第十三章 电势（Electric Potential）

§ 13.1 静电场的保守性

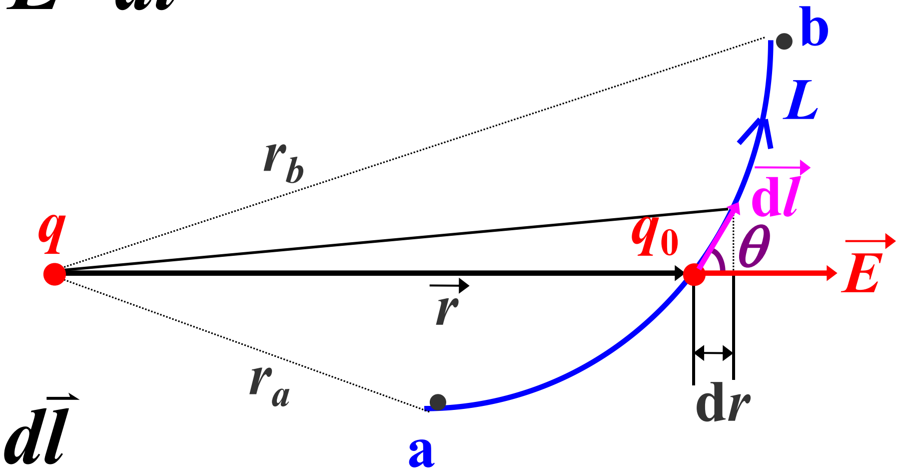
一、静电场是保守场

1、点电荷的静电场是保守场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$ 有心力场

单位正电荷沿任意路径由点$a \to b$，电场力做的功只与起、终点位置有关，与移动的路径无关。

$$A=\int_{(a)}^{(b)} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\frac{A}{q_0}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(a)}^{(b)}\frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{(a)}^{(b)}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\cdot dl$$

$$=\int_{r_a}^{r_b}\frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_o r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

点电荷的静电场是保守场

2、任意电荷体系的静电场是保守场

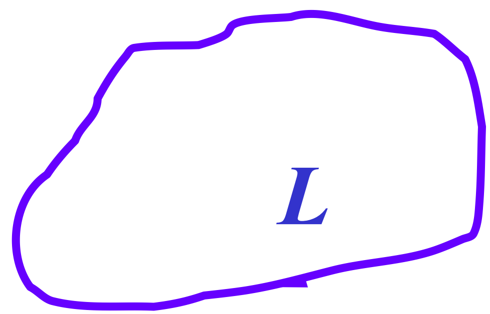
电荷体系由多个点电荷组成—场叠加原理

$$\underbrace{\int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\text{路径无关}} = \int_{(a)}^{(b)} \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i \underbrace{\int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l}}_{\text{路径无关}}$$

二、静电场的环路定理— 保守性的表述

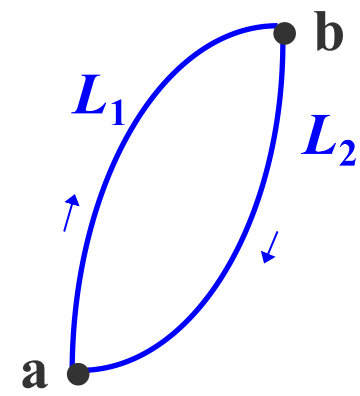
静电场强沿任意闭合路径的积分等于零

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



证明

$$\int_{a\,(L_1)}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{a\,(L_2)}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{b\,(L_2)}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\therefore \quad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

三、高斯定理与环路定理完备描述静电场

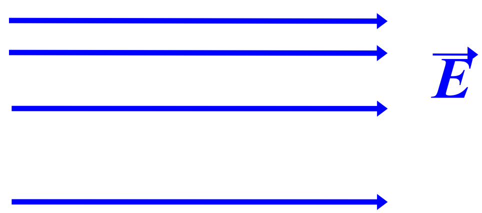
$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S)} q_i$$ （对任意电场都成立）有源

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$ （只对静电场成立） 无旋

说明

1. 环路定理是静电场的基本方程之一，表明静电场是保守场，非静电场不具备此性质！

问题



电场线

是静电场吗？

2. 保守场，静电场的电场线不能闭合

反证：设电力线闭合 $\longrightarrow \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} \neq 0$

违背环路定理，假设不成立

§13.2　电势差和电势

静电场是保守场—定义电势差

一、电势差

把单位正电荷由点$a \to b$电场力做的功。

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势的减少＝电场力做的功

二、电势

选 b 点为电势零点：$\varphi_b = 0$，则 a 点电势

$$\varphi_a = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

——把单位正电荷自该点移到电势零点，电场力做的功。

把单位正电荷自电势零点移到该点——外力做的功。

电势零点的选择：

电势零点(参考点)的选择任意,视分析问题方便而定参考点不同：电势不同 电势差不变

*电荷分布在有限范围—选无穷远为电势零点

$$\varphi(p)=\int_{p}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

通常选地球为无穷远电势零点。

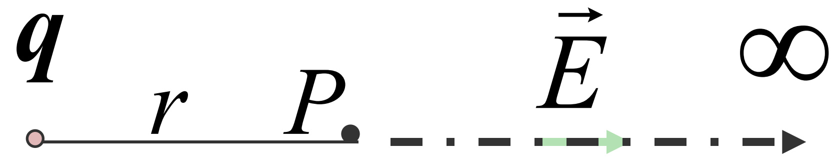
*电荷分布到无限远时，电势零点不能选在无限远。

三、 电势的计算

（已知电场强度分布，由定义求电势）

【例1】点电荷场的电势公式

选无穷远为电势零点

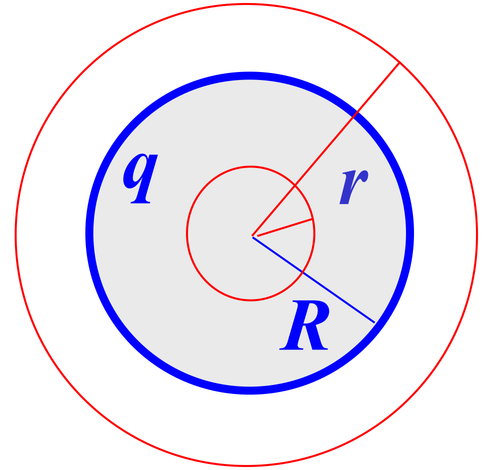


$$\varphi(r)=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

*球对称

*标量

【例2】均匀带电球体的电势

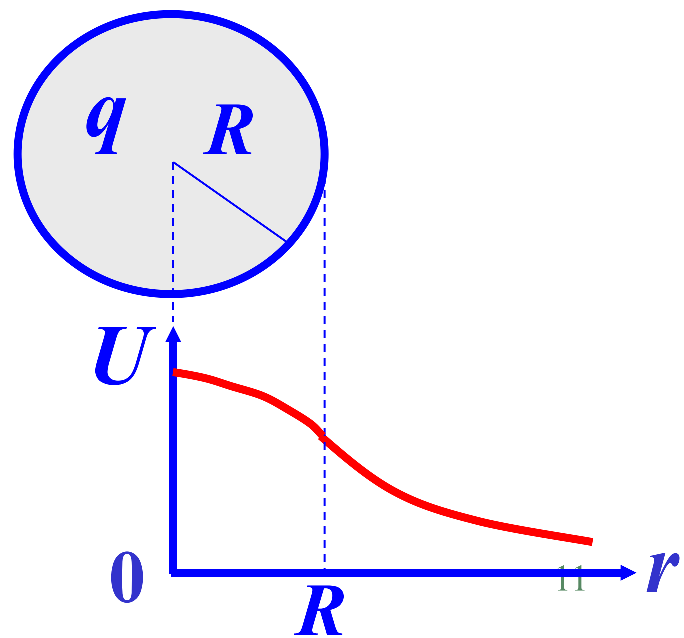


$$\vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\hat{r},\quad r<R$$

$$\vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r},\quad r\geq R$$

$$r<R:\quad \varphi(r)=\int_r^R E_1\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}E_2\mathrm{d}r=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2-r^2\right)$$

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[3R^2-r^2\right], & r<R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases}$$

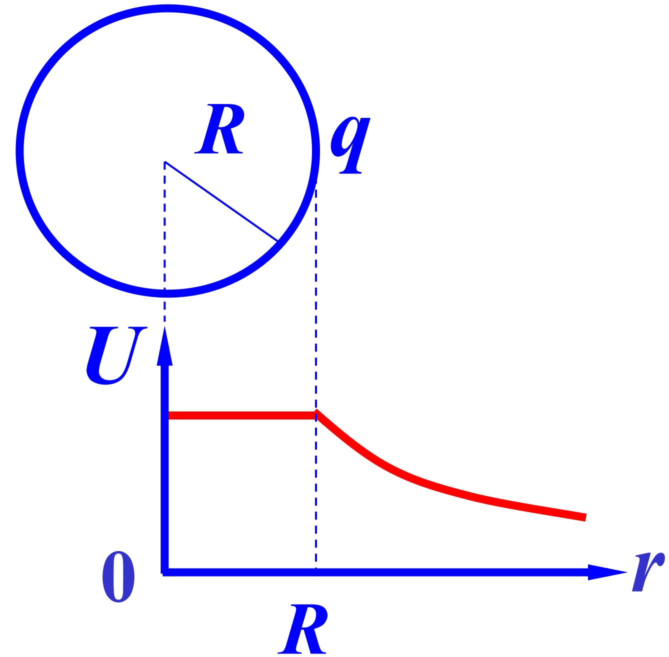


球心：$\varphi(0)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

【例3】均匀带电球面的电势

$$r < R \quad E = 0$$

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



$$r < R \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$r > R \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

球面内等电势，等于球面上的电势。

球面外点的电势等于处于球心的“点电荷”在该点的电势。

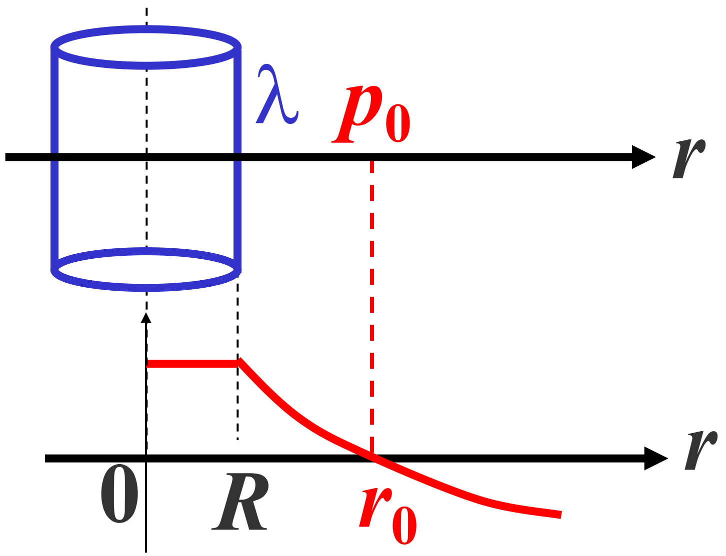
【例4】无限长圆柱面(线电荷密度λ) 的电势

电场分布： $E=0,\quad r<R$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad r>R$$

电势分布： 选 $p_0\,(r=r_0)$ 点为电势零点

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\dfrac{r_0}{R}), & r<R\\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\dfrac{r_0}{r}), & r>R\end{cases}$$



§ 13.3 电势叠加原理

对点电荷系的电场，其中任一场点的电势等于各点电荷单独在该点产生的电势的叠加。

证明：

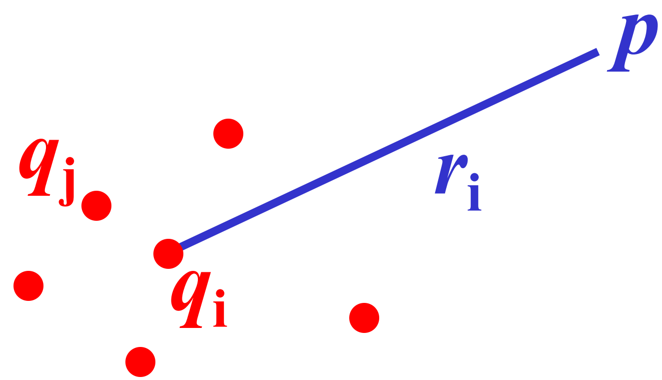
由 $\varphi=\int_{(p)}^{(p_0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 及 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$ 得

$$\varphi=\int_{(p)}^{(p_0)}\left(\sum_i \vec{E}_i\right)\cdot d\vec{l}=\sum_i\int_{(p)}^{(p_0)}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_i \varphi_i$$

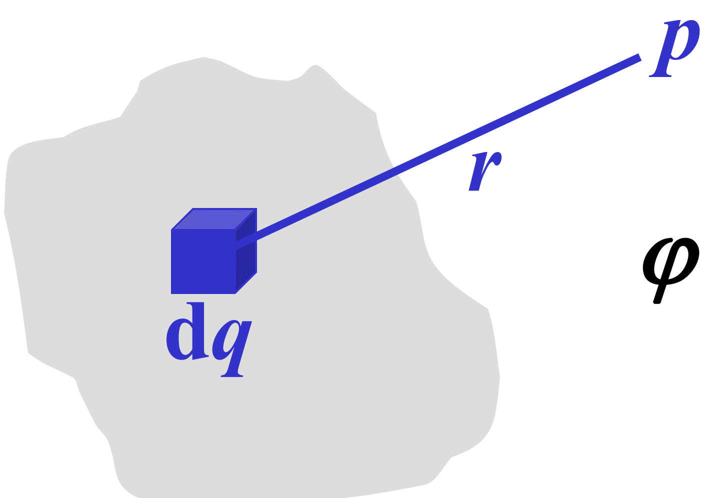
电势零点P_0必须是共同的

1、点电荷体系

$$\varphi(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



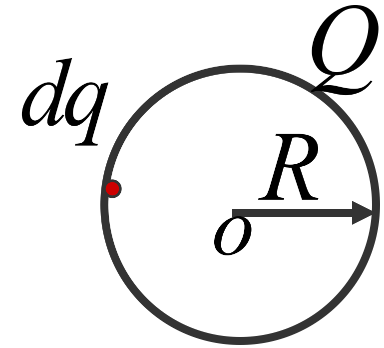
2、连续分布的电荷体系



$$\varphi(p)=\iiint_{(\text{电荷体系})}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

【例】求电量为 Q 的带电球面在球心的电势

解：在球面上任取一电荷元 $\mathrm{d}q$



$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由电势叠加原理全部电荷在球心的电势为：

$$\varphi = \int_{(Q)} d\varphi = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

思考：* 结果与电量分布均匀与否有关吗？

* 圆环、一段圆弧如何？

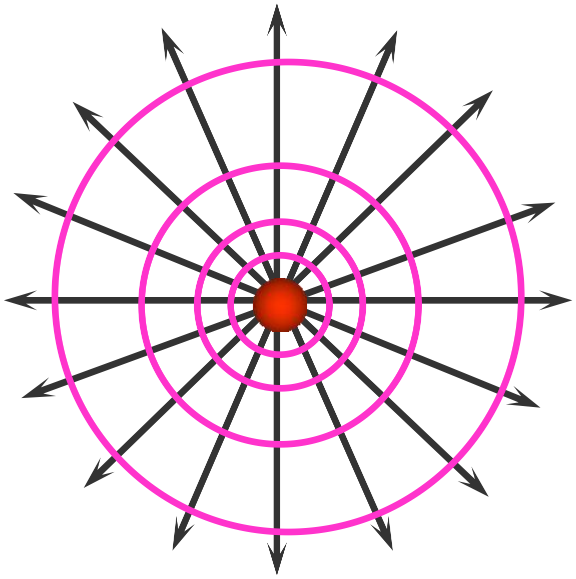
§ 13.4 电势梯度

一、等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面

满足方程 $\boxed{\varphi\left(x, y, z\right) = C}$

例：点电荷 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = C$ 同心球面

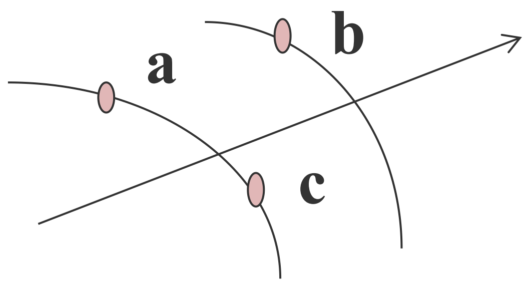


二、电场线与等势面的关系

1、电场线处处垂直等势面，并指向电势降低的方向。

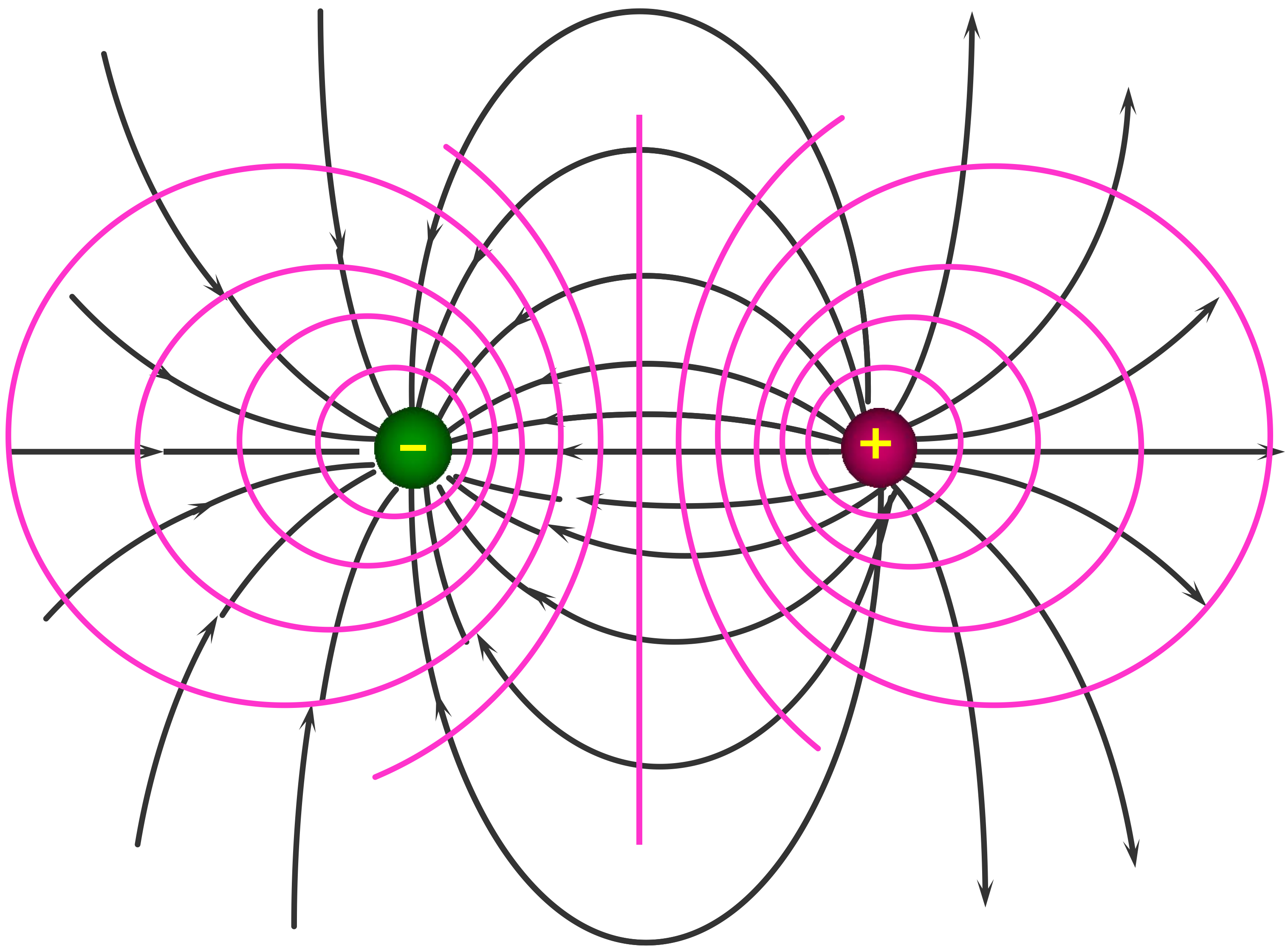
2、两等势面相距较近处的场强大，相距较远处场强较小。

等势面的疏密反映了场的强弱

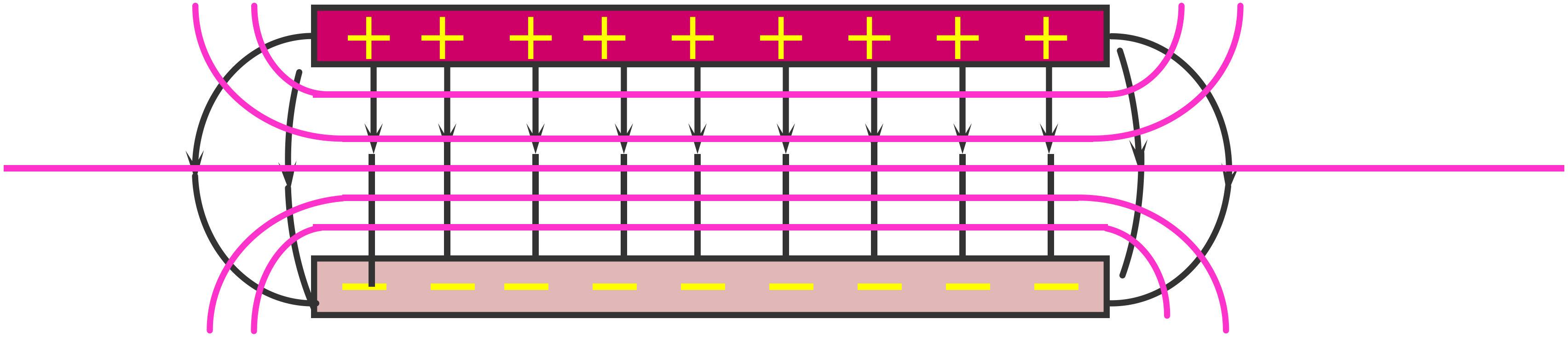


典型等势面

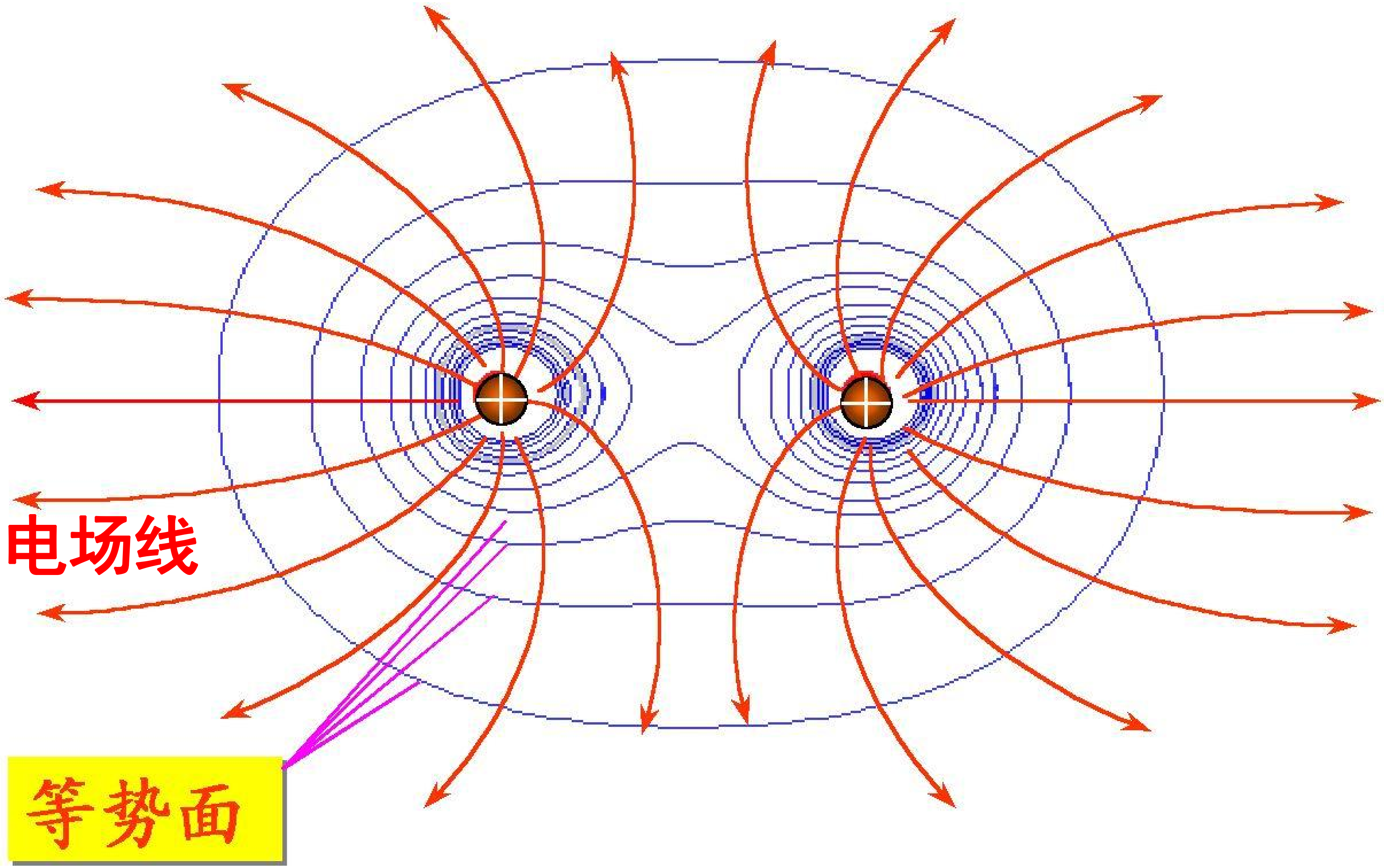
电偶极子的等势面

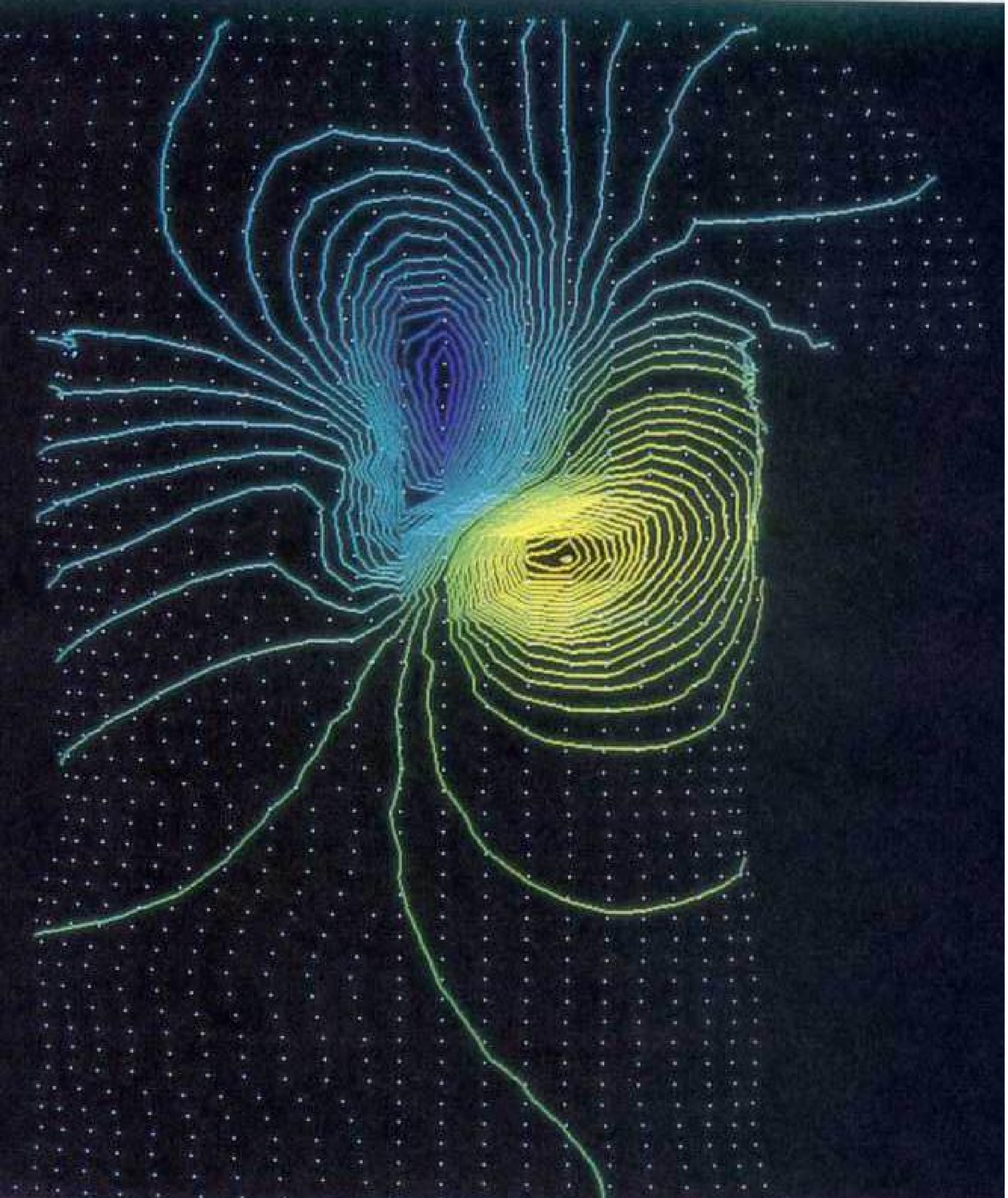


电平行板电容器电场的等势面



两相等点电荷的等势面





人心脏的等电势线，类似于电偶极子。

三、场强与电势的关系

1. 积分关系

$$\int_{(p_1)}^{(p_2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 = -(\varphi_2 - \varphi_1)$$

2. 微分关系

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi}$$

电场强度等于电势梯度的负值

（类似力学中由势能求保守力）

【例】由偶极子电势求场强（已知q、l）

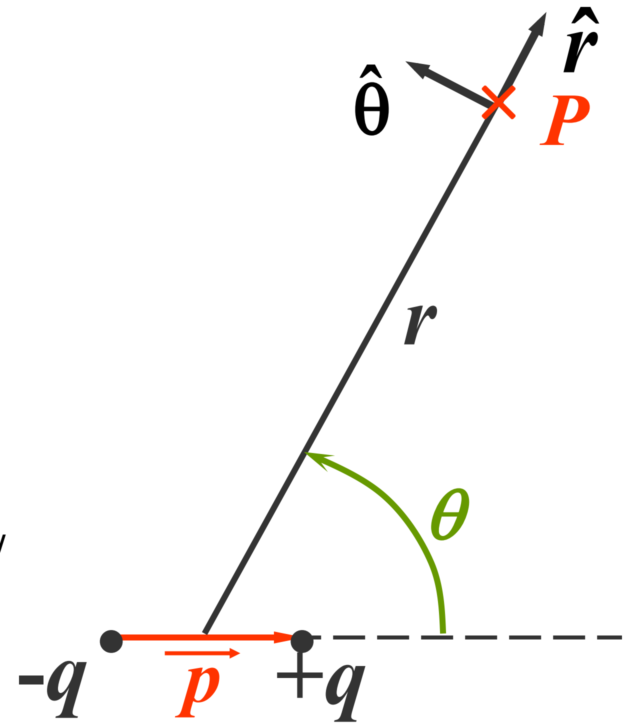
解：偶极子电势

$$\varphi(\theta,r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$=\frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

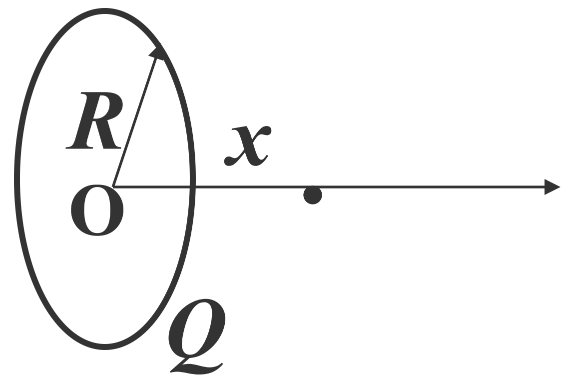
$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial l_r}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=E_{//}$$

$$E_\theta=-\frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta}=-\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=E_\perp$$



【例】试由均匀带电圆环轴线上任一点的电势梯度求相应场强（已知Q、R、x）

解： 由电势叠加有



$$\varphi(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

由电荷轴对称分布，有

$$E=E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

与直接由场强叠加结果同

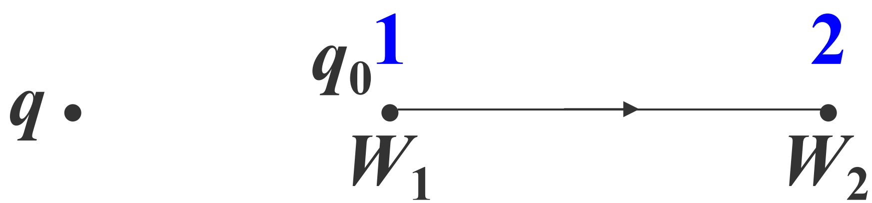
讨论：电荷分布不均匀，情况如何？

$\varphi(x)$, E_x 的结果还正确吗？ √

$$E\neq E_x$$

§13.5 电荷在外电场中的静电势能

把电荷q_0从电场中的1点移到2点过程中，电场力做的功为



$$A_{12}=q_0\int_{(1)}^{(2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=W_1-W_2$$

电势能 $W=q\varphi$

“电荷与电场的相互作用能”

§ 13.6 电荷系的静电能

一、点电荷体系的相互作用能

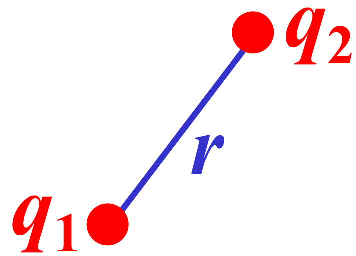
把 n 个静止点电荷从现有位置彼此分散到无穷远时，它们间的静电力所做的功，称为这 n 个点电荷间的相互作用能

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i$$

其中φ_i为 q_i 所在处，由 q_i 以外的其它电荷所产生的电势。

证明：

1、n=2



固定q_1，把q_2移到无限远电场力做的功

$$W=\int_r^{\infty}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

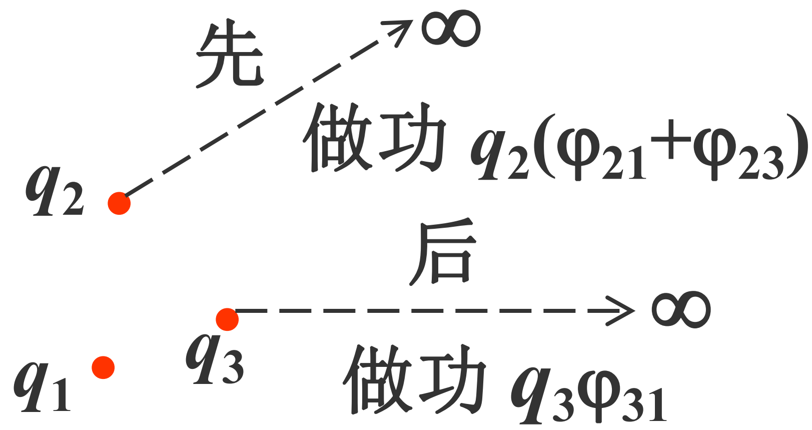
$$\varphi_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad \varphi_1=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$W=\varphi_2 q_2=\varphi_1 q_1$$

写成对称形式即 $W=\dfrac{1}{2}\left(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2\right)$

2、n=3

$$W = q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_3\varphi_{31}$$



$$= \frac{1}{2}(q_2\varphi_{21} + q_1\varphi_{12}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(q_2\varphi_{23} + q_3\varphi_{32}) + \frac{1}{2}(q_3\varphi_{31} + q_1\varphi_{13})$$

$$= \frac{1}{2}q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + \frac{1}{2}q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + \frac{1}{2}q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32})$$

$$= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

类推，得 $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$

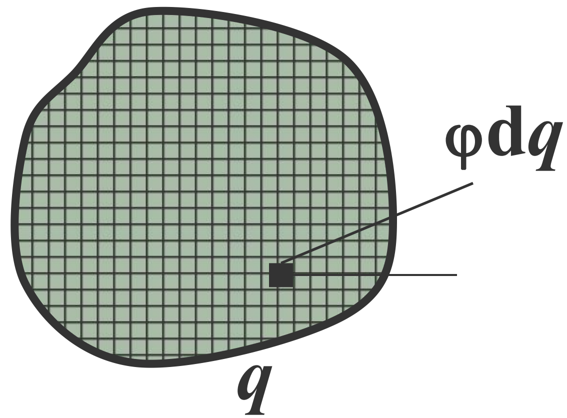
证明需用归纳法

二、连续带电体的静电能（自能）

静电能W：把电荷无限分割并分散到相距无穷远时，电场力做的功

- 只有一个带电体

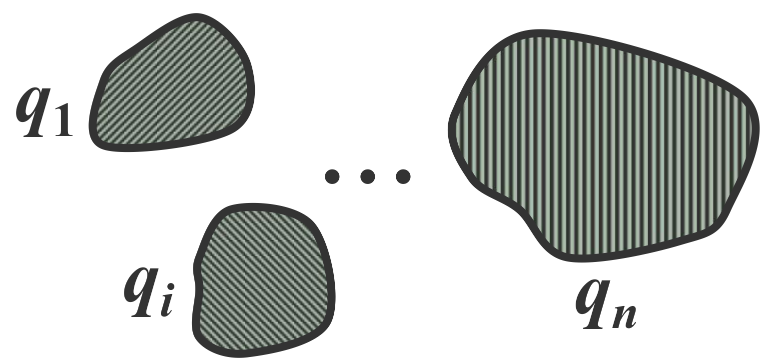
$$W = W_{自} = \frac{1}{2}\int_q \varphi dq$$



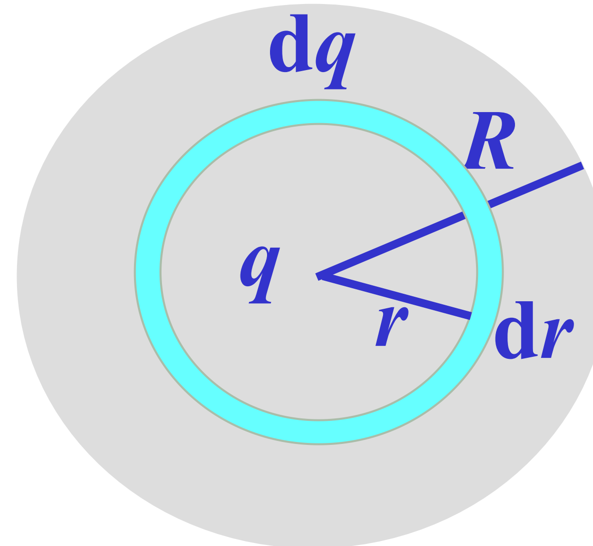
U为所有电荷在dq 处的电势

- 多个带电体

$$W = \sum_i W_{自i} + \sum_{i<j} W_{互ij}$$



【例】均匀带电球体的静电能



分割成同心薄球壳（dq）所在处的电势为

$$\varphi(r)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$$,静电能为

$$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi(r)\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int_0^R \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2-r^2\right)\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

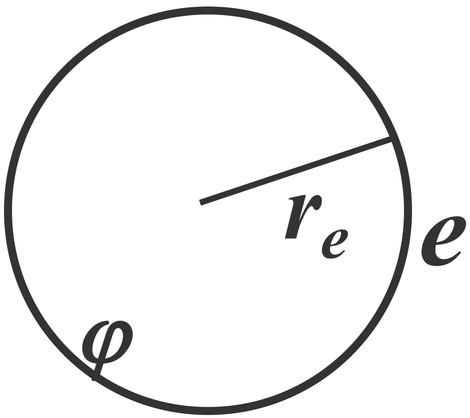
$$\boxed{W=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}$$

若q不变, $R\to 0, W\to\infty$ ：点模型的发散困难

若ρ不变, $R\to 0, W\to 0$ ：电荷元dq 的自能为零

【例】估算电子的经典半径，设 $W \doteq m_0c^2$

且电荷均匀分布于电子表面



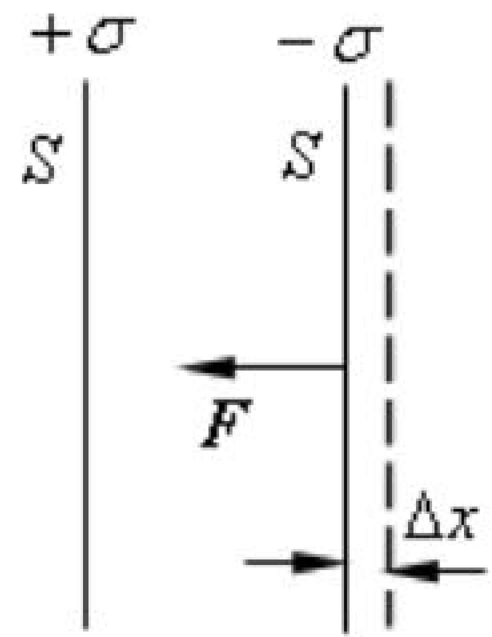
$$W = \frac{1}{2}\int_e \varphi dq = \frac{1}{2}\varphi e = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} \doteq m_0c^2$$

$$\therefore r_e \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2} \doteq 1.4\times10^{-15}\,\mathrm{m}$$

若将电子看作均匀带电球，则

$$W = \frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}, \qquad r_e \doteq \frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}$$

§ 13.7 静电场的能量



两个均匀带电大平行板

电场被定域在两板之间，场强：

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

负电板受正电板引力： $F=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma S$

让负电板右移Δx，**外力做功：** $A=F\Delta x=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S\Delta x$

——转换成体积为$S\Delta x$的电场能量，因此

静电场的能量定域在电场中

能量密度 $$w_e=\frac{A}{S\Delta x}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$