

西安交通大学考试题

成绩

课 程 计算方法 A

系 别 考试日期 2001 年 1 月 11 日

专业班号

姓 名 学 号 期中 期末

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一. (10 分) 填空:

(1) 在科学计算中, 计算结果与客观实际存在着误差, 误差按其来源通常分为_____误差、_____误差、_____误差和_____误差; 在计算方法课程中, 主要研究_____误差和_____误差。_____称为稳定的方法。

(2) 设在点集 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 上, 已知函数 $y = y(x)$ 的值为 y_1, y_2, \dots, y_m 和一组权重系数_____, 要求广义多项式 $p(x)$, 使得_____最小, 这时 $p(x)$ 称为_____的最小二乘逼近多项式。

(3) 将方程 $f(x) = 0$ 化为一个等价 (同解) 的方程_____, 建立迭代格式_____, 给定一个初值 x_0 , 若迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛, 则必有 $f(x^*) = 0$, 这种求根方法称为简单迭代法。

(4) 考虑典型的常微分方程 (称为试验方程)_____, 在把某一解法应用于该试验方法且步长取为 h 时, 如果只是在计算开始时产生误差, 而这误差以后_____, 我们就说这种解法相对该 $\bar{h} = \lambda h$ 是_____; \bar{h} 的全体, 称为_____。

(5) 设 y_0, y_1, \dots, y_n 是不全等的一串数, 满足

$$\begin{cases} l(y_i) \equiv (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2 - q_i y_i \geq 0 \\ q_i \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

那么 (极值原理): _____

若 $y_0 = -1$, $y_n = 2$, 则对 $y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ 可有估计 _____

二. (20 分) 计算填空:

(1) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \\ 95 \end{pmatrix}$$

方程组 $Ax = b$ 的解是 _____

(2) 已知方程组的系数矩阵 A , 求雅可比迭代矩阵 B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \text{_____}, \quad \|B\|_{\infty} = \text{_____}, \quad \text{由此}$$

可知雅可比迭代是否收敛? _____

(3) 某圆形场地的半径为 10m, 若测量半径时产生 0.1m 的误差, 在计算场地的面积时, 大约误差 (不计 π 的误差) $\Delta S \approx$ _____。

(4) $S(x)$ 是定义在 $[0, 2]$ 上的函数:

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \in [0, 1] \\ 3x^3 - 5x + 4, & x \in [1, 2] \end{cases},$$

$S(x)$ 是不是为 $[0, 1]$ 、 $[1, 2]$ 上的三次样条函数? _____

(5) 已知 $\{g_k(x)\}$ 是区间 $[a, b]$ 上以 \sqrt{x} 为权函数的正交函数系, 化简 ($a \geq 0$):

$$\int_a^b \sqrt{x} (xg_2(x) + 3x^2) g_4(x) dx = \text{_____}$$

三. (7 分) 已知数据点 $(1.0, 3.0)$, $(1.5, 4.0)$, $(2.0, 4.5)$, 求 y 的一次近似多项式。

解:

四. (6 分) 试设计一种求 $\sqrt[3]{11}$ 的算法, 并说明其可行性。

解:

五. (7 分) 已知用 $f(h)$ 计算 S 时, 有误差

$$S - f(h) = a_1 h^3 + a_2 h^6 + a_3 h^9 + \dots$$

试建立一种新的计算公式 $g(h)$, 使得 $S - g(h) = 0$ 。

解:

六. (7 分) 设 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ 为高斯型求积公式,

试证明求积系数具有非负性, 即 $A_i > 0, i=1, 2, \dots, n$. (提示: 考虑利用函数

$$g_i(x) = [(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)]^2)$$

证明:

七. (10 分) 常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad a \leq x \leq b$ 的一个数值求

解公式是: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$.

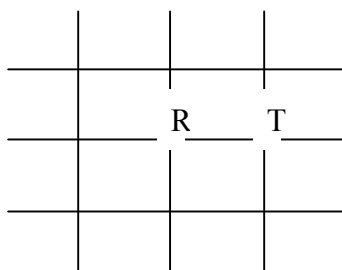
(1) 试确定此公式的代数精度;

(2) 求出此公式的局部截断误差估计式。

解:

八. (8 分) 如图是用差分法求椭圆方程的第一类边值问题数值解的部分网格,
 $R(i, j)$ 为一节点, T 为求解区域边界上一点, h 为横向步长, $|RT| = h'$ 。试证
明在节点 $R(i, j)$ 处有

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} \approx \frac{2}{h+h'} \left(\frac{u(T) - u(x_i, y_j)}{h'} - \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} \right)$$



解:

九. (10 分) 常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -(py')' + qy = f(x), & a < x < b, \text{ 其中 } p(x) > 0, q(x) > 0 \\ y(a) = d_1, \quad y(b) = d_2 \end{cases}$$

的有限元算法, 其单元刚度矩阵和右端向量的计算公式如下

$$K^{(i)} = -\frac{p_i}{l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{l_i q_i}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(i)} = \frac{l_i f_i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

试用有限元方法求边值问题 $\begin{cases} y'' - xy + 2 = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases}$ 的数值解。

(求解时将 $[0,1]$ 等分为两个小区间)

解: