國立臺灣師範大學附屬高級中學第 46 屆科學展覽會

作 品 說 明 書 封 面

科　　別：數學科
組　　別：高中組
作品名稱：Morley 定理的延伸探討
關 鍵 詞：Morley 定理、三角形、幾何

編　　號：

摘要

將原先以三角形三個內角做角三分線，其交點會形成一正三角形。本作品將以原本的莫雷定理進行探討，並試著推廣到三角形的 n 等分角及 n 邊形。

壹、研究動機

在暑期學習到三角函數及開學後的初等幾何學，讓我對三角形及其五心的性質有了更加一步想研究的動機。

而有天老師和我介紹了莫雷定理，於是我就想，莫雷定理形成的正三角形和原本的三角形有什麼關係呢?莫雷定理是否能推廣到 n 等分角或 n 邊形呢?

貳、研究目的

一、研究 Morley 三角形中心與原三角形五心之關係
二、探討 Morley 三角形中心與三頂點是否有面積/周長比例之關係
三、探討 n 等分角的內切圓等關係
四、探討 n 等分角是否能有類似三等分之情況
五、探討 n 邊形是否能有類似三角形之情況

參、研究設備與器材

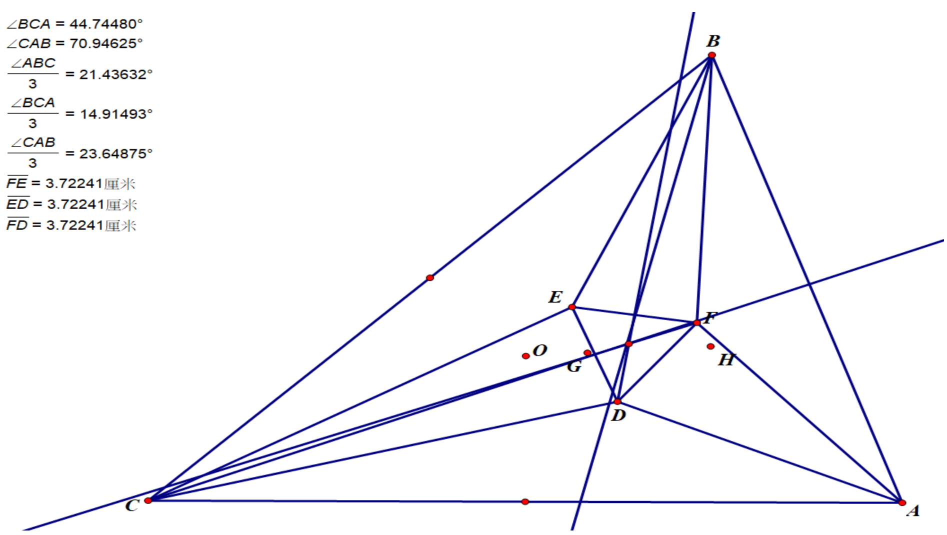
一、筆記本、筆

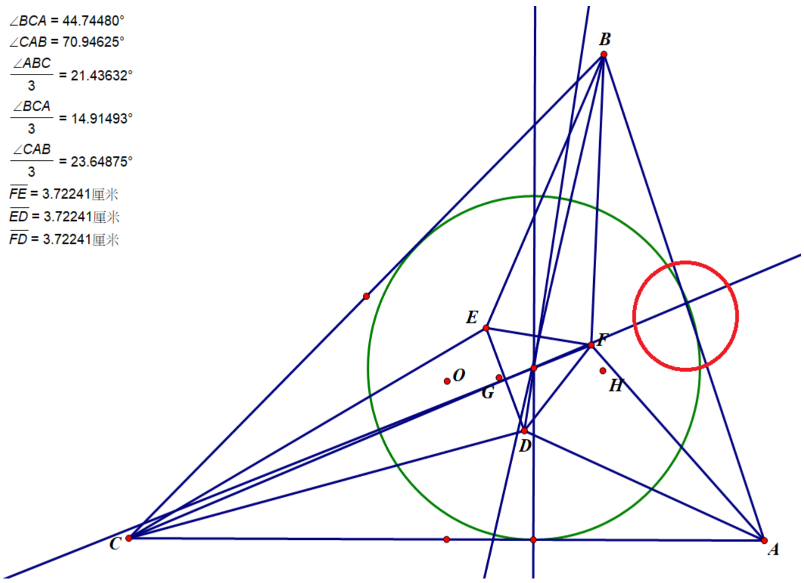
二、電腦、GSP 繪圖軟體

肆、研究過程與方法

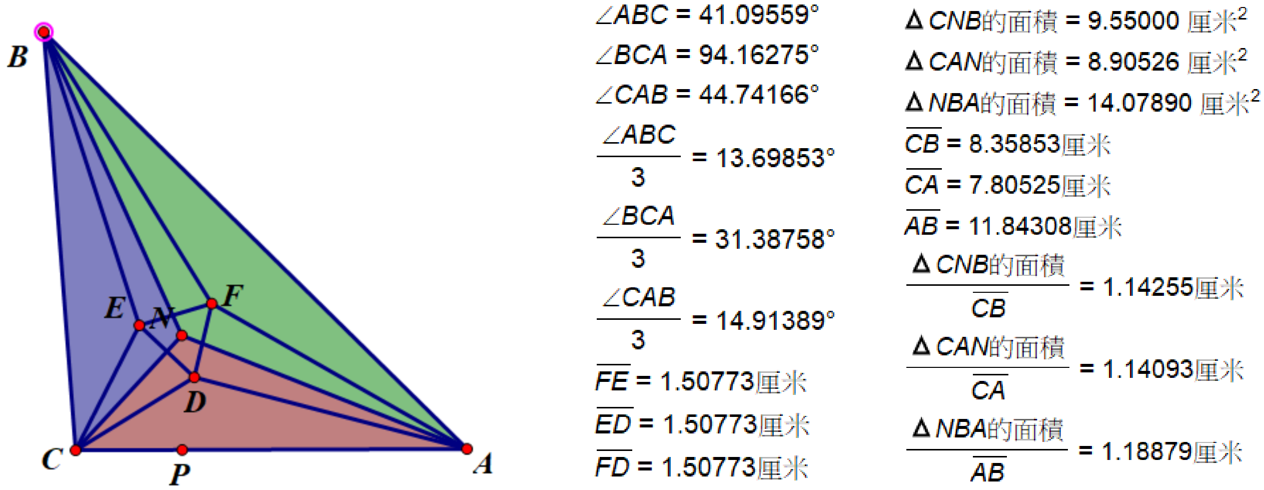
一、

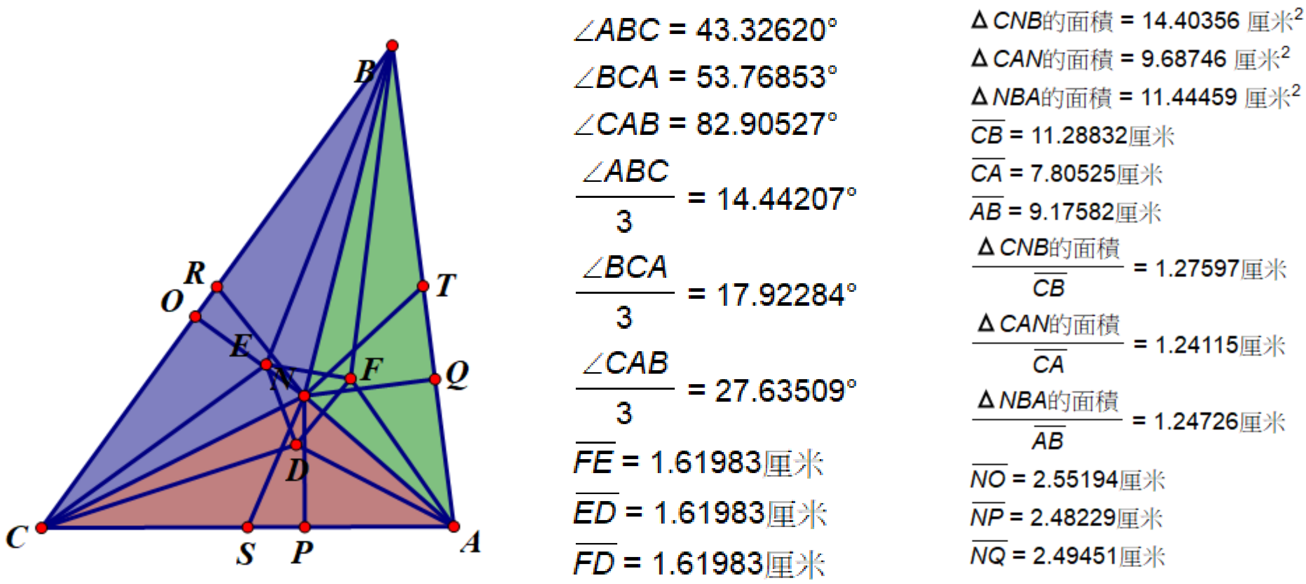
以 GSP 畫出一莫雷三角形及外心、內心、重心及垂心後，發現三角形 ABC 之內心於三角形 DEF 之內心非常接近，但以三角形 ABC 之內心為圓心畫三角形 ABC 之內切圓，卻稍有差異。





二、以 GSP 畫出一莫雷三角形後，將其中間之等腰三角形之內心連接三頂點後，觀察其周長及面積等關係。(目前尚未發現)





$\overline{NR} = 2.64539$厘米

$\overline{NS} = 2.70703$厘米

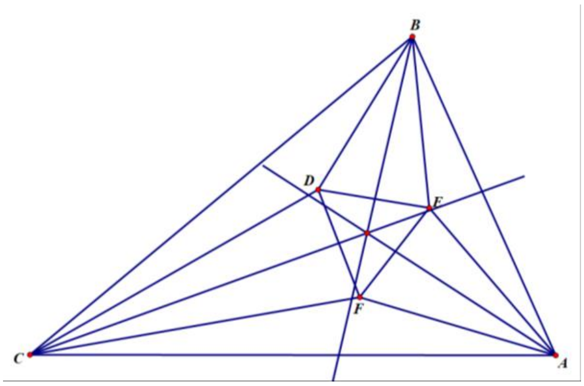
$\overline{NT} = 3.06214$厘米

$\dfrac{\Delta CNB\text{的面積}}{\overline{NR}} = 5.44477$厘米

$\dfrac{\Delta CAN\text{的面積}}{\overline{NS}} = 3.57864$厘米

$\dfrac{\Delta NBA\text{的面積}}{\overline{NT}} = 3.73744$厘米

三、以 4 等分角畫出 Morley 定理的形式，目前發現當三角形 ABC 為正三角形時，內部會有一正三角形:當三角形 ABC 為等腰三角形時，取相對應之角平分線之交點，連接後有一等腰三角形(由下圖可之三條角平分線並不會交於一點)



$\angle ABC = 74.51588°$

$\angle BCA = 39.79047°$

$\angle CAB = 65.69365°$

$\dfrac{\angle ABC}{4} = 18.62897°$

$\dfrac{\angle BCA}{4} = 9.94762°$

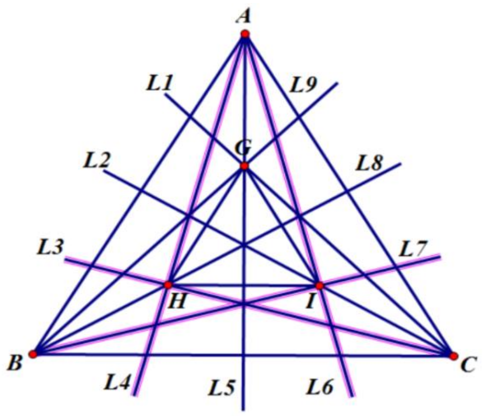
$\dfrac{\angle CAB}{4} = 16.42341°$

$\overline{DE} = 4.69336$厘米

$\overline{FD} = 4.80597$厘米

$\overline{EF} = 4.72037$厘米

(如圖，H 為 L3 與 L4 之交點，I 為 L6 與 L7 之交點)



$\angle CAB = 62.98705°$

$\angle ABC = 58.50647°$

$\angle BCA = 58.50647°$

$\dfrac{\angle CAB}{4} = 15.74676°$

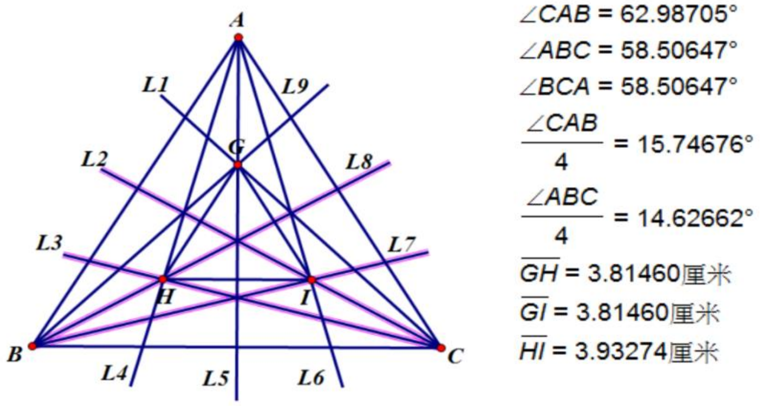
$\dfrac{\angle ABC}{4} = 14.62662°$

$\overline{GH} = 3.80813$厘米

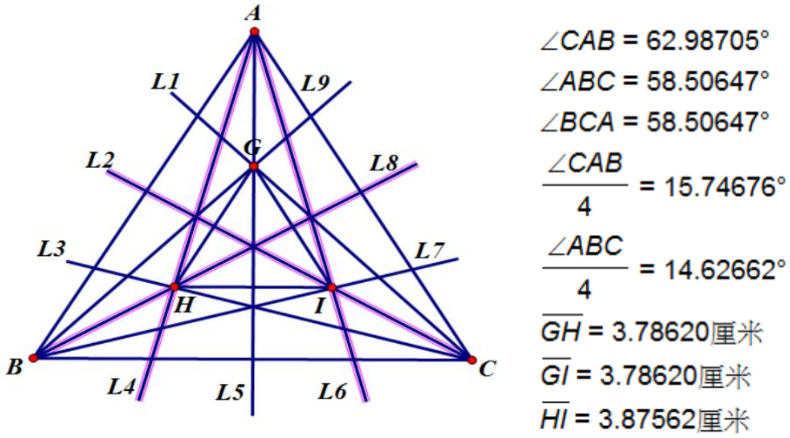
$\overline{HI} = 3.88794$厘米

$\overline{IG} = 3.80813$厘米

(如圖，H 為 L3 與 L8 之交點，I 為 L2 與 L7 之交點)



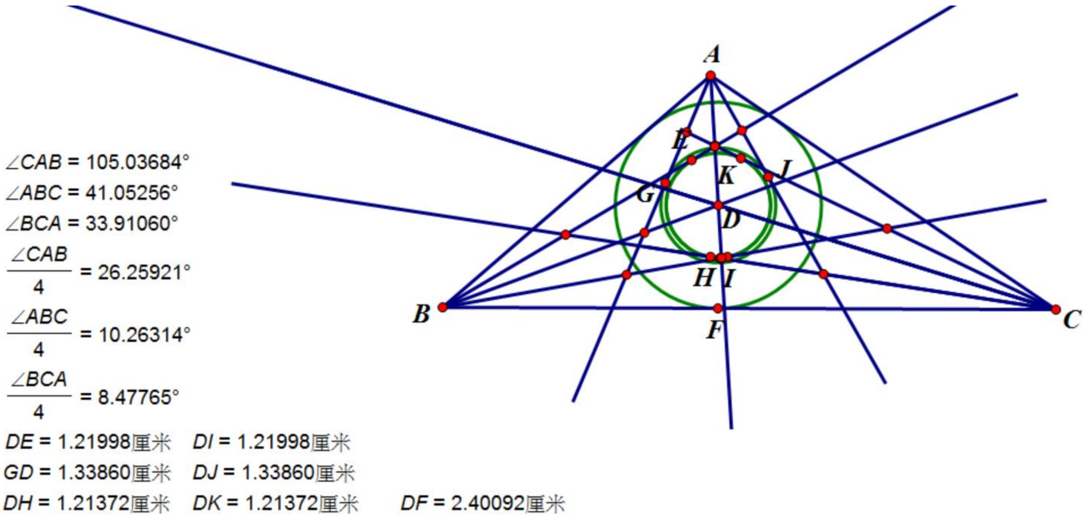
(如圖，H 為 L4 與 L8 之交點，I 為 L2 與 L6 之交點)

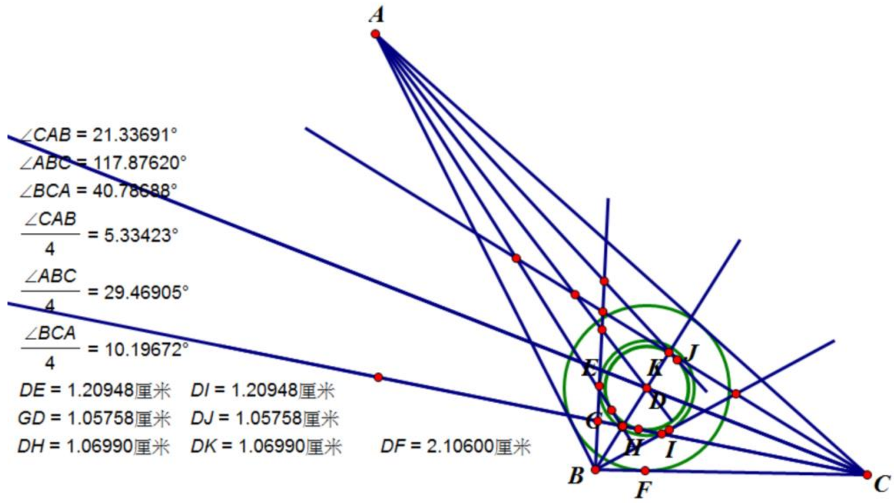


而經由多次實驗後也發現，G 點取 L1,L5,L9 任兩線皆可構成等腰三角形，因此也證明 L1,L5,L9 交與一點。

四、以四等分畫出一莫雷三角形後，因三個角分別為大三角形中的角平分線，因此其交於大三角形之內心。

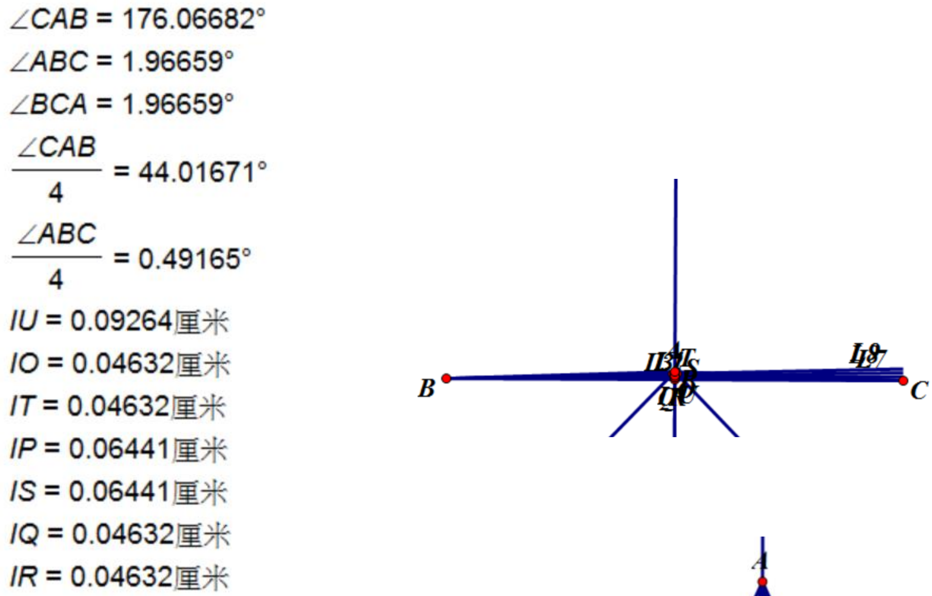
再以內心分別在三邊做切於左右兩條之圓，並觀察其半徑與大三角形半徑之比例關係。

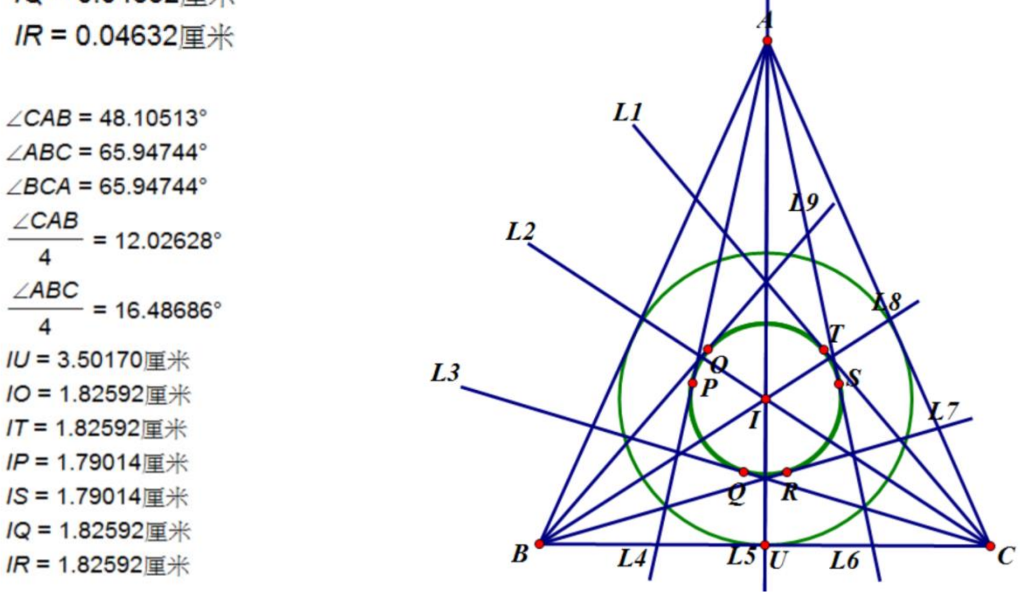




由以上數據發現，小圓與大圓之半徑比十分接近 1:2，但稍有誤差。

此外，我也觀察了等腰三角形的情況，雖然也幾乎是 1:2(稍有誤差)，但我卻發現，當底角~0 時，結果卻更接近 1:2(比較以下兩圖)。不過，也不排除是 GSP 的誤差。





此外我還發現:

(一)當底角大於 60 度時，切於頂角左右兩條角平分線支援半徑(以下簡稱 IP,IS)較切於底角的小，反之則較大。

(二)底角由 0 慢慢增加的過程中，IP,IS 的增加幅度較其他的大，且在 60 度時達到相等。

(三)當底角越大，兩半徑的比例與 1:2 相差愈大。

五、在五等分角的情況中，首先我們先討論正三角形

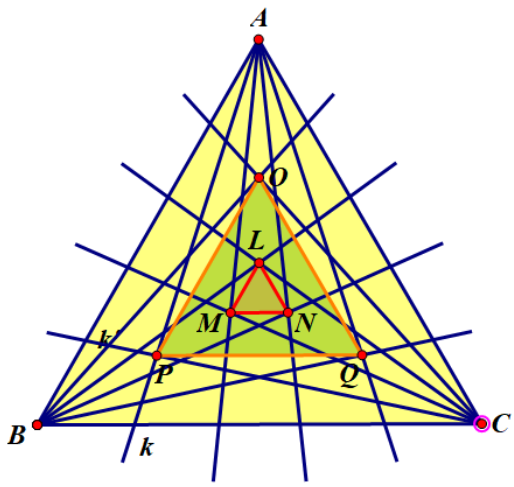
(一)在正三角形內部中，可以發現兩個正三角形(如下圖)，將各點連接後，討論其周長面積之比例關係。

$\angle CAB = 60.00000°$
$\angle AKC = 60.00000°$
$\angle BCA = 60.00000°$
ΔLMN的面積 = 0.73457 厘米^2
ΔOPQ的面積 = 9.38472 厘米^2
ΔABC的面積 = 44.00262 厘米^2
$\overline{OP}$ = 4.65544厘米
$\overline{PQ}$ = 4.65544厘米
$\overline{OQ}$ = 4.65544厘米
$\overline{LM}$ = 1.30246厘米
$\overline{MN}$ = 1.30246厘米
$\overline{LN}$ = 1.30246厘米
k' = 10.08066厘米
k = 10.08066厘米
$\overline{AC}$ = 10.08066厘米

$\frac{\Delta ABC\text{的面積}}{\Delta OPQ\text{的面積}} = 4.68875$ $\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{OQ}} = 2.16535$

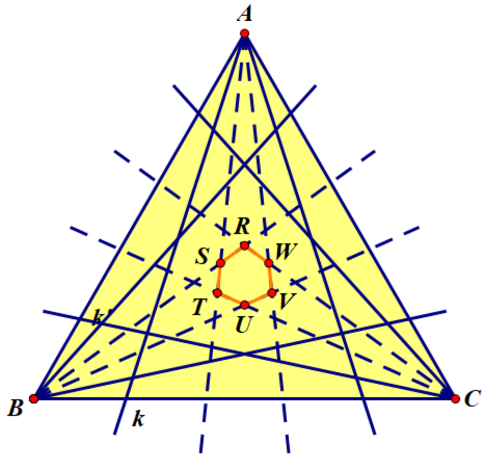
$\frac{\Delta ABC\text{的面積}}{\Delta LMN\text{的面積}} = 59.90267$ $\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{LM}} = 7.73968$

$\frac{\Delta OPQ\text{的面積}}{\Delta LMN\text{的面積}} = 12.77583$ $\quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{LM}} = 3.57433$



由以上數據我發現，三三角形的邊長比大約為 1:3.57:7.74，面積比約為 1:12.78:59.90。且不論 ABC 的大小為何，此比例皆正確。

此外，我也對三角型 LMN 所外接的六邊形稍作研究，而最後發現雖然其六邊相等，但其並非為一正六邊形，而是一個角度為 108°、132°相間且等邊長的六邊形。



$\overline{SR}$ = 0.75964厘米
$\overline{ST}$ = 0.75964厘米
$\overline{TU}$ = 0.75964厘米
$\overline{UV}$ = 0.75964厘米
$\overline{WV}$ = 0.75964厘米
$\overline{WR}$ = 0.75964厘米

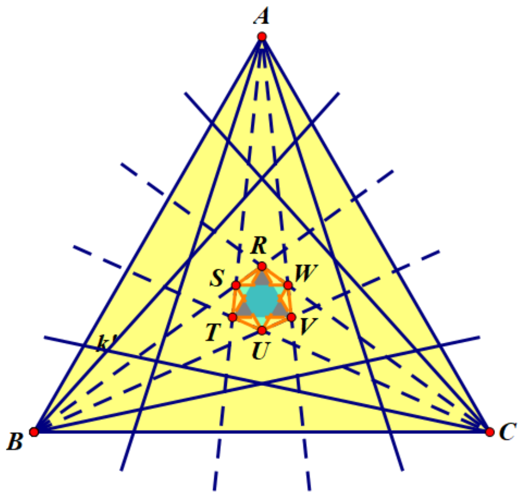
$\angle STU$ = 108.00000°
$\angle TSR$ = 132.00000°
$\angle SRW$ = 108.00000°
$\angle RWV$ = 132.00000°
$\angle WVU$ = 108.00000°
$\angle TUV$ = 132.00000°

在分析此角度及邊長形成的關係，可以得到:

(1)在角度方面因為∠STU、∠SRW、∠WVU 為一底角為 36°之等腰三角形之頂角，∠TSR、∠RWV、∠TUV 的對頂角則為一底角為 24°之等腰三角形之頂角，因此產生了這樣角度的差異。而這樣的研究結果也讓我想到:那輛等分的情況有可能會有正多邊形嗎?

(2)而在長度方面，(目前尚未發現結果)

(3)在研究長度的過程中，也讓我想到，既然三角形 RTV(即 LMN)為一正三角形，那 SWU 是否也會為一正三角形?若是，那其與 RTV 的關係為何?

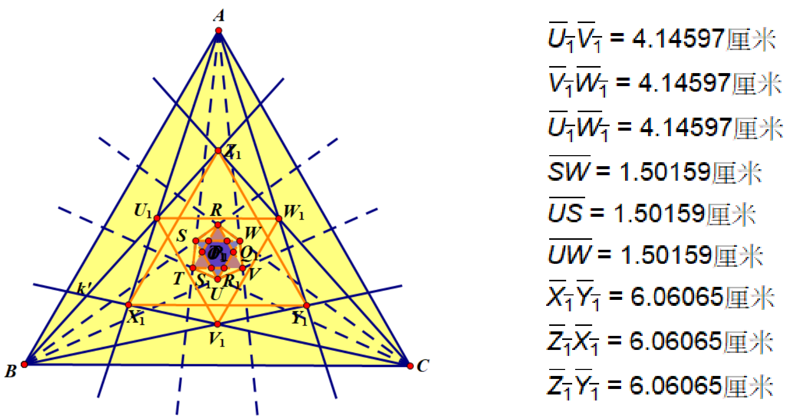


$\overline{RT}$ = 1.43236厘米
$\overline{TV}$ = 1.43236厘米
$\overline{RV}$ = 1.43236厘米
$\overline{SW}$ = 1.26847厘米
$\overline{SU}$ = 1.26847厘米
$\overline{UW}$ = 1.26847厘米

經 GSP 繪圖後發現三角形 SWU 竟然也是一個正三角形，且其邊長大約是三角形 RTV 的 1.13 倍。

發現了這個倒正三角形後，又讓我想到說:既然與 ABC 同方向的有兩個正三角形，那反方向的是否還有另一個?

於是，我又發現了另一個正三角形 $U_1V_1W_1$(如下圖)



若將此三角形與同方向之小三角形 SWU 及反方向的大三角形 $X_1Y_1Z_1$ 相比，SWU 的邊長與其邊長比約為 1:2.76，$X_1Y_1Z_1$ 與其邊長比則為 1.46 倍。

統整以上結果，此五正三角形的邊長比由小到大約為 1:1.13:2.76:4.04:8.75 倍

2.接著討論一般三角形的情況(尚未研究)

六、討論六等分角的情況(研究中)

七、討論四邊形的情況(研究中)

伍、研究結果

陸、討論

柒、結論

捌、參考資料及其他

幾何明珠第二十章—莫利定理

莫雷定理:維基百科

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%AB%E9%9B%B7%E8%A7%92%E4%B8%89%E5%88%86%E7%B7%9A%E5%AE%9A%E7%90%86

莫雷定理的證明方法

https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml

Wolfram mathworld—Morley theorem

http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html

老師短評：4.0 分

1. 實驗嘗試失敗的部分其實不用太多，只要稍加敘述流程
2. 五等分的結果頗為有趣，但可能因為是正三角形的結果，我好奇的是一般三角形有此結果嗎？
3. 看來老師建議的類 Morley 改成一般 n 等分角似乎行不通@@，你可能要再想想有什麼有趣的幾何定理延伸題材，可參考<<幾何明珠>>
4. 建議參考 104 中等獎助數學科一等獎的寫法，她結合了巴斯卡神秘六邊形定理、布里昂雄定理、poncelet theorem。