搜索算法：盲目搜索和启发式搜索

18308133 刘显彬

October 20, 2021

1 实验原理

1.1 双向搜索

BFS：宽度优先搜索是指，从起点处按照邻接点距离起点的次序进行搜索，直观上：搜索的点从起点处“一圈一圈”地往外延伸；如果把搜索点集看作是树，则是按点的深度按次序搜索。
为了形式化说明：设该树的最大度为b，解节点的深度为d，称下一次需要探索的节点集为**边界**，边界是一个**先进先出的队列**结构，则BFS每次将探索到（但在此之前还没探索过）的节点放入边界末端，直接探索到目标节点。

复杂度：BFS的空间消耗用于：边界的存储以及节点访问状态的存储：前者最坏情况下需要存储深度为d的所有节点，空间复杂度为$O(b^d)$；后者则需要存储深度小于等于d的所有节点状态，空间复杂度为$O(b^{d+1}) = O(b^d)$，因此总复杂度为$O(b^d)$；时间复杂度等于要访问的点数：即$O(b^d)$;

双向搜索：双向搜索是BFS的进化版：指从起点和终点同时进行BFS搜索，直到这两支路径访问了同一个点，则说明找到了一个解，因为BFS是探索节点深度不断加深的搜索，所以解是最短路径解（如果邻接节点的距离一样的话），所以双向搜索也是最短路径解。对任意一支BFS树，找到解后其深度均为$d/2$，因此其空间复杂度为：$2O(b^{d/2+1}) = O(b^{d/2})$，时间复杂度依赖于访问的点数，因此和空间复杂度一致。可见双向搜索是优于单纯的BFS。

环检测：BFS中，首先访问到一个点的路径P_1总是最短的，因此，其他路径P_n访问到该点后，总是更长的，因此路径Pn不必再从此处延伸。

1.2 A*搜索

启发式搜索：上面的两种搜索并没有利用边界上点的信息，也就是没有对它们进行评估：哪个更有可能到达终点，这类搜索算法也称作为无信息/盲目搜索。而在启发式搜索中，会对边界的点进行评估，这种利用额外的知识的评估方法也称为**启发式函数**。

A*搜索：定义实际代价函数$g(n)$：到达点n时的实际代价；以及启发式函数$h(n)$，在对**边界**进行探索时，将优先会探索使$f(n) = g(n) + h(n)$最小的

点，因为很可能是一个更$promising$的方向。

可采纳性：$\forall n, h(n) < h^*(n)$时，也就是说对点n的评估代价比真实代价都要小。满足可采纳性时：我们将会低估最优解的代价（记为C^*），根据A^*搜索的原理，评估代价小于C^*的点都会被访问，也就保证了最优解会被选中，也就是说：可采纳性意味着最优性。

一致性：$\forall n_1, n_2, h(n_1) \leq g(n_1 \to n_2) + h(n_2)$，直观上讲：“两边之和大于第三边”：直接对$n_1$的评估代价要小于先从$n_1 \to n_2$的代价加上对$n_2$的评估代价。一致性保证了一个点被最先一条路径探索到时，该路径一定是代价最小的：设一条路径上依次的点为n_i

- $f(n_i) = g(n_i) + h(n_i) \leq g(n_i) + g(n_i \to n_{i+1}) + h(n_{i+1}) = f(n_{i+1})$，也就是$f(n_i)$是非递减的。
- 以上保证了更小f值的点会先被探索，对于任意终点n，首个访问到它的路径，其f(n)比其他路径到该点都要小，而对于终点h(n)=0,因此实际成本g(n)也是最小的。

因此，满足可采纳性和一致性的启发式函数的A^*搜索通过环检测剪枝后的解是最优。

2 伪代码

2.1 双向搜索

Algorithm 1 biSearch(Problem, s, e)

Input: Problem Tree, s : start point, e : end point
Output: $MinPath(s \to e)$ or failure

$bs \leftarrow \emptyset \cup s$ // 从s出发的边界
$be \leftarrow \emptyset \cup e$
while $not\ empty(bs, be)$ **do**
  依次扩展s，e为起点的边界
  for all $node \in bs$ **do**
    for all $action \in Problem.action(node)$ **do**
      $newnode \leftarrow Node(Problem, node, action)$;
      if $newNode.pos \in Problem.VisitFrom(e)$ **then**
        //如果该点已经在另一侧被访问，说明两侧联通（有解）
        $result \leftarrow newnode.Path \cup Problem.PathFromE(newnode)$
        return result
      else if $Problem.notVisited(newnode)$ **then**
        $bs \leftarrow bs \cup \{newnode\}$
      end if
    end for
  end for
  // 和上面相同，处理从终点出发的BFS
  for all $node \in be$ **do**

```
      for all action ∈ Problem.action(node) do
         newnode ← Node(Problem, node, action);
         if newNode ∈ Problem.VisitFrom(s) then
            result ← node.Path ∪ {newnode}
            return result
         else if Problem.notVisited(newnode) then
            be ← be ∪ {newnode}
         end if
      end for
   end for
end while
return failure
```

2.2 A*搜索

Algorithm 2 AstartSearch(Problem)

Input: Problem Tree
Output: PATH with A* or failure

```
b ← {Problem.start}
while notEmpty(b) do
   node ← b.popHead() //在队列头弹出一个节点
   for all action ∈ Problem.Action(node) do
      new ← Node(node, action)
      if new ∈ Problem.Visited then
         //环检测剪枝
         continue
      else if new is Problem.end then
         return new.Path
      end if
      //插入边界，并计算f值，然后对边界排序
      new.h ← Problem.h(new)
      new.f ← new.cost + new.h
      bs ← bs ∪ {new}
      sort bs with element.f, Desc
   end for
end while
return failure
```

3 关键代码分析

3.1 双向搜索

3.1.1 搜索过程

下面展示的是，双向BFS中其中一支扩展边界的过程，代码中变量Ss, Se分别代表了两个方向（fromStart、fromEnd）的已访问节点集合，主要思路就是取

出边界中所有节点并探索它们的邻居，利用Ss进行环检测，利用Se两个分支是否汇合。在文件处理中，将节点的状态存在一个numpy.array中，其中0:有路，1:墙，2:起点，3：终点；第10行的state就是以上取值的一种。

```
1  while(len(fromStart)!= 0 or (len(fromEnd))!= 0):
2      # start from Start set
3      Ls = len(fromStart) # to calculate how many node
           should be visited
4      while Ls != 0:
5          Ls -= 1
6          StartCnt += 1
7          if (found): break
8          cur = fromStart.pop(0)
9          for son, action in self.neigh(cur):
10             state = self.map[son[0],son[1]]
11             if (state == 1) or (state == 2): continue
12             son = tuple(son)
13             if son in Se:
14                 Ss[son] = int(action)
15                 meet = son  #meet at this node
16                 found = 1
17                 break
18             elif son in Ss:
19                 # cirle checking -- cut
20                 continue
21             else:
22                 # a new node
23                 Ss[son] = int(action)
24                 fromStart.append(son)
```

3.1.2 回溯建路

回溯建路也是相似的两部分：$start \to meet\ node \to end$，这里选前一部分来分析：在相遇点$meet$处往前回溯，根据坐标$meet$映射到该节点的信息：$action$来恢复它的父亲节点的坐标，重复该过程直到访问到start。此处规定了行动序列$\{1,2,3,4\}$表示由父亲节点向：左右下上行动而来。第6行处的$a2char$是一个由行动序列到表现字符的映射表(如$1:' \to '$，这只是在表达路径时输出的字符)

```
1  def buildPath(self, meet, Ss, Se):
2      Paths, Pathe = [], []
3      endS = endE = meet
4      while endS != self.s:
5          action = Ss[endS]
6          Paths.append(self.a2char[action])
7          endS = tuple(np.array(endS)-self.a2pos[action])
```

3.2 A^*搜索

3.2.1 搜索过程

变量声明：State是已访问点的集合（实际上是python中的'字典'，由坐标映射到Node节点），用于回溯建路以及环路检测，boundry表示边界，是一个按元素的'f'值排序的最小堆，支持插入元素（insert）和弹出最小值（pop）

```
root = Node(self.s)
State = {self.s:root}
boundry = MinHeap([root], key=lambda node:node.f)
```

下面是搜索过程：具体过程与双向搜索的分析类似：不断弹出边界中(f值)的最小节点，探索其子节点：（1）是否是终点（第8行）（2）是否是路，然后判断是否已经探索过，没有则计算其f值并加入边界

```
1  while len(boundry)!= 0:
2      if (found): break
3      cur = boundry.pop()
4      for son, action in self.neigh(cur.pos):
5          son = tuple(son)
6          action = int(action)
7          pstate = self.map[son[0],son[1]]
8          if pstate == 3:
9              last = son
10             found = 1
11             State[son]=Node(son, action, cur)
12             break
13         if pstate == 0:
14             if tuple(son) in State:
15                 # cut
16                 continue
17             else:
18                 Cnt += 1
19                 newnode = Node(son, action, cur)
20                 newnode.h = self.h(newnode)
21                 newnode.calcf()
22                 State[son]=newnode
23                 # sort Boundry
24                 boundry.insert(newnode)
```

3.2.2 回溯建路

这一部分与双向搜索相似。

3.2.3 h(n)的选取

这次迷宫实验的启发式函数我设置为：距离终点的街区距离。

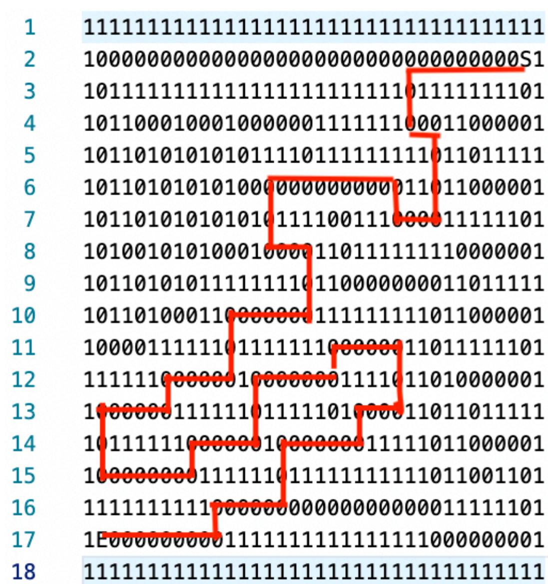
```python
def h(self, node:Node):
    return abs(node.x-self.e[0])+abs(node.y-self.e[1])
```

可采纳性：每前进一格，当前的节点的h值最多减1，到达终点的实际代价也最多只能减少1，因此由终点递推回起点，总有h值总是低估实际代价，即$h(n) \leq h^*(n)$

一致性：假设每一步都往终点靠近，$h(n_i) - h(n_{i+1}) = 1$，而实际代价$g(n_i \rightarrow n_{i+1}) = 1$，所以$h(n_i) = g(n_i \rightarrow n_{i+1}) + h(n_{i+1})$；而如果远离终点，$h(n_{i+1}) > h(n_i)$。综上所述：$h(n_i) \leq g(n_i \rightarrow n_{i+1}) + h(n_{i+1})$

4 实验结果分析

迷宫如下，其中0表示路，1表示墙，S、E分别表示起止点



双向搜索结果如下：

```
从起点处共扩展：114个点；从终点共扩展70个点
['*', ('<-', 9), ('v', 2), ('->', 2), ('v', 3), ('<-', 3), '^', ('<-', 4), ('v', 3)
, ('->', 7), ('v', 7), ('<-', 17), 'v', ('<-', 9)]
```

A^*搜索结果如下：

```
/lab4/code/Astar.py
共扩展225个点
['S', ('<-', 9), ('v', 2), ('->', 2), ('v', 3), ('<-', 3), '^', ('<-', 4), ('v', 3)
, ('->', 7), ('v', 7), ('<-', 17), 'v', ('<-', 9)]
```

将A^*稍微修改一下$h(n) = 0$，就可以得到BFS，运行结果如下：

```
共扩展268个点
['S', ('<-', 9), ('v', 2), ('->', 2), ('v', 3), ('<-', 3), '^', ('<-', 4), ('v', 3)
, ('->', 7), ('v', 7), ('<-', 17), 'v', ('<-', 9)]
```

可见，相比于单纯的BFS，双向BFS和A^*搜索都有效地减少了访问的节点，其中双向BFS在两侧同时扩展，更快地让两个分支碰面，而A^*利用了位置信息权衡了更有可能的方向，因此也避开了部分不需要探索的节点。

5 思考题

5.1 比较上述策略的性能

完备性：两个算法都是BFS的升级版，自距离/代价从小到大扩充边界，在有解且空间足够的情况下，它们都能找到解。
最优性：BFS找到的解总是最优的，因为BFS总是从最短路径到达目标，双向BFS只是加速了这个过程：从起点和终点同时出发；而A^*则是在一致性的保护下，在经过了环检测的剪枝后也保留了最优性。

时间&空间复杂度：时间和空间复杂度总是一致的：都依赖于它们访问过了的节点数:
双向搜索 中，将BFS中的指数复杂度打了5折，可以从上面的实验结果看出来：双向BFS确实大大减少了需要访问的点，而这种减少几乎可以说是必然的，直观上理解就是：从起点终点共同出发相遇时间总比一个人出发的时间要短一半。而且该搜索是稳定的，最好、最坏、平均意义下，复杂度相差不大。

A^***搜索**利用了额外的知识作为扩展边界的次序依据，所以复杂度的分析与启发函数的优劣有着密切关系，好的启发函数可以快速确定前往终点的大方向，从而能够减少大量的不必要探索，最好的情况下，总是能找到准确的方向，因此最好的情况下可以复杂度为$O(d)$，但最坏情况下，就会退化成BFS。因此：在完备性和最优性方面，二者是等价的；它们的主要不同在于时间空间复杂度，双向搜索必然是指数复杂度，但要远优于BFS，而A^*在有好的知识背景时，很可能会"出奇制胜"，跳出指数复杂度；反之，则很可能会退化为$O(b^d)$。

5.2 思考不同搜索策略的优缺点以及他们的使用场景。

对于与BFS相关的盲目搜索（BFS、双向BFS、一致代价）：它们总是能保证完备性和最优性，但时间和空间上总是会陷入指数复杂度，对于设备内存不足

的情况下，并非是最好的选择。但需要找到**最优解**的情况下，是很好的选择。
而与DFS则相反，它有着优秀的线性空间复杂度优势$O(bm)$，但是时间上仍然是指数复杂度，而且**不能保证在有限的时间能找到解，找到解时也未必是最优的**。所以如果问题本身内存有限的情况下，DFS可能是更好的选择。
而DFS的延伸：迭代加深DFS算法结合了DFS和BFS的优势，能保证空间复杂度不过大，同时保证了完备性，在仅关注是否找到解的情况下，这个算法是更好的选择。但是**未必能保证解的最优性**（除非用额外的开销，将深度限制改为成本限制）。

而启发式搜索在通常情况下比以上的盲目搜索都要好，因为有良好的先验知识做代价评估的情况下，往往能指导路径往更好的方向延伸，因此可以将以上时间的指数复杂度，大大下降，是一种更高效的方法。但性能非常依赖启发式函数的选择。