我，想盡辦法，以 n 表示第 n 個非完全平方數

作者：1509 班 18 號曹禕中

如標題所示，本題的題目為「**以 n 表示第 n 個非完全平方數**」，這題是我在寫程式時遇到的，所以並沒有出處。

壹、了解問題

首先，我先觀察**已知數**「**n**」以及**未知數**「**第 n 個非完全平方數**」，並將 ***f(n)*** 令為「**第 n 個非完全平方數**」。並將 n 對 *f(n)* 做成一張表如下。

完全平方數：	1			4					9							16									25
f(n)：		2	3		5	6	7	8		10	11	12	13	14	15		17	18	19	20	21	22	23	24	
n：		1	2		3	4	5	6		7	8	9	10	11	12		13	14	15	16	17	18	19	20	

貳、擬訂計畫

第一個解法，最容易也是最方便的做法即是**查表**，只要將正整數從一開始排列並剔除完全平方數，且由左向右排序，即可將「**n**」對照到「**第 n 個非完全平方數**」也就是 ***f(n)***。但很明顯的，這個方法存在十分明顯的問題，即是不夠靈活，如果今天突然需要第 48763 個非完全平方數，那豈不是要從 1 慢慢數起?所以，我就想了第二個解法。

第二個解法，我再次觀察 n 與 *f(n)*，發現之間的**差值恰好等於 *f(n)* 到 1 間的完全平方數數量**，並令此差值為 x，x = *f(n)* - n，這其實還蠻直觀的，畢竟 *f(n)* 與 n 的差本來就是來自經過的完全平方數。這時我們可以列出一些等式了。

參、執行計畫

$f(n) - n = x$， $x = \left\lfloor \sqrt{f(n)} \right\rfloor$ 且 n、x 為正整數 *註：[ ]為高斯符號

再將兩式結合， $x = \left\lfloor \sqrt{x+n} \right\rfloor$ 當時的我解到這邊就不知怎樣繼續下去了。直到我有一天突發奇想**將高斯符號翻到等號左邊**，結果就變成以下這副模樣。

$$x + 1 > \sqrt{x+n} \geq x$$

$$x^2+2x+1>x+n\ge x^2$$

$$x^2+x+1>n\ge x^2-x$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>n\ge\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$x>\pm\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\quad \pm\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\ge x$$

此時負號不會發生，**因為 x、n 為正整數**，所以不可能是負的。

再將兩式結合如下。

$$\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\ge x>\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$$

因為 **x 為正整數**，且此範圍大於 1，可以確認**當 n 以任意正整數代入時，x 一定有正整數解**。

此時

$$\sqrt{n+\frac{1}{4}}+n+\frac{1}{2}\ge f(n)>\sqrt{n-\frac{3}{4}}+n-\frac{1}{2}$$

所以我們現在能用 n 表示 f(n)了對吧?也就是

$$\left\lfloor\sqrt{n+\frac{1}{4}}+n+\frac{1}{2}\right\rfloor \text{ 或 } \left\lfloor\sqrt{n-\frac{3}{4}}+n-\frac{1}{2}\right\rfloor+1$$

咦？n 以 2 帶入竟然有兩個正整數解？

我那時非常沮喪，因為一直搞不清楚為何一個 n 會有多個解，直到兩三天後我終於發現這條列式有問題。

$$x=\left\lfloor\sqrt{x+n}\right\rfloor$$

這裡的 x＋n 有可能是完全平方數，所以**不能用高斯符號**，不然的話會，應該改成——

x＝ **小於** $\sqrt{x+n}$ 的**最大整數**，也就是——

$$x=\left\lfloor-\left(-\sqrt{x+n}-1\right)\right\rfloor$$

所以以下所有的算式就是將原本的**大於等於**改成**大於**。

$$x+1>\sqrt{x+n}>x$$

$$x^2+2x+1>x+n>x^2$$

$$x^2+x+1>n>x^2-x$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>n>\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>x>\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{n+\frac{1}{4}}+n+\frac{1}{2}>f(n)>\sqrt{n-\frac{3}{4}}+n-\frac{1}{2}$$

這才是正確的計算過程，根據此不等式，*f(n)*的表示方法為——

$$-\left\lfloor-\left(\sqrt{n+\frac{1}{4}}+n+\frac{1}{2}\right)\right\rfloor-1 \quad \text{或} \quad -\left\lfloor-\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+n-\frac{1}{2}\right)\right\rfloor-1$$

肆、驗算

最後就讓我用程式來驗證這個公式的正確性吧！

考量其可行性且要方便驗證，故只計算第 1 到 20 個非完全平方數。

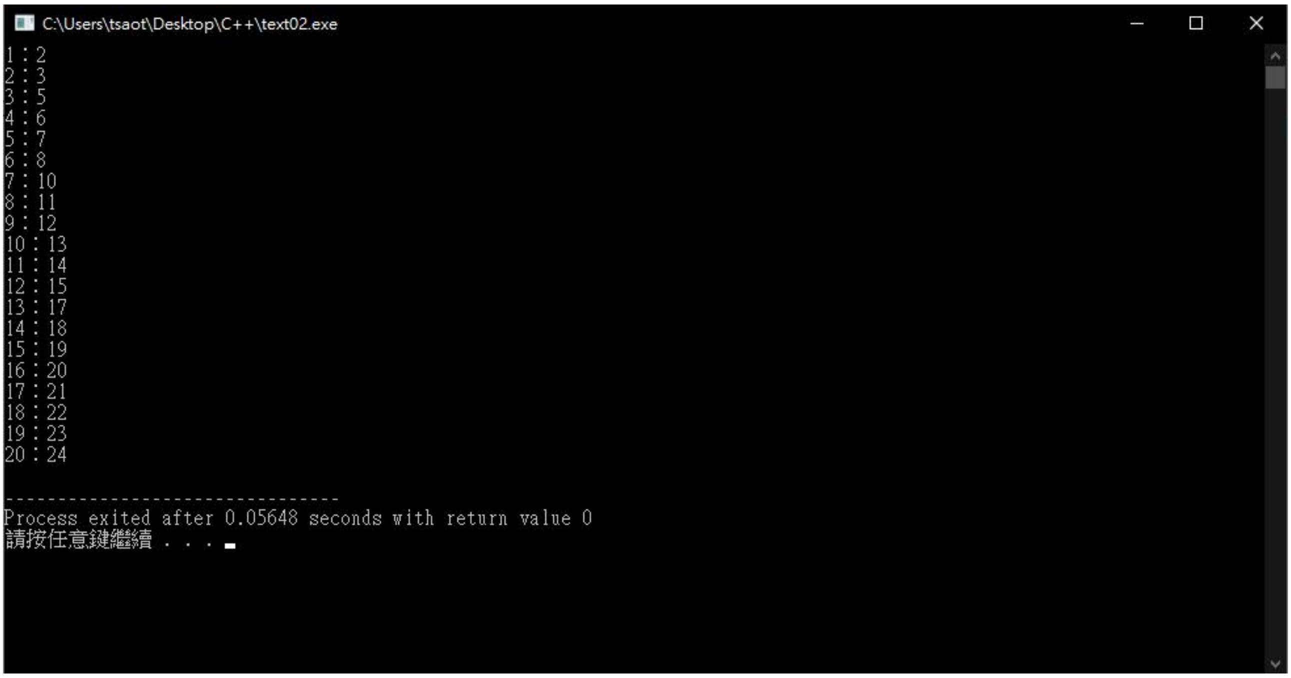
```
#include <iostream>
#include <math.h>

using namespace std;

int main()
{
	for(float n=1;n<=20;n++){
		float fn = floor(pow((n+(0.25)),0.5)+n+(0.5));
		if (fn == (pow((n+(0.25)),0.5)+n+(0.5)))
			fn--;
		cout<<n<<"："<<fn<<endl;
	}
```

}

程式執行結果在下頁

*f(1)*到 *f(20)*的數列 k 如下

k：2 3 5 6 7 8 10 11 12 13 14 15 17 18 19 20 21 22 23 24



結果無誤，公式是正確的，這題也宣告結束，但我的心中還是有一個疑問。

伍、回顧

最後的不等式範圍大於等於 1，也就是有可能「小於$\sqrt{n+\frac{1}{4}}+n+\frac{1}{2}$的最大整數」不等於「大於$\sqrt{n-\frac{3}{4}}+n-\frac{1}{2}$的最小整數」，雖然目前並沒有發現不等於的情況(我用程式從 1 檢查到 20000000 了)，但有可能是我還沒發現而已。第 n 個非完全平方數應該只有一個，該怎樣證明這個範圍只有一個整數呢？我也不知道，而且也有點超出這題範圍了。這個問題可以請大家回去想想看，如果想到的話也可以和大家分享。

所以這題答案是，$-\left\lfloor -\left(\sqrt{n+\frac{1}{4}}+n+\frac{1}{2}\right)\right\rfloor -1$ 或 $-\left\lfloor -\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+n-\frac{1}{2}\right)\right\rfloor -1$