

第十九屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：

作品名稱：IC-Coloring—力爭上郵

姓名：曹禕中

關鍵字：IC-Coloring、郵票問題

研究題目

研究在一張郵票裡的每一個格子填上一個數字，若從這張郵票連續的撕下郵票，其面值的總和可以湊出 1 到所有郵票的和。則此郵票中的面值分配方法稱為一個 IC-Coloring。要求出在一張郵票裡，面值的總和可以最高的 IC-Coloring 的面值分配方法。

研究動機

雖然郵票面值分配的問題不是什麼了不起的學問，卻是一種可以在生活中幫助人們的數學。並且有著令人意想不到的應用。小小的一頁郵票上竟然有著這麼多耐人尋味的細節，此點令我興奮不已。

研究目的

探討 $1 \times n$ 排列的矩形郵票的各種 IC-Coloring。

研究方法

一、郵票問題

定義相關名詞：

- (一) 郵票：可以填入面值的節點與，相鄰的節點之間有連線。
- (二) 連通：即指有連線的。
- (三) 連通子集合：即指一集合中所有的節點都可以透過連線互相接通。
- (四) 連通子集合數：在本問題中指一郵票集合中，連通的子集合數。

二、 $1 \times n$ IC-Coloring

(一) 連通子集合數

我們可以很容易地得到 $1 \times n$ 的郵票的連通子集合數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ ，因為，如果只撕 1 個，則有 n 種撕法，如果撕 2 個，則有 $n-1$ 種撕法...如果撕 n 個，則有 1 種撕法。

所以 $1 \times n$ 的郵票的子集合數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

(二) 、k 的最大值的研究

這裡指的 k 的最大值為 $1 \times n$ 且符合 IC-Coloring 排列的矩形郵票在各種面值分配下，其面值的總和。根據程式的演算，可以做出下表。程式請見附錄(五)。

n	k	對應的排列方法
1	1	[1]
2	3	[2, 1]
3	6	[2, 3, 1]
4	9	[3, 4, 1, 1], [2, 3, 3, 1]
5	13	[3, 4, 4, 1, 1], [2, 6, 1, 3, 1], [5, 2, 6, 3, 1], [2, 2, 3, 5, 1], [4, 2, 3, 7, 1]
6	17	[4, 5, 5, 1, 1, 1], [3, 4, 4, 4, 1, 1], [3, 2, 4, 6, 1, 1], [2, 3, 4, 6, 1, 1], [2, 3, 2, 6, 3, 1], [6, 1, 2, 8, 4, 1], [2, 2, 2, 3, 7, 1], [10, 3, 2, 4, 7, 1], [4, 2, 2, 3, 9, 1]

三、 $1 \times n$ 郵票的研究

(一) 題目敘述

其實一開始我理解錯題意，誤以為 k 是越大越好，但是其實是要能湊出 1 到面值總和，然後面值總和要最大。

(二) 連通子集合數

我們可以很容易地得到 $1 \times n$ 的郵票的連通子集合數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ ，因為，如果只撕 1 個，則有 n 種撕法，如果撕 2 個，則有 n-1 種撕法...如果撕 n 個，則有 1 種撕法。

所以 $1 \times n$ 的郵票的子集合數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

(三) 、k 的最大值的研究

這裡指的 k 的最大值為 $1 \times n$ 排列的矩形郵票在各種面值分配下,使其連通的郵票子集合之郵票面值總和為 1 到 k 的連續正整數。其中的 k 的最大值,根據程式的演算,可以做出下表。程式請見附錄。

n	k	對應的排列方法
1	1	[1]
2	3	[1, 2]
3	6	[1, 3, 2]
4	9	[1, 3, 3, 2], [1, 1, 4, 3], [4, 1, 2, 6]
5	13	[1, 3, 1, 6, 2], [1, 1, 4, 4, 3], [6, 1, 2, 2, 8]
6	18	[2, 5, 7, 1, 3, 6], [2, 5, 6, 3, 1, 8], [6, 4, 5, 2, 1, 13], [5, 2, 6, 3, 1, 14]
7	24	[8, 10, 1, 3, 2, 7, 8]

(四) 、不同演算法對計算時間的影響

目前演算法的優化的方向是,在基礎的暴力破解上,進一步改良。

1. 基礎的暴力破解(枚舉法)

每一種可能跑遍,最後排序,找出最大的 k 。

可以將時間花費做成下表 $n = 1 \sim 5$

n	計算所花費時間(秒,取小數點下四位)
1	0.0*
2	0.0*
3	0.0156
4	0.1670
5	17.2693

*註:時間過小不易測量

2. 剪枝,減去沒有 1 的面值組合

在得知當前組合不可能實現時，跳過此組合進到下一可能。透過檢查該組合內有無 1，因為若該組合內不包含 1，則必湊不出 1 這個面值。故可以透過先剪去這類組合達到加快程式速度的效果。

可以將時間花費做成下表 $n = 1 \sim 5$

n	計算所花費時間(秒，取小數點下四位)
1	0.0*
2	0.0*
3	0.0156
4	0.0631
5	5.6868

*註：時間過小不易測量

3. 剪枝，減去反轉後曾經算過的組合

由於郵票沒有方向，故同一個面值的組合可能被重複計算過 1 到 2 次。減去這類組合的面值可以省下大筆時間。且計算是否算過的時間遠小於後續的計算時間。

n	計算所花費時間(秒，取小數點下四位)
1	0.0*
2	0.0010
3	0.0010
4	0.0450
5	3.7230

*註：時間過小不易測量

可以從整體時間變少發現算法的確有效，而當 n 較小時，時間稍微增加應該是因為多了一個檢查的時間，且因為 n 夠小，故此計算時間大於不做剪枝的時間。但是可以發現當 n 較大時，時間就有明顯的下降了。

令目前單一面值的最大值為 p ，則檢測使用的方法是將整列的郵票轉為一個 n 位 p 進位的數字，若此數字倒轉過後比原本小，則代表此組合已經算過了。

詳細的流程為：

- (1)．判斷第一位是否比最後一位大，若是的話，代表倒轉過後會比較大。
- (2)．若(1)判斷為是，則跳過此組合，若非，就不跳過，若兩者一樣，就再比下一個。

以下為此判斷的程式。

```
for j in range(check_times):
    if stamps[j] > stamps[n - j - 1]:
        break # 跳過這一次
    elif stamps[j] == stamps[n - j - 1]:
        Continue # 再比下一個
    else:
        # 這裡要放後續判斷的函式，也就是不跳過的組合會執行的函式
```

4. 不同演算法之間的執行時間比較

n	枚舉法(秒，取小數點下四位)	剪枝，減去沒有 1 的面值組合(秒，取小數點下四位)	剪枝，減去反轉後曾經算過的組合(秒，取小數點下四位)
1	0.0*	0.0*	0.0*
2	0.0*	0.0*	0.0010
3	0.0156	0.0156	0.0010
4	0.1670	0.0631	0.0450
5	17.2693	5.6868	3.7230

*註：時間過小不易測量

參考資料及附錄

一、參考資料

(一)、Ebrahim Salehi 、 Sin-Min Lee 、 Mahdad Khatirinejad ,2005/8/28, Discrete Mathematics, IC-Colorings and IC-Indices of graphs, Pages297~310

二、程式碼

(一)、 $1 \times n$ 郵票最大 k 值求解程式：(最佳版本，包含時間測量)

```
import math
```

```
import time
```

```
n = 2
```

```
while True:
```

```
    start_time = time.time()
```

```
    p = int(n * (n + 2) / 2)
```

```
    stamps = [0] * n
```

```
    k = n
```

```
    k_list = []
```

```
    k_dict = {}
```

```
    check_times = int((len(stamps) - (len(stamps) % 2)) / 2)
```

```
    for i in range(int(math.pow(p, n))):
```

```
        num_pos = 0
```

```
        for j in stamps: # 下一種面值分配
```

```
            stamps[num_pos] += 1
```

```
            if stamps[num_pos] == p + 1:
```

```

        stamps[num_pos] = 1
        num_pos += 1
    else:
        break

for j in stamps: # must be one 1 stamp
    if j == 1:
        break
    else:
        continue # no 1 in stamps

for j in range(check_times):
    if stamps[j] > stamps[n - j - 1]:
        break # Skip this time
    elif stamps[j] == stamps[n - j - 1]:
        continue
    else:
        record = []
        # print(stamps, i)
        for m in range(n): # Methods of coloring.
            for r in range(m, n):
                summary = 0
                for q in range(m, r + 1):
                    summary += stamps[q]
                record.append(summary)

        record.append(p + 1) # Make a BIG gap.
        record.sort()

```



```

for m in range(len(record)):
    x = record[m]
    if x + 1 < record[m + 1]:
        if x > k:
            # print(k_list)
            k_list = [str(i) + ':' + str(stamps)]
            # k_dict = {i: str(stamps)}
            k = x
        elif x == k:

            k_list.append(str(i) + ':' + str(stamps))
            # k_dict[i] = str(stamps)
            # print(stamps)
            # print(k_list)
            break
    else:
        print('error occur')
        print(record)
        input()
    break

```

```

print(n)
print(k, k_list)
# print(k_dict)
f = open('result.md', 'a')
f.write(f'n: {n}\nk: {k} method: {k_list}\n')
f.close()
n += 1
print(time.time() - start_time)

```

(二) 、找面值編號對應面值

```
import math

while True:
    n = int(input('n? '))
    pos_num = int(input('pos_num? '))
    p = int(n * (n + 1) / 2)

    stamps = [0] * n

    for i in range(pos_num+1):

        num_pos = 0
        for j in stamps: # 下一種面值分配
            stamps[num_pos] += 1
            if stamps[num_pos] == p + 1:
                stamps[num_pos] = 1
                num_pos += 1
            else:
                break

    print(stamps)
```

(三) 、尋找連通子集數

```
import math
```

```
n = int(input('input n'))
```

```
m = int(input('input m'))
```

```
counter = [0] * (n * m)
```

```
def plus1(big_base_2_num_list, place):
```

```
    if big_base_2_num_list[place] == 0:
```

```
        big_base_2_num_list[place] = 1
```

```
    else:
```

```
        big_base_2_num_list[place] = 0
```

```
        plus1(big_base_2_num_list, place - 1)
```

```
p = 0
```

```
for i in range(int(math.pow(2, n * m))):
```

```
    plus1(counter, len(counter) - 1)
```

```
    print(counter)
```

```
old_counter = counter
```

```
# checker = [0] * (n * m)
```

```
for j in range(m):
```

```
    counter.insert((j + 1) * n, 0)
```

```
counter = counter + [0]*(n+1)
```

```
print(counter)
```

```
for j in range((n + 1) * (m + 1)):
```

```
    if counter[j] == 1:
```

```
        if counter[j + 1] + counter[j + m + 1] == 0:
```

```
            break
```

```
    else:
```

```
        p += 1
```

```
counter = old_counter
```

```
print(p)
```

(四) 、多核心加快版

```
import math
```

```
import time
```

```
import multiprocessing
```

```
n = 5
```

```
def find_k(first_stamp):
```

```
    global n, p, k_dict, k, k_list, group_stamps, check_times
```

```
    stamps = [0] * (n - 1) + [first_stamp]
```

```

for i in range(group_stamps):
    # print(i, stamps)
    num_pos = 0
    for j in stamps: # 下一種面值分配
        stamps[num_pos] += 1
        if stamps[num_pos] == p + 1:
            stamps[num_pos] = 1
            num_pos += 1
        else:
            break

    for j in stamps: # must be one 1 stamp
        if j == 1:
            break
    else:
        continue # no 1 in stamps

for j in range(check_times):
    if stamps[j] > stamps[n - j - 1]:
        break # Skip this time
    elif stamps[j] == stamps[n - j - 1]:
        continue
    else:
        record = []
        # print(stamps, i)
        for m in range(n): # Methods of coloring.
            for r in range(m, n):
                summary = 0

```

```
    for q in range(m, r + 1):  
        summary += stamps[q]  
    record.append(summary)
```

```
record.append(p + 1)  # Make a BIG gap.  
record.sort()
```

```
for m in range(len(record)):  
    x = record[m]  
    if x + 1 < record[m + 1]:  
        if x > k:
```

```
            k_list = [str(stamps)]
```

```
            k = x
```

```
        elif x == k:
```

```
            k_list.append(str(stamps))
```

```
        break
```

```
    else:
```

```
        print('error occur')
```

```
        print(record)
```

```
        input()
```

```
    break
```

```
if __name__ == '__main__':
```

```
    start_time = time.time()
```

```
    multiprocessing.freeze_support()
```

```

p = int(n * (n + 1) / 2)
group_stamps = int(math.pow(p, n - 1))
k = n
k_list = []
k_dict = {}
check_times = int((n - (n % 2)) / 2)
pools = multiprocessing.Pool(4)

first_stamp_queue = multiprocessing.Queue()

for i in range(p):
    first_stamp_queue.put(i)

ps_list = []

for i in range(p):
    ps_list.append(multiprocessing.Process(find_k(i)))
    ps_list[i].start()

for i in range(p):
    ps_list[i].join()

print(n)
print(k, k_list)
f = open('result.md', 'a')
f.write(f'n: {n}\nk: {k} method: {k_list}\n')
f.close()
print(time.time() - start_time)

```

(五) 、 IC-Coloring 綜合

```
import math
```

```
import time
```

```
n = 4
```

```
while True:
```

```
    start_time = time.time()
```

```
    p = n * (n + 1) // 2
```

```
    stamps = [1] * n + ['ignore']
```

```
    k = n
```

```
    k_list = []
```

```
    # k_dict = {}
```

```
    check_times = (len(stamps) - (len(stamps) % 2)) // 2
```

```
    for i in range(int(math.pow(p, n-1))):
```

```
        num_pos = 0
```

```
        for j in stamps: # 下一種面值分配
```

```
            # print(stamps)
```

```
            stamps[num_pos] += 1
```

```
            if stamps[num_pos] == p + 1:
```

```
                stamps[num_pos] = 1
```

```
                num_pos += 1
```


else:

break

record = []

for m in range(n): # Methods of coloring.

for r in range(m, n):

summary = 0

for q in range(m, r + 1):

summary += stamps[q]

record.append(summary)

record.append(p + 1) # Make a BIG gap.

record.sort()

for m in range(len(record)):

x = record[m]

if x + 1 < record[m + 1]:

stamps_summary = 0

for j in range(n):

stamps_summary += stamps[j]

if x > stamps_summary:

break

if x > k:

k_list = [str(i) + ':' + str(stamps)]

k = x

elif x == k:

k_list.append(str(i) + ':' + str(stamps))

break

else:

```
print('error occur')
```

```
print(record)
```

```
input()
```

```
print(n)
```

```
print(k, k_list)
```

```
f = open('result.md', 'a')
```

```
f.write(f'n: {n}\nk: {k} method: {k_list}\n')
```

```
f.close()
```

```
n += 1
```

```
print(time.time() - start_time)
```