一、填空（每空 2 分，共 26 分）

1. 圆周率 π=3.1415926…的近似数 $\pi_1=3.1416$ 准确到______位小数；

2. 给定向量 $\vec{x}=(2,3,-4)^T$，则 $\|\vec{x}\|_1=$__________，$\|\vec{x}\|_2=$__________；

3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 的条件数 $cond_1(A)=$_________；

4. 设 $l_0(x),l_1(x),l_2(x),l_3(x)$ 是以 x_0,x_1,x_2,x_3 为互异节点的三次 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{j=0}^{3} l_j(x)(x_j-2)^3=$________________；

5. 若 $f(x)=2x^6-3x^5+x^3+1$，则其六阶差商 $f[3^0,3^1,3^2,\ldots 3^6]=$__________；

6. 数值积分公式中的 simpson 公式的代数精度为__________；

7. 给定 $x^{(0)}=(0,0)^T$，用共轭梯度法求解线性方程组 $\begin{bmatrix}6 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$，可得 $x^{(1)}=$_________；$x^{(2)}=$______________；

8. 解初值问题 $\begin{cases}y'(x)=f(x)\\ y(0)=y_0\end{cases}$ 近似解的梯形公式是 $y_{k+1}=$____________________；

9. 已知线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 10\\ 4\end{bmatrix}$，作矩阵 A 的杜立特尔（Doolittle）分解 A=LU，并利用其解方程组 $Ax=b$，则 L=_________，U=________,x=__________；

二、（7 分）已知函数 $y=f(x)$ 的函数值、导数值如下：

x	0	1
$y(x)$	1	0
$y'(x)$	0	1
$y''(x)$	2	

求满足条件的 Hermite 插值多项式及截断误差表示式

三、（7 分）求函数 $y=e^x$ 在区间 $[1,2]$ 上的最优平方逼近一次式。

四、（8 分）对线性方程组 $Ax=b$；$\begin{cases}2x_2+x_3=-1\\ 3x_1-2x_3=5\\ -2x_1+x_2+2x\end{cases}$

（1） 请写出雅克比（Jacobi）迭代法的迭代格式，并证明迭代格式收敛还是发散；

（2）　请写出高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法的迭代格式，并证明迭代格式收敛还是发散。

五、（8 分）设方程式 $3-3x-2\sin x=0$，

（1）　证明方程在 $[0,1]$ 内存在唯一解；

（2）　若采用如下迭代公式 $x_{n+1}=1-\frac{2}{3}\sin x_n$，判定迭代是否收敛。

六、（5 分）用反幂法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix}$，

在 $\lambda=1$ 附近的特征值及其对应的特征向量，选取初始向量为 $(1,1,1)^T$ 进行迭代，给出迭代一次的结果。

七、（8 分）给定差微分方程初值问题 $\begin{cases}y'(x)=x-y+1, 0\le x\le 1\\ y(0)=1\end{cases}$，取 h=0.1.

(1) 用欧拉法求 y(x)在 x=0.2 的近似值；

(2) 利用标准的四级四阶龙格-库塔法求 y(x)在 x=0.1 的近似值。

八、（7 分）设 $f(x)\in C^2[a,b]$,记

$I[f]=\int_0^2 f(x)dx$，　$Q[f]=Af(x_0)+f(x_1)$

（1）　求参数 $A,x_{0,}x_1$，使求积公式 $I[f]\approx Q[f]$ 具有尽可能高的代数精度；

（2）　并给出数值积分公式截断误差表示式。

九、　（4 分)设有线性方程组 $Ax=b$,其中 A 是 n 阶对称正定矩阵且 $\left\|\frac{\omega}{2}A\right\|<1$,证明当 $\omega>0$ 时，由迭代格式（法）:

$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega\left(A\frac{x^{(k+1)}+x^{(k)}}{2}-b\right)$产生的迭代序列收敛于方程组的唯一解。