一、填空

1. 有效数1234×10^{-8}的有效数字位数为____2____;

2. 设$|X|<<1$，根据计算中应注意的原则，为使得到的结果比较准确

$$\frac{1-\cos X}{\sin X}=$$ ____sin(x/2)/cos(x/2)____;

3. 作矩阵$A=LR$分解，其中$A=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\1&3&0\end{bmatrix}$，则$L=$________

$R=$________

4. 设向量$\vec{x}=(1,0,-1,2)^T$，则$\|\vec{x}\|_2=$____根号 6____；设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}$，则

$Cond_1(A)=$____21/5____

5. 设$f(x)=2x^3-3ax+4$ （a均为实数），则差商：$f[1,2,3]=$____12____，

$f[0,1,2,3]=$____2____;

6. 积分区间为$[0,1]$，$g_2(x)$为关于权函数为$\omega(x)=\sqrt{x}$的最高项系数为 1 的二次正交多项式，则积分$\int_0^1 g_2(x)\sqrt{x}(x+2)\,dx=$____0____;

7.已知

$$s(x)=\begin{cases}x^3+x^2, & 0\le x\le 1\\ 2x^3+ax^2+bx-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

是以 0,1,2 为节点的三次样条函数,则$a=$____-2____，$b=$____3____。

9. 设$l_0(x),l_1(x),l_2(x),l_3(x)$是以$x_0,x_1,x_2,x_3$为互异节点的三次 Lagrange 插值基函数，则$\sum_{j=0}^{3}l_j(x)(2x_j-1)^3=$________;

7. 若f(0.0)=1.0, f(1.0)=3.0,用梯形公式计算积分 $\int_{0.0}^{1.0} f(x)dx$ 求得的近似值为 2______；又 f(0.5)=2.0,用 Simpson 求积公式求得的近似值为____2____。用三点数值微分公式计算 $f'(0.5)$ 求得的近似值为____2______；

8. 用乘幂法求矩阵 A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 按模最大的特征值和特征向量时，令 $z_0=(1,1)^T$，则迭代一次后，特征向量近似值 $z_1=$ (5/9, 1)^T______________；用反幂法求其按模最小的特征值时，迭代一次后特征值的近似值 $m_1=$_________；

9. 解初值问题 $\begin{cases} y'(x)=f(x) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ 近似解的后退 Euler 公式是 $y_{i+1}=$ yi+hf(x(i+1),y(i+1))_____________；

二（6 分）、已知线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & 10 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 11 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$，作矩阵 A 的楚列斯基(Cholesky)分解 $A=\tilde{L}\tilde{L}^T$，并利用平方根法求方程组 $Ax=b$ 的解.

三（6 分）、已知函数 $y=f(x)$ 的函数值、导数值如下：

x	0	1	2
y(x)	1	3	11
y'(x)	2	4	

求满足条件的 Hermite 插值多项式及截断误差表示式.

建立差商表

x_i	y_i	[,]	[,,]	[,,,]	[,,,,]
0	1				
0	1	2			
1	3	2	0		
1	3	4	2	2	
2	11	8	4	1	$-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow N_4(x)=1+2x+2x^2(x-1)-\frac{1}{2}x^2(x-1)^2$$

2） $R_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^2(x-2)$ ，其中 ξ 属于 $x,0,1,2$ 之间。

$$= f[0,0,1,1,2,x]x^2(x-1)^2(x-2)$$

四（6 分）、求函数 $y=e^x$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最优平方逼近二次式。

取 $p_2(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ ，

$(\varphi_0,\varphi_0)=(1,1)=\int_{-1}^{1}dx=2$ ，　　$(\varphi_0,\varphi_1)=(1,x)=\int_{-1}^{1}xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}=0$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=(x,x)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=2/3$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=(1,x^2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=2/3$$

$(\varphi_1,\varphi_2)=(x,x^2)=\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}=0$ ，$(\varphi_2,\varphi_2)=(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}=2/5$

$$(\varphi_0,f)=(1,e^x)=\int_{-1}^{1}e^xdx=e-\frac{1}{e},(\varphi_1,f)=(x,e^x)=\int_{-1}^{1}xe^xdx=2e,$$

$$(\varphi_2,f)=(x^2,e^x)=\int_{-1}^{1}x^2e^xdx=e-\frac{1}{e},$$

有错误

则 $\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) \\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ (\varphi_2,f) \end{pmatrix}$ 即 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-\frac{1}{e} \\ 2e \\ e-\frac{1}{e} \end{pmatrix}$

（4 分）

解之，得 $c_0 = 0,\quad c_1 = 3e,\quad c_2 = \frac{2}{3}(e-\frac{1}{e}).$

所以，$p_1(x) = 3ex + \frac{2}{3}(e-\frac{1}{e})x^2.$ （6 分）

五（6 分）、对线性代数方程组 $Ax=b$：$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

（1） 请写出雅可比(Jacobi)迭代法的迭代格式，并证明迭代格式收敛还是发散；

（2） 请写出高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法的迭代格式，并证明迭代格式收敛还是发散.

解：首先交换方程次序，得到一个新的对称正定的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

（1）雅可比(Jacobi)迭代法的迭代格式：

$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (2x_3^{(k)} + 5)/3 \\ x_2^{(k+1)} = (-x_3^{(k)} - 1)/2 \\ x_3^{(k+1)} = (2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 2)/2 \end{cases}$， 因为矩阵 A 是对称正定的，而 2D-A 也是对称正定的，故 Jacobia 迭代法收敛。

（2）高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法的迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (2x_3^{(k)}+5)/3 \\ x_2^{(k+1)} = (-x_3^{(k)}-1)/2 \\ x_3^{(k+1)} = (2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}+2)/2 \end{cases}$$，因为 A 对称正定，故高斯-赛德(Gauss-Seidel)迭代法收敛。

七（7 分）、方程 $x^3-3x+1=0$ 在1.5邻近有根 x^*，

（1）讨论方程在区间[1,2]解的存在性；

（2）讨论迭代格式 $x_{k+1}=\frac{1}{3}(x_k{}^3+1)$ 的收敛性；

（3）用松弛加速法对此迭代实施改善，若格式不收敛，使改善后的迭代收敛；若格式收敛，使改善后的迭代收敛加速；

解：（1）因 $x^3-3x+1=0$，故 $f'(x)=3x^2-3$ 在[1,2]是单调递增的。因为 $f(1)=-1, f(2)=3$，故 $f(1)f(2)<0$，根据零点存在定理，有且只有一个根在[1,2]区间上。

（2）$\phi(x)=\frac{1}{3}(x^3+1),\ \phi'(x)=x^2$，显然 $x^*\in[1,2]$。

此时，$|\phi'(x)|\ge\phi'(1)=1,\quad \forall x\in[1,2]$，

因此 $|\phi(x)-x^*|=|\phi(x)-\phi(x^*)|=|\phi'(\xi)||x-x^*|\ge|x-x^*|\quad \forall x\in[1,2]$

所以，迭代 $x_{k+1}=\frac{1}{3}(x_k{}^3+1)$ 不收敛；

（3）改善：取 $\lambda=\phi'(1.5)=\frac{9}{4}$，　　$\psi(x)=\frac{\phi(x)-\lambda x}{1-\lambda}=\frac{\frac{1}{3}(x^3+1)-\frac{9}{4}x}{-\frac{5}{4}}$，

迭代 $x_{k+1}=\psi(x_k),\quad x_0=1.5$ 收敛。

八（7 分）、给定常微分方程初值问题 $\begin{cases} y''(x)-2y'(x)+4y(x)=\sin x, & 0\le x\le 1 \\ y(0)=0, y'(0)=-0.2 \end{cases}$，

取步长为 h. 利用标准的四阶四级龙格-库塔法写出求解该问题的数值格式.

先把二阶方程化为方程组，令 $y_1=y, y_2=y'$，则得到微分方程组

$$\begin{cases} y_1{}' = y_2 \\ y_2{}' = \sin(x) - 4y_1 + 2y_2 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = -0.2 \end{cases}$$

再用标准的四级四阶龙格-库塔法求解 $i = 0, x_i = 0, x_{i+1} = 0.1$

$$K_1 = hf(x_i, y_i) = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} y_{2i} \\ \sin(x_i) - 4(y_{1i}) + 2y_{2i} \end{pmatrix}$$

$$K_2 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5K_1) = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}$$

$$= h\begin{pmatrix} y_{2i} + 0.5K_{21} \\ \sin(x_i + 0.5h) - 4(y_{1i} + 0.5K_{11}) + 2(y_{2i} + 0.5K_{21}) \end{pmatrix}$$

$$K_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2) = \begin{pmatrix} K_{13} \\ K_{23} \end{pmatrix}$$

$$= h\begin{pmatrix} y_{2i} + 0.5K_{22} \\ \sin(x_i + 0.5h) - 4(y_{1i} + 0.5K_{12}) + 2(y_{2i} + 0.5K_{22}) \end{pmatrix}$$

$$K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3) = \begin{pmatrix} K_{14} \\ K_{24} \end{pmatrix}$$

$$= h\begin{pmatrix} y_{2i} + K_{23} \\ \sin(x_i + h) - 4(y_{1i} + K_{13}) + 2(y_{2i} + K_{23}) \end{pmatrix}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

九(7 分)、设 $f(x) \in C^2[a,b]$，已知 Legendre 正交多项式的二次多项式为

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$。记 $I[f] = \int_{-1}^{1} f(x)dx$， $Q[f] = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，

（1） 求参数 A_0, A_1, x_0, x_1，使求积公式 $I[f] \approx Q[f]$ 具有尽可能高的代数精度，

（2） 导出截断误差公式；

零点为 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

当 $f(x) = 1$，左=$\int_{-1}^{1} 1dx = 2$，右=$A_0 + A_1$；

当 $f(x) = x$，左=$\int_{-1}^{1} xdx = 0$，右=$-\frac{1}{\sqrt{3}}A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_1 = 0$；

要使求积公式具有最高阶代数精度，则求得 $A_0 = A_1 = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$，

则求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

当 $f(x) = x^2$，左=$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$，右=$\frac{2}{3}$，当 $f(x) = x^3$，左=$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{2}$，右=0，

代数精度为 3.

令 $x = \frac{t+1}{2}$，$\int_{0}^{1} \sqrt{1+2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{t+2}\, dt = \frac{1}{2}(\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{3}}+2} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}+2})$。