通過問題學解題

1509 07,11,18,20,21

關於此書

- 在寫競賽或是作題的時候，常常會遇到各式各樣的瓶頸，此時不妨翻閱本書。本書既是一本**問題選集**，亦是一本**訓練手冊**。當中包括各種常遇到的解題技巧和在別處中不易找到的有趣問題。
- 當代美國著名數學家P. R. Halmos曾說：「**問題是數學的心臟**」。我們通常透過求解已知答案的問題學習數學，而進行數學研究多是提出問題或是試圖解決至今仍未有解答的問題，可知此話不假。

前言

- 我們認為在數學競賽的領域當中，**「數感」**是很重要的一項能力，擁有數感是指在解題時可以偶然冒出一些想法，而這些想法往往是解題的關鍵。
- 然而並非每個人都與身俱來這種能力，「數感」是需要經過大量的解題與學習培養而來的。
- 書中有許多我未曾見過的題目，且每個題目都伴隨著許多解題技巧，以下給出一些範例以及我們從此書中學到的精髓。

Example 1：求無窮級數 $1-2r\cos\theta+3r^2\cos 2\theta\ldots, |r|<1$的和

- **思路**：看到$cos\theta$的n倍角通常會想到棣美弗定理
  $e^{i\theta}=(cos\theta+isin\theta)^n=\cos(n\theta)+isin(n\theta)$
  (至於虛部可求其共軛複數後再消去)
- 這樣就可以化為等比級數
- 看到等比級數與等差級數的乘積，通常會令級數和為S，再乘上公比後相減，只留下等比級數
- 最後再用等比級數求和公式算出答案

改寫原本的題目

- 依據我們的思路，可以開始解題了！
- 原本的題目可改為

$$Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(-r)^n(cos\theta+isin\theta)^n\right)=Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(-r)^n e^{in\theta}\right)$$

- 其中，$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$(Euler恆等式)

乘上公比後相減

- 設：$S = 1 - 2re^{i\theta} + 3r^2e^{i2\theta}\dots$
- 則：公比為$-re^{i\theta}$
- 則：

$-re^{i\theta}S = \sum_{n=1}^{\infty} n(-r)^n e^{in\theta}$ ……(1)

$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-r)^n e^{in\theta}$ ……(2)

求解

- 將二式與一式相減，可得：

$$\left(1+re^{i\theta}\right)S=\sum_{n=0}^{\infty}(-r)^n e^{in\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-re^{i\theta}\right)^n}{1+re^{i\theta}}$$

- 因為$|r|<1$,所以S的值收斂，因此此無窮級數的和存在

$$\Rightarrow S=\frac{1}{\left(1+re^{i\theta}\right)^2}$$

- 因此，所求為$Re(S)$

$$Re(S)=\frac{1}{2}(S+\bar{S})=\frac{\frac{1}{\left(1+re^{i\theta}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+re^{-i\theta}\right)^2}}{2}=\frac{1+rcos\theta+r^2cos2\theta}{(r^2+1+2rcos\theta)^2}$$

Example2:求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$的一般項公式

- **思路**：代入I_n的前幾項，試著找找看規律

$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1, I_2 = \frac{\pi}{4}, I_3 = \frac{2}{3}$

- 猜測:此遞迴式為兩項間格
- 且此積分式明顯可以用分部積分法找出他的遞迴式

進行分布積分，試著驗證規律

- 假設：$u = \sin^{n-1} x\,, dv = sinxdx$
- 則：$du = \sin^{n-2} x\, cosxdx, v =- cosx$
- 因此，原積分式為

$$-\sin^{n-1} x\, cosx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2 x \sin^{(n-2)} x\, dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

尋找初始條件

- 發現遞迴式為二階的遞迴式，因此要找出兩個初始條件，
- 於是找出I_0, I_1

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =- cosx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

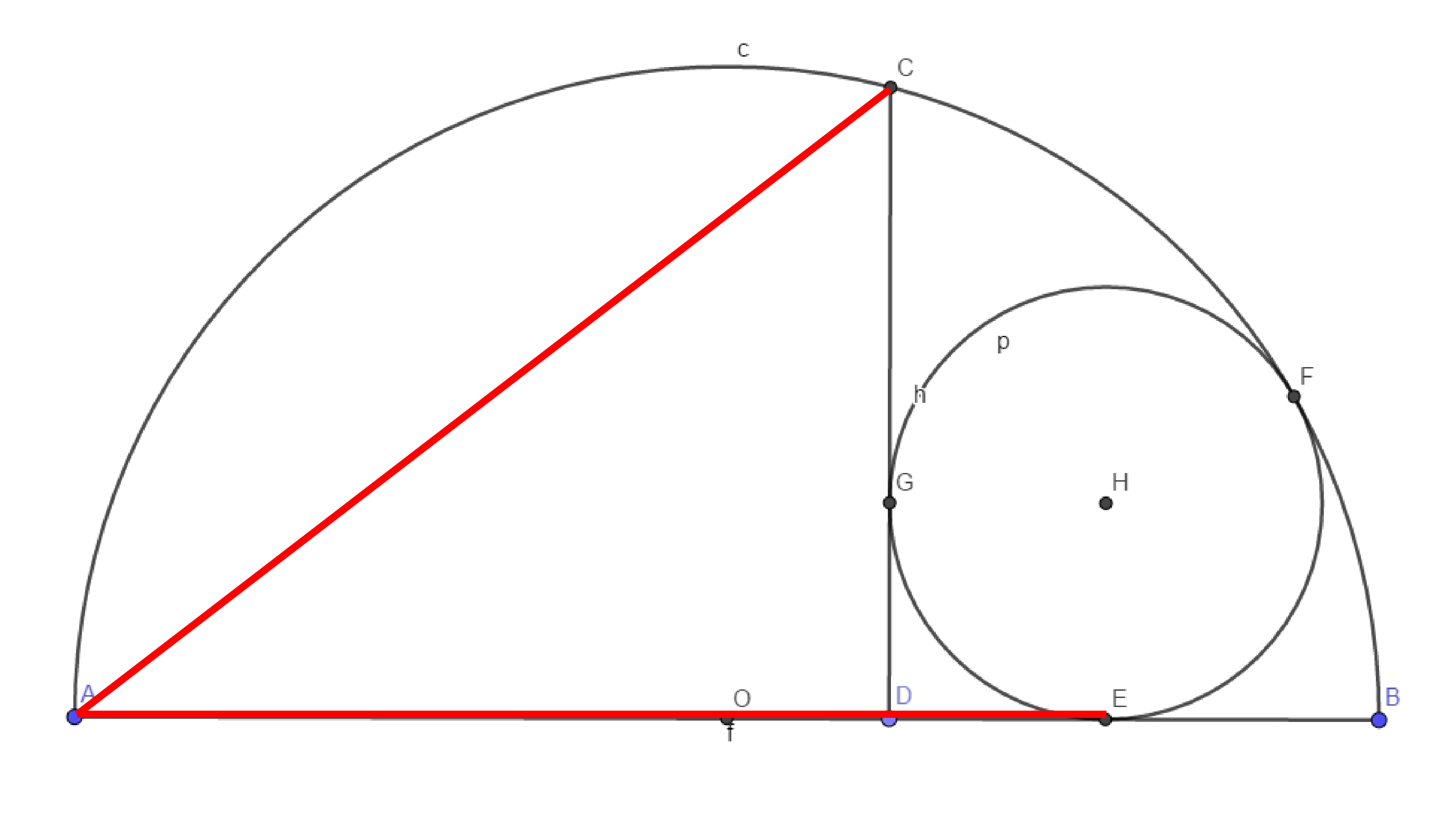
求出答案

- 因此，

$$I_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times n} \times \frac{\pi}{2}, n\text{為正偶數}$$

$$I_n = \frac{2\times4\times6\times\ldots\times(n-1)}{3\times5\times7\times\ldots\times n} \times 1, n\text{為正奇數且}n \geq 3$$

Example 3: 證明$\overline{AC} = \overline{AE}$



分析

- $\angle ACB = \angle AFB = 90° \Rightarrow$ 可能與圓冪或四點共圓有關
- O, H, F三點共線
- $\Rightarrow$ 猜測: A, G, F三點共線

證明

在ΔFHG以及ΔFOA中:

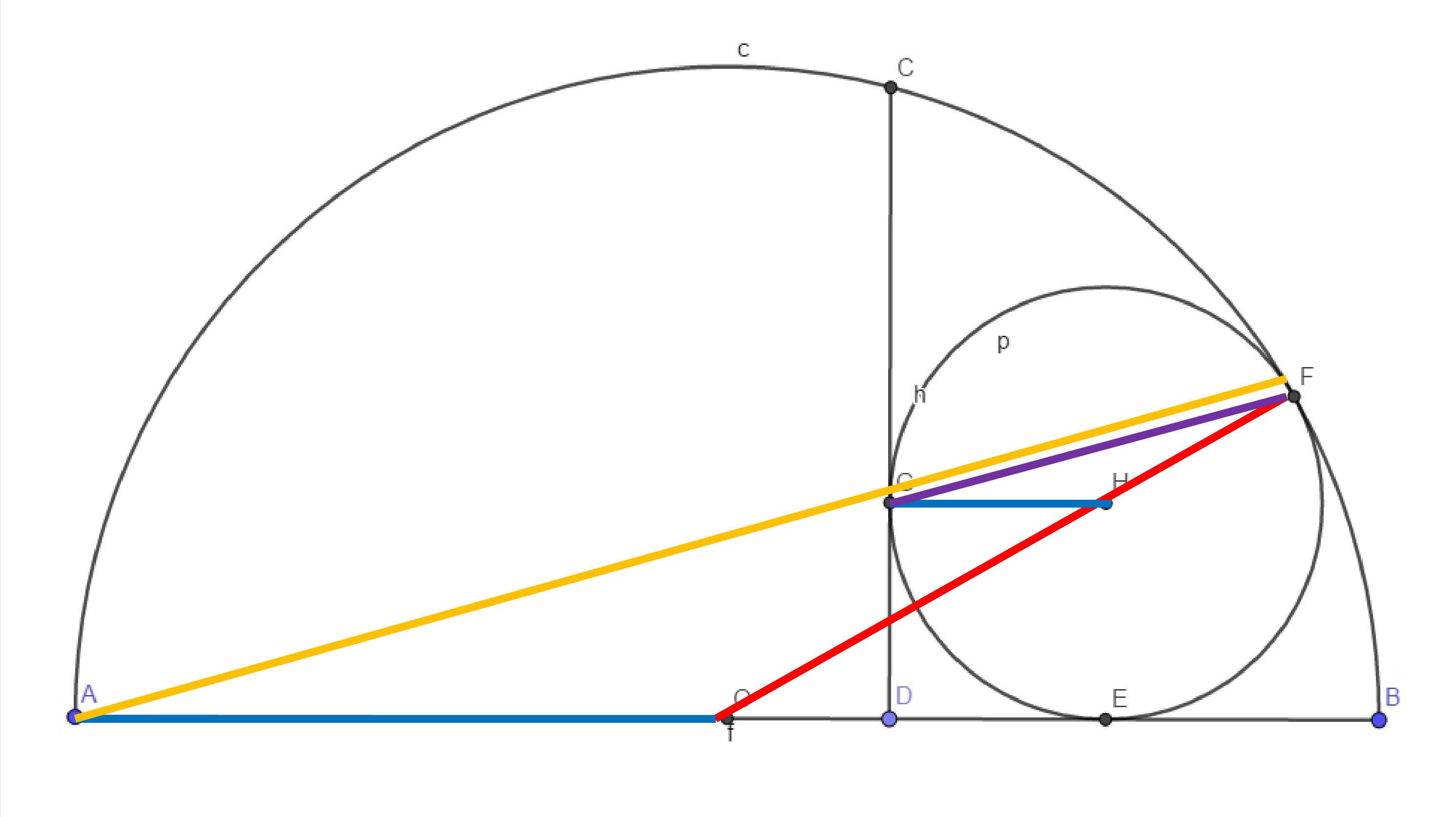
(1)$\angle FHG = \angle FOA$

$(\overline{HG} \parallel \overline{OA})$

(2)$\overline{FH}:\overline{HG} = \overline{FO}:\overline{OA}$

故$\Delta FHG \sim \Delta FOA(SAS)$

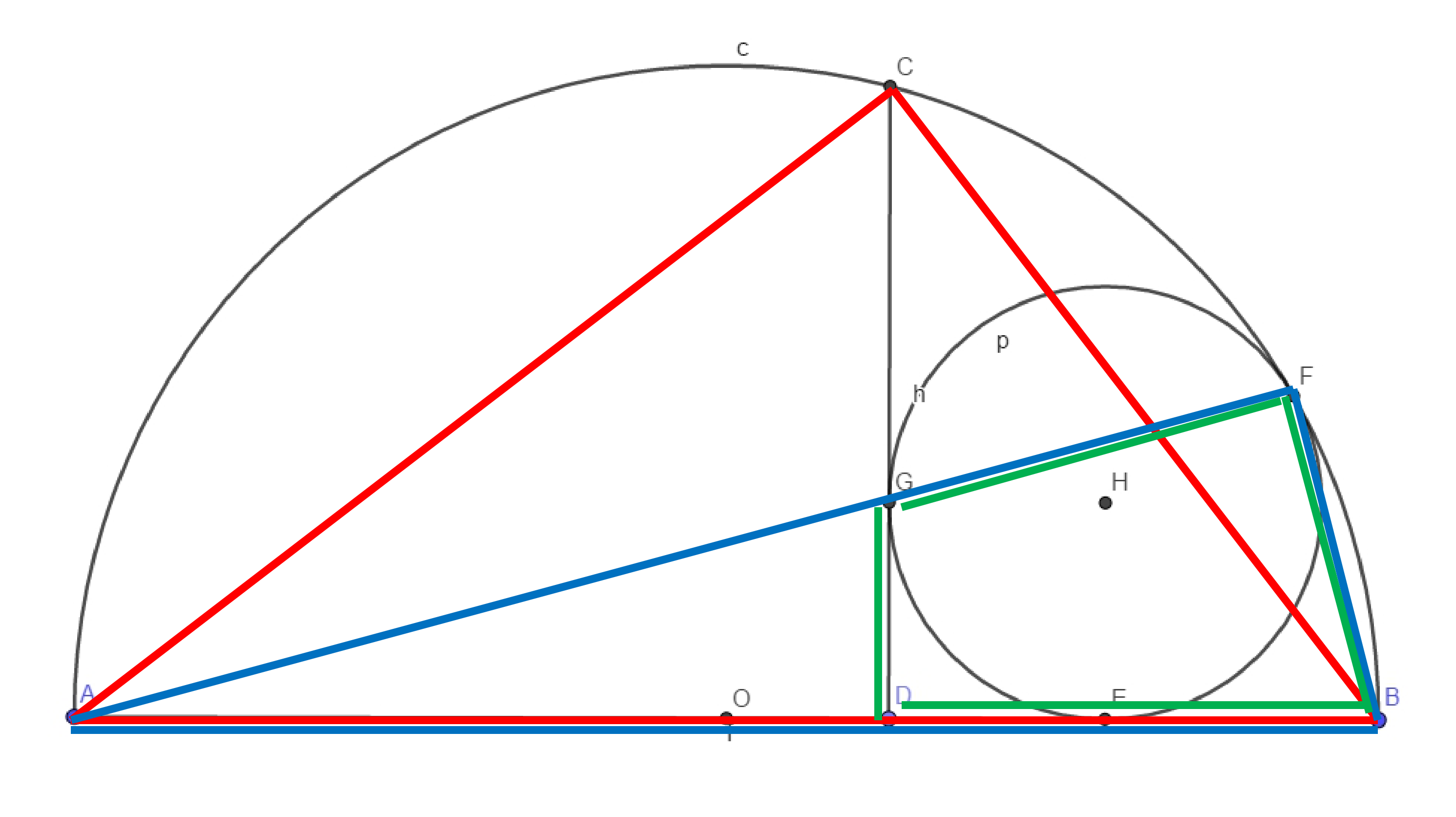
從而得A, G, F三點共線



接著，運用多次圓冪以及四點共圓、母子相似並從欲證之項目開始思考可能的步驟

$\because \angle ACB = \angle AFB = 90°$
$\Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}$

此時，我們希望將$\overline{AD} \times \overline{AB}$代換掉，而我們發現$DGFB$四點共圓
$(\because \angle GDB + \angle GFB = 180°)$
從而有
$\overline{AG} \times \overline{AF} = \overline{AD} \times \overline{AB}$



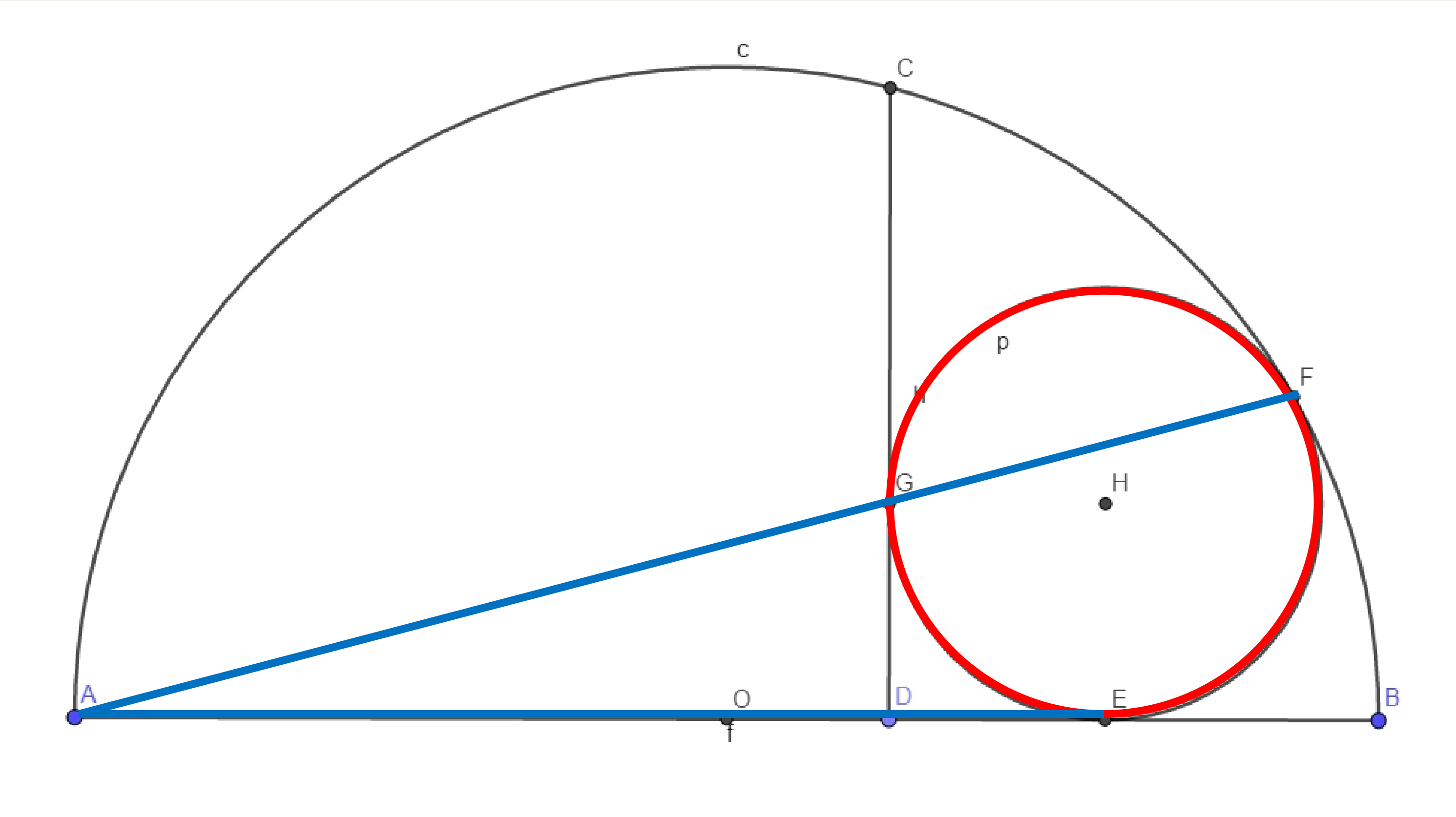
最後...快完成了

此時，由圓冪可得

$\Rightarrow \overline{AE}^2 = \overline{AG} \times \overline{AF}$

即證得$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2$

即$\overline{AC} = \overline{AE}$



感想與心得

- 在閱讀完此書後，我們回去看一些原先無法解出的題目時，都有了一些新的想法甚至解出來了，因此我們認為這本書提供了我們一些在解題上的思路以及可能的過程，使我們提升了數學能力。
- 更重要的是，我們學習到了面對未知的題目時，應有的態度及心態，想必我們未來在解題時，都會不禁回想起書中的內容吧!

謝謝大家