计算方法 第 3 章习题答案

3.1 用雅可比迭代法与高斯-赛德尔迭代法求解方程组

$$\begin{cases} -8x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7, \end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 准确到两位数.

解 雅可比迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 1\right)/8, \\ x_2^{(k+1)} = \left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 16\right)/5, \\ x_3^{(k+1)} = \left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 7\right)/4. \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 1\right)/8, \\ x_2^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 16\right)/5, \\ x_3^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} - 7\right)/4. \end{cases}$$

注意方程组的精确解为 $x_1 = -1, x_2 = -4, x_3 = -3$. 下面用迭代法计算, 取初始向量 $x^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 分别代入以上两种迭代格式, 得计算结果如下表:

k	Jacobi			G-S		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	-0.13	-3.20	-1.75	-0.13	-3.23	-2.59
2	-0.74	-3.58	-2.58	-0.85	-3.89	-2.94
3	-0.90	-3.86	-2.83	-0.98	-3.98	-2.99
4	-0.96	-3.95	-2.94	-1.00	-4.00	-3.00
5	-0.97	-3.98	-2.98			
6	-1.00	-3.99	-2.99			
7	-1.00	-4.00	-3.00			

3.2 设有方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 11, \\ 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 25, \end{cases}$$

写出雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法与 $\omega = 1.2$ 的超松弛迭代法的迭代公式, 并说明三种迭代法是否收敛, 为什么?

解 雅可比迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \big(13 - 4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}\big)/10, \\ x_2^{(k+1)} = \big(11 - 4x_1^{(k)} - 8x_3^{(k)}\big)/10, \\ x_3^{(k+1)} = \big(25 - 4x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)}\big)/10. \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \big(13 - 4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}\big)/10, \\ x_2^{(k+1)} = \big(11 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)}\big)/10, \\ x_3^{(k+1)} = \big(25 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)}\big)/10. \end{cases}$$

超松弛迭代法 $(\omega = 1.2)$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\big(13 - 4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}\big)/10, \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\big(11 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)}\big)/10, \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\big(25 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)}\big)/10. \end{cases}$$

观察到方程组的系数矩阵 A 对称, 且有

$$\Delta_1 = 10 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 84 > 0, \quad \Delta_3 = |A| = 296 > 0,$$

即 A 对称正定. 根据迭代法收敛相关定理可知当 $0 < \omega < 2$ 时, 超松弛迭代方法收敛. 因此高斯-赛德尔迭代法 $(\omega = 1)$ 收敛, $\omega = 1.2$ 的超松弛迭代法收敛.

又因为

$$2D - A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -4 & -8 & 10 \end{pmatrix}, \quad |2D - A| = -216,$$

$2D - A$ 不正定, 故雅可比迭代法不收敛.

3.3 设有方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \end{cases}$$

写出三种收敛的迭代格式并说明收敛的理由.

解 将原方程组进行改写

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3, \end{cases}$$

此时方程组的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

A 为严格对角占优矩阵, 因此雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法以及 $0<\omega\leqslant 1$ 的超松弛迭代法收敛. 三种迭代格式分别为:

雅可比迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \big(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\big)/5, \\ x_2^{(k+1)} = \big(20+x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}\big)/4, \\ x_3^{(k+1)} = \big(3-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)}\big)/10. \end{cases}$$

高斯-赛德尔迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \big(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\big)/5, \\ x_2^{(k+1)} = \big(20+x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}\big)/4, \\ x_3^{(k+1)} = \big(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}\big)/10. \end{cases}$$

超松弛迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)}+\omega\big(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\big)/5, \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)}+\omega\big(20+x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}\big)/4, \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)}+\omega\big(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}\big)/10. \end{cases}$$

3.4 欲用迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1-4x_2-2x_4=11, \\ 4x_1+8x_3+3x_4=6, \\ 3x_2+x_3+5x_4=2, \\ 5x_1-x_2+x_3+2x_4=5, \end{cases}$$

写出收敛的高斯-赛德尔迭代法与 $\omega=0.8$ 的超松弛迭代法的迭代公式. 给定初始向量 $x^{(0)}=(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 用高斯-赛德尔迭代法计算 $x^{(1)}$.

解 将原方程组改写为

$$\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3+2x_4=5, \\ x_1-4x_2-2x_4=11, \\ 4x_1+8x_3+3x_4=6, \\ 3x_2+x_3+5x_4=2, \end{cases}$$

此时方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

A 为严格对角占优矩阵, 因此雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法以及 $0 < \omega \leqslant 1$ 的超松弛迭代法收敛.

高斯-赛德尔迭代法：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (5 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 2x_4^{(k)})/5, \\ x_2^{(k+1)} = (-11 + x_1^{(k+1)} + 2x_4^{(k)})/4, \\ x_3^{(k+1)} = (6 - 4x_1^{(k+1)} - 3x_4^{(k)})/8, \\ x_4^{(k+1)} = (2 - 3x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)})/5. \end{cases}$$

$\omega = 0.8$ 的超松弛迭代法:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.8 * (5 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 2x_4^{(k+1)})/5, \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.8 * (-11 + x_1^{(k+1)} + 2x_4^{(k)})/4, \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_3^{(k)} + 0.8 * (6 - 4x_1^{(k+1)} - 3x_4^{(k)})/8, \\ x_4^{(k+1)} = 0.2x_4^{(k)} + 0.8 * (2 - 3x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)})/5. \end{cases}$$

给定初始向量 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 用高斯-赛德尔迭代法计算得

$$x_1^{(1)} = 1,\ \ x_2^{(1)} = -\frac{5}{2},\ \ x_3^{(1)} = \frac{1}{4},\ \ x_4^{(1)} = \frac{37}{20}.$$

因此

$$x^{(1)} = \big(1, -\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{37}{20}\big)^{\mathrm{T}}.$$

3.5 设有方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$$

证明雅可比迭代法对任意的初始向量都不收敛, 而高斯-赛德尔迭代法对任意的初始向量都收敛.

证明 根据 $A = D - E - F$, 得

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

雅可比迭代法的迭代矩阵

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \lambda & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = 0,$$

解得:

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}i,\ \ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}i.$$

因此 $\rho(B) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, 雅可比迭代法不收敛.

高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵

$$B = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda\big(\lambda + \frac{1}{2}\big)^2 = 0,$$

解得:

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$$

因此 $\rho(B) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{2} < 1$, 高斯-赛德尔迭代法收敛.

3.6 设有方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

证明雅可比迭代法对任意的初始向量都收敛, 而高斯-赛德尔迭代法对任意的初始向量都不收敛.

证明 根据 $A = D - E - F$, 得

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ \ F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

雅可比迭代法的迭代矩阵

$$B=D^{-1}(E+F)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix},$$

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0,$$

解得:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

因此 $\rho(B)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}=0<1$, 雅可比迭代法收敛.

高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵

$$B=(D-E)^{-1}F=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\0&\lambda-2&3\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\big(\lambda+2\big)^2=0,$$

解得:

$$\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=\lambda_3=-2.$$

因此 $\rho(B)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}=2>1$, 高斯-赛德尔迭代法不收敛.

3.7 用超松弛迭代法求解方程组

$$\begin{cases}4x_1+3x_2=24,\\3x_1+4x_2-x_3=30,\\-x_2+4x_3=-24,\end{cases}$$

选择使得收敛速度最快的松弛因子 ω, 给定初始向量 $x^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 计算 $x^{(2)}$.

解 超松弛迭代法:

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\omega(24-3x_2^{(k)})/4,\\x_2^{(k+1)}=(1-\omega)x_2^{(k)}+\omega(30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)})4,\\x_3^{(k+1)}=(1-\omega)x_3^{(k)}+\omega(-24+x_2^{(k+1)})/4.\end{cases}$$

迭代矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}4&0&0\\3\omega&4&0\\0&-\omega&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4(1-\omega)&-3\omega&0\\0&4(1-\omega)&\omega\\0&0&4(1-\omega)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-\omega&-\frac{3}{4}\omega&0\\-\frac{3}{4}\omega(1-\omega)&1-\omega+\frac{9}{16}\omega^2&\frac{\omega}{4}\\-\frac{3}{16}\omega^2(1-\omega)&\frac{1}{4}\omega(1-\omega)+\frac{9}{64}\omega^3&1-\omega+\frac{\omega^2}{16}\end{pmatrix},$$

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1+\omega&\frac{3}{4}\omega&0\\\frac{3}{4}\omega(1-\omega)&\lambda-1+\omega-\frac{9}{16}\omega^2&-\frac{\omega}{4}\\\frac{3}{16}\omega^2(1-\omega)&-\frac{1}{4}\omega(1-\omega)-\frac{9}{64}\omega^3&\lambda-1+\omega-\frac{\omega^2}{16}\end{vmatrix}=0,$$

解得: $\lambda_1=1-\omega$,

$$\lambda_2=1-\omega+\frac{5\omega^2-\sqrt{5}\sqrt{32\omega^2-32\omega^3+5\omega^4}}{16},\ \lambda_3=1-\omega+\frac{5\omega^2+\sqrt{5}\sqrt{32\omega^2-32\omega^3+5\omega^4}}{16}.$$

若要迭代法收敛, 则需有

$$\rho(B)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}<1\implies 0<\omega\leqslant\frac{1}{5}\big(16-4\sqrt{6}\big).$$

当 $0<\omega\leqslant\frac{1}{5}\big(16-4\sqrt{6}\big)$ 时,

$$\rho(B)=1-\omega+\frac{5}{16}\omega^2=\frac{5}{16}\left((\omega-\frac{8}{5})^2+\frac{16}{25}\right),$$

$\rho(B)$ 关于 ω 在区间 $\omega\in(0,\frac{1}{5}\big(16-4\sqrt{6}\big)]$ 上单调递减. 当 $\omega=\frac{1}{5}\big(16-4\sqrt{6}\big)$ 时, $\rho(B)$ 最小, 迭代法收敛最快.

将初始向量 $x^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 代入迭代格式计算得:

$$x_1^{(1)}=\frac{96-24\sqrt{6}}{5},\ x_2^{(1)}=\frac{6}{25}(-164+71\sqrt{6}),\ x_3^{(1)}=\frac{12}{125}(-741+274\sqrt{6});$$
$$x_1^{(2)}=\frac{12}{125}(1143-452\sqrt{6}),\ x_2^{(2)}=\frac{12}{125}(-3288+1357\sqrt{6}),\ x_3^{(2)}=\frac{12}{625}(-7567+2988\sqrt{6}).$$

3.8 (1) 求解线性方程组 $Ax=b$ (其中 A 为对称正定矩阵) 的迭代公式为

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega\big(Ax^{(k)}-b\big),\quad k=0,1,2,\cdots,$$

证明: 当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$ 时, 上述迭代法收敛 (其中 $0<\alpha\leqslant\lambda(A)\leqslant\beta$);
(2) 若用 (1) 中的迭代法求解方程组

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},$$

试确定使得迭代法收敛的 ω 取值范围, 并求出使迭代法收敛最快的最优 ω 值 ω_{opt}.

解 (1) 将迭代公式改写为

$$x^{(k+1)} = \big(I - \omega A\big)x^{(k)} + \omega b, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则迭代矩阵 $B = I - \omega A$, 其特征值为 $\lambda(B) = 1 - \omega\lambda(A)$. 若要迭代法收敛, 则需有

$$\rho(B) = |\lambda(B)| = |1 - \omega\lambda(A)| < 1 \implies 0 < \omega < \frac{2}{\lambda(A)}.$$

又因为 $0 < \alpha \leqslant \lambda(A) \leqslant \beta$, 因此有

$$0 < \omega < \frac{2}{\beta}.$$

(2) 由(1)知

$$B = I - \omega A = \begin{pmatrix} 1-3\omega & \omega \\ \omega & 1-3\omega \end{pmatrix}, \quad |\lambda I - B| = (\lambda - 1 + 3\omega)^2 - \omega^2 = 0,$$

得 B 的特征值为

$$\lambda_1 = 1 - 4\omega, \ \ \lambda_2 = 1 - 2\omega.$$

迭代法收敛等价于 $\rho(B) < 1$, 即有

$$\begin{cases} |1 - 4\omega| < 1, \\ |1 - 2\omega| < 1, \end{cases} \implies 0 < \omega < \frac{1}{2}.$$

另外, 易得

$$\rho(B) = \begin{cases} 1 - 2\omega, \ \text{if} \ 0 < \omega \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 4\omega - 1, \ \text{if} \ \omega > \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

由此可知当 $\omega = \frac{1}{3}$ 时, $\rho(B)$ 取到最小值 $\frac{1}{3}$, 此时迭代法收敛最快.

3.10 给定初始向量 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 用共轭梯度法求解以下方程组

$$(1) \ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -2; \end{cases} \qquad (2) \ \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 12, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 18. \end{cases}$$

解 方程组 (1) 的精确解为 $x^* = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$. 用共轭梯度法求解. 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

第 1 次迭代取搜索方向为 $d^{(0)}=r^{(0)}=b-Ax^{(0)}=b=(2,0,-2)^{\mathrm{T}}$, 则

$$r^{(0)\mathrm{T}}d^{(0)}=8,\ d^{(0)\mathrm{T}}Ad^{(0)}=24,\ \ \alpha_0=\frac{r^{(0)\mathrm{T}}d^{(0)}}{d^{(0)\mathrm{T}}Ad^{(0)}}=\frac{1}{3},$$

于是得

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0d^{(0)}=\frac{1}{3}(0,2,-2)^{\mathrm{T}},\quad r^{(1)}=b-Ax^{(1)}=\frac{1}{3}(0,4,0)^{\mathrm{T}}.$$

第 2 次迭代取搜索方向为 $d^{(1)}=r^{(1)}+\beta_0d^{(0)}$. 由于

$$r^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(0)}=-\frac{16}{3},\quad \beta_0=-\frac{r^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(0)}}{d^{(0)\mathrm{T}}Ad^{(0)}}=\frac{2}{9},\quad d^{(1)}=r^{(1)}+\beta_0d^{(0)}=\frac{4}{9}(1,3,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$r^{(1)\mathrm{T}}d^{(1)}=\frac{16}{9},\quad d^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(1)}=\frac{64}{27},\quad \alpha_1=\frac{r^{(1)\mathrm{T}}d^{(1)}}{d^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(1)}}=\frac{3}{4},$$

因此得

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1d^{(1)}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad r^{(2)}=b-Ax^{(2)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}},$$

即迭代两次求得方程组的精确解 $x^*=x^{(2)}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

方程组 (2) 的精确解为 $x^*=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$. 用共轭梯度法求解. 已知

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&5&3\\2&3&6\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}12\\10\\18\end{pmatrix}.$$

第 1 次迭代取搜索方向为 $d^{(0)}=r^{(0)}=b-Ax^{(0)}=b=(12,10,18)^{\mathrm{T}}$, 则

$$r^{(0)\mathrm{T}}d^{(0)}=568,\ \ d^{(0)\mathrm{T}}Ad^{(0)}=4724,\ \ \alpha_0=\frac{r^{(0)\mathrm{T}}d^{(0)}}{d^{(0)\mathrm{T}}Ad^{(0)}}=\frac{142}{1181},$$

得到

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0d^{(0)}=\frac{1}{1181}(1704,1420,2556)^{\mathrm{T}},\ \ r^{(1)}=b-Ax^{(1)}=\frac{1}{1181}(3664,-1254,-1746)^{\mathrm{T}}.$$

第 2 次迭代取搜索方向为 $d^{(1)}=r^{(1)}+\beta_0d^{(0)}$. 由于

$$r^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(0)}=-\frac{127084}{1181},\quad \beta_0=-\frac{r^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(0)}}{d^{(0)\mathrm{T}}Ad^{(0)}}=\frac{31771}{1394761},$$
$$d^{(1)}=r^{(1)}+\beta_0d^{(0)}=\frac{1}{1394761}(4708436,-1163264,-1490148)^{\mathrm{T}},$$
$$r^{(1)\mathrm{T}}d^{(1)}=\frac{18045928}{1394761},\quad d^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(1)}=\frac{86415322336}{1647212741},\quad \alpha_1=\frac{r^{(1)\mathrm{T}}d^{(1)}}{d^{(1)\mathrm{T}}Ad^{(1)}}=\frac{37521551}{152139652},$$

于是得

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1d^{(1)}=\frac{1}{535703}(1218941,533924,1018251)^{\mathrm{T}},$$
$$r^{(2)}=b-Ax^{(2)}=(\frac{50094}{535703},\frac{851598}{535703},-\frac{72358}{76529})^{\mathrm{T}}.$$

第 3 次迭代取搜索方向为 $d^{(2)} = r^{(2)} + \beta_1 d^{(1)}$. 由于

$$r^{(2)\mathrm{T}} A d^{(1)} = -\frac{8798421104}{632665243}, \quad \beta_1 = -\frac{r^{(2)\mathrm{T}} A d^{(1)}}{d^{(1)\mathrm{T}} A d^{(1)}} = \frac{10802548078729}{40750833997678},$$

$$d^{(2)} = r^{(2)} + \beta_1 d^{(1)} = \frac{1}{286977704209}(283647167144, 392755834306, -352613747684)^{\mathrm{T}},$$

$$r^{(2)\mathrm{T}} d^{(2)} = \frac{984276890476}{286977704209}, \quad d^{(2)\mathrm{T}} A d^{(2)} = \frac{719243605008198908}{153734817077873927}, \quad \alpha_2 = \frac{r^{(2)\mathrm{T}} d^{(2)}}{d^{(2)\mathrm{T}} A d^{(2)}} = \frac{535703}{730733},$$

因此得到

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)} = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad r^{(3)} = b - A x^{(3)} = (0, 0, 0).$$

故迭代 3 次求得方程组的精确解 $x^* = x^{(3)} = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.