

國立臺灣師範大學附屬高級中學第 46 屆科學展覽會

作品說明書封面

科 別：數學科

組 別：高中組

作品名稱：Morley 定理的延伸探討

關 鍵 詞：Morley 定理、三角形、幾何

編 號：

摘要

將原先以三角形三個內角做角三分線，其交點會形成一正三角形。本作品將以原本的莫雷定理進行探討，並試著推廣到三角形的 n 等分角及 n 邊形。

壹、研究動機

在暑期學習到三角函數及開學後的初等幾何學，讓我對三角形及其五心的性質有了更加一步想研究的動機。

而有天老師和我介紹了莫雷定理，於是我就想，莫雷定理形成的正三角形和原本的三角形有什麼關係呢？莫雷定理是否能推廣到 n 等分角或 n 邊形呢？

貳、研究目的

- 一、研究 Morley 三角形中心與原三角形五心之關係
- 二、探討 Morley 三角形中心與三頂點是否有面積/周長比例之關係
- 三、探討 n 等分角的內切圓等關係
- 四、探討 n 等分角是否能有類似三等分之情況
- 五、探討 n 邊形是否能有類似三角形之情況

參、研究設備與器材

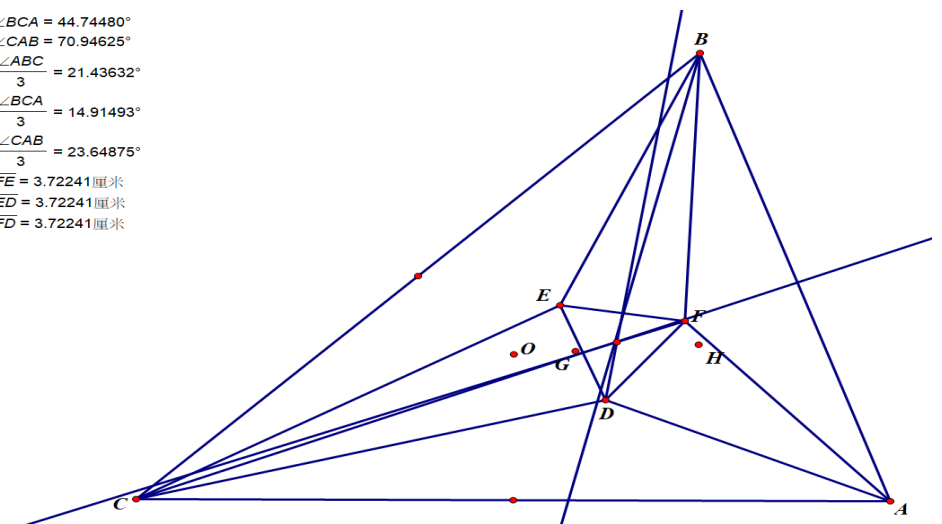
- 一、筆記本、筆
- 二、電腦、GSP 繪圖軟體

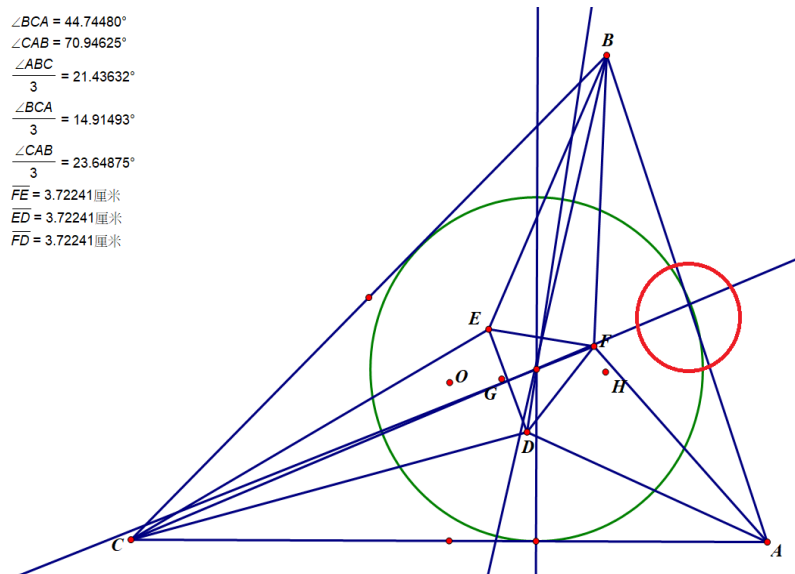
肆、研究過程與方法

一、

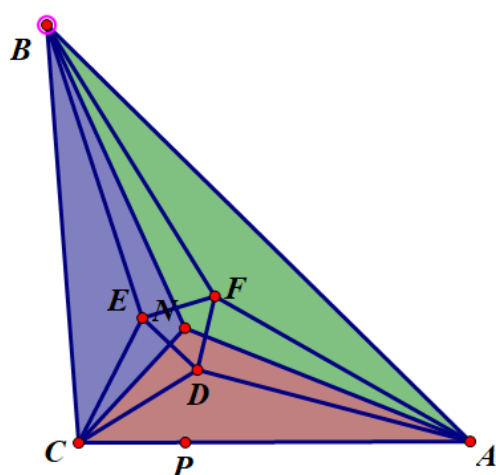
以 GSP 畫出一莫雷三角形及外心、內心、重心及垂心後，發現三角形 ABC 之內心於三角形 DEF 之內心非常接近，但以三角形 ABC 之內心為圓心畫三角形 ABC 之內切圓，卻稍有差異。

$$\begin{aligned}\angle BCA &= 44.74480^\circ \\ \angle CAB &= 70.94625^\circ \\ \frac{\angle ABC}{3} &= 21.43632^\circ \\ \frac{\angle BCA}{3} &= 14.91493^\circ \\ \frac{\angle CAB}{3} &= 23.64875^\circ \\ FE &= 3.72241 \text{ 厘米} \\ ED &= 3.72241 \text{ 厘米} \\ FD &= 3.72241 \text{ 厘米}\end{aligned}$$



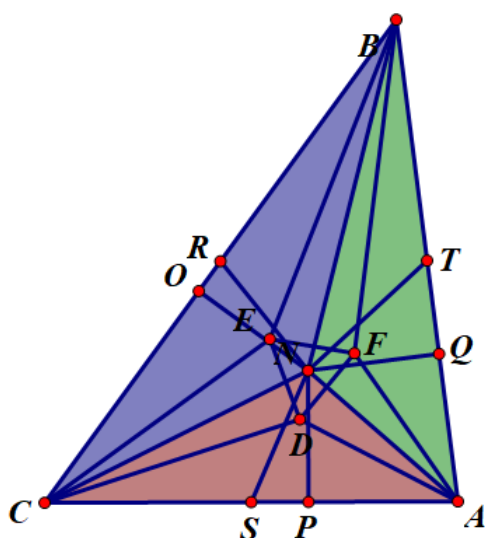


二、以 GSP 畫出一莫雷三角形後，將其中間之等腰三角形之內心連接三頂點後，觀察其周長及面積等關係。(目前尚未發現)



$$\begin{aligned}
 \angle ABC &= 41.09559^\circ \\
 \angle BCA &= 94.16275^\circ \\
 \angle CAB &= 44.74166^\circ \\
 \frac{\angle ABC}{3} &= 13.69853^\circ \\
 \frac{\angle BCA}{3} &= 31.38758^\circ \\
 \frac{\angle CAB}{3} &= 14.91389^\circ \\
 \overline{FE} &= 1.50773 \text{ 厘米} \\
 \overline{ED} &= 1.50773 \text{ 厘米} \\
 \overline{FD} &= 1.50773 \text{ 厘米}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta CNB \text{ 的面積} &= 9.55000 \text{ 厘米}^2 \\
 \Delta CAN \text{ 的面積} &= 8.90526 \text{ 厘米}^2 \\
 \Delta NBA \text{ 的面積} &= 14.07890 \text{ 厘米}^2 \\
 \overline{CB} &= 8.35853 \text{ 厘米} \\
 \overline{CA} &= 7.80525 \text{ 厘米} \\
 \overline{AB} &= 11.84308 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta CNB \text{ 的面積}}{\overline{CB}} &= 1.14255 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta CAN \text{ 的面積}}{\overline{CA}} &= 1.14093 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta NBA \text{ 的面積}}{\overline{AB}} &= 1.18879 \text{ 厘米}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \angle ABC &= 43.32620^\circ \\
 \angle BCA &= 53.76853^\circ \\
 \angle CAB &= 82.90527^\circ \\
 \frac{\angle ABC}{3} &= 14.44207^\circ \\
 \frac{\angle BCA}{3} &= 17.92284^\circ \\
 \frac{\angle CAB}{3} &= 27.63509^\circ \\
 \overline{FE} &= 1.61983 \text{ 厘米} \\
 \overline{ED} &= 1.61983 \text{ 厘米} \\
 \overline{FD} &= 1.61983 \text{ 厘米}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta CNB \text{ 的面積} &= 14.40356 \text{ 厘米}^2 \\
 \Delta CAN \text{ 的面積} &= 9.68746 \text{ 厘米}^2 \\
 \Delta NBA \text{ 的面積} &= 11.44459 \text{ 厘米}^2 \\
 \overline{CB} &= 11.28832 \text{ 厘米} \\
 \overline{CA} &= 7.80525 \text{ 厘米} \\
 \overline{AB} &= 9.17582 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta CNB \text{ 的面積}}{\overline{CB}} &= 1.27597 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta CAN \text{ 的面積}}{\overline{CA}} &= 1.24115 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta NBA \text{ 的面積}}{\overline{AB}} &= 1.24726 \text{ 厘米} \\
 \overline{NO} &= 2.55194 \text{ 厘米} \\
 \overline{NP} &= 2.48229 \text{ 厘米} \\
 \overline{NQ} &= 2.49451 \text{ 厘米}
 \end{aligned}$$

$$\overline{NR} = 2.64539 \text{ 厘米}$$

$$\overline{NS} = 2.70703 \text{ 厘米}$$

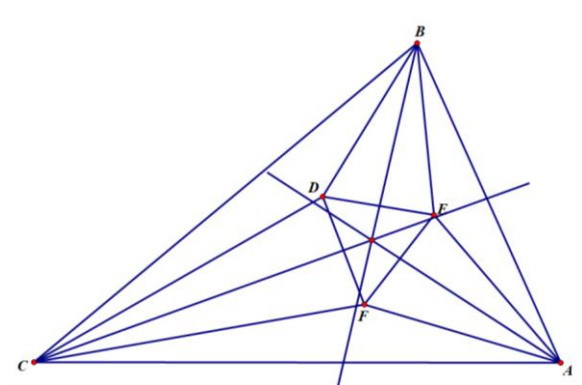
$$\overline{NT} = 3.06214 \text{ 厘米}$$

$$\frac{\Delta CNB \text{ 的面積}}{\overline{NR}} = 5.44477 \text{ 厘米}$$

$$\frac{\Delta CAN \text{ 的面積}}{\overline{NS}} = 3.57864 \text{ 厘米}$$

$$\frac{\Delta NBA \text{ 的面積}}{\overline{NT}} = 3.73744 \text{ 厘米}$$

三、以 4 等分角畫出 Morley 定理的形式，目前發現當三角形 ABC 為正三角形時，內部會有一正三角形:當三角形 ABC 為等腰三角形時，取相對應之角平分線之交點，連接後有一等腰三角形(由下圖可之三條角平分線並不會交於一點)



$$\angle ABC = 74.51588^\circ$$

$$\angle BCA = 39.79047^\circ$$

$$\angle CAB = 65.69365^\circ$$

$$\frac{\angle ABC}{4} = 18.62897^\circ$$

$$\frac{\angle BCA}{4} = 9.94762^\circ$$

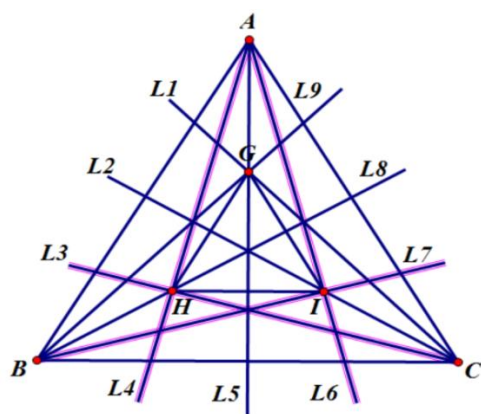
$$\frac{\angle CAB}{4} = 16.42341^\circ$$

$$\overline{DE} = 4.69336 \text{ 厘米}$$

$$\overline{FD} = 4.80597 \text{ 厘米}$$

$$\overline{EF} = 4.72037 \text{ 厘米}$$

(如圖，H 為 L3 與 L4 之交點，I 為 L6 與 L7 之交點)



$$\angle CAB = 62.98705^\circ$$

$$\angle ABC = 58.50647^\circ$$

$$\angle BCA = 58.50647^\circ$$

$$\frac{\angle CAB}{4} = 15.74676^\circ$$

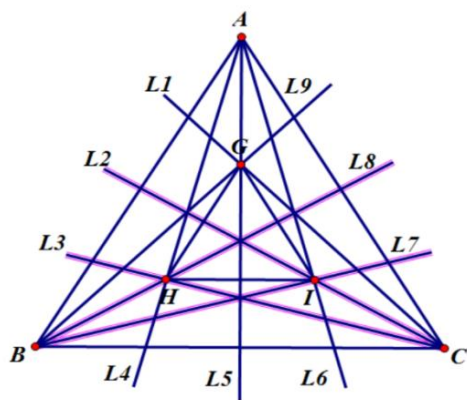
$$\frac{\angle ABC}{4} = 14.62662^\circ$$

$$\overline{GH} = 3.80813 \text{ 厘米}$$

$$\overline{HI} = 3.88794 \text{ 厘米}$$

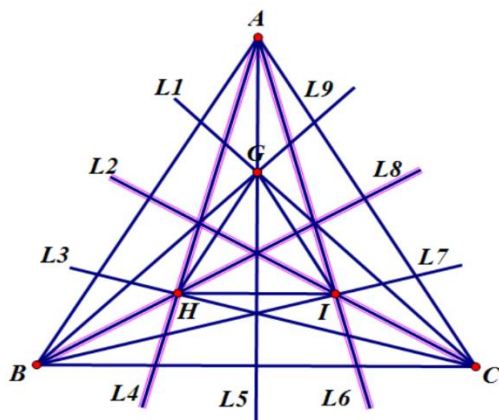
$$\overline{IG} = 3.80813 \text{ 厘米}$$

(如圖，H 為 L3 與 L8 之交點，I 為 L2 與 L7 之交點)



$$\begin{aligned}\angle CAB &= 62.98705^\circ \\ \angle ABC &= 58.50647^\circ \\ \angle BCA &= 58.50647^\circ \\ \frac{\angle CAB}{4} &= 15.74676^\circ \\ \frac{\angle ABC}{4} &= 14.62662^\circ \\ \overline{GH} &= 3.81460 \text{ 厘米} \\ \overline{GI} &= 3.81460 \text{ 厘米} \\ \overline{HI} &= 3.93274 \text{ 厘米}\end{aligned}$$

(如圖，H 為 L4 與 L8 之交點，I 為 L2 與 L6 之交點)

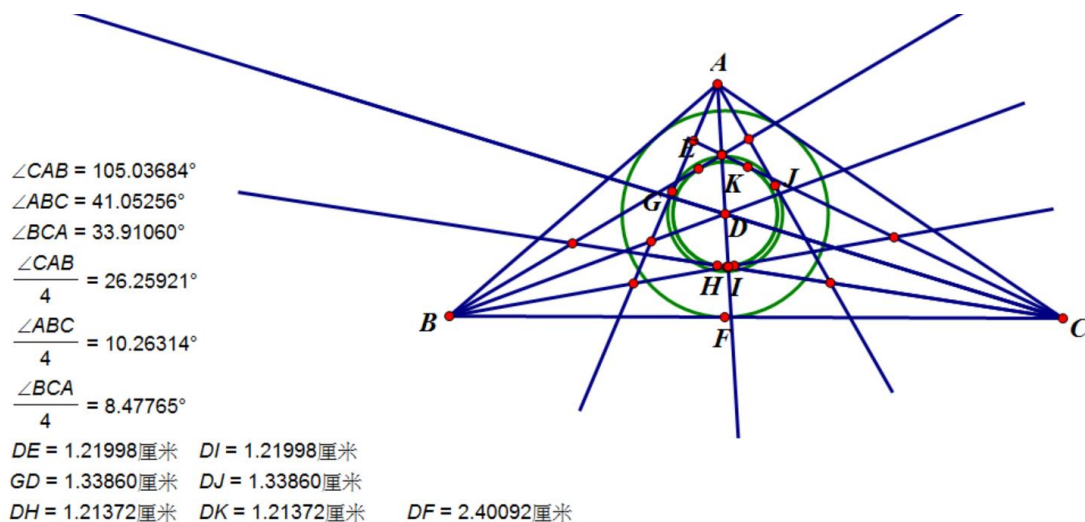


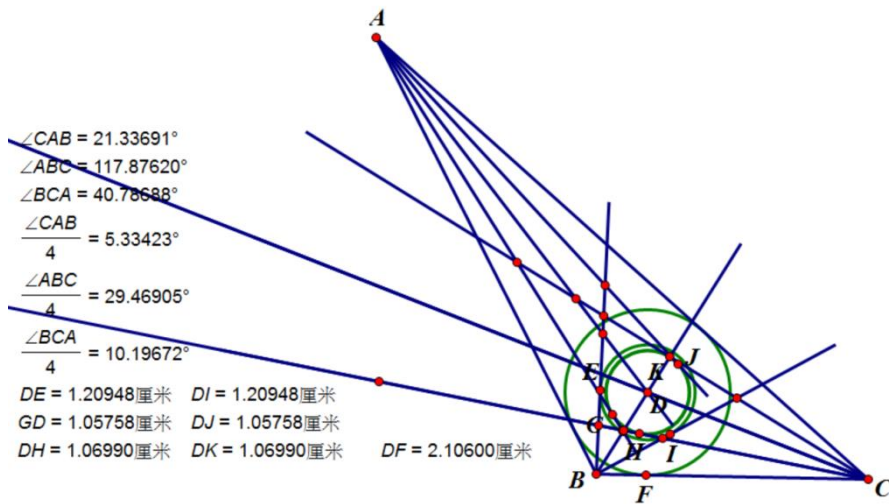
$$\begin{aligned}\angle CAB &= 62.98705^\circ \\ \angle ABC &= 58.50647^\circ \\ \angle BCA &= 58.50647^\circ \\ \frac{\angle CAB}{4} &= 15.74676^\circ \\ \frac{\angle ABC}{4} &= 14.62662^\circ \\ \overline{GH} &= 3.78620 \text{ 厘米} \\ \overline{GI} &= 3.78620 \text{ 厘米} \\ \overline{HI} &= 3.87562 \text{ 厘米}\end{aligned}$$

而經由多次實驗後也發現，G 點取 L1,L5,L9 任兩線皆可構成等腰三角形，因此也證明 L1,L5,L9 交與一點。

四、以四等分畫出一莫雷三角形後，因三個角分別為大三角形中的角平分線，因此其交於大三角形之內心。

再以內心分別在三邊做切於左右兩條之圓，並觀察其半徑與大三角形半徑之比例關係。

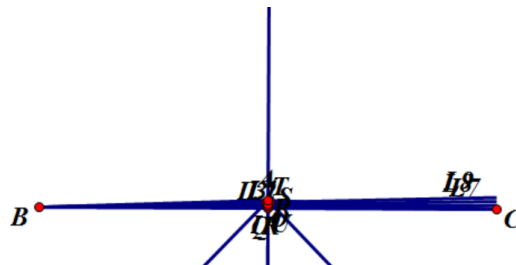




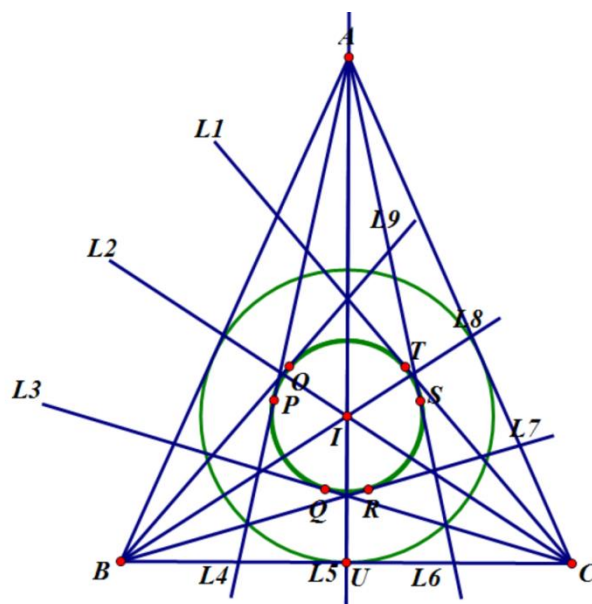
由以上數據發現，小圓與大圓之半徑比十分接近 1:2，但稍有誤差。

此外，我也觀察了等腰三角形的情況，雖然也幾乎是 1:2(稍有誤差)，但我卻發現，當底角 ~ 0 時，結果卻更接近 1:2(比較以下兩圖)。不過，也不排除是 GSP 的誤差。

$\angle CAB = 176.06682^\circ$
 $\angle ABC = 1.96659^\circ$
 $\angle BCA = 1.96659^\circ$
 $\frac{\angle CAB}{4} = 44.01671^\circ$
 $\frac{\angle ABC}{4} = 0.49165^\circ$
 $IU = 0.09264 \text{ 厘米}$
 $IO = 0.04632 \text{ 厘米}$
 $IT = 0.04632 \text{ 厘米}$
 $IP = 0.06441 \text{ 厘米}$
 $IS = 0.06441 \text{ 厘米}$
 $IQ = 0.04632 \text{ 厘米}$
 $IR = 0.04632 \text{ 厘米}$



$\angle CAB = 48.10513^\circ$
 $\angle ABC = 65.94744^\circ$
 $\angle BCA = 65.94744^\circ$
 $\frac{\angle CAB}{4} = 12.02628^\circ$
 $\frac{\angle ABC}{4} = 16.48686^\circ$
 $IU = 3.50170 \text{ 厘米}$
 $IO = 1.82592 \text{ 厘米}$
 $IT = 1.82592 \text{ 厘米}$
 $IP = 1.79014 \text{ 厘米}$
 $IS = 1.79014 \text{ 厘米}$
 $IQ = 1.82592 \text{ 厘米}$
 $IR = 1.82592 \text{ 厘米}$



此外我還發現:

(一)當底角大於 60 度時，切於頂角左右兩條角平分線支援半徑(以下簡稱 IP,IS)較切於底角的小，反之則較大。

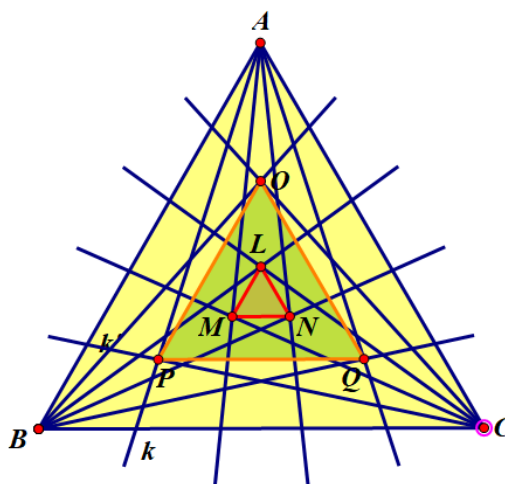
(二)底角由 0 慢慢增加的過程中，IP,IS 的增加幅度較其他的大，且在 60 度時達到相等。

(三)當底角越大，兩半徑的比例與 1:2 相差愈大。

五、在五等分角的情況中，首先我們先討論正三角形

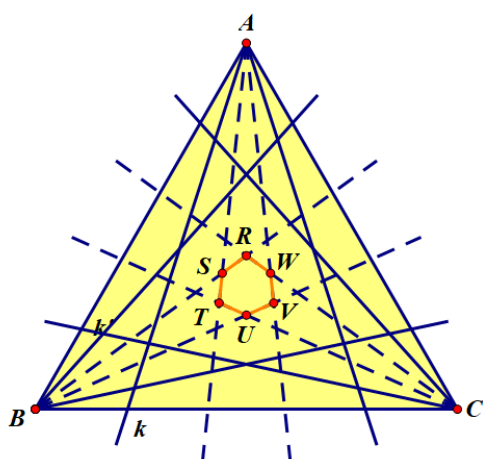
(一)在正三角形內部中，可以發現兩個正三角形(如下圖)，將各點連接後，討論其周長面積之比例關係。

$$\begin{aligned}
 \angle CAB &= 60.00000^\circ \\
 \angle AKC &= 60.00000^\circ \\
 \angle BCA &= 60.00000^\circ \\
 \Delta LMN \text{的面積} &= 0.73457 \text{ 厘米}^2 \\
 \Delta OPQ \text{的面積} &= 9.38472 \text{ 厘米}^2 \\
 \Delta ABC \text{的面積} &= 44.00262 \text{ 厘米}^2 \\
 \overline{OP} &= 4.65544 \text{ 厘米} \\
 \overline{PQ} &= 4.65544 \text{ 厘米} \\
 \overline{OQ} &= 4.65544 \text{ 厘米} \\
 \overline{LM} &= 1.30246 \text{ 厘米} \\
 \overline{MN} &= 1.30246 \text{ 厘米} \\
 \overline{LN} &= 1.30246 \text{ 厘米} \\
 k' &= 10.08066 \text{ 厘米} \\
 k &= 10.08066 \text{ 厘米} \\
 \overline{AC} &= 10.08066 \text{ 厘米} \\
 \frac{\Delta ABC \text{的面積}}{\Delta OPQ \text{的面積}} &= 4.68875 & \frac{\overline{AC}}{\overline{OQ}} &= 2.16535 \\
 \frac{\Delta ABC \text{的面積}}{\Delta LMN \text{的面積}} &= 59.90267 & \frac{\overline{AC}}{\overline{LM}} &= 7.73968 \\
 \frac{\Delta OPQ \text{的面積}}{\Delta LMN \text{的面積}} &= 12.77583 & \frac{\overline{PQ}}{\overline{LM}} &= 3.57433
 \end{aligned}$$



由以上數據我發現，三三角形的邊長比大約為 1:3.57:7.74，面積比約為 1:12.78:59.90。且不論 ABC 的大小為何，此比例皆正確。

此外，我也對三角型 LMN 所外接的六邊形稍作研究，而最後發現雖然其六邊相等，但其並非為一正六邊形，而是一個角度為 108°、132°相間且等邊長的六邊形。



$$\begin{array}{ll}
 \overline{SR} = 0.75964 \text{ 厘米} & \angle STU = 108.00000^\circ \\
 \overline{ST} = 0.75964 \text{ 厘米} & \angle TSR = 132.00000^\circ \\
 \overline{TU} = 0.75964 \text{ 厘米} & \angle SRW = 108.00000^\circ \\
 \overline{UV} = 0.75964 \text{ 厘米} & \angle RWV = 132.00000^\circ \\
 \overline{WV} = 0.75964 \text{ 厘米} & \angle WVU = 108.00000^\circ \\
 \overline{WR} = 0.75964 \text{ 厘米} & \angle TUV = 132.00000^\circ
 \end{array}$$

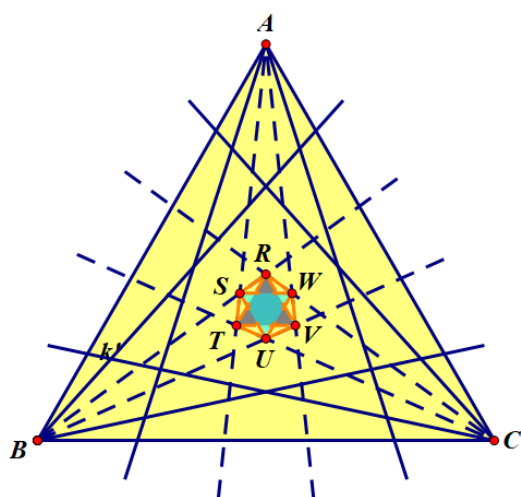
在分析此角度及邊長形成的關係，可以得到:

(1)在角度方面因為 $\angle STU$ 、 $\angle SRW$ 、 $\angle WVU$ 為一底角為 36° 之等腰三角形之頂角， $\angle TSR$ 、 $\angle RWV$ 、 $\angle TUV$ 的對頂角則為一底角為 24° 之等腰三角形之頂角，因此產生了這樣角度的差異。

而這樣的研究結果也讓我想到了:那輛等分的情況有可能會有正多邊形嗎?

(2)而在長度方面，(目前尚未發現結果)

(3)在研究長度的過程中，也讓我想到了，既然三角形 RTV (即 LMN) 為一正三角形，那 SWU 是否也會為一正三角形?若是，那其與 RTV 的關係為何?

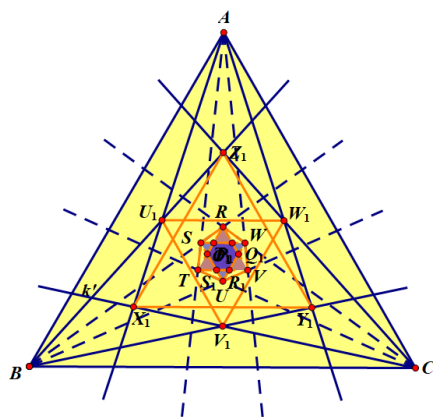


$$\begin{array}{l}
 \overline{RT} = 1.43236 \text{ 厘米} \\
 \overline{TV} = 1.43236 \text{ 厘米} \\
 \overline{RV} = 1.43236 \text{ 厘米} \\
 \overline{SW} = 1.26847 \text{ 厘米} \\
 \overline{SU} = 1.26847 \text{ 厘米} \\
 \overline{UW} = 1.26847 \text{ 厘米}
 \end{array}$$

經 GSP 繪圖後發現三角形 SWU 竟然也是一個正三角形，且其邊長大約是三角形 RTV 的 1.13 倍。

發現了這個倒正三角形後，又讓我想到了說:既然與 ABC 同方向的有兩個正三角形，那反方向的是否還有另一個?

於是，我又發現了另一個正三角形 $U_1V_1W_1$ (如下圖)



$$\begin{aligned}\overline{U_1V_1} &= 4.14597 \text{ 厘米} \\ \overline{V_1W_1} &= 4.14597 \text{ 厘米} \\ \overline{U_1W_1} &= 4.14597 \text{ 厘米} \\ \overline{SW} &= 1.50159 \text{ 厘米} \\ \overline{US} &= 1.50159 \text{ 厘米} \\ \overline{UW} &= 1.50159 \text{ 厘米} \\ \overline{X_1Y_1} &= 6.06065 \text{ 厘米} \\ \overline{Y_1Z_1} &= 6.06065 \text{ 厘米} \\ \overline{Z_1X_1} &= 6.06065 \text{ 厘米}\end{aligned}$$

若將此三角形與同方向之小三角形 SWU 及反方向的大三角形 $X_1Y_1Z_1$ 相比， SWU 的邊長與其邊長比約為 1:2.76， $X_1Y_1Z_1$ 與其邊長比則為 1.46 倍。

統整以上結果，此五正三角形的邊長比由小到大約為 1:1.13:2.76:4.04:8.75 倍

2.接著討論一般三角形的情況(尚未研究)

六、討論六等分角的情況(研究中)

七、討論四邊形的情况(研究中)

伍、研究結果

陸、討論

柒、結論

捌、參考資料及其他

幾何明珠第二十章—莫利定理

莫雷定理:維基百科

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E9%9B%B7%E8%A7%92%E4%B8%89%E5%88%86%E7%B7%9A%E5%AE%9A%E7%90%86>

莫雷定理的證明方法

<https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>

<http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html>

老師短評：4.0 分

1. 實驗嘗試失敗的部分其實不用太多，只要稍加敘述流程
2. 五等分的結果頗為有趣，但可能因為是正三角形的結果，我好奇的是一般三角形有此結果嗎？
3. 看來老師建議的類 Morley 改成一般 n 等分角似乎行不通@@，你可能要再想想有什麼有趣的幾何定理延伸題材，可參考<<幾何明珠>>
4. 建議參考 104 中等獎助數學科一等獎的寫法，她結合了巴斯卡神秘六邊形定理、布里昂雄定理、poncelet theorem。