $\sqrt{3}$ 的 **Newton** 迭代格式为(　　　)

(A) $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{3}{x_k}$；(B) $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{3}{2x_k}$；(C) $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{2}{x_k}$；(D) $x_{k+1}=\frac{x_k}{3}+\frac{3}{x_k}$。

30、用二分法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在区间 $[1,2]$ 内的实根，要求误差限为 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3}$，则对分次数至少为(　　　)

(A)10；　(B)12；　(C)8；　(D)9。

31、经典的四阶龙格—库塔公式的局部截断误差为 (　　　)

(A) $O(h^4)$；　(B) $O(h^2)$；　(C) $O(h^5)$；　(D) $O(h^3)$。

32、设 $l_i(x)$ 是以 $x_k=k(k=0,1,\cdots,9)$ 为节点的 **Lagrange** 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{9}kl_i(k)=$（　　　）

(A) x；　（B）k；　（C）i；　（D）1。

33、5 个节点的牛顿-柯特斯求积公式，至少具有(　　　)次代数精度

(A)5；　(B)4；　(C)6；　(D)3。

34、已知 $S(x)=\begin{cases}x^3 & 0\le x\le 2\\ 2(x-1)^3+a(x-2)+b & 2\le x\le 4\end{cases}$ 是三次样条函数，则 a,b 的值为(　　　)

(A)6，6；　(B)6，8；　(C)8，6；　(D)8，8。

35、已知方程 $x^3-2x-5=0$ 在 $x=2$ 附近有根，下列迭代格式中在 $x_0=2$ 不收敛的是(　　　)

(A) $x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}$；　(B) $x_{k+1}=\sqrt{2+\frac{5}{x_k}}$；　(C) $x_{k+1}=x_k^3-x_k-5$；　(D) $x_{k+1}=\frac{2x_k^3+5}{3x_k^2-2}$。

36、由下列数据

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	4	3	-5

确定的唯一插值多项式的次数为(　　　)

(A) 4；　(B)2；　(C)1；　(D)3。

37、5 个节点的 **Gauss** 型求积公式的最高代数精度为(　　　)

(A)8；　(B)9；　(C)10；　(D)11。

三、是非题（认为正确的在后面的括弧中打√，否则打×）

1、已知观察值$(x_i,\ y_i)\ (i=0,1,2,\cdots,\ m)$,用最小二乘法求 n 次拟合多项式$P_n(x)$时，$P_n(x)$的次数 n 可以任意取。 (　　)

2、用 1-$\frac{x^2}{2}$ 近似表示 cos$x$ 产生舍入误差。 (　　)

3、$\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$表示在节点 x_1 的二次(拉格朗日)插值基函数。 (√)

4、牛顿插值多项式的优点是在计算时，高一级的插值多项式可利用前一次插值的结果。 (√)

5、矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$具有严格对角占优。 (　　)

四、计算题：

1、用高斯-塞德尔方法解方程组$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=11 \\ x_1+4x_2+2x_3=18 \\ 2x_1+x_2+5x_3=22 \end{cases}$，取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代四次(要求按五位有效数字计算)。

答案：迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(11-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(18-x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{5}(22-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2.7500	3.8125	2.5375
2	0.20938	3.1789	3.6805
3	0.24043	2.5997	3.1839
4	0.50420	2.4820	3.7019

2、求 A、B 使求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(-1)+f(1)]+B[f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})]$ 的代数精度尽量高,并求其代数精度；利用此公式求 $I=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$ (保留四位小数)。

答案：$f(x)=1,x,x^2$ 是精确成立，即

$$\begin{cases} 2A+2B=2 \\ 2A+\frac{1}{2}B=\frac{2}{3} \end{cases}$$ 得 $A=\frac{1}{9},B=\frac{8}{9}$

求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{9}[f(-1)+f(1)]+\frac{8}{9}[f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})]$

当 $f(x)=x^3$ 时，公式显然精确成立；当 $f(x)=x^4$ 时，左=$\frac{2}{5}$，右=$\frac{1}{3}$。所以代数精度为 3。

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx \overset{t=2x-3}{=} \int_{-1}^{1}\frac{1}{t+3}dt \approx \frac{1}{9}[\frac{1}{-1+3}+\frac{1}{1+3}]+\frac{8}{9}[\frac{1}{-1/2+3}+\frac{1}{1/2+3}]$$

$$=\frac{97}{140}\approx 0.69286$$

3、已知

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	2	6	5	4

分别用拉格朗日插值法和牛顿插值法求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $P_3(x)$，并求 $f(2)$ 的近似值（保留四位小数）。

答案：$L_3(x)=2\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-3)(1-4)(1-5)}+6\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-4)(3-5)}$

$$+5\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-3)(4-5)}+4\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-3)(5-4)}$$

差商表为

x_i	y_i	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	2			

3	6	2		
4	5	-1	-1	
5	4	-1	0	1/4

$$P_3(x)=N_3(x)=2+2(x-1)-(x-1)(x-3)+\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$f(2)\approx P_3(2)=5.5$$

4、取步长 $h=0.2$，用预估-校正法解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=2x+3y \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad (0\le x\le 1)$$

答案：解：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.2\times(2x_n+3y_n) \\ y_{n+1}=y_n+0.1\times[(2x_n+3y_n)+(2x_{n+1}+3y_{n+1}^{(0)})] \end{cases}$$

即 $$y_{n+1}=0.52x_n+1.78y_n+0.04$$

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1	1.82	5.8796	10.7137	19.4224	35.0279

5、已知

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	4	2	1	3	5

求 $f(x)$ 的二次拟合曲线 $p_2(x)$，并求 $f'(0)$ 的近似值。

答案：解：

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
0	-2	4	4	-8	16	-8	16
1	-1	2	1	-1	1	-2	2
2	0	1	0	0	0	0	0
3	1	3	1	1	1	3	3
4	2	5	4	8	16	10	20
$\sum$	0	15	10	0	34	3	41

正规方程组为
$$\begin{cases} 5a_0+10a_2=15 \\ 10a_1=3 \\ 10a_0+34a_2=41 \end{cases}$$

$$a_0=\frac{10}{7}, a_1=\frac{3}{10}, a_2=\frac{11}{14}$$

$$p_2(x)=\frac{10}{7}+\frac{3}{10}x+\frac{11}{14}x^2 \qquad p_2'(x)=\frac{3}{10}+\frac{11}{7}x$$

$$f'(0)\approx p_2'(0)=\frac{3}{10}$$

6、已知$\sin x$区间[0.4，0.8]的函数表

x_i	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422	0.71736

如用二次插值求$\sin 0.63891$的近似值，如何选择节点才能使误差最小？并求该近似值。

答案：解： 应选三个节点，使误差

$$|R_2(x)|\le\frac{M_3}{3!}|\omega_3(x)|$$

尽量小，即应使$|\omega_3(x)|$尽量小，最靠近插值点的三个节点满足上述要求。即取节点$\{0.5,0.6,0.7\}$最好，实际计算结果

$$\sin 0.63891\approx 0.596274,$$

且

$$\begin{aligned}&\left|\sin 0.63891-0.596274\right| \\ \le&\frac{1}{3!}\left|(0.63891-0.5)(0.63891-9-0.6)(0.63891-0.7)\right| \\ \le&0.55032\times10^{-4}\end{aligned}$$

7、构造求解方程$e^x+10x-2=0$的根的迭代格式$x_{n+1}=\varphi(x_n), n=0,1,2,\cdots$，讨论其收敛性，并将根求出来，$|x_{n+1}-x_n|<10^{-4}$。

答案：解：令 $f(x)=e^x+10x-2,\quad f(0)=-2<0,\quad f(1)=10+e>0$.

且 $f'(x)=e^x+10>0$ 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有唯一实根.将方程

$f(x)=0$ 变形为

$$x=\frac{1}{10}(2-\mathrm{e}^{x})$$

则当 $x\in(0,1)$ 时

$$\varphi(x)=\frac{1}{10}(2-\mathrm{e}^{x}),\quad |\varphi'(x)|=\left|-\frac{\mathrm{e}^{x}}{10}\right|\le\frac{\mathrm{e}}{10}<1$$

故迭代格式

$$x_{n+1}=\frac{1}{10}(2-\mathrm{e}^{x_n})$$

收敛。取 $x_0=0.5$，计算结果列表如下：

n	0	1	2	3
x_n	0.5	0.035 127 872	0.096 424 785	0.089 877 325
n	4	5	6	7
x_n	0.090 595 993	0.090 517 340	0.090 525 950	0.090 525 008

且满足 $|x_7-x_6|\le 0.000\,000\,95<10^{-6}$.所以 $x^*\approx 0.090\,525\,008$.

8、利用矩阵的 LU 分解法解方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14\\2x_1+5x_2+2x_3=18\\3x_1+x_2+5x_3=20\end{cases}$。

答案：解：
$$A=LU=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\&1&-4\\&&-24\end{bmatrix}$$

令 $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{y}=(14,-10,-72)^T$，$U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 得 $\boldsymbol{x}=(1,2,3)^T$.

9、对方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2+10x_3=15\\10x_1-4x_2-x_3=5\\2x_1+10x_2-4x_3=8\end{cases}$

（1） 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由；

（2） 取初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，利用（1）中建立的迭代公式求解，要求 $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty<10^{-3}$。

解：调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优

$$\begin{cases}10x_1-4x_2-\quad x_3=5\\ 2x_1+10x_2-4x_3=8\\ 3x_1+2x_2+10x_3=15\end{cases}$$

故对应的高斯—塞德尔迭代法收敛.迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}(\qquad\qquad 4x_2^{(k)}\ +\ x_3^{(k)}+5)\\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)}\qquad\qquad +4x_3^{(k)}+8)\\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}\qquad +15)\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$,经 7 步迭代可得：

$$\boldsymbol{x}^*\approx\boldsymbol{x}^{(7)}=(0.999\ 991\ 459,0.999\ 950\ 326,1.000\ 010)^T.$$

10、已知下列实验数据

x_i	1.36	1.95	2.16
$f(x_i)$	16.844	17.378	18.435

试按最小二乘原理求一次多项式拟合以上数据。

解：当 0<x<1 时， $f''(x)=\mathrm{e}^x$，则 $|f''(x)|\le \mathrm{e}$，且 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 有一位整数.

要求近似值有 5 位有效数字，只须误差 $\left|R_1^{(n)}(f)\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$.

由 $\left|R_1^{(n)}(f)\right|\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}\left|f''(\xi)\right|$，只要

$$\left|R_1^{(n)}(\mathrm{e}^x)\right|\le\frac{\mathrm{e}^\xi}{12n^2}\le\frac{\mathrm{e}}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

即可，解得

$$n\ge\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{6}}\times10^2=67.30877\cdots$$

所以 $n=68$，因此至少需将 $[0,1]$ 68 等份。

11、用列主元素消元法求解方程组 $\begin{bmatrix}1&-1&1\\5&-4&3\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-12\\11\end{bmatrix}$。

解：$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -4\\5 & -4 & 3 & -12\\2 & 1 & 1 & 11\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\1 & -1 & 1 & -4\\2 & 1 & 1 & 11\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{2}{5}r_1]{r_2-\frac{1}{5}r_1}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\\0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\\0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{1}{13}r_2}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\\0 & & \frac{5}{13} & -\frac{5}{13}\end{bmatrix}$$

回代得 $x_3=-1, x_2=6, x_1=3$。

12、取节点 $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1$，求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 在区间[0,1]上的二次插值多项式 $P_2(x)$，并估计误差。

解：$P_2(x)=e^{-0}\times\frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)}+e^{-0.5}\times\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)}$

$$+e^{-1}\times\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)}$$

$$=2(x-0.5)(x-1)-4e^{-0.5}x(x-1)+2e^{-1}x(x-0.5)$$

又 $f(x)=e^{-x}, f'''(x)=-e^{-x}, M_3=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'''(x)|=1$

故截断误差 $|R_2(x)|=|e^{-x}-P_2(x)|\le\frac{1}{3!}|x(x-0.5)(x-1)|$。

13、用欧拉方法求

$$y(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

在点 $x=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 处的近似值。

解：$y(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 等价于

$$\begin{cases}y'=\mathrm{e}^{-x^2}\\y(0)=0\end{cases}\quad(x>0)$$

记 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2}$,取 $h=0.5$, $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1.0, x_3=1.5, x_4=2.0$.

则由欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_0=0 \end{cases}, \qquad n=0,1,2,3$$

可得 $y(0.5)\approx y_1=0.5,\quad y(1.0)=y_2\approx 0.88940$,

$$y(1.5)\approx y_3=1.07334,\quad y(2.0)=y_4\approx 1.12604$$

14、给定方程 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-1=0$

1) 分析该方程存在几个根;

2) 用迭代法求出这些根,精确到 5 位有效数字;

3) 说明所用的迭代格式是收敛的。

解:1)将方程 $(x-1)\mathrm{e}^x-1=0$ （1）

改写为

$$x-1=\mathrm{e}^{-x} \qquad (2)$$

作函数 $f_1(x)=x-1$, $f_2(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 的图形(略)知(2)有唯一根 $x^*\in(1,2)$。

2) 将方程(2)改写为 $x=1+\mathrm{e}^{-x}$

构造迭代格式 $\begin{cases} x_{k+1}=1+\mathrm{e}^{-x_k} \\ x_0=1.5 \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$

计算结果列表如下:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k	1.22313	1.29431	1.27409	1.27969	1.27812	1.27856	1.27844	1.27847	1.27846

3) $\varphi(x)=1+\mathrm{e}^{-x}$, $\varphi'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

当 $x\in[1,2]$ 时, $\varphi(x)\in[\varphi(2),\varphi(1)]\subset[1,2]$, 且

$$|\varphi'(x)|\le \mathrm{e}^{-1}<1$$

所以迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)\quad (k=0,1,2,\cdots)$ 对任意 $x_0\in[1,2]$ 均收敛。

15、用牛顿(切线)法求 $\sqrt{3}$ 的近似值。取 x_0=1.7,计算三次,保留五位小数。

解：$\sqrt{3}$ 是 $f(x)=x^2-3=0$ 的正根，$f'(x)=2x$，牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-3}{2x_n}\text{，即}\quad x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{3}{2x_n}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

取 x_0=1.7，列表如下：

n	1	2	3
x_n	1.73235	1.73205	1.73205

16、已知 f(-1)=2，f(1)=3，f(2)=-4，求拉格朗日插值多项式 $L_2(x)$ 及 f(1，5)的近似值，取五位小数。

解：
$$L_2(x)=2\times\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+3\times\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}-4\times\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)(x-2)-\frac{3}{2}(x+1)(x-2)-\frac{4}{3}(x+1)(x-1)$$

$$f(1.5)\approx L_2(1.5)=\frac{1}{24}\approx 0.04167$$

17、n=3,用复合梯形公式求 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 的近似值（取四位小数）,并求误差估计。

解：
$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\approx T_3=\frac{1-0}{2\times 3}[\mathrm{e}^0+2(\mathrm{e}^{1/3}+\mathrm{e}^{2/3})+\mathrm{e}^1]\approx 1.7342$$

$f(x)=\mathrm{e}^x, f''(x)=\mathrm{e}^x$，$0\le x\le 1$ 时，$|f''(x)|\le \mathrm{e}$

$$|R|=|\mathrm{e}^x-T_3|\le\frac{\mathrm{e}}{12\times 3^2}=\frac{\mathrm{e}}{108}=0.025\cdots\le 0.05$$

至少有两位有效数字。

18、用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-3&1\\1&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-8\end{pmatrix}$，

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,列表计算三次，保留三位小数。

解：Gauss-Seidel 迭代格式为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}(\qquad\qquad -x_3^{(k)}+5)\\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{3}(-x_1^{(k+1)}\qquad -x_3^{(k)}-1)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}\qquad -8)\end{cases}$$

系数矩阵$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$严格对角占优，故 Gauss-Seidel 迭代收敛.

取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，列表计算如下:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.667	0.889	-2.195
2	2.398	0.867	-2.383
3	2.461	0.359	-2.526

19、用预估—校正法求解$\begin{cases}y'=x+y\\ y(0)=1\end{cases}$ $(0\le x\le 1)$，h=0。2，取两位小数。

解：预估—校正公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)\\ k_1=hf(x_n,y_n)\\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1)\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots$$

其中 $f(x,y)=x+y$， $y_0=1$， h=0.2， $n=0,1,2,3,4$， 代入上式得:

n	1	2	3	4	5
x_n	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1.24	1.58	2.04	2.64	3.42

20、（8 分）用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式拟合以下数据:

x_i	19	25	30	38
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3

解：$\Phi=span\{1,x^2\}$

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 19^2 & 25^2 & 31^2 & 38^2\end{bmatrix}\qquad y^T=\begin{bmatrix}19.0 & 32.3 & 49.0 & 73.3\end{bmatrix}$$

解方程组 $A^TAC=A^Ty$

其中 $A^TA=\begin{bmatrix}4 & 3391\\ 3391 & 3529603\end{bmatrix}$ $\qquad A^Ty=\begin{bmatrix}173.6\\ 179980.7\end{bmatrix}$

解得: $C=\begin{bmatrix}0.9255577\\ 0.0501025\end{bmatrix}$ 所以 $a=0.9255577$ ， $b=0.0501025$

21、（15 分）用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 时，试用余项估计其误差。用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算出该积分的近似值。

解：$$\left|R_T[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\times\frac{1}{8^2}\times e^0=\frac{1}{768}=0.001302$$

$$T(8)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]$$

$$=\frac{1}{16}[1+2\times(0.8824969+0.7788008+0.60653066$$

$$+0.5352614+0.47236655+0.41686207)+0.36787947]$$

$$=0.6329434$$

22、（15 分）方程 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近有根，把方程写成三种不同的等价形式（1）$x=\sqrt[3]{x+1}$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+1}$；(2) $x=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{x_n}}$；（3）$x=x^3-1$ 对应迭代格式 $x_{n+1}=x_n^3-1$。判断迭代格式在 $x_0=1.5$ 的收敛性，选一种收敛格式计算 $x=1.5$ 附近的根，精确到小数点后第三位。

解：（1）$\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，$\left|\varphi'(1.5)\right|=0.18<1$，故收敛；

（2）$\varphi'(x)=-\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$，$\left|\varphi'(1.5)\right|=0.17<1$，故收敛；

（3）$\varphi'(x)=3x^2$，$\left|\varphi'(1.5)\right|=3\times1.5^2>1$，故发散。

选择（1）：$x_0=1.5$，$x_1=1.3572$，$x_2=1.3309$，$x_3=1.3259$，$x_4=1.3249$，

$x_5=1.32476$，$x_6=1.32472$

23、（8 分）已知方程组 $AX=f$，其中

$$A=\begin{bmatrix}4&3&\\3&4&-1\\&-1&4\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}24\\30\\-24\end{bmatrix}$$

（1） 列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式。

（2） 求出 Jacobi 迭代矩阵的谱半径。

解：Jacobi 迭代法：
$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(24-3x_2^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(30-3x_1^{(k)}+x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-24+x_2^{(k)})\\k=0,1,2,3,\cdots\end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(24-3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(-24+x_2^{(k+1)}) \\ k=0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$B_J=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix},\quad \rho(B_J)=\sqrt{5/8}(\text{或}\frac{\sqrt{10}}{4})=0.790569$$

24、1、（15 分）取步长 $h=0.1$，求解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y+1 \\ y(0)=1\end{cases}$ 用改进的欧拉法求 $y(0.1)$ 的值；用经典的四阶龙格—库塔法求 $y(0.1)$ 的值。

解：改进的欧拉法：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n)=0.9y_n+0.1 \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})]=0.905y_n+0.095 \end{cases}$$

所以 $y(0.1)=y_1=1$；

经典的四阶龙格—库塔法：
$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4] \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}k_2) \\ k_4=f(x_n+h,y_n+hk_3) \end{cases}\qquad k_1=k_2=k_3=k_4=0$$
，所以 $y(0.1)=y_1=1$。

25、数值积分公式形如

$\int_0^1 xf(x)dx\approx S(x)=Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$ 试确定参数 A,B,C,D 使公式代数精度尽量高；（2）设 $f(x)\in C^4[0,1]$，推导余项公式 $R(x)=\int_0^1 xf(x)dx-S(x)$，并估计误差。

解：将 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 分布代入公式得：$A=\dfrac{3}{20},B=\dfrac{7}{20},B=\dfrac{1}{30},D=-\dfrac{1}{20}$

构造 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足 $\begin{cases} H_3(x_i)=f(x_i) \\ H_3'(x_i)=f'(x_i) \end{cases}\ i=0,1$ 其中 $x_0=0,x_1=1$

则有：$\int_0^1 xH_3(x)dx=S(x)$，　$f(x)-H_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)^2$

$$R(x)=\int_0^1 x[f(x)-S(x)]dx=\int_0^1 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^3(x-1)^2dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^1 x^3(x-1)^2dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!\times 60}=\frac{f^{(4)}(\eta)}{1440}$$

26、用二步法

$$y_{n+1}=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+h[\theta f(x_n,y_n)+(1-\theta)f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

求解常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 时，如何选择参数 α_0,α_1,θ 使方法阶数尽可能高，并求局部截断误差主项，此时该方法是几阶的

解：

$$R_{n,h}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\cdots$$

$$-\alpha_0 y(x_n)-\alpha_1(y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\cdots)$$

$$-h[\theta y'(x_n)+(1-\theta)(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)-\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n)+\cdots]$$

$$=(1-\alpha_0-\alpha_1)y(x_n)+h(1-1+\alpha_1)y'(x_n)$$

$$+h^2(\frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+1-\theta)y''(x_n)+h^3(\frac{1}{6}+\frac{\alpha_1}{6}-\frac{1-\theta}{2})y'''(x_n)+O(h^4)$$

所以 $\begin{cases} 1-\alpha_0-\alpha_1=0 \\ \alpha_1=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{\alpha_1}{2}+1-\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=1 \\ \alpha_1=0 \\ \theta=\frac{3}{2} \end{cases}$

主项：$\frac{5}{12}h^3y'''(x_n)$ 　　　　该方法是二阶的。

27、（10 分）已知数值积分公式为：

$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\lambda h^2[f'(0)-f'(h)]$，试确定积分公式中的参数 λ，使其代数精确度尽量高，并指出其代数精确度的次数。

解：$f(x)=1$ 显然精确成立；

$f(x)=x$ 时，$\int_0^h xdx=\frac{h^2}{2}=\frac{h}{2}[0+h]+\lambda h^2[1-1]$；

$f(x)=x^2$ 时，$\int_0^h x^2dx=\frac{h^3}{3}=\frac{h}{2}[0+h^2]+\lambda h^2[0-2h]=\frac{h^3}{2}-2\lambda h\Rightarrow\lambda=\frac{1}{12}$；

$f(x)=x^3$ 时，$\int_0^h x^3dx=\frac{h^4}{4}=\frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{1}{12}h^2[0-3h^2]$；

$f(x)=x^4$ 时，$\int_0^h x^4dx=\frac{h^5}{5}\neq\frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{1}{12}h^2[0-4h^3]=\frac{h^5}{6}$；

所以，其代数精确度为 3。

28、（8 分）已知求 $\sqrt{a}(a>0)$ 的迭代公式为：

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}) \quad x_0>0 \quad k=0,1,2\cdots$$

证明：对一切 $k=1,2,\cdots,\ x_k\ge\sqrt{a}$ ，且序列 $\{x_k\}$ 是单调递减的，
从而迭代过程收敛。

证明：$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})\ge\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{x_k\times\frac{a}{x_k}}=\sqrt{a} \quad k=0,1,2\cdots$$

故对一切 $k=1,2,\cdots,\ x_k\ge\sqrt{a}$ 。

又 $\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_k^2})\le\frac{1}{2}(1+1)=1$ 所以 $x_{k+1}\le x_k$，即序列 $\{x_k\}$ 是单调递减有下界，从而迭代过程收敛。

29、（9 分）数值求积公式 $\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 是否为插值型求积公式？为什么？其代数精度是多少？

解：是。因为 $f(x)$ 在基点 1、2 处的插值多项式为 $p(x)=\frac{x-2}{1-2}\times f(1)+\frac{x-1}{2-1}\times f(2)$

$\int_0^3 p(x)dx=\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 。其代数精度为 1。

30、(6 分)写出求方程 $4x=\cos(x)+1$ 在区间[0,1]的根的收敛的迭代公式，并证明其收敛性。

(6 分) $x_{n+1}=\phi(x_n)=\frac{1}{4}[1+\cos(x_n)]$ ，n=0,1,2,…

$|\phi'(x)|=\frac{1}{4}|\sin(x)|\le\frac{1}{4}<1$ ∴ 对任意的初值 $x_0\in[0,1]$,迭代公式都收敛。

31、(12 分)以 100,121,144 为插值节点，用插值法计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并利用余项估计误差。

用 Newton 插值方法：差分表：

100 121 144	10 11 12	0.0476190 0.0434783	-0.0000941136

$\sqrt{115}\approx$ 10+0.0476190(115-100)-0.0000941136(115-100)(115-121)

=10.7227555

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$|R|=\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(115-100)(115-121)(115-144)\right|$$

$$\le\frac{1}{6}\frac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}}\times 15\times 6\times 29\approx 0.00163$$

32、(10 分)用复化 Simpson 公式计算积分 $I=\int_0^1\frac{\sin(x)}{x}dx$ 的近似值，要求误差限为 0.5×10^{-5} 。

$$S_1=\frac{1}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=0.94614588$$

$$S_2=\frac{1}{12}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right)=0.94608693$$

$$|I-S_2|\approx\frac{1}{15}|S_2-S_1|=0.393\times 10^{-5}\qquad I\approx S_2=0.94608693$$

或利用余项： $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{5}-\frac{x^2}{7\times 2!}+\frac{x^4}{9\times 4!}-\cdots\qquad \left|f^{(4)}(x)\right|\le\frac{1}{5}$$

$$|R|=\frac{(b-a)^5}{2880n^4}\left|f^{(4)}(\eta)\right|\le\frac{1}{2880\times 5n^4}\le 0.5\times 10^{-5}$$ ， $n\ge 2$ ， $I\approx S_2=\cdots$

33、(10 分)用 Gauss 列主元消去法解方程组：

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3=24\\3x_1+x_2+5x_3=34\\2x_1+6x_2+x_3=27\end{cases}$$

```
3.0000   1.0000   5.0000   34.0000
0.0000   3.6667   0.3333   12.6667
0.0000   5.3333  -2.3333    4.3333

3.0000   1.0000   5.0000   34.0000
0.0000   5.3333  -2.3333    4.3333
0.0  0000   1.9375     9.6875
```

$$x=(2.0000,3.0000,5.0000)^T$$

34、(8 分)求方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最小二乘解。

$\left(A^T A\right)x = A^T b$, $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -1.3333 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$

若用 Householder 变换，则：

$$(A,b) \to \begin{pmatrix} -1.73205 & -3.46410 & 4.61880 \\ 0 & -0.36603 & -1.52073 \\ 0 & -1.36603 & -2.52073 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1.73205 & -3.46410 & -4.61880 \\ 0 & 1.41421 & 2.82843 \\ 0 & 0 & 0.81650 \end{pmatrix}$$

最小二乘解： $(-1.33333，2.00000)^T$.

35、(8 分)已知常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} dy/dx = x/y, & 1 \le x \le 1.2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

用改进的 Euler 方法计算 $y(1.2)$ 的近似值，取步长 $h = 0.2$ 。

$k_1 = f\left(x_0, y_0\right) = 0.5$, $k_2 = f\left(x_1, y_0 + hk_1\right) = 1.1/\left(2 + 0.2 \times 0.5\right) = 0.5238095$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 2 + 0.1 \times \left(0.5 + 0.5238095\right) = 2.1071429$$

36、(6 分)构造代数精度最高的如下形式的求积公式，并求出其代数精度：

$$\int_0^1 x f(x) dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_1 f(1)$$

取 f(x)=1, x，令公式准确成立，得：

$A_0 + A_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}A_0 + A_1 = \frac{1}{3}$ $A_0 = \frac{1}{3}$, $A_1 = \frac{1}{6}$

$f(x)=x^2$时，公式左右=1/4; $f(x)=x^3$时，公式左=1/5, 公式右=5/24

∴ 公式的代数精度=2

37、（15 分）已知方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

（1）写出该方程组的 **Jacobi** 迭代法和 **Gauss-Seidel** 迭代法的分量形式；

（2）判断（1）中两种方法的收敛性，如果均收敛，说明哪一种方法收敛更快；

解：（1）**Jacobi** 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 2 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)} \quad ;k = 0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = 3 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 2 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} \quad ;k = 0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = 3 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

（2）**Jacobi** 迭代法的迭代矩阵为

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，$\rho(B) = 0 < 1$，**Jacobi** 迭代法收敛

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，$\rho(B) = 2 > 1$，**Gauss-Seidel** 迭代法发散

38、（10 分）对于一阶微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$，取步长 $h = 0.2$，分别用 **Euler** 预报－校正法和经典的四阶龙格—库塔法求 $y(0.2)$ 的近似值。

解：**Euler** 预报－校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2(2x_n - y_n) = 0.4x_n + 0.8y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1(2x_n - y_n + 2x_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = 0.16x_n + 0.2x_{n+1} + 0.82y_n \end{cases}$$

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.2 \times 0.2 + 0.82 \times 1 = 0.86$$

经典的四阶龙格—库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = 2x_n - y_n \\ k_2 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_1) \\ k_3 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_2) \\ k_4 = 2(x_n + 0.2) - (y_n + 0.2k_3) \end{cases}$$

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.8562$$

($k_1 = 1.5041; k_2 = 1.5537; k_3 = 1.5487; k_4 = 1.5943$)

39、（10 分）用二步法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[\alpha f(x_n,y_n)+\beta f(x_{n-1},y_{n-1})]$ 求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ ，问：如何选择参数 α,β 的值，才使该方法的阶数尽可能地高？写出此时的局部截断误差主项，并说明该方法是几阶的。

解：局部截断误差为

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}[\alpha f(x_n,y(x_n))+\beta f(x_{n-1},y(x_{n-1}))]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)-y(x_n)-\frac{h}{2}[\alpha y'(x_n)+\beta y'(x_{n-1})]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)-y(x_n)-\frac{h}{2}\alpha y'(x_n)$$

$$-\frac{h}{2}\beta[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)+O(h^3)]$$

$$=h(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})y'(x_n)+\frac{h^2}{2!}(1+\beta)y''(x_n)+(\frac{h^3}{3!}-\frac{h^3}{4}\beta)y'''(x_n)+O(h^4)$$

因此有 $\begin{cases} 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=0 \\ 1+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1 \end{cases}$

局部截断误差主项为 $\frac{5h^3}{12}y'''(x_n)$ ，该方法是 2 阶的。

40、(10 分)已知下列函数表：

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	9	27

(1)写出相应的三次 **Lagrange** 插值多项式；

(2)作均差表，写出相应的三次 **Newton** 插值多项式，并计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解：（1）

$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x+1$$

（2）均差表：

0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	$\frac{4}{3}$

$$N_3(x)=1+2x+2x(x-1)+\frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$f(1.5)\approx N_3(1.5)=5$$

41、(10 分)取步长 $h=0.2$，求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=8-3y & (x\geq 0) \\ y(0)=2 \end{cases}$，分别用欧拉预报—校正法和经典四阶龙格—库塔法求 $y(0.2)$ 的近似值。

解：（1）欧拉预报-校正法：

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.2(8-3y_n)=1.6+0.4y_n \\ y_{n+1}=y_n+0.1(8-3y_n+8-3(1.6+0.4y_n))=1.12+0.58y_n \end{cases}$$

$$y(0.2)\approx y_1=2.28$$

（2）经典四阶龙格-库塔法：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{0.2}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=8-3y_n \\ k_2=8-3(y_n+0.1k_1) \\ k_3=8-3(y_n+0.1k_2) \\ k_4=8-3(y_n+0.2k_3) \end{cases}$$

$$y(0.2)\approx y_1=2.3004$$

42、(10 分)取 5 个等距节点 ，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算积分 $\int_0^2 \dfrac{1}{1+2x^2}dx$ 的近似值（保留 4 位小数）。

解：5 个点对应的函数值 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x^2}$

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	1	0.666667	0.333333	0.181818	0.111111

--（2 分）

(1)复化梯形公式（n=4,h=2/4=0.5）：

$$\begin{aligned} T_4&=\frac{0.5}{2}[1+2\times(0.666667+0.333333+0.181818)+0.111111] \\ &=0.868687 \end{aligned}$$

(2) 复化梯形公式（n=2,h=2/2=1）：

$$\begin{aligned} S_2&=\frac{1}{6}[1+4\times(0.666667+0.181818)+2\times 0.333333+0.111111] \\ &=0.861953 \end{aligned}$$

43、(10 分)已知方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(1)列出 **Jacobi** 迭代法和 **Gauss-Seidel** 迭代法的分量形式；
(2)讨论上述两种迭代法的收敛性。

解：（1）Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_2^{(k)})/2\end{cases}$$

Jacobi 迭代矩阵：

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$\rho(B)=1$ 收敛性不能确定

（2）Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)})/2\end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵：

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

$$\rho(B)=\left|\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{16}\right|=\sqrt{\frac{1}{8}}<1$$

该迭代法收敛

44、(10 分) 求参数 a,b，使得计算初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}(c\le x\le d)$ 的二步数值方法

$$y_{n+1}=y_n+h[af(x_n,y_n)+bf(x_{n-1},y_{n-1})]$$

的阶数尽量高，并给出局部截断误差的主项。

解：$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)$

$$y_{n+1}=y(x_n)+h(ay'(x_n)+by'(x_{n-1}))$$

$$=y(x_n)+ahy'(x_n)+bh(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)+O(h^4))$$

$$= y(x_n) + (a+b)hy'(x_n) - bh^2 y''(x_n) + \frac{bh^3}{2} hy'''(x_n) + O(h^4))$$

所以当$\begin{cases} a+b=1 \\ -b=\frac{1}{2} \end{cases}$，即$a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}$时，

局部截断误差为$y_{n+1} - y(x_{n+1}) = \frac{bh^3}{2} y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$

局部截断误差的主项为$y_{n+1} - y(x_{n+1}) = -\frac{h^3}{4} y'''(x_n)$，该方法为二阶方法。