

臺北市 109 年度中等學校學生科學研究獎助
研究計畫申請書封面

組 別： 高中職組

科 別： 數學科

計畫名稱：力爭上郵

摘要

本研究主要探討 $1 \times n$ 或 $2 \times n$ 排列的矩形郵票中，各種面值分配下，連續地撕下郵票，使的撕下的郵票面值總和為 1 到 k 的連續正整數。求 k 的最大值，及其面值分配。

壹、研究動機

雖然郵票面值分配的問題不是什麼了不起的學問，卻是一種可以在生活中幫助人們的數學。並且有著令人意想不到的應用。小小的一頁郵票上竟然有著這麼多耐人尋味的細節，此點令我興奮不已。

貳、研究目的及研究問題

一、研究目的

探討 $1 \times n$ 或 $2 \times n$ 排列的矩形郵票的各種解。

二、研究問題

$1 \times n$ 或 $2 \times n$ 排列的矩形郵票在各種面值分配下，使其連通的郵票子集合之郵票面值總和為 1 到 k 的連續正整數。求 k 的最大值，及其面值分配。

參、研究設計

一、郵票問題

定義相關名詞：

(一)、郵票：可以填入面值的矩形。每張大小與尺寸皆相同。

(二)、連通：即指有共用邊。

(三)、連通子集合數：在本問題中指一郵票集合中，連通的子集合數。

二、 $1 \times n$ 郵票的研究

(一)、連通子集合數

我們可以很容易地得到 $1 \times n$ 的郵票的連通子集合數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ ，因為，如果只撕 1 個，則有 n 種撕法，如果撕 2 個，則有 $n-1$ 種撕法…如果撕 n 個，則有 1 種撕法。

所以 $1 \times n$ 的郵票的子集合數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

(二)、 k 的最大值的研究

這裡指的 k 的最大值為 $1 \times n$ 排列的矩形郵票在各種面值分配下，使其連通的郵票子集合之郵票面值總和為 1 到 k 的連續正整數。其中的 k 的最大值，根據程式的演算，可以做出下表。程式請見附錄。

n	k	對應的排列方法
1	1	(1)
2	3	(1, 2)
3	6	(1, 3, 2)
4	9	(1, 3, 3, 2), (1, 1, 4, 3), (4, 1, 2, 6)
5	13	(1, 3, 1, 6, 2), (1, 1, 4, 4, 3), (6, 1, 2, 2, 8)
6	18	(2, 5, 7, 1, 3, 6), (2, 5, 6, 3, 1, 8), (6, 4, 5, 2, 1, 13), (5, 2, 6, 3, 1, 14)
7	24	(8, 10, 1, 3, 2, 7, 8)

(三)、不同演算法對計算時間的影響

目前演算法的優化的方向是，在基礎的暴力破解上，進一步改良。

1. 基礎的暴力破解(枚舉法)

每一種可能跑遍，最後排序，找出最大的 k。

可以將時間花費做成下表 n = 1~5

n	計算所花費時間(秒，取小數點下四位)
1	0.0*
2	0.0*
3	0.0156
4	0.1670
5	17.2693

*註：時間過小不易測量

2. 剪枝，減去沒有 1 的面值組合

在得知當前組合不可能實現時，跳過此組合進到下一可能。透過檢查該組合內有無 1，因為若該組合內不包含 1，則必湊不出 1 這個面值。故可以透過先剪去這類組合達到加快程式速度的效果。

可以將時間花費做成下表 n = 1~5

n	計算所花費時間(秒，取小數點下四位)
1	0.0*
2	0.0*
3	0.0156

4	0.0631
5	5.6868

*註：時間過小不易測量

3. 剪枝，減去反轉後曾經算過的組合

由於郵票沒有方向，故同一個面值的組合可能被重複計算過 1 到 2 次。減去這類組合的面值可以省下大筆時間。且計算是否算過的時間遠小於後續的計算時間。

n	計算所花費時間(秒，取小數點下四位)
1	0.0*
2	0.0010
3	0.0010
4	0.0450
5	3.7230

*註：時間過小不易測量

可以從整體時間變少發現算法的確有效，而當 n 較小時，時間稍微增加應該是因為多了一個檢查的時間，且因為 n 夠小，故此計算時間大於不做剪枝的時間。但是可以發現當 n 較大時，時間就有明顯的下降了。

令目前單一面值的最大值為 p，則檢測使用的方法是將整列的郵票轉為一個 n 位 p 進位的數字，若此數字倒轉過後比原本小，則代表此組合已經算過了。

詳細的流程為：

- (1) . 判斷第一位是否比最後一位大，若是的話，代表倒轉過後會比較大。
 - (2) . 若(1)判斷為是，則跳過此組合，若非，就不跳過，若兩者一樣，就再比下一個。
- 以下為此判斷的程式。

```
for j in range(check_times):
    if stamps[j] > stamps[n - j - 1]:
        break # 跳過這一次
    elif stamps[j] == stamps[n - j - 1]:
        Continue # 再比下一個
    else:
        # 這裡要放後續判斷的函式，也就是不跳過的組合會執行的函式
```

4. 不同演算法之間的執行時間比較

n	枚舉法(秒，取小數點下四位)	剪枝，減去沒有 1 的面值組合(秒，取小數點下四位)	剪枝，減去反轉後曾經算過的組合(秒，取小數點下四位)
1	0.0*	0.0*	0.0*
2	0.0*	0.0*	0.0010
3	0.0156	0.0156	0.0010
4	0.1670	0.0631	0.0450
5	17.2693	5.6868	3.7230

*註：時間過小不易測量

三、 $m \times n$ 郵票的研究

(一)、連通子集合數

因為一頁郵票的 k 值必小於等於其連通子集合數，且此數在基礎的暴力破解中(枚舉法)做為每一面值的可能數。故此值十分重要。

求值的程式請參考肆、參考資料及其他。

肆、參考資料及其他

一、參考資料

(一)、Ebrahim Salehi 、 Sin-Min Lee 、 Mahdad Khatirinejad ,2005/8/28, Discrete Mathematics, IC-Colorings and IC-Indices of graphs, Pages297~310

二、程式碼

(一)、 $1 \times n$ 郵票最大 k 值求解程式：(最佳版本，包含時間測量)

```
import math
```

```
import time
```

```
n = 2
```

```
while True:
```

```
    start_time = time.time()
```

```
    p = int(n * (n + 2) / 2)
```

```
    stamps = [0] * n
```

```

k = n
k_list = []
k_dict = {}

check_times = int((len(stamps) - (len(stamps) % 2)) / 2)

for i in range(int(math.pow(p, n))):

    num_pos = 0
    for j in stamps: # 下一種面值分配
        stamps[num_pos] += 1
        if stamps[num_pos] == p + 1:
            stamps[num_pos] = 1
            num_pos += 1
        else:
            break

    for j in stamps: # must be one 1 stamp
        if j == 1:
            break
    else:
        continue # no 1 in stamps

    for j in range(check_times):
        if stamps[j] > stamps[n - j - 1]:
            break # Skip this time
        elif stamps[j] == stamps[n - j - 1]:
            continue
        else:
            record = []
            # print(stamps, i)

```

```

for m in range(n): # Methods of coloring.
    for r in range(m, n):
        summary = 0
        for q in range(m, r + 1):
            summary += stamps[q]
        record.append(summary)

record.append(p + 1) # Make a BIG gap.
record.sort()

for m in range(len(record)):
    x = record[m]
    if x + 1 < record[m + 1]:
        if x > k:
            # print(k_list)
            k_list = [str(i) + ':' + str(stamps)]
            # k_dict = {i: str(stamps)}
            k = x
        elif x == k:

            k_list.append(str(i) + ':' + str(stamps))
            # k_dict[i] = str(stamps)
            # print(stamps)
            # print(k_list)
        break
    else:
        print('error occur')
        print(record)
        input()
break

```

```

print(n)
print(k, k_list)
# print(k_dict)
f = open('result.md', 'a')
f.write(f'n: {n}\nk: {k} method: {k_list}\n')
f.close()
n += 1
print(time.time() - start_time)

```

(二)、找面值編號對應面值

```

import math

while True:
    n = int(input('n?'))
    pos_num = int(input('pos_num?'))
    p = int(n * (n + 1) / 2)

    stamps = [0] * n

    for i in range(pos_num+1):

        num_pos = 0
        for j in stamps: # 下一種面值分配
            stamps[num_pos] += 1
            if stamps[num_pos] == p + 1:
                stamps[num_pos] = 1
                num_pos += 1
            else:
                break

    print(stamps)

```


(三)、尋找連通子集數

```
import math

n = int(input('input n'))
m = int(input('input m'))

counter = [0] * (n * m)

def plus1(big_base_2_num_list, place):
    if big_base_2_num_list[place] == 0:
        big_base_2_num_list[place] = 1
    else:
        big_base_2_num_list[place] = 0
        plus1(big_base_2_num_list, place - 1)

p = 0

for i in range(int(math.pow(2, n * m))):
    plus1(counter, len(counter) - 1)
    print(counter)

    old_counter = counter
    # checker = [0] * (n * m)

    for j in range(m):
        counter.insert((j + 1) * n, 0)
```

```
counter = counter + [0]*(n+1)
```

```
print(counter)
```

```
for j in range((n + 1) * (m + 1)):
```

```
    if counter[j] == 1:
```

```
        if counter[j + 1] + counter[j + m + 1] == 0:
```

```
            break
```

```
    else:
```

```
        p += 1
```

```
counter = old_counter
```

```
print(p)
```

(四)、多核心加快版

```
import math
```

```
import time
```

```
import multiprocessing
```

```
n = 5
```

```
def find_k(first_stamp):
```

```
    global n, p, k_dict, k, k_list, group_stamps, check_times
```

```
    stamps = [0] * (n - 1) + [first_stamp]
```

```
    for i in range(group_stamps):
```

```
        # print(i, stamps)
```

```
        num_pos = 0
```

```

for j in stamps: # 下一種面值分配
    stamps[num_pos] += 1
    if stamps[num_pos] == p + 1:
        stamps[num_pos] = 1
        num_pos += 1
    else:
        break

for j in stamps: # must be one 1 stamp
    if j == 1:
        break
else:
    continue # no 1 in stamps

for j in range(check_times):
    if stamps[j] > stamps[n - j - 1]:
        break # Skip this time
    elif stamps[j] == stamps[n - j - 1]:
        continue
    else:
        record = []
        # print(stamps, i)
        for m in range(n): # Methods of coloring.
            for r in range(m, n):
                summary = 0
                for q in range(m, r + 1):
                    summary += stamps[q]
                record.append(summary)

        record.append(p + 1) # Make a BIG gap.
        record.sort()

```

```

for m in range(len(record)):
    x = record[m]
    if x + 1 < record[m + 1]:
        if x > k:

            k_list = [str(stamps)]

            k = x
            elif x == k:
                k_list.append(str(stamps))
            break
        else:
            print('error occur')
            print(record)
            input()
        break

```

```

if __name__ == '__main__':
    start_time = time.time()
    multiprocessing.freeze_support()

    p = int(n * (n + 1) / 2)
    group_stamps = int(math.pow(p, n - 1))
    k = n
    k_list = []
    k_dict = {}
    check_times = int((n - (n % 2)) / 2)
    pools = multiprocessing.Pool(4)

    first_stamp_queue = multiprocessing.Queue()

```

```

for i in range(p):
    first_stamp_queue.put(i)

ps_list = []

for i in range(p):
    ps_list.append(multiprocessing.Process(find_k(i)))
    ps_list[i].start()

for i in range(p):
    ps_list[i].join()

print(n)
print(k, k_list)
f = open('result.md', 'a')
f.write(f'n: {n}\nk: {k} method: {k_list}\n')
f.close()
print(time.time() - start_time)

```

伍、研究計畫進度表

工作項目		中華民國109年									
		1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月
1	題目解析	■									
2	1xn 程式主體	■	■								
3	發展1xn 更快的算法		■	■	■	■					
4	研究新的雲端計算載具		■								
5	降低1xn 的程式硬體使用概率		■	■	■						
6	將1xn 程式時間壓制至可接受範圍				■	■	■				
7	研究2xn 的問題						■				
8	構造2xn 程式主體						■				
9	加快2xn 計算速度						■	■			
10	研究 k 值與 n 值的關係					■	■	■	■		
11	研究 n 值與其最佳的配置方式之間的關係					■	■	■	■		
12	校對，檢查說明書									■	■
13	報名國際科展										■

註：請以粗黑筆劃出或以色塊填滿每一工作項目之起迄月份，列數得依實際需求自行增刪。

陸、研究經費申請明細表

編號	項目	規格	單位	數量	單價	總價	說明
1	科展看板海報		組	1	1500	1500	展示作品用
2	行動硬碟	1TB	個	1	1999	1999	備份及存放科 展資料
3	碳墨匣		個	2	990	1980	印作品說明書 和相關文件
4	彩色墨水匣		個	2	1982	3964	印作品說明書 和相關文件
5	影印紙	A4 80 磅	包	2	150	300	印作品說明書 和相關文件
6	筆記本	A4 70 頁	本	1	150	150	紀錄有關科展 的資料
7	文具(原子筆、立 可帶……)		組	1	300	300	紀錄有關科展 的資料
8	演算法的樂趣(參 考書)		本	1	480	480	研究用途

總計：10673 元