第十四章　静电场中的导体

（Conductor in Electrostatic Field）

电场作用于物质

物质分为导体和电介质

§ 14.1 导体的静电平衡条件

§ 14.2 静电平衡的导体上的电荷分布

§ 14.3 有导体存在时静电场的分析与计算

§ 14.4 静电屏蔽

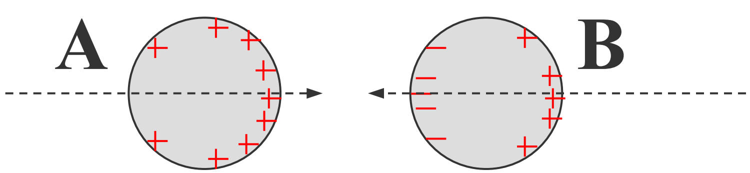
§ 14.5 唯一性定理

§ 14.1 导体的静电平衡条件
(electrostatic equilibrium of conductor）

一、静电平衡状态

导体的特点：有可以移动的自由电子。

导体在电场中，自由电子就要受到电场力而运动，这就会改变导体上原来的电荷分布



电荷运动的过程非常快。一种平衡被破坏，马上建立起新的平衡。

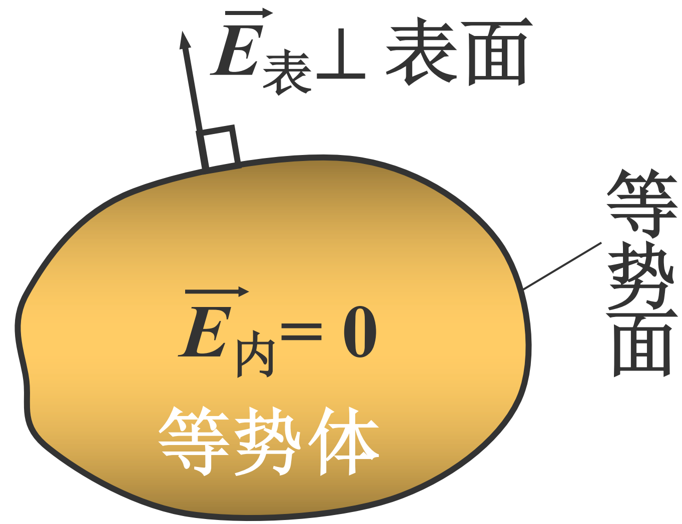
导体内部和表面都没有电荷定向移动的状态--------静电平衡状态

二、静电平衡条件

1 用场强来表述

$$\vec{E}_{内} = 0$$

$$\vec{E}_{表} \perp 表面$$



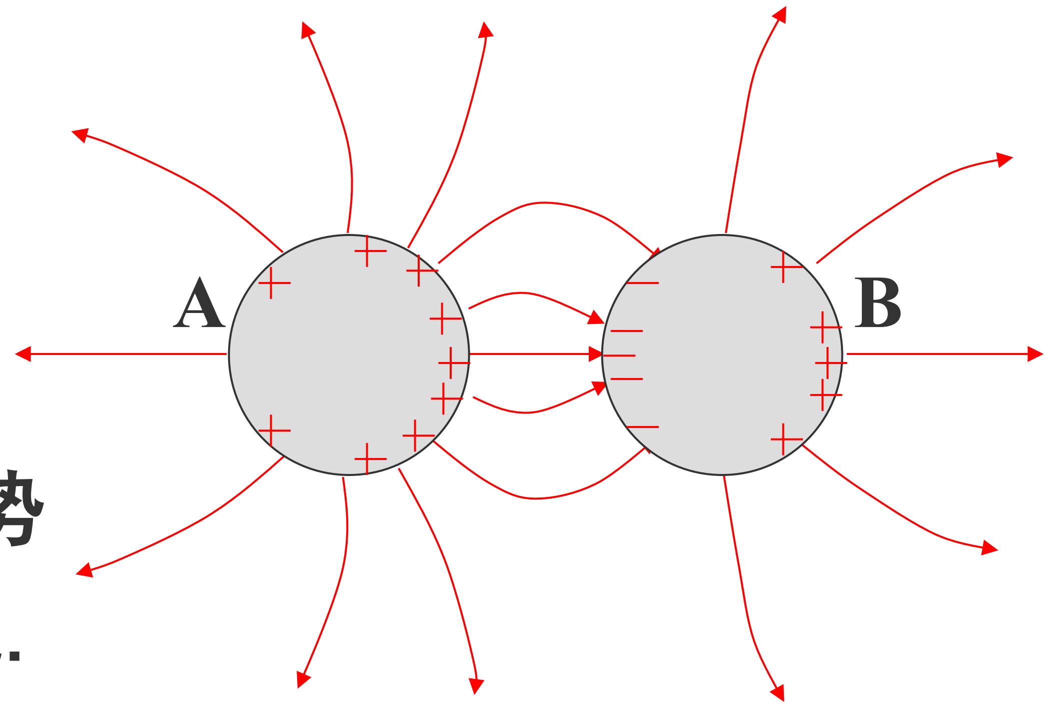
静电平衡时的导体

2 用电势来表述

导体是等势体，其表面是等势面

思考

下面这些说法对不对？



1. B球上正电荷处电势高，负电荷处电势低.

2. B球上正电荷发出的电场线可以指向它的负电荷.

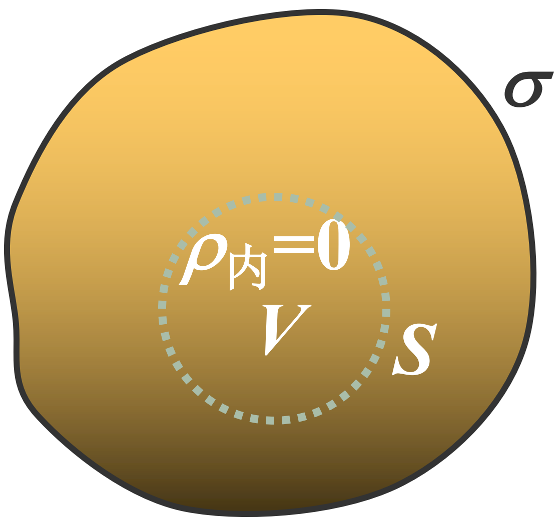
3. 两球再靠近, 会不会A球左侧出现负电荷？

本章分析问题的出发点：假定平衡分布已经达到，以上述平衡条件为出发点，结合静电场的普遍规律（如高斯定理，环路定理等）去进一步分析问题。

§ 14.2 静电平衡的导体上的电荷分布

一. 导体静电平衡时电荷分布在表面

1. 实心导体　σ可不为0，但$\rho_{内}$必为0。



证明:

$$\because \quad \vec{E}_{内}=0,$$

$$\therefore \quad \oint_S \vec{E}_{内}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_{内}\, dV=0,$$

S是任意的

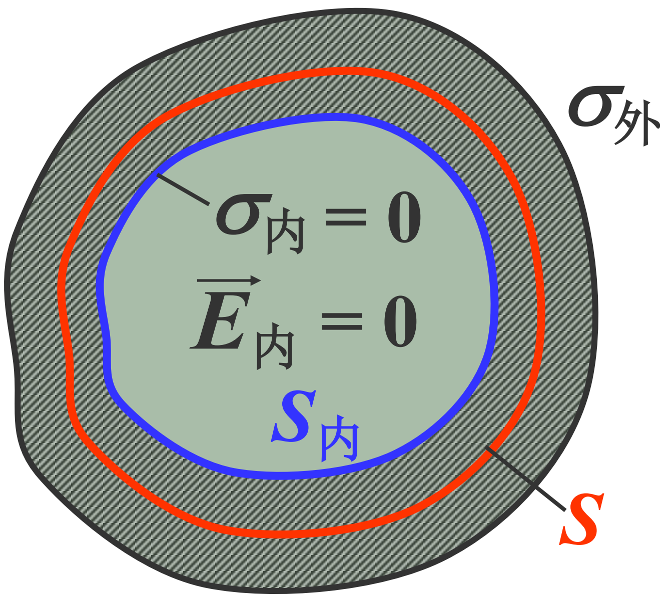
令$S\to 0$，则必有$\rho_{内}=0$。

2. 导体壳　　腔内无带电体　$\sigma_{外}$可不为0，但

（1）内表面处处没有电荷，$\sigma_{内}=0$

（2）腔内无电场，$E_{内}=0$

证明：　在导体壳内紧贴内表面作高斯面S

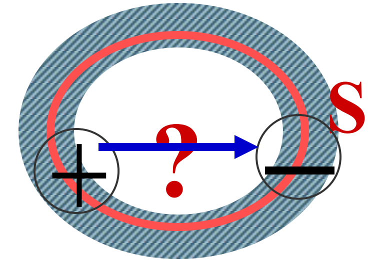


$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=0$$

高斯定理 → $$\sum_i q_i = 0$$

→ $$Q_{内表面}=0$$

若内表面有一部分是正电荷
一部分是负电荷



则会从正电荷向负电荷发电场线

与等势矛盾　　证明了上述两个结论

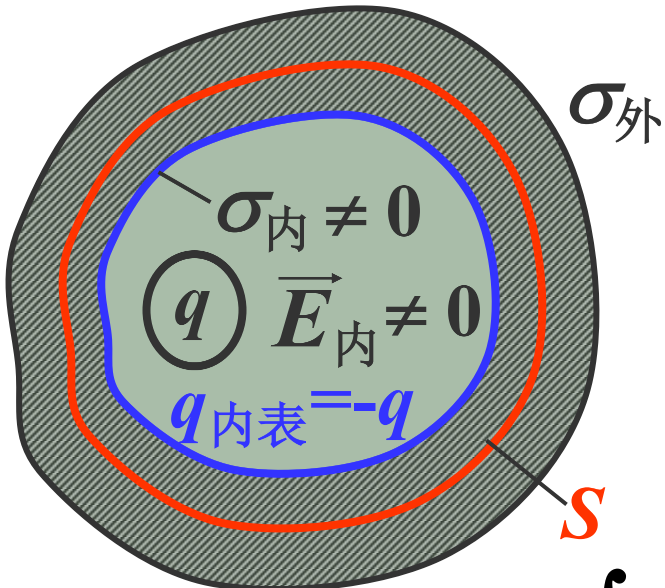
注意：

未提及的问题
1) 导体壳是否带电?
2) 腔外是否有带电体?

说明：腔内的场与腔外(包括腔的外表面)的电量及分布无关

3.导体壳内有电荷： $\sigma_{外}$可不为0，但必有$\sigma_{内}\neq 0$，

且 $q_{内表}=\oint_S \sigma_{内}\,\mathrm{d}s=-q$



证明：

在导体中包围空腔做高斯面S，则：

$$\oint_S \vec{E}_{导内}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}(q+q_{内表})=0$$

$$\therefore \quad q_{内表}=-q$$

注意：

未提及的问题

1) 导体壳是否带电?

2) 腔外是否有带电体?

结论：腔内的场只与腔内带电体及腔内的几何因素、介质有关

*库仑平方反比律的精确验证

利用电荷只分布在导体外表面上的结论。

如果点电荷之间的相互作用力偏离了平方反比律，即

$$F \propto \frac{1}{r^{2\pm\delta}}$$

δ—平方反比律的指数偏差

则高斯定理不成立，从而导体上的电荷也不完全分布在外表面上。

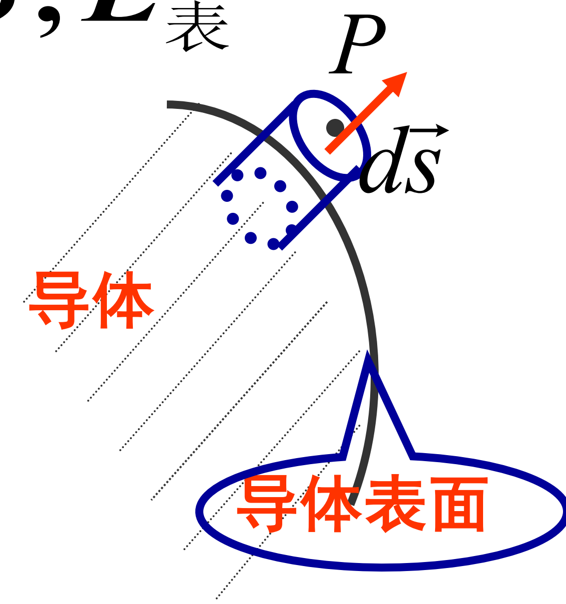
用实验方法来研究导体内部是否确实没有电荷，可以验证平方反比律。

$$\delta \sim 2.7\times10^{-16}$$

二. 表面场强与面电荷密度的关系

设导体表面电荷面密度和场强为 $\sigma, \vec{E}_{表}$

P是导体外表面的一点



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{表} dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

$$E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ 写作 $$\boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

$\hat{n}$ ：外法线方向

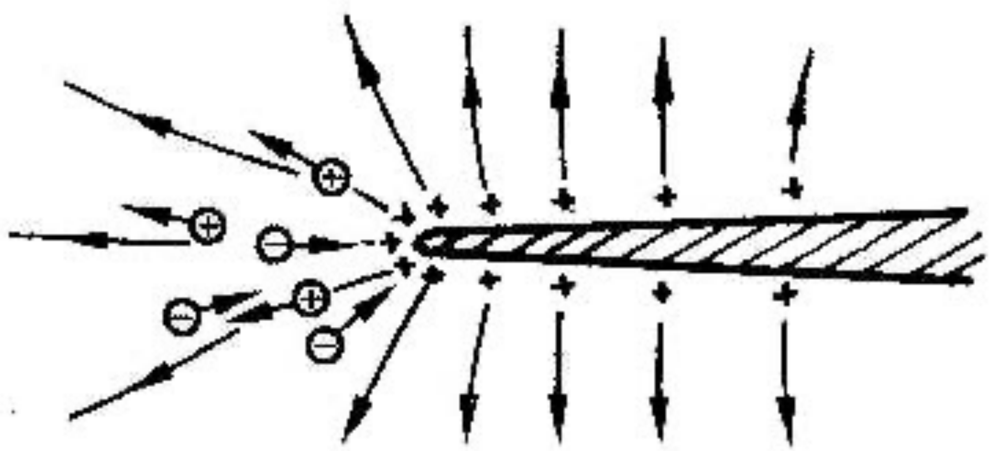
思考：$\vec{E}_{表}$是小柱体内电荷的贡献还是导体表面全部电荷的贡献？从推导中的哪一步可看出？

三. 孤立导体表面电荷分布的特点

孤立导体表面曲率大处面电荷密度也大，但不存在单一函数关系。

尖端放电（point discharge）：

带电的尖端，场强大，使附近的空气电离，因而产生放电。



§ 14.3 有导体存在时静电场的分析与计算

原则：

1.静电平衡的条件

$$\boxed{E_{内} = 0} \qquad \boxed{or\ \varphi = c}$$

2.基本性质方程

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

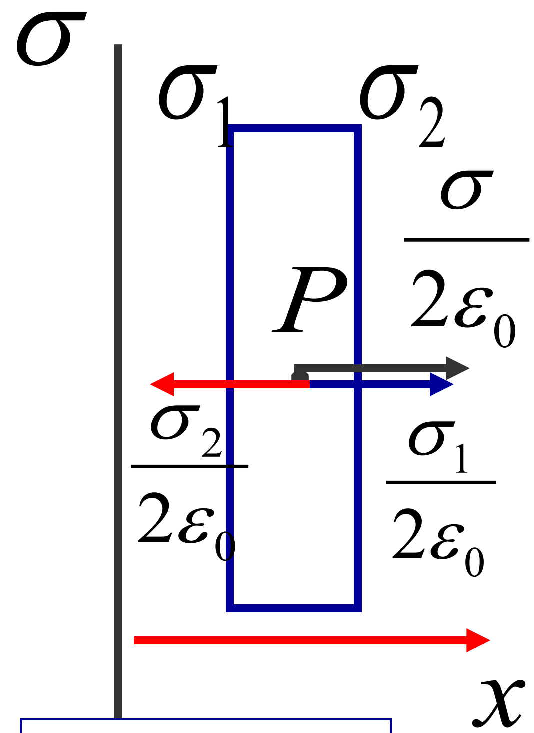
3.电荷守恒定律

$$\boxed{\sum_i Q_i = const.}$$

【例1】无限大的带电平面的场中平行放置一无限大金属平板

求：金属板两面电荷面密度

解：设金属板面电荷密度 σ_1，σ_2



由电量守恒

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \qquad (1)$$

导体体内任一点P场强为零

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad (2)$$

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma}$$

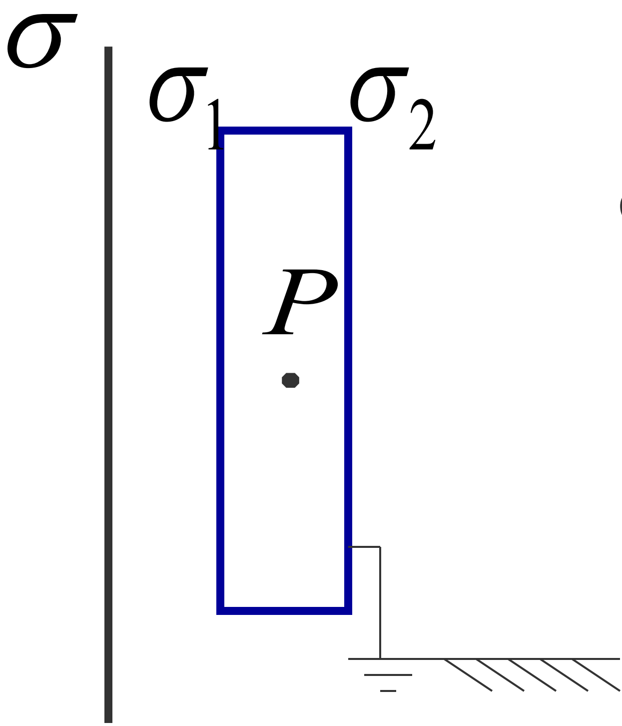
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma}$$

接地含义：

(1) 提供电荷流动的通道

（导体上的电量可变）

(2) 导体与地等电势



于是，必有 $\sigma_2=0$

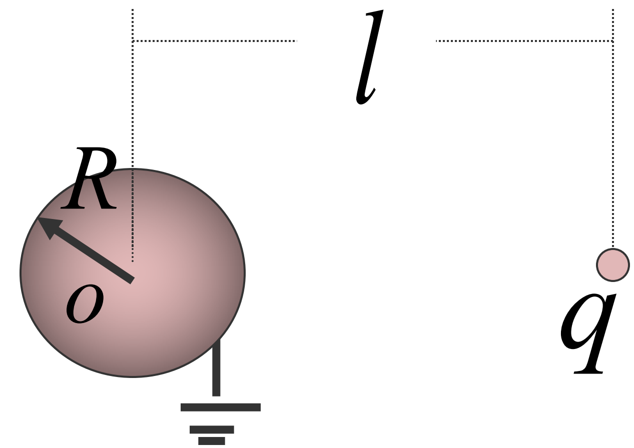
$\sigma_1=?$ 仍利用由静电平衡条件：

$$E_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = -\sigma$$

【例2】接地导体球附近有一点电荷，如图所示。

求：导体上感应电荷的电量



解： 接地即 $\varphi = 0$

设：感应电量为Q

由导体是个等势体

o点的电势为0，则

$$\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0}$$

$$\boxed{Q = -\frac{R}{l} q}$$

§ 14.4　静电屏蔽

见 § 14.2，导体壳

空腔内的场与导体壳外(包括导体壳的外表面)的电量及分布无关

在空腔内　$\vec{E}_{\substack{\text{壳外表面}\\\text{电荷}}} + \vec{E}_{\substack{\text{壳外}\\\text{带电体}}} = 0$

保护空腔内区域不受外界场的影响

导体壳起到了屏蔽外面电荷电场的作用

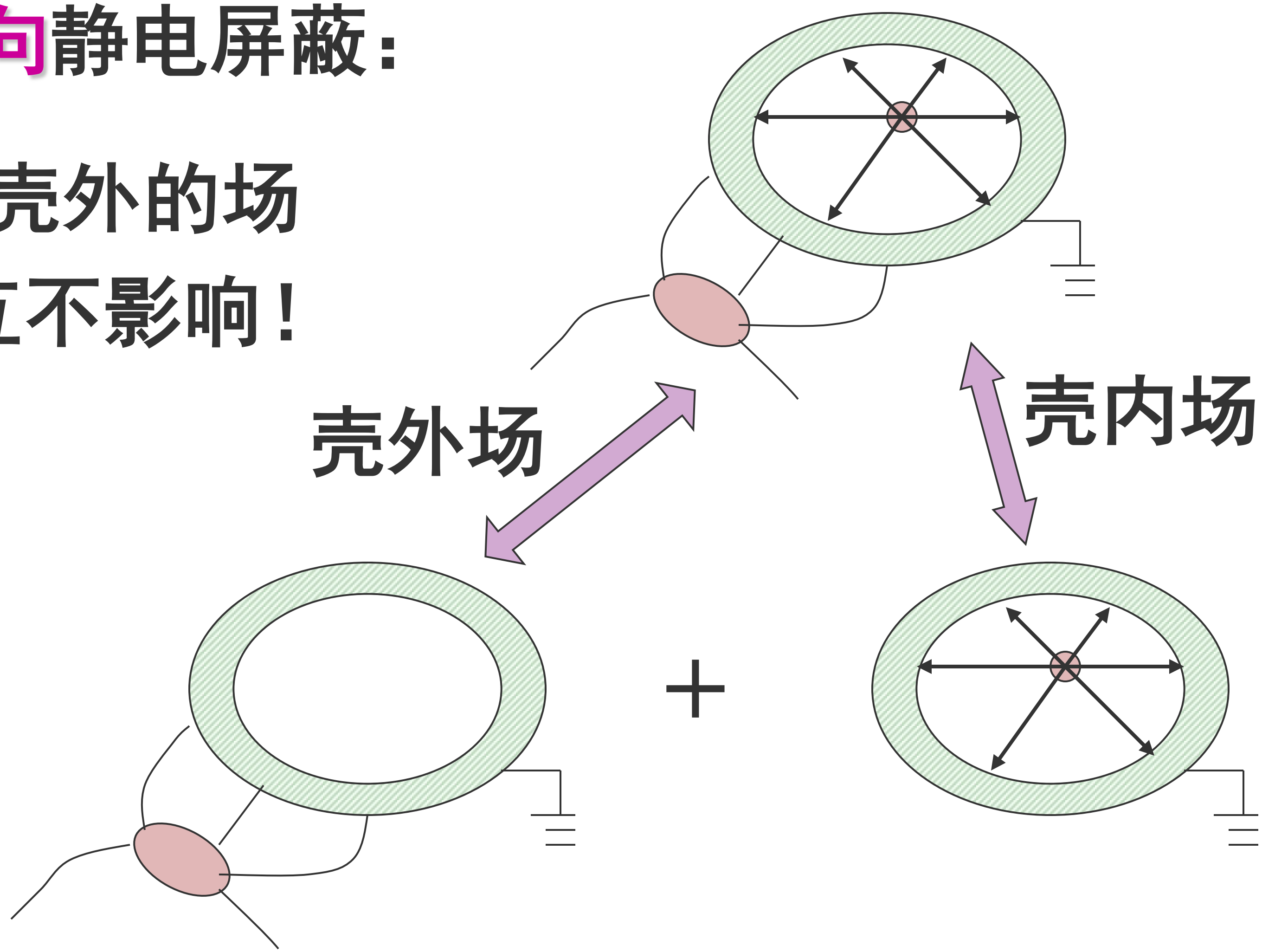
——静电屏蔽

静电屏蔽的装置----接地导体壳

实现双向静电屏蔽：

壳内、壳外的场

互不影响！



§14.5 唯一性定理

只关心某一区域内场的求解，通过边界条件反映未知的域外电荷对域内场的影响。

一. 唯一性定理

在给定的区域中,若电荷分布确定，则边界上按下列条件之一给定，域内的静电场必唯一。

这些条件是

1. 给定各边界上的电势分布 $\varphi_{si}\ (i=1,2,3\cdots)$

导体：给定每个导体的电势

2. 已知各边界面均为等势面，并给定了各闭合边界面的电通量

$$\text{即}\ \varphi_{si} = c_i, \qquad \oint_{si} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi_{si}\text{已知}$$

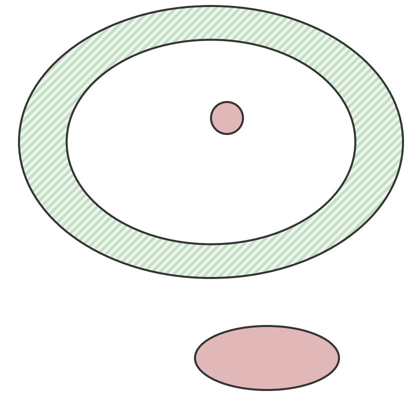
导体：给定每个导体上的总电量

3. 一部分按（1）给出，另一部分按（2）给出 (混合条件)

意义：只要找出一种解，满足给定的边界条件，它就是该问题的唯一正确解。

二、应用

1. 静电屏蔽(导体壳)



壳内域：

(1) $\boldsymbol{q_{内} = 0, \quad \varphi_{S内} = c}$

$$\therefore \vec{E}_{内}\text{唯一}\ ,\vec{E}_{内} = 0$$

(2) $q_{内}$ 给定, $\varphi_{S_{内}} = C, \quad \oint_{S_{内}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 确定

$$\therefore \vec{E}_{内}\text{唯一}$$

封闭导体壳屏蔽了壳外电荷对壳内电场的影响

壳外域：

$q_{外}$ 给定， $\varphi_{S_{外}} = C$ ； $\oint_{S_{外}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{内}}{\varepsilon_o}$， $\varphi_{\infty} = 0$

$\therefore$ 只要 $q_{内}$ 大小不变（壳内电荷可在壳内移动）， $\vec{E}_{外}$ 就唯一确定。

接地导体壳可屏蔽壳内与壳外电荷间的相互影响

2 电像法

用与原电荷**相似**的若干**点**电荷或**线**电荷

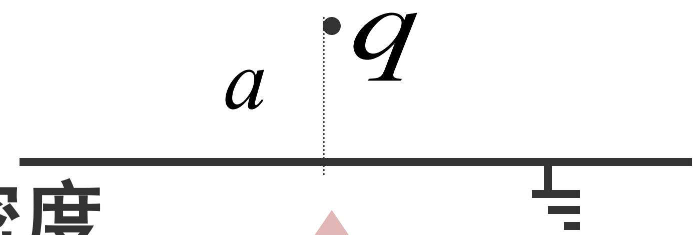
代替实际导体上的**感应电荷**，

来计算原电荷与感应电荷合成的场。

这些相似的电荷称为**镜象电荷**。

例 无限大接地导体平板附近有一点电荷 q

求：1)点电荷一侧的场的分布

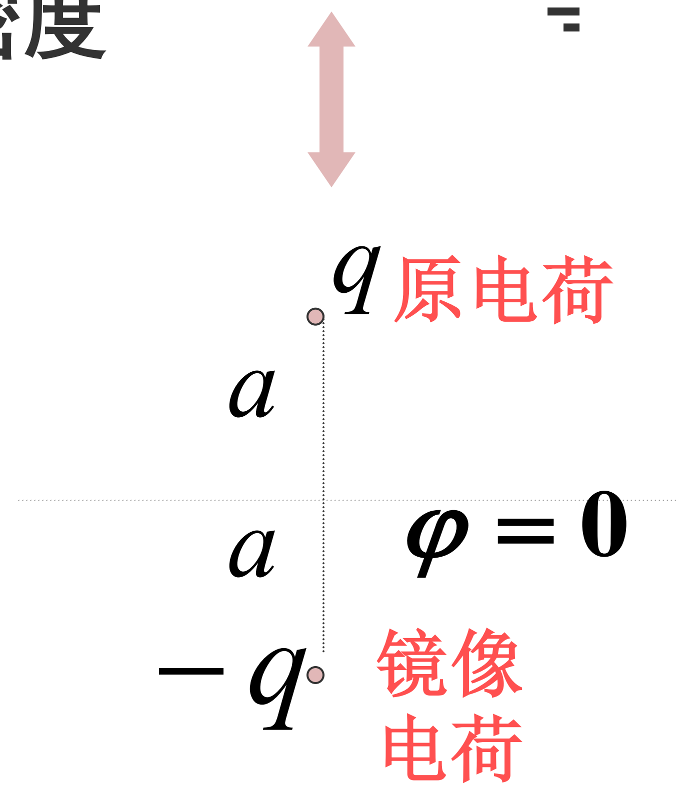


2)导体表面的感应电荷面密度

解：

$$\varphi_{平板}=0 \qquad \varphi_{\infty}=0$$

域内解唯一



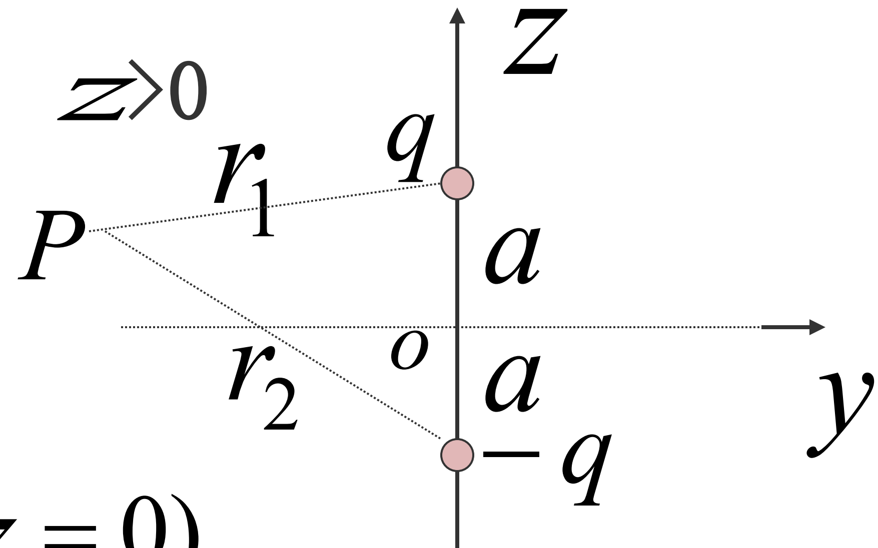
取镜像电荷

$$Q'=-q$$

镜象电荷与原电荷产生的合场满足同样的边界条件

1)求场量

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_1}{r_1^2} - \frac{\hat{r}_2}{r_2^2}\right)$$

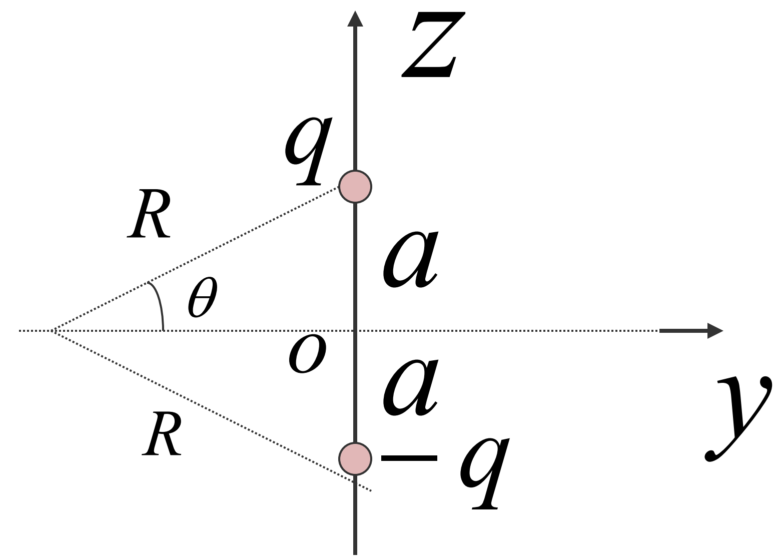


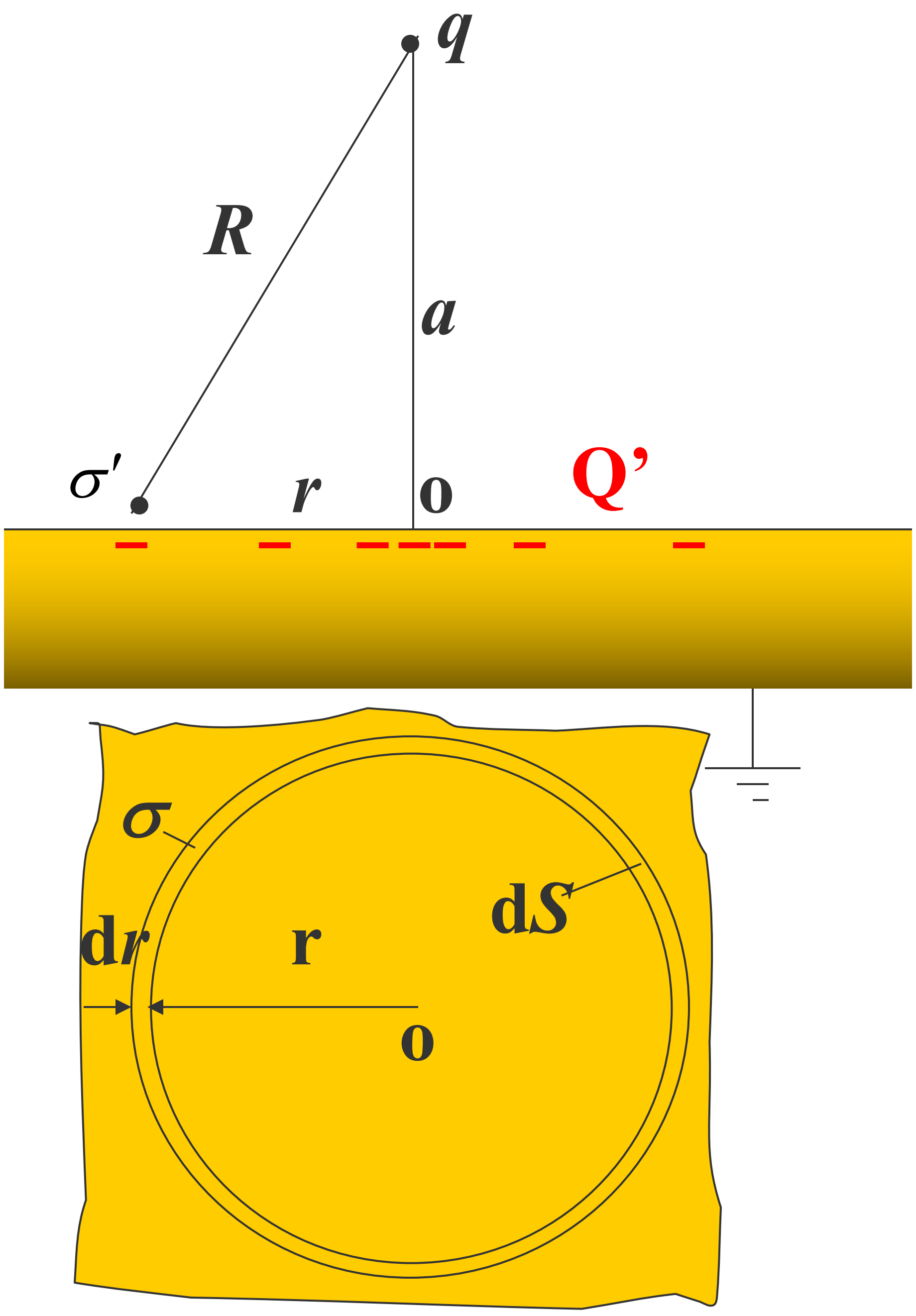
2)平板上电荷面密度 $(z=0)$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{z=0}$$

$$= \varepsilon_0 \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta$$

$$= \frac{q}{2\pi R^2}\frac{a}{R} = \frac{qa}{2\pi R^3}$$





$$Q' = \int \sigma \, \mathrm{d}\, s$$

$$= \int_0^\infty -\frac{qa}{2\pi R^3} 2\pi r \, \mathrm{d}\, r$$

$$= -qa \int_0^\infty \frac{r \, \mathrm{d}\, r}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$= -qa \cdot \frac{1}{a} = -q$$

电像法

1)基本思想

在域外放置适当的电像，等效导体边界上未知的感应电荷对域内电场的影响

（电像的大小、位置随具体情况而定）

2)理论根据

唯一性定理

特点：简单，但可解决的问题有限