计算方法　第 2 章习题答案

2.1　用高斯消去法和列主元高斯消去法求解以下方程组

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

解　(i)高斯消去法

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -6 & 14 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 次消元}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 24 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 次消元}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{4} & 33 \end{pmatrix}.$$

逐步回代解得　$(x_1, x_2, x_3) = (109, 27, 66)$.

$$(2)\ \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 次消元}} \begin{pmatrix} -12 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 次消元}} \begin{pmatrix} -12 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{44}{12} & \frac{132}{12} \end{pmatrix}$$

逐步回代解得　$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$.

(ii)列主元高斯消去法

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ \mathbf{-4} & 2 & -6 & 14 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 次消元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 12 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 次消元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 22 \end{pmatrix}.$$

逐步回代解得　$(x_1, x_2, x_3) = (109, 27, 66)$.

$$(2)\ \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ \mathbf{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \mathbf{\frac{7}{6}} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{66}{21} & \frac{66}{7} \end{pmatrix}$$

逐步回代解得　$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$.

2.3　作以下矩阵的 $A = LU$ 分解

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 12 \\ 6 & 27 & 38 \end{pmatrix}.$$

解　根据 $A=LU$ 分解的计算公式可得

(1) $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$;　(2) $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\0&0&\frac{26}{3}\end{pmatrix}$;

(3) $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\0&5&6\\0&0&4\end{pmatrix}$.

2.4 试写出用 $A=LU$ 分解求解下面方程组

$$\begin{pmatrix}b_1&c_1&&&a_1\\a_2&b_2&c_2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&a_{n-1}&b_{n-1}&c_{n-1}\\c_n&&&a_n&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_{n-1}\\d_n\end{pmatrix}$$

的计算公式.

解　由题设, $A=LU$ 分解如下

$$L=\begin{pmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\&l_{32}&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,n-1}&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u_{11}&c_1&&&u_{1n}\\&u_{22}&c_2&&u_{2n}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&u_{n-1,n-1}&c_{n-1}\\&&&&u_{nn}\end{pmatrix}.$$

其中$l_{i,i-1}\ (i=2,\cdots,n-1), l_{nj}\ (j=1,\cdots,n-1)$ 以及 $u_{ii}\ (i=1,\cdots,n), u_{in}\ (i=1,\cdots,n-2)$ 的具体计算公式可参见教材 P26.

于是有

$$Ax=d \implies LUx=d \implies \begin{cases}Ly=d,\\Ux=y.\end{cases}$$

先从 $Ly=d$ 解出 y $\implies \begin{cases}y_1=d_1\\y_i=d_1-\sum\limits_{j=1}^{i=1}l_{ij}y_j, \quad i=2,3,\ldots,n\end{cases}$

再从 $Ux=y$ 解出 x $\implies \begin{cases}x_n=y_n/u_{nn}\\x_i=\left(y_i-\sum\limits_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j\right)/u_{ii}, \quad i=n-1,n-2,\cdots,2,1\end{cases}$

2.6 用平方根法和改进平方根法求解以下方程组：

$$(1)\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解　先用平方根法求解.

$$(1)\ Ax = GG^Tx = b \implies \begin{cases} Gy = b, \\ G^Tx = y. \end{cases}\quad \text{其中}\ \ G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \ \text{因此有}\ \begin{cases} y = \big(5, 2, -1\big)^{\mathrm{T}}, \\ x = \big(2, 1, -1\big)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

$$(2)\ Ax = GG^Tx = b \implies \begin{cases} Gy = b, \\ G^Tx = y. \end{cases}\quad \text{其中}\ \ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ \ \text{因此有}\ \begin{cases} y = \big(2, 1, -2\big)^{\mathrm{T}}, \\ x = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

再用改进平方根法 ($A = LDL^T$) 求解.

$$(1) \begin{cases} Ly = b, \\ Dz = y, \\ L^Tx = z. \end{cases}\quad \text{其中}\ \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\ \ \text{因此有}\ \begin{cases} y = \big(10, 8, -1\big)^{\mathrm{T}}, \\ z = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1)^{\mathrm{T}}, \\ x = \big(2, 1, -1\big)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} Ly = b, \\ Dz = y, \\ L^Tx = z. \end{cases}\quad \text{其中}\ \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 36 \end{pmatrix},\ \ \text{因此有}\ \begin{cases} y = \big(2, 4, -12\big)^{\mathrm{T}}, \\ z = (2, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}, \\ x = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

2.7 用追赶法求解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解　对于三对角矩阵 A, 有如下的 Doolittle 分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

于是求解三对角方程组的追赶法可写为

$$\text{求解}\ Ax = b \implies LUx = b \implies \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases} \implies \begin{cases} y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right)^{\mathrm{T}} \\ x = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

2.8 计算矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

的 1 范数、2 范数、∞ 范数和相应的条件数.

解　注意到 A 是对称矩阵且 3 个特征值为-6,6,12. 另外

$$A^{-1}=\frac{1}{72}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -5 \\ -8 & 4 & -8 \\ -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

故可得

$$\|A\|_1=\max\{16,10,16\}=16,\quad \|A^{-1}\|_1=\frac{1}{72}\max\{14,20,14\}=\frac{5}{18},\quad \mathrm{Cond}_1(A)=\|A\|_1\|A^{-1}\|_1=\frac{40}{9}.$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1(A^TA)}=\sqrt{\lambda_1^2(A)}=|\lambda_1|=12,\quad \mathrm{Cond}_2(A)=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}=2,$$

其中 λ_1,λ_3 分别是矩阵 A 的绝对值最大和绝对值最小的特征值.

$$\|A\|_\infty=\max\{16,10,16\}=16,\quad \|A^{-1}\|_\infty=\frac{1}{72}\max\{14,20,14\}=\frac{5}{18},\quad \mathrm{Cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=\frac{40}{9}.$$

2.10 证明对于任何实数 $p\geqslant 1$, $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ 定义了 $\mathbf{R}^n$ 上的一种向量范数.

证　按照向量范数的定义分别验证正定性、齐次性和三角不等式.

(1) 正定性：显然有

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\geqslant 0 \text{ 且 } \|x\|_p=0 \Longleftrightarrow x_i=0 \text{ 即 } x=0.$$

(2) 齐次性：

$$\|\alpha x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^n |\alpha|^p\,|x_i|^p\right)^{1/p}=|\alpha|\|x\|_p.$$

(3) 三角不等式：由于

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p},$$

根据闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式, 有

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}=\|x\|_p+\|y\|_p.$$