第**11**讲 插 值

目录

11.1 插值概述

设函数$f(x)$#$[a,b]$########$f(x)$#$[a,b]$#$n+1$#####$x_0,x_1,\cdots,x_n$的函数值$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$,若存在一个不超过n次的多项式$P_n(X)$,满足

$$P_n(x_i)=f(x_i) \quad (i=0,1,2\cdots,n) \qquad (11-1)$$

则称$P_n(X)$为$f(x)$的n次插值多项式，式$(11-1)$为插值条件，x_i为插值节点，$f(x)$为被插函数，$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$为插值多项式的余项。

11.2 Lagrange插值

Lagrange插值法是一种比较常用的插值方法，根据函数$f(x)$###$[a,b]$#######$(x_k,f(x_k)),(k=0,1,\cdots,n)$,n阶Lagrange插值公式可以写为

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_{n+1}(x) \qquad (11-2)$$

式中

$$l_k(x)=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}(k=0,1,2\cdots,n) \qquad (11-3)$$

$$W_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \qquad (11-4)$$

称

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x) \qquad (11-5)$$

为$f(x)$的n次Lagrange插值多项式，$R_n(x)$为插值多项式的余项，它表示用$L_n(x)$代替$f(x)$时在点x处产生的误差，式$(11-3)$称为Lagrange插值基函数。

代码实现：MATLAB中没有提供专门的函数计算Lagrange插值，需自行编写代码实现。

计算Lagrange插值程序代码：

```
function y=lagrange_interp(xdata,ydata,x)
% Lagrange插值
% 输入参数：
%      ---xdata：给定的节点横坐标
%      ---ydata：给定的节点纵坐标
%      ---x：需要进行插值的节点横坐标
% 输出参数：
%      ---y：Lagrange插值函数在x处的函数值
n=length(xdata);m=length(ydata);
if n~=m
error('插值数据长度不等！');
end
ii=1:n;y=zeros(size(x));
for i=ii
ij=find(ii~=i);V=1;
for j=1:length(ij)
if abs(xdata(i)-xdata(ij(j)))<eps
error('输入的n+1个节点不是互异的。');
end
V=V.*(x-xdata(ij(j)));
end
y=y+V*ydata(i)/prod(xdata(i)-xdata(ij));
end
```

或

```
function y=lagrange_interp_hwj(xdata,ydata,x)
```

```
% Lagrange插值
% 输入参数：
%       ---xdata：给定的节点横坐标
%       ---ydata：给定的节点纵坐标
%       ---x：需要进行插值的节点横坐标
% 输出参数：
%       ---y：Lagrange插值函数在x处的函数值
n=length(xdata);m=length(ydata);
if n~=m
error('插值数据长度不等！');
end

% 数据互异性检查
for i=1:n-1
for j=(i+1):n
if abs(xdata(i)-xdata(j))<eps
error('输入的n+1个节点不是互异的。');
end
end
end

ii=1:n; y=zeros(size(x));
V = ones(n,length(x));
for i=ii
ij=find(ii~=i);
for j=1:length(ij)
V(i,:)=V(i,:).*(x-xdata(ij(j)))/(xdata(i)-xdata(ij(j)));
end
end
y = ydata*V;   % 需保证y是行向量
end
```

%该函数的调用格式为:

y=lagrange_interp(xdata,ydata,x)

【例11-1】导线中的电流与时间的函数关系测量下表所示，已知测量值的精度很高。

表11-1 电流与时间的函数关系

t(s)	0	0.125	0.250	0.375	0.500
i(A)	0	6.24	7.75	4.85	0

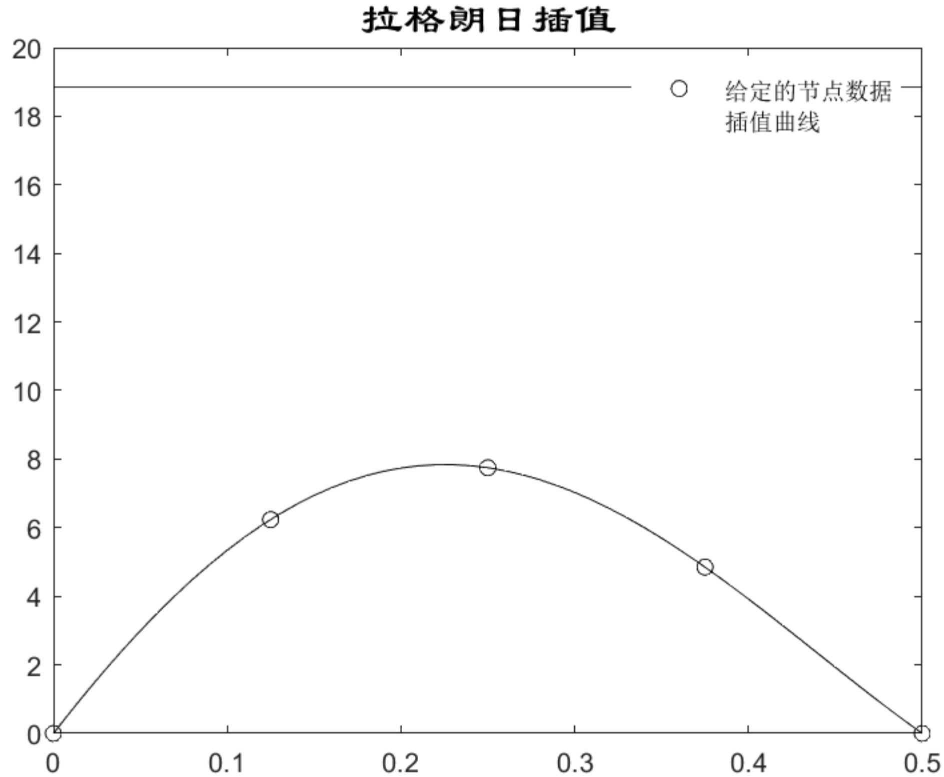
试计算在时间$t=0.01k(k=0,1,2,\cdots,50)$时的电流值$i$。

由题中给定的条件“测量值的精度很高”可知，应利用插值法进行求解。

```
xdata=0:0.125:0.5;  % 时间向量
ydata=[0 6.24 7.75 4.85 0];  % 导体中的电流值
xi=0:0.01:0.5;  % 加密时间向量
tic
yi=lagrange_interp_hwj(xdata,ydata,xi);  % Lagrange插值
toc
```

历时 0.012048 秒。

```
plot(xdata,ydata,'ko')  % 绘制时间-电流图形
hold on  % 图形保持
plot(xi,yi,'k')  % 绘制插值后的结果
title('\fontname{隶书}\fontsize{16}拉格朗日插值')  % 添加标题
legend('给定的节点数据','插值曲线')  % 添加图例
```



11.3 Newton插值

利用插值基函数能很容易地得到Lagrange插值多项式。而且公式结构紧凑，在理论分析中也很方便，但是Lagrange插值法也有其不可忽略的缺点：当插值节点增加时，全部插值基函数均要随之变化，整个计算工作必须要重新开始，即没有“承袭性”。为了克服这一缺点，可引入Newton插值法。

为了更好地理解Newton插值原理，这里先介绍一下差商的概念：设已知函数$f(x)$在$[a,b]$上$n+1$个互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$的函数值$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$，称

$$\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

为$f(x)$关于节点x_i, x_j的1阶差商，记为$f[x_i, x_j]$,即

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i} \qquad (11-6)$$

称1阶差商$f[x_i, x_j]$和$f[x_j, x_k]$的差商

$$\frac{f[x_j, x_k]-f[x_i, x_j]}{x_k-x_i}$$

为$f(x)$关于节点x_i, x_j和x_k的2阶差商，记为$f[x_i, x_j, x_k]$,即

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i} \qquad (11-7)$$

一般地，称$(k-1)$阶差商的差商为k阶差商，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \qquad (11-8)$$

这里约定$f[x_i]=f(x_i)$为$f(x)$关于节点x_i的零阶差商。

由差商的定义可知：若给定$f(x)$在$n+1$个互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$上的函数值，则可求出直至n的各阶差商。

根据差商的定义，Newton插值法的插值公式可以写为:

$$\begin{aligned}f(x)&=N_n(x)+R_n(x)\\&=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&+f[x_0,x_1\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\\&+f[x_0,x_1,x_2\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\end{aligned} \qquad (11-9)$$

式中

$$\begin{aligned}N_n(x)=&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\\&\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (11-10)\end{aligned} \qquad (11-10)$$

称为$f(x)$的n次Newton插值多项式，$R_n(x)$为Newton插值多项式的余项。

表11-2 差商表

K	x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$	$\cdots$
0	x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$\cdots$
1	x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
2	x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
n-1	x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1},x_n]$			
n	x_n	$f[x_n]$				

MATLAB没有提供现成的函数求解Newton插值，需自行编写代码实现：

针对式11-9中Newton插值的计算，要分别实现表11-2的差商表和$(x-x_0)(x-x_1)\cdots$

思考：这两部分的计算如何编写代码实现?

$$
\begin{aligned}
f(x) &= N_n(x) + R_n(x) \\
&= \boxed{f[x_0]} + \boxed{f[x_0, x_1]}\boxed{(x - x_0)} + \boxed{f[x_0, x_1, x_2]}\boxed{(x - x_0)(x - x_1)} + \cdots \\
&\quad + \boxed{f[x_0, x_1 \cdots, x_n]}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)
\end{aligned}
$$

-- 差商表的实现：

```
for j=1:n-1

for k=1:n-j

D(k,j+1)=(D(k+1,j)-D(k,j))/(xdata(j+k)-xdata(k));

end

end
```

-- $(x-x_0)(x-x_1)\cdots$ 的代码实现：

```
H=1;

for j=1:n-1

H=H.*(x-xdata(j));

L(j,:)=H;


%或  L(j,:) = prod((x-xdata(1:j).'))

end
```

或：

总的牛顿插值算法实现函数：

```
function [y,D]=newton_interp(xdata,ydata,x)
```

% Newton插值

% 输入参数：

% ---xdata：给定的节点横坐标

% ---ydata：给定的节点纵坐标

% ---x：需要进行插值的节点横坐标

% 输出参数：

% ---y：Newton插值函数在x处的函数值

% ---D：差商表

n=length(xdata);m=length(ydata);

if n~=m

error('插值数据长度不等！');

end

D=zeros(n);D(:,1)=ydata';H=1;

for j=1:n-1

for k=1:n-j

if abs(xdata(j+k)-xdata(k))<eps

error('输入的n+1个节点不是互异的。');

end

D(k,j+1)=(D(k+1,j)-D(k,j))/(xdata(j+k)-xdata(k));

end

H=H.*(x-xdata(j));

L(j,:)=H;

end

L=[ones(size(x));L];   % 1, (x-x0), (x-x0)(x-x1),...

y=L.*repmat(D(1,:)',1,length(x));

y=sum(y);

%该函数的调用格式为：

[y,D]=newton_interp(xdata,ydata,x)

【例11-2】利用Newton插值求解【例11-1】：

```
xdata=0:0.125:0.5;  % 时间向量
```

```
ydata=[0 6.24 7.75 4.85 0];  % 导体中的电流值
xi=0:0.01:0.5;  % 加密时间向量
[yi,D]=newton_interp(xdata,ydata,xi);  % Newton插值
plot(xdata,ydata,'ko')  % 绘制已知数据点
hold on  % 图形保持
plot(xi,yi,'k')  % 绘制插值后的图形
disp('差商表D：')  % 显示差商表D
disp(D)
title('\fontname{隶书}\fontsize{16}牛顿插值')  % 添加标题
legend('给定的节点数据','插值曲线')  % 添加图例
```

11.4 Hermite插值

前面介绍的插值公式，都只要求插值多项式在插值多项式在插值节点处给定的函数值。

在实际问题中，有时不仅要求插值多项式$P_n(x)$与函数$f(x)$在插值节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$上的函数值相等，而且还要求在这些点上的若干阶导数也相等，这就需要引入Hermite插值。

对于有高阶导数的情况，Hermite插值多项式比较复杂，在实际应用中，常常遇到的是函数值为一阶导数值给定的情况。在这种条件下，对于$n+1$个互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$，Hermite插值公式可以写为：

$$f(x)=H_{2n+1}(x)+R_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)f'(x_i)+\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \qquad (11-11)$$

式中

$$h_i(x)=\left[1-2(x-x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right]l_i^2(x) \qquad (11-12)$$

$$g_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x) \qquad (11-13)$$

称

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)f'(x_i) \qquad (11-14)$$

为$f(x)$的$2n+1$次Hermite插值多项式。

根据式$(6-14)$编写计算Hermite插值的程序：

function y=hermite_interp(xdata,ydata,ydot,x)

% hermite插值

% 输入参数：

%   ---xdata：给定的节点横坐标

%   ---ydata：给定的节点纵坐标

```
%       ---ydot：给定插值节点处的导数值，其缺省值用均差代替
%       ---x：需要进行插值的节点横坐标
% 输出参数：
%       ---y：Lagrange插值函数在x处的函数值
if isempty(ydot)==1
ydot=gradient(ydata,xdata);
end
n=length(xdata);m=length(ydata);h=length(ydot);y=zeros(size(x));
if n~=m|n~=h|m~=h
error('插值数据长度不等！')
end
ii=1:n;y=zeros(size(x));
for i=ii
ij=find(ii~=i);V=1;
for j=1:length(ij)
if abs(xdata(i)-xdata(ij(j)))<eps
error('输入的n+1个节点不是互异的。');
end
V=V.*(x-xdata(ij(j))).^2/(xdata(i)-xdata(ij(j)))^2;    % li(x)^2
end
```

% $H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)f'(x_i)$

% $h_i(x)=\left[1-2(x-x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right]l_i^2(x)$

% $g_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$

```
y=y+V.*((1-2*(x-xdata(i))*sum(1./(xdata(i)-xdata(ij))))*...
ydata(i)+(x-xdata(i))*ydot(i));
end
%该函数的调用格式为：
y=hermite_interp(xdata,ydata,ydot,x)
```

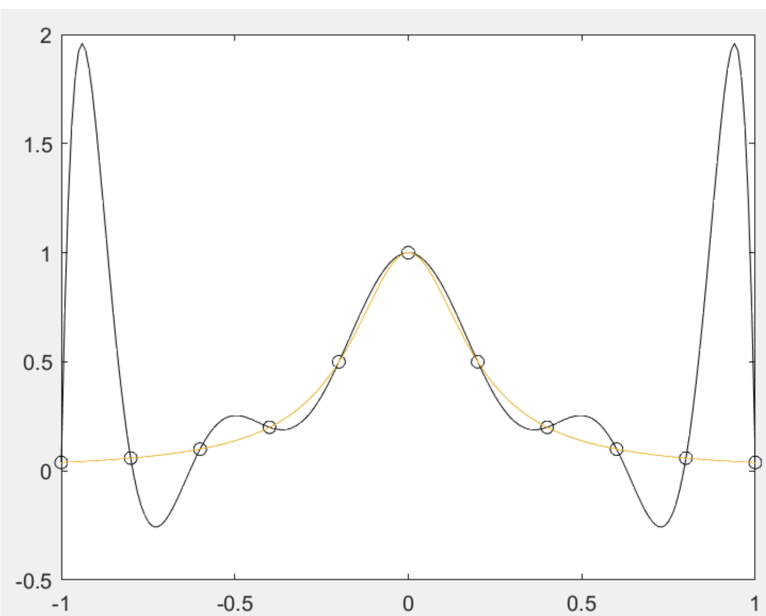
【例11-3】利用Hermite插值重新求解例11-1，节点处的导数值利用$\mathrm{rand}(1,5)-0.5$得到。

```
xdata=0:0.125:0.5;  % 时间向量
ydata=[0 6.24 7.75 4.85 0];  % 电流值
xi=0:0.01:0.5;  % 加密时间向量
rand('state',0)  % 设定随机数状态
doty = rand(1,5)-0.5;
yi=hermite_interp(xdata,ydata,doty,xi);  % Hermite插值
plot(xdata,ydata,'ko')  % 绘制已知数据点
hold on  % 图形保持
plot(xi,yi,'k')  % 绘制插值后的图形
title('\fontname{隶书}\fontsize{16}埃尔米特插值')  % 添加标题
legend('给定的节点数据','插值曲线')  % 添加图例
```

11.5 分段低次插值

为了说明分段插值的必要性，考虑一个典型的例子：设$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2},x\in[-1,1]$假设已知其中一些点的坐标，则可以采用下面的命令进行Lagrange插值，得出如图所示的插值曲线。

```
x=-1:0.01:1;  % 加密数据点
xdata=-1:0.2:1;  % 已知数据点
ydata=1./(1+25*xdata.^2);  % 点xdata处的函数值
y=lagrange_interp(xdata,ydata,x);  % Lagrange插值
plot(xdata,ydata,'ko',x,y,'k',x,1./(1+25*x.^2))%绘制图形
```



可见，用Lagrange插值得出的效果和精确值相差甚远，出现多项式阶次越高越发散的现象。

鉴于高阶多项式插值的弊端，引入分段低次插值，分段低次插值主要有分段线性插值和分段Hermite插值两种。

11.5.1 分段线性插值

所谓分段线性插值就是通过将相邻的两个插值点用线段连接，如此形成的一条折线来逼近函数$f(x)$。给定$f(x)$在$n+1$个节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数值$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$，在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上线性插值

$$L_{1,i}(x)=f(x_i)+f[x_i,x_{i+1}](x-x_i),x\in[x_i,x_{i+1}] \qquad (11-15)$$

将差商式子代入，得到 $L_{1,i}(x)=f(x_i)\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

若用插值基函数表示，则在整个区间$[a,b]$上$f(x)$的分段线性插值函数可以表示为

$$\widetilde{L}_1(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x) \qquad (11-16)$$

其中

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},x\in[x_{i-1},x_i],0<i\le n\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}},x\in[x_i,x_{i+1}],0\le i<n\\ 0,\text{其他}\end{cases} \qquad (11-17)$$

$\widetilde{L}_1(x)$有良好的收敛性，即对于$x\in[a,b]$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{L}_1(x)=f(x)$。

感兴趣的同学可以利用式（11-16）和式（11-17）动手编写分段线性插值的代码实现，MATLAB提供了函数interp1()可以实现分段线性插值功能，调用方法如下：

```
y=interp1(x,y,xi,'linear')
```

其中，x为插值节点构成的向量，y是插值节点函数值构成的向量，y_i是被插值点x_i的插值结果，选项**'linear'**表示线性插值（默认值）

【例11-4】利用interp1()函数对$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2},x\in[-1,1]$进行分段线性插值。

```
x=-1:0.01:1;  % 加密数据点
xdata=-1:0.2:1;  % 已知数据点
ydata=1./(1+25*xdata.^2);  % 点xdata处的函数值
yi=interp1(xdata,ydata,x);  % 线性插值
subplot(2,1,1)  % 图形分割
plot(x,1./(1+25*x.^2),'k',x,yi,'k:',xdata,ydata,'ko')  % 绘制图形
legend('解析曲线','分段线性插值曲线')  % 添加图例
text(-0.9,0.9,'\fontname{隶书}\fontsize{16}分段线性插值')  % 添加标注
subplot(2,1,2)  % 图形分割
plot(x,yi-1./(1+25*x.^2),'k')  % 绘制图形
legend('分段线性插值误差曲线')  % 添加图例
```

11.5.2 分段Hermite插值

给定$f(x)$在$n+1$个节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数值$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$和一阶导数值$f'(x_0),f'(x_1),\cdots,f'(x_n)$，则可在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上构造三次Hermite插值多项式近似被插函数。

$$\begin{aligned}H_{3,i}=&\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)f(x_i)+\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)f(x_{i+1})\\&+\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2(x-x_i)f'(x_i)+\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2(x-x_{i+1})f'(x_{i+1})\end{aligned}\qquad(11\text{-}18)$$

若在整个区间$[a,b]$上定义一组分段三次插值基函数$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)(j=0,1,\cdots,n)$,则在整个区间$[a,b]$上$f(x)$的分段三次Hermite插值函数为:

$$\widetilde{H}_3(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i)\alpha_i(x)+f'(x_i)\beta_i(x)\right]\qquad(11\text{-}19)$$

其中$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)$分别为:

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right),x\in[x_{i-1},x_i],0<i\le n\\\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right),x\in[x_i,x_{i+1}],0\le i<n\\0,\text{其他}\end{cases}\qquad(11\text{-}20)$$

$$\beta_i(x)=\begin{cases}\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2(x-x_i),x\in[x_{i-1},x_i],0<i\le n\\\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2(x-x_i),x\in[x_i,x_{i+1}],0\le i<n\\0,\text{其他}\end{cases}\qquad(11\text{-}21)$$

同样地，$\widetilde{H}_3(x)$也具有良好的收敛性，即对于$x\in[a,b]$时，$\lim_{n\to\infty}\widetilde{H}_3(x)=f(x)$。

同分段线性插值一样，MATLAB提供了函数**pchip()**来求解分段三次Hermite插值，该函数的调用格式有以下两种:

```
yi=pchip(x,y,xi)%格式一
pp=pchip(x,y)%格式二
```

其中，输入参数的含义同interp1()函数，格式2中的返回值pp是一个结构体数组，需要调用ppval()函数来计算各因变量的数值。

说明: (1)语句“yi=ppval(pp,xi)"可以实现与格式一相同的功能;

(2)函数pchip()的效果等同于**yi=interp1(x,y,xi,'pchip')**或**yi=interp1(x,y,xi,'cubic')**。

【例11-5】利用pchip()函数对$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$进行分段三次Hermite插值。

```
x=-1:0.01:1;
xdata=-1:0.2:1;
ydata=1./(1+25*xdata.^2);
% yi=pchip(xdata,ydata,x);  % 分段三次Hermite插值
% yi=interp1(xdata,ydata,x,'pchip');  % 调用函数interp1()的'pchip'选项进行分段三次Hermite插值

% yi=interp1(xdata,ydata,x,'cubic');  % 立方插值

% pp=pchip(xdata,ydata);  % 分段三次Hermite插值
% yi=ppval(pp,x);  % 求x处的分段三次Hermite插值多项式的函数值
subplot(2,1,1)  % 图形分割
plot(x,1./(1+25*x.^2),'k',x,yi,'k:',xdata,ydata,'ko')  % 绘制图形
legend('解析曲线','分段三次hermite插值')  % 添加图例
text(-0.9,0.8,{'分段三次','Hermite插值'},...
    'fontname','隶书','fontsize',16)  % 添加标注
subplot(2,1,2)  % 图形分割
plot(x,yi-1./(1+25*x.^2),'k')  % 绘制图形
legend(char('\fontsize{8}分段三次Hermite','插值误差曲线'),'Location','northwest');  % 添加图例
% legend('boxoff')  % 设置图例边框为无
```

11.6 三次样条插值

采用分段插值虽然计算简单，也具有一致收敛性，但光滑性比较差，有些实际问题对插值函数的光滑性有较高要求，需要用到样条函数插值。样条曲线实际上是由分段三次曲线连接而成，在连接点处有二阶连续导数。

常用的三次样条函数:

设在区间[a,b]上给的n+1个插值节点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$及其函数$f(x)$相应的值$f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$如果函数$S(x)$在区间[a,b]上满足条件:

(1)$S(x)$在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上是三次多项式;

(2)$S(x)$在区间$[a, b]$上存在连续的二阶导数。

则称$S(x)$是区间$[a, b]$上的三次样条函数。

若$S(x)$还满足$S(x_i) = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$,则称$S(x)$是区间$[a, b]$上的三次样条插值函数。

注意到$S(x)$在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上是三次多项式，因此$S''(x)$在此小区间上是一次式，若设$S''(x_i) = M_i, S''(x_{i+1}) = M_{i+1}$,则$S''(x)$的表达式可以写为

$$S''(x) = M_i + \frac{1}{h_i}(M_{i+1} - M_i)(x - x_i), x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (11-22)$$

其中$h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$利用$S(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$即可求得上述方程的解为:

$$\begin{aligned} S(x) =& M_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i} \\ &+ \left(f(x_{i+1}) - \frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_i}{h_i}(x \in [x_i, x_{i+1}]; i = 0, 1, \cdots, n-1) \end{aligned} \quad (11-23)$$

根据式（11-23）可以编写代码实现分段三次样条插值函数代码的编写。

MATLAB提供函数spline()求解三次样条插值问题，该函数的一般调用格式有两种:

```
yi=spline(x,y,xi)%格式一
pp=spline(x,y)%格式二
```

其中各参数的含义同函数pchip()

说明: (1)语句“yi=ppval(pp,xi)"可以实现与格式一相同的功能;

(2)函数spline()的效果等同于**yi=interp1(x,y,xi,'spline')**。

【例11-6】利用三次样条插值函数对$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x\epsilon[-1, 1]$进行三次样条插值。

```
x=-1:0.01:1;
xdata=-1:0.2:1;
ydata=1./(1+25*xdata.^2);
yi=spline(xdata,ydata,x);  % 三次样条插值
% yi=interp1(xdata,ydata,x,'spline');  % interp1()函数'spline'选项实现三次样条插值
% pp=spline(xdata,ydata);  % 三次样条插值
% yi=ppval(pp,x);
subplot(2,1,1)  % 图形分割
plot(x,1./(1+25*x.^2),'k',x,yi,'k:',xdata,ydata,'ko')  % 绘制图形
legend('解析曲线','三次样条插值')  % 添加图例
text(-0.9,0.8,'三次样条插值','fontname','隶书','fontsize',16)  % 添加标注
subplot(2,1,2)  % 图形分割
plot(x,yi-1./(1+25*x.^2),'k')  % 绘制图形
legend('三次样条插值误差曲线')  % 添加图例
```

interp1()函数还提供了几种不同插值类型问题的求解，如最邻近插值、三次插值等，其完整的调用格式如下:

```
yi=interp1(x,y,xi,method,'extrap')
```

其中，method表示指定的插值方法，包括以下几种:

'nearest'---最邻近插值。

’linear‘---线性插值（默认值）。

’spline‘---三次样条插值。

'pchip'---分段三次**Hermite**插值。

extrap表示对超出**x**范围的**xi**分量执行特殊的外插值法；

【例11-7】有人对汽车进行了一个实验，即在行驶过程中先加速，然后保持匀速行驶一段时间，接着再加速，然后再保持匀速，如此交替。注意，整个实验过程中从未减速，在一组时间点上测得汽车的速度如表11-3所示。

【表11-3实验数据】

$t(s)$	0	20	40	56	68	80	84	96	104	110
$v(m/s)$	0	20	20	38	80	80	100	100	125	125

试用MATLAB中的interp1()函数对这些数据进行插值。

```
t=[0 20 40 56 68 80 84 96 104 110];  % 时间向量
v=[0 20 20 38 80 80 100 100 125 125];  % 速度值
ti = linspace(0,110);  % 加密时间向量
method={'nearest','linear','spline','pchip','cubic','v5cubic'};  % 插值方法
for k=1:6
    subplot(3,2,k)  % 图形分割
    vi=interp1(t,v,ti,char(method(k)));  % 插值
    plot(t,v,'ko',ti,vi,'k')  % 绘制图形
    axis tight  % 控制坐标轴
    title(['\fontname{times new roman}\fontsize{12}\it',char(method(k))])  % 添加标题
end
```

11.7 二维插值

前面介绍的插值是一维插值问题，而实际中可能遇到自变量的个数为两个的插值问题，即二维插值问题。二维插值问题的数学描述是：构造一个二元函数$z = f(x, y)$，使其在矩形区域$[a, b] \times [c, d]$内系列点(x_i, x_j)的函数值为$z_{i,j} = f(x_i, y_j)$，利用函数$z = f(x, y)$计算该矩形区域内任意一点的函数值。

根据数据点(x_i, x_j)分布情况，二维插值问题可以分为两种情况：网络节点插值和散乱节点插值，其中网格节点插值适用于节点比较规则的情况，即在包含所给节点的矩形区域内，节点由两组平行于坐标轴的直线的交点组成；散乱节点插值适用于一般的节点，多用于节点不太规则的情况。

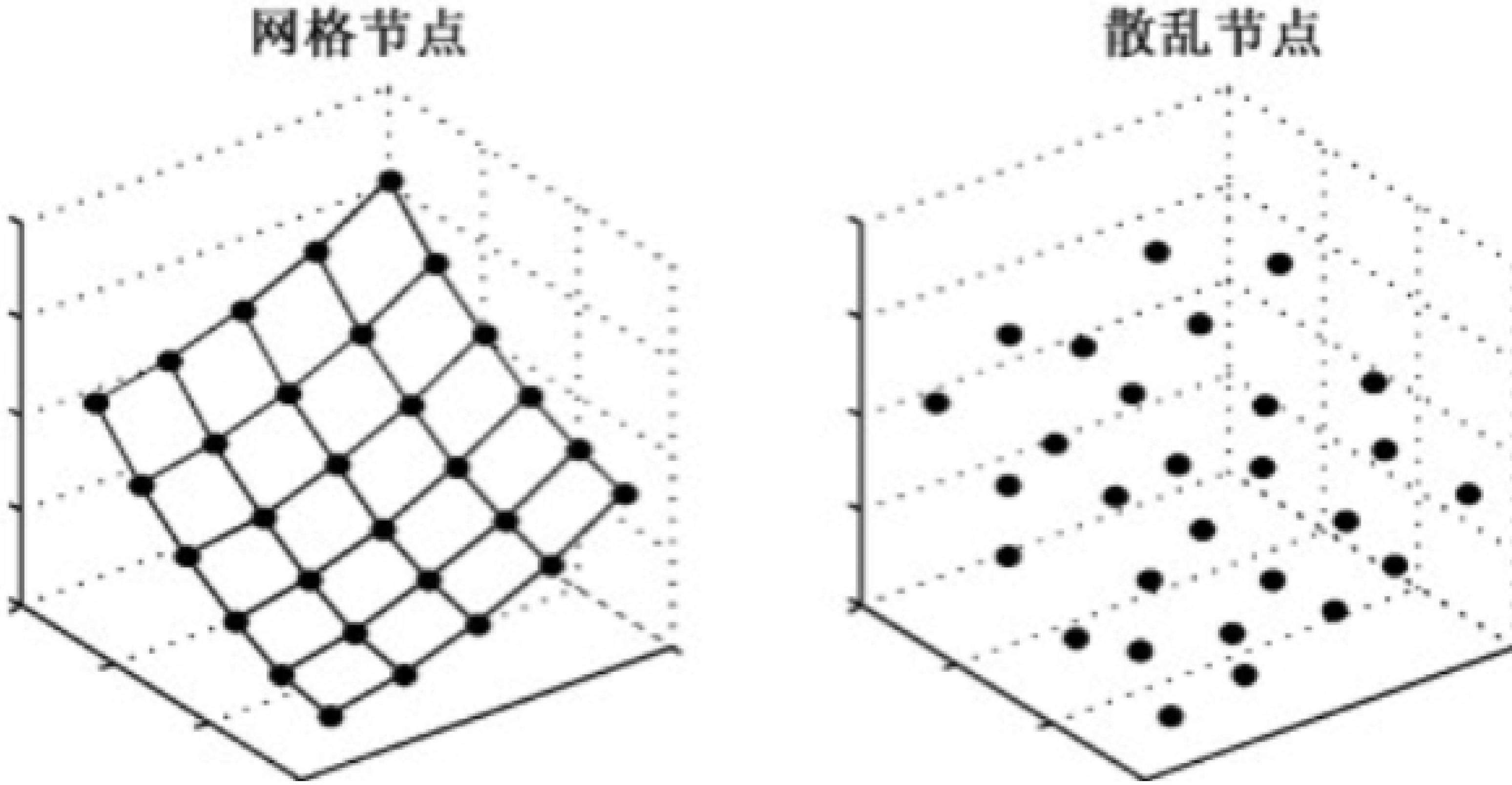


图 两种常见的介电分布

11.7.1 网格节点插值

已知$m \times n$个节点$(x_i, y_i, z_{i,j})(i = 0, 1, 2 \cdots, m; j = 0, 1, 2, \cdots, n)$，其中$x_i, y_i$互不相同，不妨设$a = x_0 < x_1 < \cdots x_m = b, c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$，构造一个二元函数$z = f(x, y)$使其通过节点$(x_i, y_i, z_{i,j})$，再利用函数$z = f(x, y)$求插值点$(x^*, y^*)(\neq (x_i, y_i))$处的值$z^*$，这就是网络节点插值的数学描述。网格节点插值一般有以下几种形式。

1) 最近邻插值

最近邻插值是一种简单的插值算法，也称为零阶插值。在这种插值中，每一个插值点的函数值就是与其最邻近的网格点的函数值。

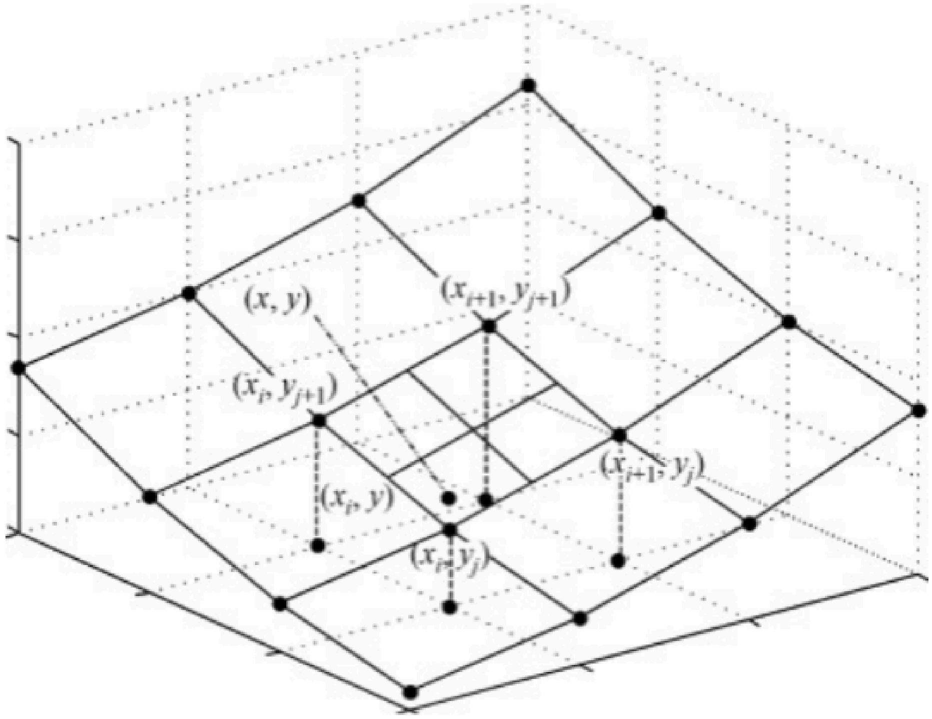


图 邻近插值图形表示

最邻近插值的数学表示为:

$$f(x,y)=f(x_i,y_i)\text{，当}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}<x<\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\text{且}\frac{y_j+y_{j-1}}{2}<y<\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\qquad(11-24)$$

由式$(11-24)$可知，最邻近插值计算简单，但是通常是不连续的，因此一般用在对图像质量要求不高的场合。

2) 分片线性插值

分片线性插值对应于一维插值中的分段线性插值，其基本思想是把所求区域分割成多个子矩形，即在以$(x_i,y_j),(x_{i+1},y_j),(x_{i+1},y_{j+1}),(x_i,y_{j+1})$为顶点的小矩形$r_{ij}$上进行线性插值，如图所示。相应的分片插值函数如下所述。

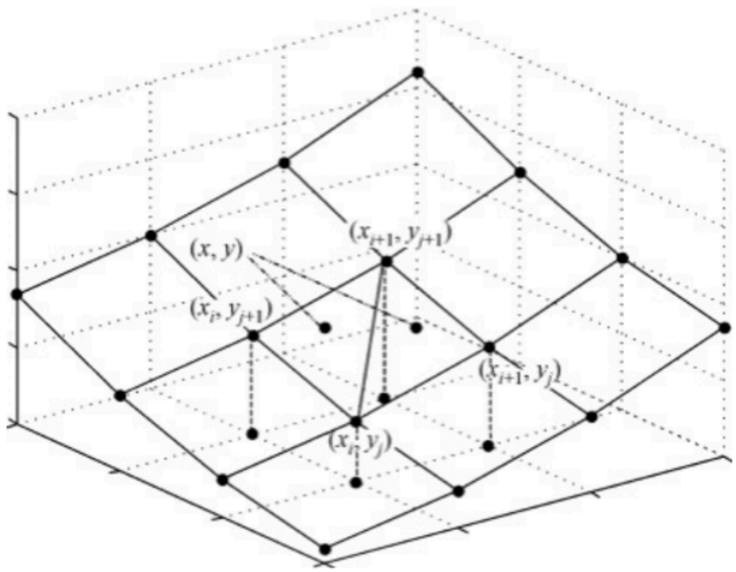


图 分片线性插值图形表示

第一片(下三角形区域): (x,y)满足 $y \le \frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+y_j$，插值函数为

$$f(x,y)=z_{i,j}+\frac{(z_{i+1,j}-z_{i,j})}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+\frac{(z_{i+1,j+1}-z_{i+1,j})}{y_{j+1}-y_j}(y-y_i) \qquad (11-25)$$

第二片(上三角形区域): (x,y)满足 $y > \frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+y_j$，插值函数为

$$f(x,y)=z_{i,j}+\frac{(z_{i+1,j+1}-z_{i,j+1})}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+\left(\frac{z_{i,j+1}-z_{i,j}}{y_{j+1}-y_j}\right)(y-y_i) \qquad (11-26)$$

说明：分片线性插值对不同的片用不同的线性函数插值，因此，分片线性插值是连续的，但是光滑性不好。

3) 双线性插值

双线性插值是最常见的线性插值算法，它是根据插值点周围最接近的4个点的函数值进行二维线性插值计算，如图所示，其具体计算过程如下所述。

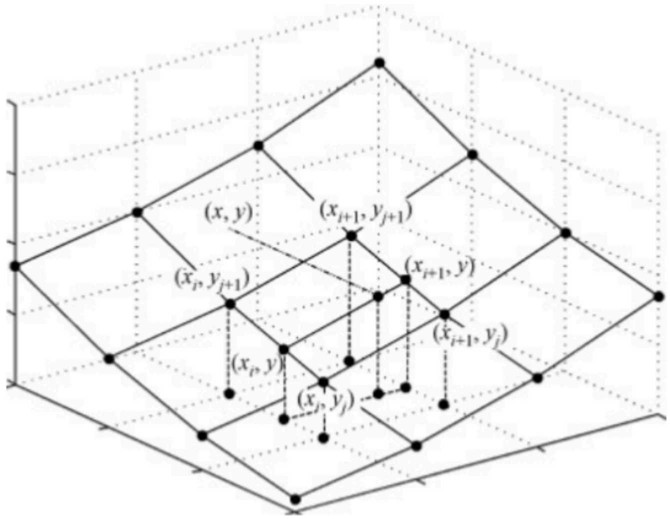


图 双线性插值图形表示

(1) 利用线性插值分别计算$f(x_i, y)$和$f(x_{i+1}, y)$

$$f(x_i, y) = z_{i,j} + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}(z_{i,j+1} - z_{i,j}) \qquad (11-27)$$

$$f(x_{i+1}, y) = z_{i+1,j} + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}(z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j}) \qquad (11-28)$$

(2) 利用线性插值计算$f(x, y)$

$$f(x, y) = f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)] \qquad (11-29)$$

(3)将式$(11-27)$和式$(11-28)$代入式$(11-29)$中即可将$f(x, y)$化为如下形式:

$$f(x, y) = (\mathrm{Ax} + B)(\mathrm{Cy} + D), (x, y) \in r_{i,j} \qquad (11-30)$$

其中A,B,C,D可以唯一确定，但是在相邻小矩形的4条边（不含定点）上不能保证连续。

4) 双三次样条插值

双线性插值在子矩形r_{ij}上的数学表达式为$f(x, y) = (\mathrm{Ax} + B)(\mathrm{Cy} + D)$，将其稍加拓展，可以得到双三次样条插值在各个子矩形r_{ij}上的表达式为:

$$f(x, y) = \left(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3\right)\left(B_1 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3\right) \qquad (11-31)$$

其中，待定系数$A_i B_i (i = 1, 2, 3, 4)$可以由子矩形4个顶点的函数值及插值函数$f(x, y)$在x和y方向上的光滑性（即偏导数f'_x, f'_y, f''_{xx}和f''_{yy} 连续）和相应的边界条件唯一确定。

对于网格节点的插值，MATLAB提供了函数**interp2()**求解，其具体调用格式如下：

```
zi=interp2(x,y,z,xi,yi,method)%格式一
zi=interp2(x,y,z,xi,yi,method,extrapval)%格式二
```

其中，x和y是长度分别为M和N的向量，对应着已知点(x_i, y_j)，z是一个矩阵，对应于$Z_{i,j}(i = 0, 1, 2, \cdots, m; j = 0, 1, 2 \cdots, n)$，其他参数的含义基本同interp1()函数。

【例】利用不同的插值方法对MATLAB自带的演示函数peaks进行二维插值。

```
figure('Position',[100 100 560 630])  % 设置图形窗口的位置
[X,Y] = meshgrid(-3:.5:3);  % 产生坐标数据矩阵
Z = peaks(X,Y);  % 计算MATLAB自带峰值函数的值
[XI,YI] = meshgrid(-3:0.2:3);  % 加密网格数据
method=char('nearest','linear','spline','cubic');  % 插值方法
s(1)=subplot(321),mesh(X,Y,Z),title('原网格图')  % 绘制原图并添加标题
s(2)=subplot(322),mesh(XI,YI,peaks(XI,YI)),title('加密网格图')  % 绘制加密后的图形
for k=3:6
    s(k)=subplot(3,2,k)  % 图形分割
    ZI = interp2(X,Y,Z,XI,YI,method(k-2,:));  % 二维插值
    mesh(XI,YI,ZI),title([method(k-2,:),'型插值曲面'])
    e{k-2}=ZI-peaks(XI,YI);  % 误差
end
axis(s,[-3 3 -3 3 -10 10])  % 设置坐标轴范围
% 绘制插值误差曲面图
figure
for k=1:4
    h(k)=subplot(2,2,k)  % 图形分割
    mesh(XI,YI,e{k})  % 绘制误差曲面
    title([method(k,:),'型插值误差曲面'])  % 添加标题
    xlim([-3,3]);ylim([-3,3]);  % 设置坐标轴范围
end
```

11.7.2 散乱节点插值

散乱节点插值的一般描述为：在区域$[a, b] \times [c, d]$上，散乱分布n+1个点，$V_k = (x_k, y_k)$处给出数据$z_k(k = 0, 1, 2 \cdots, n)$，寻找该区域上的一个二元函数$f(x, y)$，使$f(x_k, y_k) = z_k$成立。

求解上述问题的常用方法是反距离加权平均法（或者称为Shepeard法），其基本思想是，在非给定数据的点处，定义其函数值由已知数据按与该点距离的远近进行加权平均决定，

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \qquad (11-32)$$

则二元函数（曲面）定义为：

$$f(x, y) = \begin{cases} z_k & r_k = 0 \\ \sum_{k=0}^{n} W_k(x, y) z_k & \text{其他} \end{cases} \qquad (11-33)$$

其中

$$W_k(x,y)=\frac{1}{r_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k^2}} \qquad (11-34)$$

如此定义的曲面是全局相关的，对曲面的任一点进行数据计算都要涉及全体数据，这在大量实测数据初值中是很慢的。此外，$f(x,y)$在每个插值点(x_k,y_k)附近产生一个小的“平台”，使曲面不具有光滑性。

MATLAB提供函数**griddate()**来求解散乱节点插值问题，该函数的调用格式为：

```
zi=griddata(x,y,z,xi,yi,method)
```

其中x,y和z是给定的节点数据，xi和yi通常是规则的网格点，method表示可供选择的插值法，包括以下几种：

·'linear'---基于三角形的线性插值（默认值）

·'cubic'---基于三角形的三次插值；

·'nearest'---最邻近插值；

·'v4'---MATLAB中的griddata算法。

【例 】利用函数$z=xe^{-x^2-y^2}$产生一组随机点(x_k,y_k,z_k)并对这组点进行散乱节点插值。

调用griddata()函数编写如下语句：

```
rand('state',0);
x = rand(100,1)*4-2;  % 随机点的x坐标
y = rand(100,1)*4-2;  % 随机点的y坐标
z = @(x,y)x.*exp(-x.^2-y.^2);  % 定义函数

ti = -2:.2:2;
[XI,YI] = meshgrid(ti,ti);  % 生成网格数据

ZI = griddata(x,y,z(x,y),XI,YI);  % 随机点插值
h(1)=subplot(2,1,1);  % 图形分割
mesh(XI,YI,ZI);title('散乱数据点插值曲面')  % 绘制图形并添加标题
h(2)=subplot(2,1,2);  % 图形分割
mesh(XI,YI,ZI-z(XI,YI));title('散乱数据点插值误差曲面')  % 绘制误差曲面并添加标题
% axis(h,'tight')
```

类似地可以使用interp3()进行三维插值，结合函数interpn()和ndgrid()进行n维插值。它们的使用方法类似于函数interp1()和griddata()，同学们可以自行查阅帮助文档进行学习。

11.8 实验范例：国土面积的计算

1) 问题的提出

已知欧洲某个国家的地图如下图所示，为了计算出它的国土面积，首先对地图进行如下测量：以由西向东方为x轴，由南向北方为y轴，选择方便的原点，并将从最西边界点到最东边界点在x轴上的区间适当的分成若干段，在每个点的y方向测出南边界点和北边界点的y坐标y1和y2，这样就得到了表中所示的测量数据（单位：mm）。

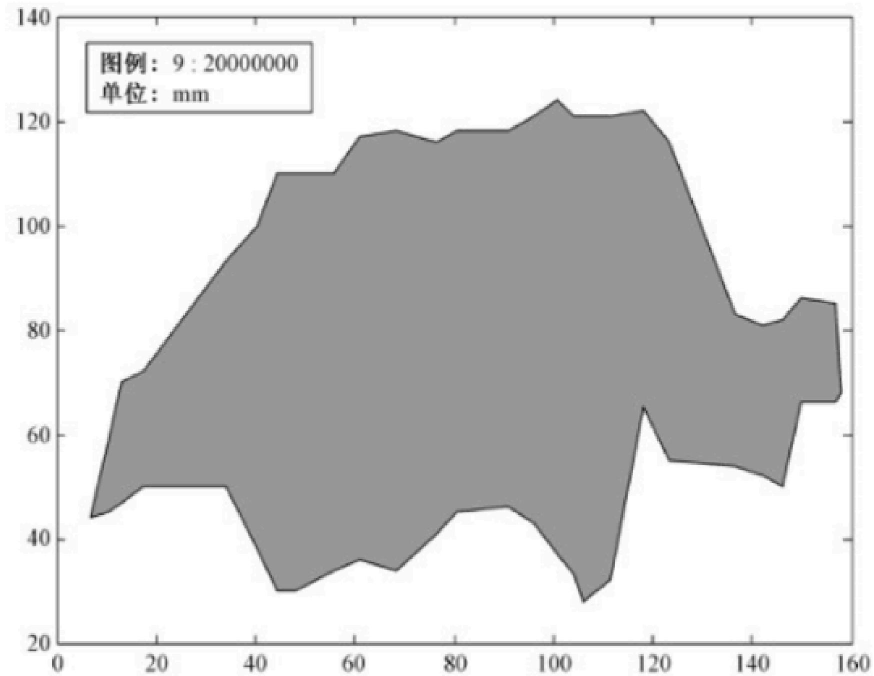


图 欧洲某个国家的地图

表 6-4 地图边界的测量数据

x	7.0	10.5	13.0	17.5	34	40.5	44.5	48	56
y_1	44	45	47	50	50	38	30	30	34
y_2	44	59	70	72	93	100	110	110	110
x	61	68.5	76.5	80.5	91	96	101	104	106
y_1	36	34	41	45	46	43	37	33	28
y_2	117	118	116	118	118	121	124	121	121
x	111.5	118	123.5	136.5	142	146	150	157	158
y_1	32	65	55	54	52	50	66	66	68
y_2	121	122	116	83	81	82	86	85	68

根据地图的比例我们知道地图上**18mm**相当于实际中的**40km**，试由测量数据计算该国土的近似面积，并与它的精确值41288km^2进行比较。

2) 模型的假设

我们进行如下假设：

·假设测量的地图和数据均是准确的。

·假设由最西边界点与最东边界点分为上下两条连续的边界曲线，边界内的所有土地均为该国国土。

·假设从最西边界点到最东边界点的变量$x \in [a,b]$,划分$[a,b]$为n个小段$[x_{i-1},x_i]$，并由此将国土分为n小块。设每一小块均为X型区域，即作垂直于x轴的直线穿过该区域，直线与边界曲线最多只有两个交点。

3) 模型的建立与求解

首先利用MATLAB对上下边界分别进行三次样条和分段三次**Hermite**插值，得到加密曲线。此时，设上边界函数为$f_2(x)$，下边界函数为$f_1(x)$，则由定积分定义可知曲线所围区域面积为：

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i$$

其中$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$。

程序如下：

```
x=[7.0 10.5 13.0 17.5 34 40.5 44.5 48 56 61 68.5 76.5 80.5...
    91 96 101 104 106 111.5 118 123.5 136.5 142 146 150 157 158];  % x轴坐标
y1=[44 45 47 50 50 38 30 30 34 36 34 41 45 46 43 37 33 28 ...
    32 65 55 54 52 50 66 66 68];  % y轴上半部分的坐标
y2=[44 59 70 72 93 100 110 110 110 117 118 116 118 118 121 ...
    124 121 121 121 122 116 83 81 82 86 85 68];  % y轴下半部分坐标
xi=7:0.1:158;  % 加密x轴坐标
method={'pchip','spline'};  % 插值方法
for k=1:2
    figure(k)  % 产生图形窗口
    yi1(k,:)=interp1(x,y1,xi,char(method(k)));  % 一维插值
    yi2(k,:)=interp1(x,y2,xi,char(method(k)));  % 一维插值
    S=(trapz(xi,yi2(k,:))-trapz(xi,yi1(k,:)))/18^2*40^2;  % 数值积分求解
    r=abs(S-41288)/S  % 求误差
    fill([xi,fliplr(xi)],[yi1(k,:),fliplr(yi2(k,:))],[0.8,0.7,0.3])  % 图形填充
    text(90,135,['国土面积: S=',num2str(S),'km^2'])  % 添加标注
    text(90,127,['误差: R=',num2str(100*r),'%'])  % 添加标注
    annotation('textbox','Position',[0.16 0.8 0.22 0.09],...
        'String',{'图例: 9:20000000','单位: mm'});  % 添加文本框
    title(['国土轮廓的',char(method(k)),'插值结果'])  % 添加标题
end
figure
plot(xi,[diff(yi1);diff(yi2)])  % 绘制误差曲线
title('pchip插值与spline插值的误差曲线')  % 添加标题
```

由上述两个插值地图比较可知，利用pchip插值得到的结果更趋于精确值。

```
img = imread('timg.jpg');
figure
imshow(img)
img_part = img(1:100,1:100,:);
figure
imshow(img_part)
img_shrink = img(1:4:end,1:4:end,:);
figure
imshow(img_shrink)
imgSize = size(img_shrink);
[x y] = meshgrid(1:4:((imgSize(2)-1)*4+1),1:4:((imgSize(1)-1)*4+1));
[xx yy] = meshgrid(1:((imgSize(2)-1)*4+1),1:((imgSize(1)-1)*4+1));
for i =1:3
    img_expand(:,:,i) = interp2(x,y,double(img_shrink(:,:,i)),xx,yy,"spline");
end
img_expand = uint8(round(img_expand,0));
figure
imshow(img_expand)
```

作业:

1、天文学家在1914年8月份的7次观测中，测得地球与金星之间的距离（单位：m），并取其常用对数值与日期的一组历史数据，如表所示，试推断何时金星与地球的距离的对数值为9.935799

日期	18	20	22	24	26	28	30
距离对数	9.961 772 4	9.954 364 5	9.946 806 9	9.939 095 0	9.931 224 5	9.923 191 5	9.914 992 5

2、在一次对沙堆形状测量的时候得到部分高度信息，如表所示，利用二维插值计算该区域内其他点的高度。

单位：m		x			
		1	2	3	4
y	1	6.36	6.97	6.23	4.77
	2	6.98	7.12	6.31	4.78
	3	6.83	6.73	5.99	4.12
	4	6.61	6.25	5.53	3.34