第 10 讲 线性方程（组）求解

目录

线性方程组是线性代数研究的主要对象之一。求解线性方程组的问题不但在自然科学和工程技术中有所涉及，在计算方法的其他分支中，比如最佳平方逼近，微分方程数值解等，也往往需要求解线性方程组，因此它是一个应用相当广泛的分支。MATLAB 软件最早也起源于对线性方程组的研究。

考虑线性代数方程

$$\mathrm{Ax} = b \quad \textbf{(10-1)}$$

式中 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}$，$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

这里不加证明地给出线性方程组的结构及判定定理

（1）当 rank(A)=rank([A b])=n 时，称方程组（10-1）为恰定方程组，这时它有唯一解向量。

（2）当 rank(A)=rank([A b])<n 时，称方程组（10-1）为欠定方程组，这时它有无穷多组解向量。

（3）当 rank(A)<rank([A b])时，称方程组（10-1）为超定方程组或者矛盾方程组，一般意义下无解，但可以使用 Moore-Penrose 广义逆求出其最小二乘解

对于恰定方程组的求解，线性代数的知识已经介绍了线性方程组求解的 Cramer 法则：当 $\det(A) \neq 0$ 时，方程组（10-1）有唯一解 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$,并且

$$c_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \quad i = 1, 2, \cdots n \qquad \textbf{(10-2)}$$

B_i是用b替换A的第i列a_i所得到的的矩阵。

缺点：**Cramer** 法则运算量太大。对于一个 **n** 阶方程组需要计算 **n+1** 个 **n** 阶行列式，而对 **n** 阶行列式若采用按行（或按列）展开来计算，至少需要进行$n!$次乘法，因此共需要进行$(n+1)!$次乘法。该算法对于 **n** 比较大的情形是不适用的。

因此，必须研究其他数值算法。

重点学习：直接法和迭代法。

直接法是在没有舍入误差的情况下，通过有限步四则运算可以求得方程组精确解的方法，但是在实际计算中由于舍入误差的存在和影响，该方法也只能求得线性方程组的近似解；

迭代法是用某种极限过程取逐步逼近准确解的方法，从而也可用有限步运算得出具有指定精确度的近似解。

10.1 消去法

我们将对 **GAUSS** 消去法和追赶法进行学习。

首先通过介绍上三角方程组的求解了解消去法的基本原理

$$\begin{aligned}
&u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1,n}x_n = y_1 \\
&u_{22}x_2 + \ldots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2,n}x_n = y_2 \\
&\ldots\ldots \\
&u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = y_{n-1} \\
&u_{n,n}x_n = y_n
\end{aligned} \qquad \textbf{(10-3)}$$

我们称形如（10-3）的方程组为上三角形方程组，将其改写成矩阵的形式为

$$Ux = y \qquad \textbf{(10-4)}$$

式中$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ & & \cdots & & \\ & & & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ & & & & u_{n,n} \end{bmatrix}$

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

称U为上三角矩阵

若$detU \neq 0$则我们称上三角方程组（10-3）或者（10-4）有唯一解且解可从（10-3）最后一个方程得出

$$x_n = y_n / u_{\mathrm{nn}} \qquad \textbf{(10-5)}$$

代入倒数第二个方程可得$x_{n-1} = (y_n - u_{n-1,n}x_n)/u_{n-1,n-1}$

通常设已知$x_n, x_{n-1}, \ldots x_{i+1}$则由方程组（5-3）的第$i$个方程可以得到

$$x_i = \left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{\mathrm{ij}} x_j\right] / u_{\mathrm{ii}} (i = n-1, n-2 \cdots, 1) \qquad \text{（}\textbf{10-6}\text{）}$$

上述求解方程组（10-3）的过程称为回代过程。

10.1.1 GAUSS 消去法

GAUSS 消去法主要包括消元和迭代两个步骤。

消元指的是将线性方程组化成与其同解的上三角方程组，迭代是指通过上三角方程组解出原方程组中的未知数。

这里介绍顺序 **GAUSS** 消去法和列主元 **GAUSS** 消去法

1.顺序高斯消去法

顺序 Gauss 消去法是指按照行原先的位置进行消元的 Gauss 消去法，

将线性方程组（10-1）写成增广矩阵的形式

$$\bar{A}^{(1)} = [A \quad b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \text{（}\textbf{10-7}\text{）}$$

式中$a_{\mathrm{ij}}^{(1)} = a_{\mathrm{ij}}, a_{i,n+1}^{(1)} = b_i \quad (1 \leq i, j \leq n)$

A.消元过程

$$\bar{A}^{(1)} = [A \quad b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix} = [A \quad b]$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} (i = 2, 3 \ldots n)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)} (i, j = 2, 3 \ldots . n)$$

$$\bar{A}^{(2)} = [A \quad b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} (i = 3, 4 \ldots n)$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - l_{i2} a_{2j}^{(2)} (i, j = 3, 4 \ldots . n)$$

$$\bar{A}^{(3)} = [A \quad b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & a_{nn}^{(3)} & a_{n,n+1}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\bar{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1,k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} (i = k + 1 \ldots n)$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} (i, j = k + 1 \ldots . n)$$

$$\bar{A}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1,k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & a_{k+1,n+1}^{(k+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & a_{n,n+1}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

通常称l_{ik}为消元因子，称$a_{kk}^{(k)}$为主元

B.回代过程

根据上述消元过程所得的结果可以根据式（10-5）和式（10-6）求得线性方程组的解。

$x_n = y_n / u_{nn}$ **(10-5)**

$x_i = \left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right] / u_{ii} (i = n - 1, n - 2 \cdots, 1)$ （**10-6**）

---------------------- 程序实现 **-----------------------------**

根据上面的消元和迭代过程，可以得到实现顺序 Gauss 消去法的程序 Gauss.m，程序的具体内容如下：

```
function [U,x]=Gauss(A,b)
```

```
% 顺序Gauss 消去法求解线性方程组
% 输入参数:
%       ---A: 线性方程组的系数矩阵
%       ---b: 线性方程组的右端项
% 输出参数:
%       ---U: 消元后的上三角方程组的增广矩阵
%       ---x: 线性方程组的解
n=length(b);
% 消元过程
for k=1:n-1   % 消元成上三角矩阵
    m=A(k+1:n,k)/A(k,k);
    A(k+1:n,k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n)-m*A(k,k+1:n);
    b(k+1:n)=b(k+1:n)-m*b(k);
    A(k+1:n,k)=zeros(n-k,1);
end
U=[A,b];
% 回代过程
x=zeros(n,1);
x(n)=b(n)/A(n,n);  % 求 x_n
for k=n-1:-1:1   % 回代
    x(k)=(b(k)-A(k,k+1:n)*x(k+1:n))/A(k,k);  % 求 x_k, k=n-1,n-2,…,1
end
```

该函数的调用格式为[U,x]=Gauss(A,b)

------------------- 实例 ----------------------

【例10-1】利用顺序Gauss 消去法求解下面的线性方程组

$x+2y+3z=1$
$4x+5y+6z=1$
$7x+8y=1$

编写如下语句

```
A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0];  % 线性方程组的系数矩阵
b=ones(3,1);  % 线性方程组的右端向量
[U,x] = Gauss(A,b);  % 利用顺序 Gauss 消去法求解线性方程组
U
```

```
U = 3×4
     1     2     3     1
     0    -3    -6    -3
     0     0    -9     0
```

```
x
```

```
x = 3×1
    -1
     1
     0
```

2.列主元 **Gauss** 消去法

顺序消去法缺点：在顺序消去法中必须满足$a_{kk}^{(k)} \neq 0$（$k=1,2,,,,n$）否则将无法进行计算。

另外：即使$a_{kk}^{(k)}$**=0**，但如果其绝对值$|a_{kk}^{(k)}|$很小，那么由于舍入误差的影响，也可能引起很大的误差，从而使顺序 **Gauss** 消去法失效。

解决这个问题的方法之一就是 —— 列主元消去法：

实现过程为：选取列主元，当消元过程进行到第k步时，其相应的增广矩阵为

$$\bar{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1,k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

按照 Gauss 消去法，应选择$a_{kk}^{(k)}$为主元，使得第k个方程不变。但注意到，此时第k个方程与之后的$n-k$个方程的地位并没有区别，选择第k列的元素$a_{ik}^{(k)}(i=k,k+1,\ldots,n)$中绝对值最大的元素作为主元，即令$|a_{rk}^{(k)}| = \max\limits_{k\leq i\leq n}|a_{ik}^{(k)}|$

如果$a_{rk}^{(k)}$=0,则说明矩阵不可逆，即方程组的解不确定；否则当$r>k$时，则在增广矩阵中交换第k行与第r行，这时$a_{rk}^{(k)}$成为主元（此时变成了$a_{kk}^{(k)}$），然后再按 Gauss 消去法进行消元运算。

--------- 列主元消去法程序实现 ------------------

根据上述过程。可以编写利用列主元 Gauss 消去法求解线性方程组解的程序 Gauss_column.m，具体内容如下

```
function [U,x]=Gauss_column(A,b)
% 列主元 Gauss 消去法求解线性方程组
% 输入参数：
%       ---A：线性方程组的系数矩阵
%       ---b：线性方程组的右端项
% 输出参数：
%       ---U：消元后的上三角方程组的增广矩阵
%       ---x：线性方程组的解
n=length(b);
for k=1:(n-1)
    % 选主元
    [Y,I]=max(abs(A(k:n,k)));  % 返回绝对值最大的 a_kk 的值和位置
    I=I+k-1;
    if I>k
        t=A(k,:); A(k,:)=A(I,:); A(I,:)=t;   % 交换第 I 行和第 k 行元素
        t=b(k); b(k)=b(I); b(I)=t;
    end
    % 消元
    m=A(k+1:n,k)/A(k,k);
    A(k+1:n,k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n)-m*A(k,k+1:n);
    b(k+1:n)=b(k+1:n)-m*b(k);
    A(k+1:n,k)=zeros(n-k,1);
```

```
end

U=[A,b];

% 回代

x=zeros(n,1);

x(n)=b(n)/A(n,n);

for k=n-1:-1:1

    x(k)=(b(k)-A(k,k+1:n).*x(k+1:n))/A(k,k);

end
```

该函数的调用格式为[U,x]=Gauss_column(A,b)

------------- 示例 -------------------------

例【10-2】利用列主元 Gauss 消去法求解例【10-1】

```
A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0];  % 线性方程组的系数矩阵
b=ones(3,1);  % 线性方程组的右端向量
[U,x]=Gauss_column(A,b);  % 利用列主元 Gauss 消去法求解线性方程组
U
```

```
U = 3×4
    7.0000    8.0000         0    1.0000
         0    0.8571    3.0000    0.8571
         0         0    4.5000   -0.0000
```

```
x
```

```
x = 3×1
   -1.0000
    1.0000
   -0.0000
```

10.1.2 追赶法

在科学研究与工程计算中，经常遇到求解三对角方程组的问题：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (\mathbf{10\text{-}8})$$

将 Gauss 消去法应用于三对角方程组，即得到所谓的“**追赶法**”。追赶法的具体操作过程为

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & d_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 & & & d_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & a_n & b_n & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & c_1 & & & \bar{d}_1 \\ & \bar{b}_2 & c_2 & & \bar{d}_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \bar{b}_{n-1} & c_{n-1} & \bar{d}_{n-1} \\ & & & \bar{b}_n & \bar{d}_n \end{bmatrix}$$

式中

$$\bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{d}_1 = \bar{d}$$

$$\bar{b}_k = b_k - \frac{a_k}{b_{k-1}} c_{k-1} (k = 2, 3, \ldots . n)$$

$$\bar{d}_k = d_k - \frac{a_k}{b_{k-1}} \bar{d}_{k-1}$$

可解得

$$x_n = \frac{\bar{d}_n}{\bar{b}_n}$$

$$x_k = \frac{\bar{d}_k - c_k x_{k+1}}{\bar{b}_k}$$

$$(k = n-1, n-2, \cdots 1)$$

追赶法不需要对零元素进行计算，因此计算量较小，且当稀疏矩阵对角占优时数值稳定，是解三对角方程组的优秀算法。

--------- 程序实现 ----------------------

下面给出追赶法的 MATLAB 程序

```
function [U,x]=Catch_up(a,b,c,d)
```

```
% 追赶法求解三对角方程组
% 输入参数:
%        ---a: 次下对角线元素向量
%        ---b: 主对角元素向量
%        ---c: 次上对角线元素向量
%        ---d: 右端向量
% 输出参数:
%        ---U: 消元后的上三角方程组的增广矩阵
%        ---x: 三对角方程组的解
n=length(d);
% 消元
```

$$
\begin{cases}
\bar{b}_1 = \bar{b}, \bar{d}_1 = d_1 \\
\bar{b}_k = b_k - \dfrac{a_k}{b_{k-1}} c_{k-1} \\
\bar{d}_k = d_k - \dfrac{a_k}{b_{k-1}} \bar{d}_{k-1}
\end{cases}
$$

```
for i=2:n
    l(i)=a(i-1)/b(i-1);    % 注意与公式的区别，向量的起始元素索引为 1
    b(i)=b(i)-l(i)*c(i-1);
    d(i)=d(i)-l(i)*d(i-1);
end

U=[diag(b)+diag(c,1),d];     % 对角矩阵生成
%
```

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\bar{d}_n}{\bar{b}_n} \\ x_k = \dfrac{\bar{d}_k - c_k x_{k+1}}{\bar{b}_k} \end{cases}$$

```
x(n)=d(n)/b(n);

for i=n-1:-1:1

    x(i)=(d(i)-c(i)*x(i+1))/b(i);

end
```

该函数的调用格式为[U,x]=Catch_up(a,b,c,d)

---------- 示例 ---------------------------

例【10-3】利用追赶法解下面的三对角方程组

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
% 1、用追赶法解
a=ones(3,1);b=-2*ones(4,1);c=a;d=[1;0;0;0];  % 主对角线、次对角线和右端向量
tic
[U,x]=Catch_up(a,b,c,d)  % 利用追赶法求解三对角方程组
```

```
U = 4×5
   -2.0000    1.0000         0         0    1.0000
         0   -1.5000    1.0000         0    0.5000
         0         0   -1.3333    1.0000    0.3333
         0         0         0   -1.2500    0.2500
x = 1×4
   -0.8000   -0.6000   -0.4000   -0.2000
```

```
toc
```

历时 0.193514 秒。

```
% 2、直接用高斯消元法阶
A=diag(a,1)+diag(a,-1)+diag(b);  % 构造线性方程组的系数矩阵
tic
[U1,x1]=Gauss(A,d)  % 利用 Gauss 消去法进行检验
```

```
U1 = 4×5
   -2.0000    1.0000         0         0    1.0000
         0   -1.5000    1.0000         0    0.5000
         0         0   -1.3333    1.0000    0.3333
         0         0         0   -1.2500    0.2500
x1 = 4×1
   -0.8000
   -0.6000
   -0.4000
   -0.2000
```

```
toc
```

历时 0.047989 秒。

```
% 3、用列主元消元法解
A=diag(a,1)+diag(a,-1)+diag(b);  % 构造线性方程组的系数矩阵
tic
[U2,x2]=Gauss_column(A,d)  % 利用 Gauss 消去法进行检验
```

```
U2 = 4×5
   -2.0000    1.0000         0         0    1.0000
         0   -1.5000    1.0000         0    0.5000
         0         0   -1.3333    1.0000    0.3333
         0         0         0   -1.2500    0.2500
x2 = 4×1
   -0.8000
   -0.6000
   -0.4000
   -0.2000
```

```
toc
```

历时 0.017104 秒。

10.2 矩阵分解法

求解线性方程组除了消去法，还有矩阵分解方法。

矩阵分解法没就是将稀疏矩阵 A 分解成两个或多个简单矩阵的乘积，由于分解后的矩阵具有某种特殊性，因此便于方程的求解。

矩阵分解除了求解线性方程组外，其自身的理论与计算也有着重要的意义，因此研究矩阵分解本身也是十分重要的。

10.2.1 LU 分解

对于矩阵 A，若存在一个单位下三角矩阵 L 和一个上三角阵 U，使得

$$A = LU \qquad \text{(10-9)}$$

即 $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{\mathrm{n}2} & \cdots & a_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{\mathrm{n}1} & l_{\mathrm{n}2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}$$

称上述分解为矩阵A的LU分解，这时线性方程组可以改写为

$$\mathrm{Ax} = b \Rightarrow \mathrm{LUx} = b \Rightarrow \mathrm{Ly} = b, \mathrm{Ux} = L \backslash b \qquad \textbf{(10-10)}$$

这样求解线性方程组$\mathrm{Ax} = b$转化为求解两个三角方程组，而三角方程组的求解是极其简单的，下面推导LU分解的计算公式

由（10-9）可得

$a_{1j} = u_{1j}$，$a_{\mathrm{i}1} = l_{\mathrm{i}1}u_{11}$
$a_{\mathrm{ij}} = (l_{\mathrm{i}1}，l_{\mathrm{i}2}，\cdots，l_{\mathrm{i},\ \mathrm{i}-1}，1，0，\cdots 0) \times (u_{1j}，u_{2j}，\cdots，u_{\mathrm{jj}}，0，\cdots 0)^T (i, j > 1)$

当$j \geq \mathrm{i}$时，

$a_{\mathrm{ij}} = l_{\mathrm{i}1}u_{1j} + l_{\mathrm{i}2}u_{2\mathrm{j}} + \cdots l_{i,i-1}u_{i-1,j} + u_{\mathrm{ij}}$

于是$u_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ij}} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{\mathrm{ik}}u_{\mathrm{kj}}$ **(10-11)**

当$j < i$时

$a_{\mathrm{ij}} = l_{\mathrm{i}1}u_{1j} + l_{\mathrm{i}2}u_{2\mathrm{j}} + \cdots l_{i,j-1}u_{j-1,j} + l_{\mathrm{ij}}u_{\mathrm{jj}}$

于是

$l_{\mathrm{ij}} = \left(a_{\mathrm{ij}} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{\mathrm{ik}}u_{\mathrm{kj}}\right)/u_{\mathrm{jj}}$ **(10-12)**

式（10-11）和式（10-12）是 LU 分解的一般公式。

---------------- LU 分解程序实现-----------------

根据式（10-10），式（10-11），式（10-12），可以编写利用 LU 分解求解线性方程组的程序 LU_decompose.m,具体内容如下

```
function [L,U,x]=LU_decompose(A,b)

% LU 分解求解线性方程组

% 输入参数:

%         ---A: 线性方程组的系数矩阵

%         ---b: 线性方程组的右端项
```

```
% 输出参数:
%         ---L: 分解后的下三角矩阵
%         ---U: 分解后的上三角矩阵
%         ---x: 线性方程组的解
n=length(b); U=zeros(n,n);
L=eye(n,n);
U(1,:)=A(1,:);
L(2:n,1)=A(2:n,1)/U(1,1);
```

% 当 $j \geq$ i时， $u_{\text{ij}} = a_{\text{ij}} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{\text{ik}} u_{\text{kj}}$

% 当 $j < i$， $l_{\text{ij}} = \left(a_{\text{ij}} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{\text{ik}} u_{\text{kj}}\right) / u_{\text{jj}}$

```
for k=2:n
    U(k,k:n)=A(k,k:n)-L(k,1:k-1)*U(1:k-1,k:n);
    L(k+1:n,k)=A(k+1:n,k)-L(k+1:n,1:k-1)*U(1:k-1,k);
    L(k+1:n,k)=L(k+1:n,k)/U(k,k);
end
% 解下三角方程组: Ly=b
y=zeros(n,1);
y(1)=b(1);
for k=2:n
    y(k)=b(k)-L(k,1:k-1)*y(1:k-1);
end
% 解上三角方程组: Ux=y
x=zeros(n,1); x(n)=y(n)/U(n,n);
for k=n-1:-1:1
    x(k)=(y(k)-U(k,k+1:n)*x(k+1:n))/U(k,k);
end
```

----------- 实例 ------------------------

【例 10-4】利用 LU 分解法求解下面线性方程组的解

$$\begin{bmatrix} 81 & -36 & 27 & -18 \\ -36 & 116 & -62 & 68 \\ 27 & -62 & 98 & -44 \\ -18 & 68 & -44 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 148 \\ 74 \\ 134 \end{bmatrix}$$

```
A=[81 -36 27 -18;
    -36 116 -62 68;
    27 -62 98 -44;
    -18 68 -44 90];  % 系数矩阵
b=[252;148;74;134];  % 右端向量
[L,U,x]=LU_decompose(A,b)  % LU 分解求解线性方程组
```

```
L = 4×4
     1.0000         0         0         0
    -0.4444    1.0000         0         0
     0.3333   -0.5000    1.0000         0
    -0.2222    0.6000   -0.1250    1.0000
U = 4×4
    81   -36    27   -18
     0   100   -50    60
     0     0    64    -8
     0     0     0    49
x = 4×1
     4
     3
     2
     1
```

--------- MATLAB 内置 LU 分解函数 ------------------------

MATLAB 提供了矩阵的 LU 分解函数 lu()，该函数的调用格式为

[L,U]=lu(A) %格式 1

[L,U，P]=lu(A) %格式 2

其中格式 1 的输入参数与输出参数的关系满足关系式 $A = LU$ 其中 L 为单位下三角阵，U 为单位上三角阵；

格式 2 中的 P 为单位矩阵的行变换矩阵（因为 MATLAB 提供的 lu()函数使用了部分选主元算法），这里的输入参数和输出参数满足关系 $LU = PA$

因此，上例可以通过以下代码实现：

```
[L,U] = lu(A)
```

```
L = 4×4
    1.0000         0         0         0
   -0.4444    1.0000         0         0
    0.3333   -0.5000    1.0000         0
   -0.2222    0.6000   -0.1250    1.0000
U = 4×4
    81   -36    27   -18
     0   100   -50    60
     0     0    64    -8
     0     0     0    49
```

```
[U1,x] = Gauss(U,L\b)
```

```
U1 = 4×5
   81.0000  -36.0000   27.0000  -18.0000  252.0000
         0  100.0000  -50.0000   60.0000  260.0000
         0         0   64.0000   -8.0000  120.0000
         0         0         0   49.0000   49.0000
x = 4×1
    4.0000
    3.0000
    2.0000
    1.0000
```

10.2.2 Cholesky 分解

当方程组的系数矩阵A对称正定时，可以证明，存在一个实的非奇异下三角阵L，使得

$$A = LL^T \qquad \textbf{(10-13)}$$

即 $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

且当限定 L 的对角线元素为正时，这种分解是唯一的。

由$A = LL^T$比较A与LL^T的对应元素，可求得L的元素L_{ij}如下

$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} (i = 2, 3, \ldots, n)$

假设L的第$k-1$列元素已经求出，下面求L的第k列元素$L_{ik}, i = k, k+1, \ldots, n,$

则有：$a_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} + l_{ik} l_{kk}$,得

$$l_{kk}=\left(a_{kk}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}^2\right)^{1/2}$$
$$l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{ij}l_{kj}\right)/l_{kk} \qquad \textbf{(10-14)}$$

上述分解方法称为 Cholesky 分解法。这时线性方程组 $Ax=b$即可以改写成

$$\mathrm{Ax}=b\Rightarrow \mathrm{LL}^Tx=b\Rightarrow \mathrm{Ly}=b, L^Tx=y \qquad \textbf{(10-15)}$$

这样解方程组$Ax=b$转化为求解两个三角方程组，根据时式（10-14）和式（10-15）可以编写利用 Cholesky 分解求解线性方程组的程序 Chol_decompose.m，

-------------- 实现代码 -----------------------

```
function [L,x]=Chol_decompose(A,b)

% Cholesky 分解求解线性方程组

% 输入参数：

%        ---A：线性方程组的系数矩阵

%        ---b：线性方程组的右端项

% 输出参数：

%        ---L：分解后的下三角矩阵

%        ---x：线性方程组的解

n=length(b);L=eye(n,n);

% Cholesky 分解
```

$$\% \quad \begin{aligned} l_{kk}&=\left(a_{kk}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}^2\right)^{1/2}\\ l_{ik}&=\left(a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{ij}l_{kj}\right)/l_{kk}\end{aligned}$$

```
for k=1:n

    L(k,k)=sqrt(A(k,k)-L(k,1:k-1)*L(k,1:k-1)');

    L(k+1:n,k)=(A(k+1:n,k)-L(k+1:n,1:k-1)*L(k,1:k-1)')/L(k,k);

end

% 解下三角方程组 Ly=b

y=zeros(n,1); y(1)=b(1)/L(1,1);
```

```
for k=2:n

    y(k)=(b(k)-L(k,1:k-1)*y(1:k-1))/L(k,k);

end

% 解上三角方程组 L'x=y

x=zeros(n,1);x(n)=y(n)/L(n,n);

for k=n-1:-1:1

    x(k)=(y(k)-L(k+1:n,k)'*x(k+1:n))/L(k,k);

end
```

------------- 实例 --------------------------

【例 10-5】利用 cholesky 分解求【例 10-4】

$$\begin{bmatrix} 81 & -36 & 27 & -18 \\ -36 & 116 & -62 & 68 \\ 27 & -62 & 98 & -44 \\ -18 & 68 & -44 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 148 \\ 74 \\ 134 \end{bmatrix}$$

```
A=[81 -36 27 -18;
    -36 116 -62 68;
    27 -62 98 -44;
    -18 68 -44 90];  % 系数矩阵
b=[252;148;74;134];  % 右端向量
[L,x]=Chol_decompose(A,b)  % Cholesky 分解求解线性方程组
```

```
L = 4×4
     9     0     0     0
    -4    10     0     0
     3    -5     8     0
    -2     6    -1     7
x = 4×1
     4
     3
     2
     1
```

10.3 方程组的性态与误差分析

以上讨论的都是线性方程组的直接解法。在没有舍入误差的前提下，用上述各种方法求得的解都是精确解，但在实际计算中舍入误差是不可避免的，所得到的解可能是近似解。

10.3.1 范数

1.向量范数

设 $f(x)=\|x\|$ 是定义在 R^n 上的实函数，并且满足以下三个条件

（1）非负性：对 $\forall\vec{x}\in R^n$ 有 $\|\vec{x}\|\geq 0$，$\|\vec{x}\|=0$ 当且仅当 $x=0$

（2）齐次性：对 $\forall\lambda\in\mathrm{R}$ 和 $\forall\vec{x}\in R^n$，有 $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\overrightarrow{\|x\|}$

(3) 三角不等式：对 $\forall\vec{\mathrm{x}}$，$\vec{\mathrm{y}}\in R^n$,有 $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

则称 $\|\cdot\|$ 为 R^n 上的范数

设 $x=(x_1,x_2,,,x_n)$ 则可以定义一种范数

$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$ 称之为 p-范数

下面给出常用的几个范数

向量 x 的 1-范数：$\|x\|_1=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^1\right)^{1/1}=\sum_{i=1}^n|x_i|$

向量 x 的 2-范数：$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}=\sqrt{(x,x)}$

向量 x 的 ∞-范数：$\|x\|_\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$

设有两种范数 $\|\cdot\|_\alpha$，$\|\cdot\|_\beta$，若存在 C_1 和 C_2，使得

$C_1\|x\|_\alpha\leq\|x\|_\beta\leq C_2\|x\|_\alpha$，$\forall x\in R^n$

则称范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是 R^n 上的等价的范数。上面常用的范数有如下等价关系

$\|x\|_\infty\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty$

$\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

$1/\sqrt{n}\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq\|x\|_1$

MATLAB 提供了函数 **norm**（）来求向量的范数，该函数的调用格式为：

norm（x,p）其中 x 为向量，p 为范数的类型，可以为任意实数或者 inf，表示求取向量 x 的 p-范数。

【例 10-6】求向量$x=(1,-2,0,7,4,-9,7)^T$的三个常用范数

```
x=[1 -2 0 7 4 -9 7];  % 给定的向量
p=[1 2 inf];  % 范数的类型
% 调用 norm()函数求解
x_norm = zeros(1,length(p));
for k=1:length(p)
    x_norm(k)=norm(x,p(k));  % 将求取的不同范数存储于向量 x_norm 中
end
% 根据定义求解
x_norm1(1)=sum(abs(x));  % 根据 1-范数的定义求解
x_norm1(2)=sqrt(sum(x.^2));  % 根据 2-范数的定义求解
x_norm1(3)=max(abs(x));  % 根据 -范数的定义求解
% 显示求解结果
x_norm,x_norm1
```

```
x_norm = 1×3
   30.0000   14.1421    9.0000
x_norm1 = 1×3
   30.0000   14.1421    9.0000
```

2.矩阵范数

若对$A,B\in R^{n*n}$满足以下几个条件

(1) 非负性：对$A\in R^{n*n}$有$\|A\|$≥0，$\|A\|$=0 当且仅当$A=0$

(2) 齐次性：对$\forall\lambda\in\mathrm{R}$和$\forall A\in R^n$，有$\|\lambda A\|=|\lambda|\cdot|A|$

(3) 三角不等式：对$\forall A,B\in R^{n*n}$,有$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

(4) 相容性：对$\forall A,B\in R^{n*n}$,有$\|\mathrm{AB}\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

则称$\|A\|$为矩阵A的范数

对于给定R^n上的一种范数$\|x\|$和R^{n*n}上的一种范数$\|A\|$，若有

$\|\mathrm{Ax}\|\le\|A\|\cdot\|x\|,\forall x\in R^n,\forall A\in R^{n*n}$

则称上述矩阵范数和向量范数是相容的。

这样可以利用相容性来定义矩阵的范数，定义

$\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|\mathrm{Ax}\|}{\|x\|}=\max\limits_{\|x\|=1}\|\mathrm{Ax}\|$为矩阵 A 的范数。根据该定义，可以求出常用的矩阵范数

矩阵 A 的 1-范数：$\|A\|_1=\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|\mathrm{Ax}\|_1}{\|x\|_1}=\max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{\mathrm{ij}}|$

矩阵 A 的 2-范数：$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

矩阵 A 的∞-范数：$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

其中$\lambda_{\max}(A^TA)$表示矩阵A^TA的最大特征值。

另外还有一种范数，称为矩阵A的 Frobenius 范数，简称 F-范数，其定义为

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

MATLAB 提供的求解矩阵范数仍是 norm（）函数，不同在与 p 的取值限定为 1，2 和 inf, 'fro'

【例 10-7】首先利用向量（1，1.5，2，2.5，3）构造一个范德蒙德矩阵 A，再求矩阵 A 的几个常用的范数

```
A=vander(1:.5:3);  % 根据向量 1:.5:3 构造范德蒙阵
p={1,2,inf,'fro'};  % 利用元胞数组存储范数的种类
% 调用 norm()函数求解
A_norm = zeros(1,length(p));
for k=1:length(p)
    A_norm(k)=norm(A,p{k});  % 将求取的矩阵范数依次存储于向量 A_norm 中
end
% 根据定义求解
A_norm1(1)=max(sum(abs(A)));  % 根据矩阵 的 1-范数定义求解矩阵范数
A_norm1(2)=sqrt(max(abs(eig(A'*A))));  % 根据矩阵 的 2-范数定义求解矩阵范数
A_norm1(3)=max(sum(abs(A')));  % 根据矩阵 的 -范数定义求解矩阵范数
A_norm1(4)=sqrt(sum(diag(A'*A)));  % 根据矩阵 的 Frobenius-范数定义求解矩阵范数
% 显示结果
A_norm,A_norm1
```

```
A_norm = 1×4
  142.1250   97.7706  121.0000   97.9217
A_norm1 = 1×4
  142.1250   97.7706  121.0000   97.9217
```

10.3.2 矩阵的条件数

设$A\in R^{n*n}$为非奇异矩阵，$\|\cdot\|$为某一种矩阵范数，则称

$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$为矩阵的条件数

由上面的定义可知，矩阵条件数与所取矩阵范数有关，通常使用的条件数有

（1） cond（A）$_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

(2) A 的谱条件数

cond（A）$_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max} A^T A}{\lambda_{\min} A^T A}}$

当 A 对称正定时

cond（A）$_2$=$\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$

其中$\lambda_{\max} A^T A$和$\lambda_{\min} A^T A$分别为矩阵$A^T A$的最大特征值和最小特征值，λ_1和λ_2分别为矩阵 A 的最大特征值和最小特征值

下面来讨论 A 和 b 的微小扰动对方程组解的影响。

（1）设 A 是非奇异矩阵，x 是方程组 Ax=b 的解，若矩阵 A 有微小扰动δA，b 是精确的，并设$x + \delta x$满足方程组

$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ **(10-16)**

将条件$\mathrm{Ax} = b$代入式（10-16）有

$\delta A(x + \delta x) + A\delta x = 0$或$\delta x = -A^{-1} \cdot \delta A(x + \delta x)$

两边取范数有

$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \|x + \delta x\|$

则方程组解的相对误差

$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \le \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ **(10-17)**

式（10-17）说明相对误差是系数矩阵相对误差的 cond(A)倍

（2）设A是非奇异矩阵，x是方程组$\mathrm{Ax} = b$的解，若b有微小扰动δb，A是精确的，并设$x + \delta x$满足方程组

$A(x + \delta x) = b + \delta b$

用类似的方法可以求得方程组的解的相对误差为

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

(3) 设A是非奇异矩阵且有微小扰动δA，b有微小扰动δb，$\mathrm{Ax} = b$的扰动方程为

$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$

在$\|A^{-1}\delta A\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$的条件下可推得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) \qquad (10\text{-}18)$$

当$\|\delta A\|$充分小时，式（10-18）近似为

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A)\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

由上面的介绍可以知道，初始数据的相对误差在解的相对误差中可能放大$\mathrm{cond}(A)$。**所以条件数越大，由初始数据的相对误差引起解的相对误差可能越大，方程组越是病态的**，所以矩阵条件数说明了解对初始数据扰动的敏感程度。

10.3.3 病态方程组的求解

如果矩阵A或常数项b的微小变化引起方程组$\mathrm{Ax}=b$的巨大变化，则称此方程组为病态方程组，矩阵A为病态矩阵，否则称之为良态矩阵，对应的方程组为良态方程组。

下面以求解线性方程组$H_n x=b$为例，

其中（$b=H_n e, e=(1,1,,1)^T$,分析系数矩阵的条件数对方程解的影响。

```
format short e
n=5*2.^(0:4);
err=zeros(1,length(n));
for k=1:length(n)
      e=ones(n(k),1);H_k=hilb(n(k));
      [U,x]=Gauss_column(H_k,  H_k*e);
      err(k)=norm(x-e);
end
err
```

```
err = 1×5
   7.8114e-13   5.1568e-04   5.5979e+01   6.7710e+02   5.9590e+03
```

```
format short
```

输出结果为

err≈

7.8114e-013   5.1568e-004   5.5979e+001 6.7710e+002   5.9590e+003

由输出结果可知，当 n>10 后，方程组的解已经面目全非了。

对于病态方程组，通常的方法无法得到它的准确值，需要采取一些特殊的处理方法。

奇异值分解就是其中的一种，奇异值分解简称 SVD。即存在正交阵U, V和对角阵S,使得

$$A = USV^T$$

MATLAB 中提供的实现矩阵的奇异值分解的函数时 svd(),该函数的调用格式为:

[U,S,V]=svd(A)

由$A = USV^T \Rightarrow A^{-1} = VS^{-1}U^T$,因此，线性方程组$Ax = b$的解为

$$x = A^{-1}b = VS^{-1}U^Tb = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \qquad \textbf{(10-19)}$$

其中σ_i为矩阵S对角线上的元素，u_i时正交阵U的第i列，v_i是正交阵V的第i列

由式（10-19）可以看出，当σ_i接近零时，会对计算x产生较大的误差。为了克服它的影响，再次考察式（10-19），注意到

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$$

当σ_i接近零时，后面的项对矩阵A的贡献率非常小。取一正的阈值（不妨设为ε），当$|\sigma_i| < \varepsilon$时，其相应的项就不再计算，即

$$A \approx \sum_{|\sigma_i| \geq \varepsilon} \frac{u_i^T b v_i}{\sigma_i} \qquad \textbf{(10-20)}$$

根据式（10-20）可以编写利用 SVD 分解求解线性方程组的程序 svd_equations

```
------------- 代码实现 ----------

function x=svd_equations(A,b)

% 奇异值分解求解线性(病态)方程组

% 输入参数:

%        ---A: 方程组的系数矩阵

%        ---b: 方程组的右端向量

% 输出参数:

%        ---x: 线性方程组的解

ep=1e-10;n=length(A);
```

```
[U,S,V]=svd(A);
s=diag(S);
x=zeros(n,1);
for i=1:n
    if abs(s(i))>=ep
        x=x+(U(:,i)'*b)/s(i)*V(:,i);
    end
end
```

该函数的调用格式为 x=svd_equations(A,b)

-------------- 实例 ------------------

利用 SVD 分解求解上面的希尔伯特病态方程组:

```
format short e
n=5*2.^(0:4);
for k=1:length(n)
    e=ones(n(k),1);H_k=hilb(n(k));  % 构造病态矩阵
    x=svd_equations(H_k,H_k*e);  % 利用奇异值分解法求解病态方程组
    err(k)=norm(x-e);  % 求误差范数
end
err
```

```
err = 1×5
    2.2715e-11    1.7224e-05    2.1774e-05    2.4503e-05    2.8157e-05
```

```
format short
```

10.4 线性方程组的 MATLAB 函数求解

针对三种不同的方程组解的结构，MATLAB 提供了不同的方法求解方程组的解。下面分类叙述

（1）恰定方程组

MATLAB 主要提供的求解指令主要有三个

1）逆矩阵法：x=inv(A)*b(或 x=A^(-1)*b)

2) 伪逆法：x=pinv(A)*b

3）左除法：x=A\b

4) 符号矩阵：x=sym(A)\sym(b)

说明：

1）通常情况下，利用逆矩阵法和左除法求得的均是数值解，若要得到其解析解，则要将数值矩阵转化为符号矩阵

2）左除法比逆矩阵法具有更好的数值稳定性，更快的运算速度，而且左除法还适合A不是方阵的情形

（**2**）欠定方程组

欠定方程组$\mathrm{Ax}=b$的解由其对应的齐次方程$\mathrm{Ax}=0$的通解和它本身的一个特解构成，记作$x=\widehat{x}(\text{通解})+x_0(\text{特解})$。MATLAB 求方程$\mathrm{Ax}=0$通解的指令是 **null()**，其具体的使用方法为 **z=null(sym(A))**，该函数也同样可以用于数值解的问题，其中 z 的列数为 **n-rank**（**A)**，其各列构成的向量称为矩阵A的基础解系。求方程$\mathrm{Ax}=b$的一个特解只需要左除法即可。

（**3**）超定（矛盾）方程组

因为超定方程组一般意义下无解析解，所以不能用符号矩阵出发来求解方程组，而只能求其最小二乘解，这也可以通过左除法或伪逆法来实现。

---------------- 代码实现 ----------------------

下满的程序将上述几种方法综合到一个程序中

```
function [x,e]=Linear_equation(A,b)

% 线性方程组的求解

% 输入参数：

%         ---A：方程组的系数矩阵

%         ---b：方程组的右端向量

% 输出参数：

%         ---x：方程组的解

%         ---e：解的误差

[m,n]=size(A);

r1=rank(A);

r2=rank([A b]);

if r1==r2
```

```
    if r1==n
        disp('方程组是恰定的，有唯一解！')
        x=A\b;
        e=norm(A*x-b);
    else
        disp('方程组是欠定的，有无穷解！')
        z=null(sym(A));   %解出规范化的化零空间
        x0=sym(A)\sym(b);  %求出一个特解

        colnum = size(z,2);
        k =[];
        for i = 1:colnum
            k = [k sym(['k' num2str(i)])];
        end
        x = z*k+x0;
        e=norm(A*x-b);   %检验解的准确性
    end
else
    disp('方程组是超定的，只有最小二乘意义下的解！')
    x=A\b;
    e=norm(A*x-b);
end
```

该函数的调用格式为

```
[x,e]=Linear_equation(A,b)
```

【例】利用上面的代码求解线性代数方程组

$$x - 2y + 3z - w = 1$$
$$3x - y + 5z - 3w = 2$$
$$2x + y + 2z - 2w = 3$$

```
A = [1 -2 3 -1;3 -1 5 -3; 2 1 2 -2];
b = [1;2;3];
% A=[1 1 -3 -1;3 -1 -3 4;1 5 -9 -8];  % 系数向量
% b=[1 4 0]';  % 右端向量
[x e] = Linear_equation(A,b)
```

```
方程组是超定的，只有最小二乘意义下的解!
警告: 秩亏，秩 = 2，tol = 5.475099e-15。
x = 4×1
         0
    0.9048
    0.7143
         0
e = 1.1547
```

工程应用：正方形槽的电位分布

1）问题的提出

对分布式系统建模时，可能会得到线性代数方程。如下图所示，某横截面为正方形的无限长槽由三块接地导体版构成，槽的盖板接直流电压为 $\varphi = 100V$ 其他地方的电位标注如图所示，求矩形槽空间的电位分布

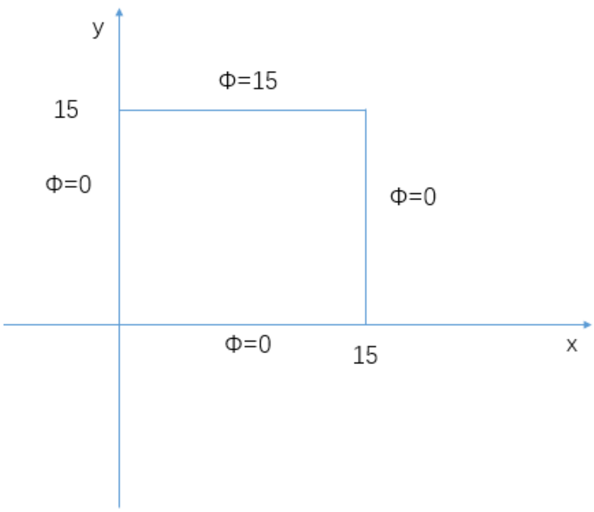


图 矩形槽电位分布

2）问题分析与模型的建立

由电磁学的知识可知，矩形槽中的电位函数φ满足拉普拉斯方程，即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

其边界条件满足第一类边界条件（Dirichlet 边界条件）

$$\varphi(x,y)|_{x=0}=0,\varphi(x,y)|_{y=0}=0$$
$$\varphi(x,y)|_{x=a}=0,\varphi(x,y)|_{y=b}=100$$

3)模型的求解

对于该问题，可以利用偏微分方程图形求解界面求出该偏微分方程的数值解。这里通过有限差分来近似求解该微分方程。首先推导有限差分法的迭代公式，考查 5 个相邻节点上电位之间的关系，如下图所示

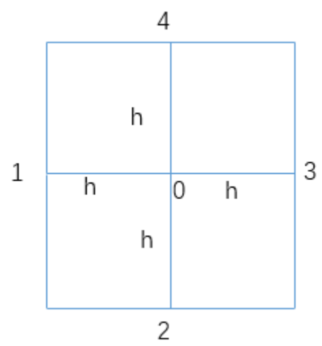


图 5 点电位分布

设节点 0 的坐标为(x_0,y_0),其他的类似。将通过节点 0 且平行于轴的直线上的相邻点x的电位值$\varphi(x,y_0)$在节点 0 处的泰勒展开为

$$\varphi_x=\varphi_0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)|_{x=x_0}(x-x_0)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)|_{x=x_0}(x-x_0)^4+\cdots$$

在节点 1 处，$x_1=x_0-h$,该点的电位为

$$\varphi_1=\varphi_0-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)|_{x=x_0}h+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)|_{x=x_0}h^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)|_{x=x_0}h^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)|_{x=x_0}h^4+\cdots$$

在节点 3 处，$x_3=x_0+h$，该点的电位为

$$\varphi_3=\varphi_0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)|_{x=x_0}h+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)|_{x=x_0}h^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)|_{x=x_0}h^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)|_{x=x_0}h^4+\cdots$$

由以上两式相加可得

$$\varphi_1+\varphi_3=2\varphi_0+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)|_{x=x_0}h^2+\frac{2}{4!}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)|_{x=x_0}h^4+\cdots \quad \text{（10-21）}$$

当h充分小时，$o(h^3)$均可以忽略，则式（10-21）可以近似写成

$$\varphi_1+\varphi_3=2\varphi_0+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)|_{x=x_0}h^2$$

同理可以求得

$$\varphi_2+\varphi_4=2\varphi_0+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)|_{y=y_0}h^2$$

因此

$$\varphi_1+\varphi_3+\varphi_2+\varphi_4=4\varphi_0+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)|_{x=x_0}h^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)|_{y=y_0}h^2$$

又$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$

故

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=4\varphi_0$$

$$\varphi_0=\frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4}{4}$$

写成迭代格式有

$$\varphi_{ij}{}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\varphi_{i-1,j}{}^{(k)}+\varphi_{i,j-1}{}^{(k)}+\varphi_{i+1,j}{}^{(k)}+\varphi_{i,j+1}{}^{(k)}\right) \qquad \textbf{(10-22)}$$

式（10-22）即为限差分法的迭代公式。

下面回归到题述问题的求解。

先将区域进行分格，用两条水平和垂直的等间距直线将正方形区域划分为 9 个网格，16 个节点，如下图所示。其中边界节点 12 个，内节点 4 个，边界节点上的电位是已知的，而 4 个内节点的电位未知，根据题意，列出如下线性方程组：

$$\varphi_1=(100+0+\varphi_2+\varphi_3)/4$$
$$\varphi_2=(100+0+\varphi_1+\varphi_4)/4$$
$$\varphi_3=(0+0+\varphi_1+\varphi_4)/4$$
$$\varphi_4=(0+0+\varphi_2+\varphi_3)/4$$

写成标准的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

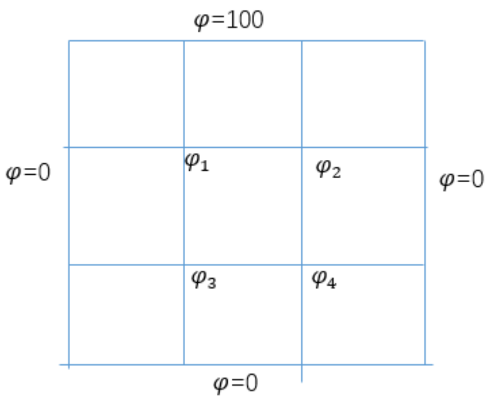


图 用两条直线划分正方形区域

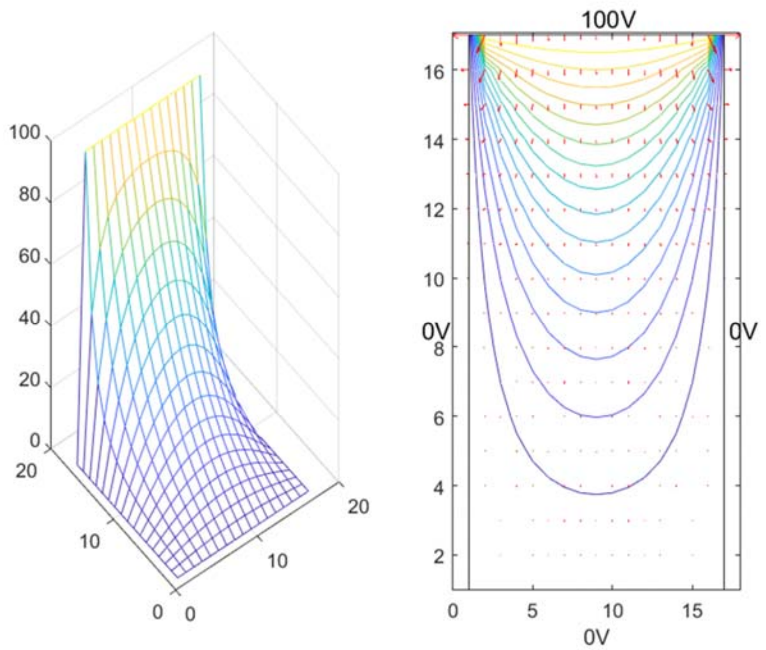
为了提供求解的精度，需要将网格加密，假设将正方形区域划分为$n \times n(n \geq 3)$个网格，这时若直接输入矩阵A和右端向量b则显得非常繁琐。需要分析一下矩阵A和右端向量b的结构，通过某种途径构造出矩阵A和右端向量b，再调用 Linear_equation 函数求解即可。

方法二：迭代求解方法

对于该问题也可以直接根据推导出的迭代公式求解，代码如下：

```
hx=17;hy=hx;    % 设置网格节点数
v1=ones(hy,hx);  % 设置行列二维数组
% 上下两行的 Dirichlet 边界条件值
v1(hy,:)=ones(1,hx)*100;
v1(1,:)=zeros(1,hx);
% 左右两列的 Dirichlet  边界条件值
v1(:,1)=zeros(1,hx);
v1(:,hx)=zeros(1,hx);
v2=v1;err=1;t=0;  % 初始化
while(err>1e-6)  % 由 v1 迭代，算出 v2，迭代精度为 1e-6
    for i=2:hy-1    % 从 2 到 hy-1 行循环
        for j=2:hx-1    % 从 2 到 hx-1 列循环
            v2(i,j)=(v1(i,j+1)+v1(i+1,j)+v2(i-1,j)+v2(i,j-1))/4;  % 拉普拉斯方程差分式
%            err=max(abs(v2(i,j)-v1(i,j)));
        end
    end
```

```
    err=norm(v2(i,j)-v1(i,j));
    v1=v2;
end
subplot(1,2,1),mesh(v2)  % 画三维曲面图
subplot(1,2,2),contour(v2,15)  % 画等电位线图
hold on
x=1:hx;y=1:hy;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);  % 形成栅格
[Gx,Gy]=gradient(v2,0.6,0.6);  % 计算梯度
quiver(xx,yy,-Gx,-Gy,0.8,'r')  % 根据梯度数据画箭头
plot([1,1,hx,hx,1],[1,hy,hy,1,1],'k')  % 画导体边框
xlabel('0V','fontsize',11);  % 下标注
text(hx/2-0.5,hy+0.5,'100V','fontsize',11);  % 上标注
text(-2,hy/2,'0V','fontsize',11);  % 左标注
text(hx+0.3,hy/2,'0V','fontsize',11);  % 右标注
hold off
```



作业：

1、求解下面的线性方程组

（1）$$\begin{aligned} &x+2y+3z+4w=5 \\ &4x+3y+2z+w=4 \\ &x+3y+2z+4w=3 \\ &4x+y+3z+2w=2 \end{aligned}$$

(2)$$\begin{aligned} &x+y-3z-w=1 \\ &3x-y-3z+4w=4 \\ &x+5y-9z-8w=0 \end{aligned}$$

2、求解下面给出的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3、一种大型输电网络可以简化为下图所示电路，其中R_i表示负载电阻，r_i表示线路内阻，设电源电压为 V。

若$R_i=6\Omega, r_i=1\Omega$,V=18V，n=10，试求出各个负载上的电流$I_1, I_2, ..., I_n$及总电流I_0.