

國立中央大學機械工程學系

專題研究計畫書

研究主題：具顆粒減振轉子之動平衡系統

指導教師：吳育仁 老師

姓名：曾柏翔、陳泓霖

吳育仁
2020.9.28

民國 109 年 03 月 10 日

目錄

| | |
|---------------------|----|
| 摘要----- | II |
| ABSTRACT----- | II |
| 一、前言----- | 1 |
| 二、研究目的----- | 1 |
| 三、文獻探討----- | 1 |
| 四、研究方法----- | 2 |
| 五、結果與討論----- | 7 |
| 六、結論、遭遇困難及未來展望----- | 11 |
| 七、參考文獻----- | 12 |

摘要

機械元件常因裝配誤差、加工誤差等因素，無法避免動不平衡的產生，進而產生振動。振動抑制一直以來都是傳動系統中的重要課題，其中一種常見的方式為阻尼顆粒減振技術。目前該技術已廣泛應用在土木工程、機械工程與航空工程等領域，證實其能達成減振之效果，故本研究將應用阻尼顆粒減振技術同時進行轉子動平衡及振動抑制。本研究設計一具偏心質量之轉子模型，透過動平衡相關數學理論，藉由填充顆粒達成配重之效果，並建立一多體動力學(Multi-body Dynamics, MBD)和離散元素法(Discrete Element Method, DEM)之雙向耦合分析模型，量測轉子質心軌跡及質心加速度，以瞭解系統和阻尼顆粒間之交互行為及其對振動產生之影響。結果顯示，填充阻尼顆粒顯著地降低轉子系統之振動，且有效達到動平衡的效果；此外，因減振機制是由顆粒間摩擦及顆粒與壁面間摩擦主導，在填充率提升下，顆粒與顆粒間、顆粒與壁面間之接觸頻率因而增加，導致減振效果隨之提升。

關鍵詞：動平衡、阻尼顆粒、抑制振動、多體動力學、離散元素法

ABSTRACT

Dynamic unbalancing in a mechanical system is often caused by assembly and manufacturing deviations, which is one of the reasons to generate structure vibration. Vibration suppression has always been a significant issue in the transmission system, while adopting the particle damping technology (PDT) is one commonly-used solution. This technology has been widely applied in civil, mechanical and aeronautical engineering fields and proven its practicability. In this study, the PDT is extensively applied on simultaneously achieving the dynamic balancing and vibration suppression of a rotor-bearing system. A rotor with an eccentric mass is predefined and supported by two bearings, and then two counterweights filled with damping particles are designed according to the dynamic balancing theory. A two-way coupled simulation model based on multi-body dynamics (MBD) and discrete element method (DEM) is developed to simulate the motion trajectory and the vibration acceleration of rotor mass center. Interactive behavior between the rotor and the damping particles is investigated. As the results show, the rotor system with the designed counterweights either significantly reduce its vibration but effectively achieve its dynamic balancing. In addition, the effectiveness of vibration suppression is improving with the increasing damping-particle filling rate since the friction frequency between any two particles or between any particle and the container wall is rising. The friction instead of the collision governs the vibration energy consumption in a centrifugal rotating system.

Keywords: dynamic balancing, gear transmission, vibration suppression, particle damping, multi-body dynamics (MBD), discrete element method (DEM).

一、前言

轉子運動過程中會因質心偏離旋轉軸線而產生離心慣性力，導致振動加劇，此將嚴重降低轉子及其他配件的精度與壽命。已有研究說明於轉動零件上開孔，並填入阻尼顆粒可有效抑制振動。然而，國內外尚未有相關文獻進一步研究是否可進一步利用阻尼顆粒同時達成動平衡之校正。故本研究將探討基於雙平面平衡法於偏心轉子上適當位置添加阻尼顆粒進行配重，以同時達到轉子動平衡及抑振之功效，並透過離散元素法軟體 EDEM 模擬顆粒運動行為，再利用多體動力學軟體 ADAMS 進行雙向耦合分析轉子質心軌跡與振動加速度。本研究亦針對不同顆粒填充率於不同軸向振動進行比較，並分析其對抑振效果差異之影響。

二、研究目的

對於軸向尺寸較大的迴轉體，由於加工上的誤差、幾何上的不對稱等原因，質心和迴轉軸線無法共線，故而會產生振動，進而需要透過雙平面平衡法進行動平衡校正。然而校正後，系統振動可能仍不符合需求。因此本研究將探討可否透過填充阻尼顆粒，同時達成動平衡校正及抑制振動之目標。為進行阻尼顆粒於旋轉系統之分析，本研究將利用工程分析軟體進行進一步的研究。目前基於 MBD 和 DEM 兩套理論之軟體已被廣泛應用於機械運動分析中，但卻鮮少有人利用應用對傳動系統進行模擬分析，故利用雙向耦合證實顆粒阻尼法在轉子動平衡上面是否具有效果，也在本研究所探討的範圍當中。

三、文獻探討

在過去的論文中，顆粒阻尼系統效果已經被證實具有減振效果。Ahmad 等人[1]在蜂窩狀懸臂樑內添加阻尼顆粒，透過實驗分析阻尼顆粒之填充率及質量比對懸臂樑振動特性之影響。而 Lu 等人[2]建立附加顆粒阻尼器結構的數值計算模型，對顆粒阻尼器之工作原理和控制方程式進行研究及數值分析，證明阻尼顆粒能藉由顆粒—顆粒及顆粒—壁面之間的碰撞與摩擦耗能達到抑振之效果。Chung 等人[3]利用圖 1 所示之顆粒與顆粒間及顆粒與孔壁間的 Hertz-Mindlin 接觸模型對不同運動情形下之誤差建立參考，並提出不同條件下之碰撞模型選用建議。

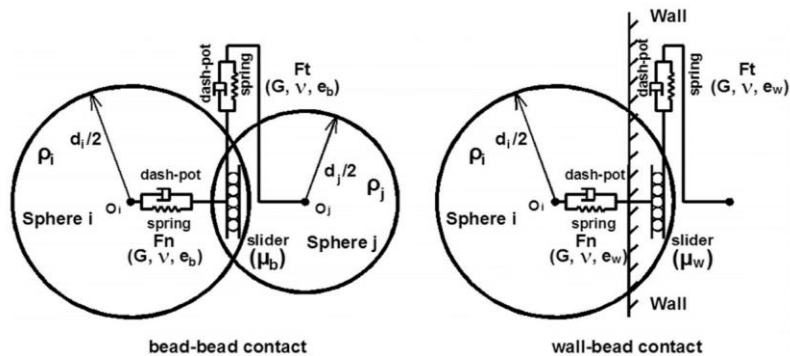


圖 1 顆粒—顆粒間及顆粒—壁面之接觸模型[3]

Xiao 及 Li [4]首創將阻尼顆粒添加至齒輪傳動系統中，探討不同轉速和負載下顆粒能量耗散與摩擦係數之間的關係，藉由實驗證實顆粒摩擦係數對系統抑振具有顯著影響。在離心場中，齒輪系統高速運轉，齒輪壁內的阻尼顆粒會受到離心力作用貼附在齒輪壁上，藉此可推算顆粒阻尼系統的質心運動。Huang 和 Lu [5]利用 NOPD 技術在轉子壓縮機分析阻尼顆粒減振效果，並探討旋轉速度和體

積對於阻尼顆粒之影響。Wu 及 Chung [6]首創將 MBD 及 DEM 之理論結合應用於分析如圖 2 所示之齒輪傳動系統，並提出相關之實驗數據，獲得在不同顆粒半徑下，對抑振效果之影響，建立顆粒阻尼系統之最佳化參考。

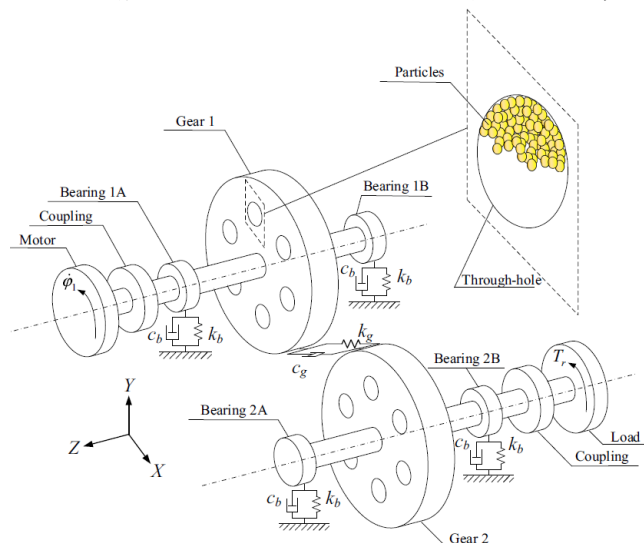


圖 2 具阻尼顆粒齒輪系統模型[6]

四、 研究方法

現今轉子動平衡主要之實行方式為雙平面平衡法，其原理是透過量測兩個與旋轉軸線垂直之不同平面上之不平衡量，於轉子兩側選定兩校正平面，並藉由添加或削去質量，對轉子系統質心位置進行修正。本研究採用添加質量的方式，利用調整不同相位角上孔洞中之阻尼顆粒數量，使整體質心位置產生變化，進而完成動平衡校正。本研究擬分成如圖 3 所示之四個階段進行，包括問題定義、模型建構、動力模擬及數據驗證。

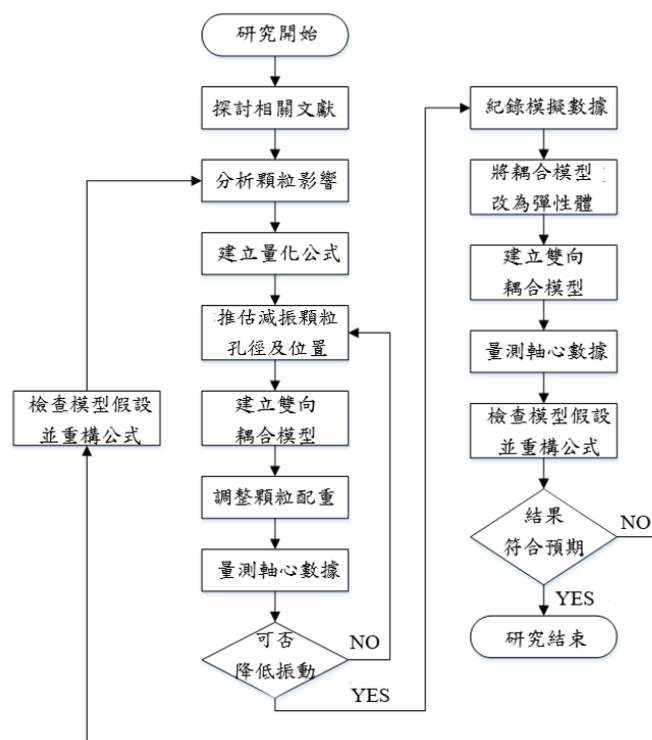


圖 3 研究流程圖

4.1 研究問題

如圖 4 所示，本研究將建立具阻尼顆粒之雙平面動平衡轉子系統，於軸上 Mid Plane 添加一質心偏離軸心距離 r_1 之質量 m_1 的配重塊，利用其產生離心慣性力 F_1 ，以模擬系統中之不平衡，並把軸設定為彈性體，提高模擬精準度，再引進顆粒阻尼技術來進行動平衡校正，顆粒將因轉動產生離心慣性力，使顆粒趨於穩定分布於遠離軸線處，使顆粒質心位置可以進行預測。

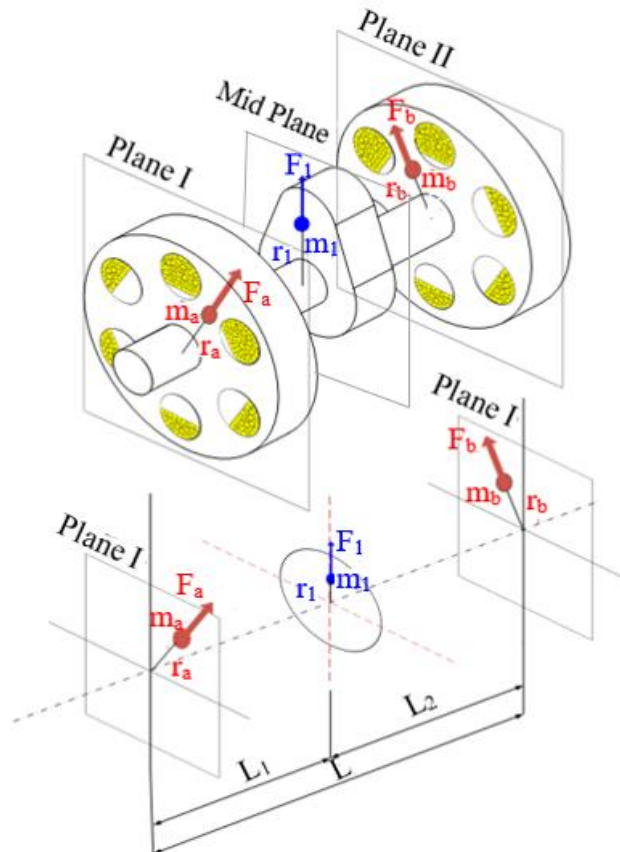


圖 4 雙平面平衡示意圖

基於雙平面平衡法選定相距 L 之 Plane I、Plane II，分別於兩平面上利用孔中顆粒數量的不對等來達成等效於在 r_A 及 r_B 距離上產生 m_A 及 m_B 之偏心質量，也就是等效離心慣性力 F_A 、 F_B ，分別以 L_1 、 L_2 的距離利用合成力之分量的方式平衡離心慣性力及離心慣性力矩，因此透過相對應徑向位置及質量，達到動平衡效果；以及探討顆粒與顆粒、顆粒與壁面間摩擦力和抑振效果的關係，為本研究主要研究課題。

4.2 問題定義

藉由文獻探討中提及的理論和公式，利用雙平面平衡法之數學理論建立可量化的公式，透過式(1)計算整體轉子系統偏心距 E 來衡量需添加阻尼顆粒的位置，並透過式(2)計算 ISO 規範的動平衡等級 G 來確認動平衡校正的效果，有效地使用系統化的方式來計算平衡離心慣性力即離心慣性力矩所需填入之阻尼顆粒數量和裝配位置。

$$E = \frac{m \cdot e}{M} \quad (1)$$

$$G = \frac{N \cdot E}{9.549} \quad (2)$$

其中， m 為 Mid Plane 的偏心質量、 e 為 Mid Plane 的偏心距、 M 為整體轉子系統總質量、 N 為轉速、 E 為式(1)所計算出的整體轉子系統偏心距。本研究設定一轉速使顆粒均勻貼緊外側壁面，再以積分方式求得顆粒於此時之面積質心，並透過雙平面動平衡法(力與力矩平衡)計算出所需填充之顆粒數量。

4.3 量測目標

在不考慮組裝誤差的前提下，量測轉子質心軌跡及質心加速度的變化，利用式(3)計算轉子孔洞中需填充之顆粒數量 x 來調整配重，如圖 5 所示，改變軸心位置，達到問題定義中所預期之抑振效果。

$$x = \frac{0.64 \cdot V_c \cdot f}{V_b} \quad (3)$$

其中，0.64 表示球體隨機堆積密度、 V_c 為圓柱孔洞體積 $\pi R^2 L$ 、 R 為孔洞半徑、 L 為圓柱孔洞深度、 f 為孔洞內顆粒填充率、 V_b 為阻尼顆粒體積 $4\pi r^3/3$ 、 r 為顆粒半徑。

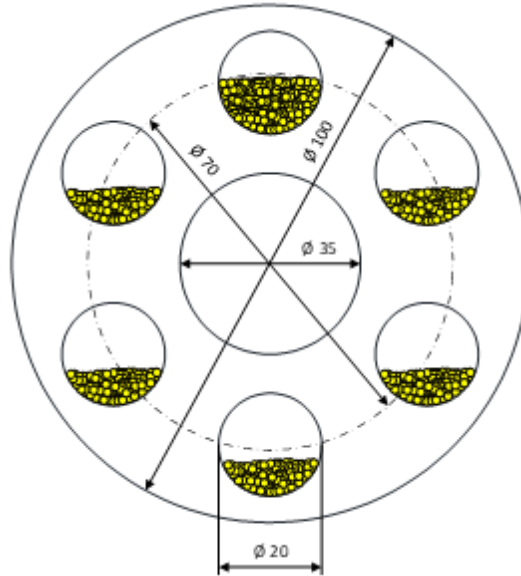


圖 5 20%基礎填充率配重模型示意圖

本研究將分為 4 組案例，分別討論有無進行動平衡校正以及是否添加阻尼顆粒，來觀察顆粒對於整體轉子系統振動抑制的效果，並比較轉子在剛體和彈性體狀態下的效果差異性，分析剛性對於轉子轉動中行為產生之變化。如圖 6 所示，本研究分析 Plane I、Mid Plane、Plane II 三個平面在軸線上 BP1、MP、BP2 點之質心加速度以獲得其振動改善之效果，並分析模擬中產生之軸質心軌跡圖(Orbit plot)以確認其離心慣性力之改善情形。

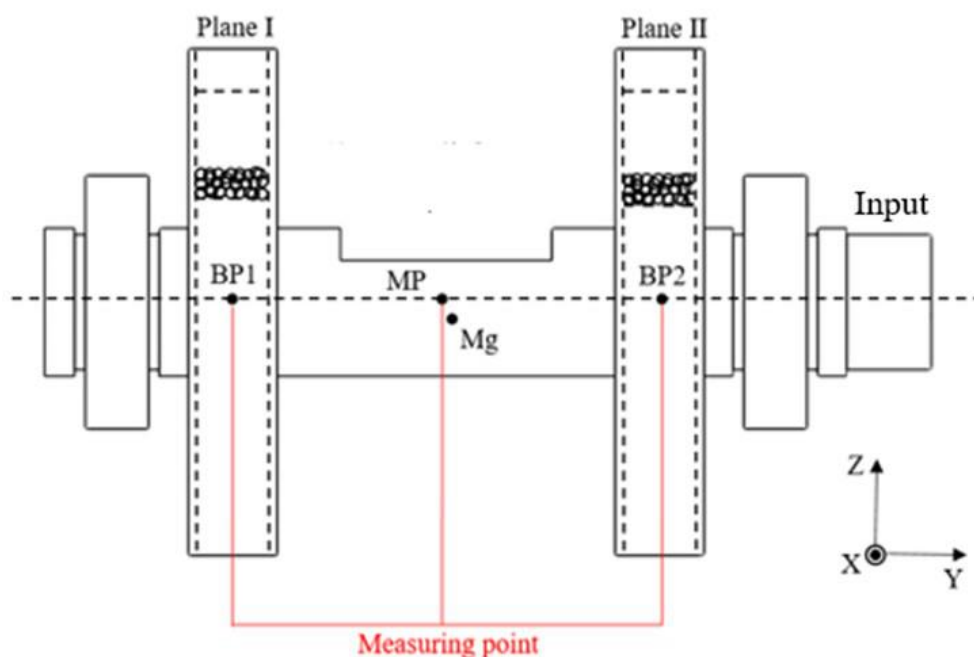


圖 6 轉子模型配置示意圖

4.4 動力模擬設定

根據表 1 所設定的系統參數，可透過式(1)計算出整體轉子系統偏心距 為 0.047 mm，並將 E 代入式(2)，可計算出 ISO 動平衡等級 為 4，表達了初始設定下整體轉子系統的動不平衡量值，也藉此量值來作為整體轉子系統動平衡校正的基準。再藉由式(3)計算，可得到 20 %填充率下，孔洞內的基礎填充阻尼顆粒數量 x 為 192 顆。並再將式(1)所得結果 E ，即垂直旋轉平面 Z 軸之偏心距，以及 Input 端所造成的 Y 軸不平衡量，透過力與力矩平衡計算，可得出 Plane I 需額外多填充 182 顆、Plane II 需額外多填充 153 顆，即 Plane I 總填入 374 顆、Plane II 總填入 345 顆。

表 1 整體轉子系統參數設定

| 項目 | 符號 | 數值 | 單位 |
|----------------|-----|-------|-----|
| 系統總質量 | M | 2.998 | mm |
| Mid Plane 偏心質量 | m | 32.0 | g |
| Mid Plane 偏心距 | e | 4.417 | mm |
| 轉速 | N | 800 | rpm |
| 孔洞半徑 | R | 10.0 | mm |
| 孔洞深度 | L | 20.0 | mm |
| 基礎填充率 | f | 0.2 | -- |
| 顆粒半徑 | r | 1.0 | mm |

在完成阻尼顆粒數量及裝配位置之預測後，本研究將建立雙平面動平衡轉子系統之 ADAMS 和 EDEM 之雙向耦合分析模型，針對該模型進行振動分析，以確認阻尼顆粒於減振及動平衡修正之有效性。ADAMS 以及 EDEM 中模型之設定參數則分別如表 2、表 3 所示：

表 2 ADAMS 模型設定

| 項目 | 符號 | 數值 | 單位 |
|-------|----------|----------|-------------------|
| 模擬總時長 | -- | 2 | sec |
| 時間步長 | -- | 1E-04 | sec |
| 轉速 | N | 800 | rpm |
| 系統總質量 | M | 2.998 | kg |
| 密度 | ρ_m | 7801 | kg/m ³ |
| 楊氏模數 | E_m | 207 | GPa |
| 軸承型號 | -- | SKF-6007 | -- |
| 軸承間隙 | -- | C4 | -- |

表 3 EDEM 顆粒模型設定

| 項目 | 符號 | 數值 | 單位 |
|----------|--------------|----------|-------------------|
| 顆粒半徑 | r | 1 | mm |
| 顆粒密度 | ρ_p | 7801 | kg/m ³ |
| 顆粒恢復係數 | -- | 0.8 | -- |
| 顆粒靜摩擦係數 | -- | 0.2 | -- |
| 顆粒滾動摩擦係數 | -- | 0 | -- |
| 顆粒蒲松比 | σ_p | 0.305 | -- |
| 顆粒剪力模數 | G_p | 7.28E10 | Pa |
| 顆粒填充時間 | -- | 0.3 | sec |
| 雷諾時間步長 | Δt_R | 1.11E-07 | sec |

此外，本研究預期將轉子在模擬過程中分別設為剛體和彈性體，並在兩側設置具有較大間隙之軸承對。其中在 EDEM 模型能反應出阻尼顆粒之動態行為，並透過顆粒半徑、密度、蒲松比等參數確定時間步長，藉以分析顆粒間碰撞與摩擦，雷諾時間步長方程式可表示如下式(4)：

$$\Delta t_R = \frac{\pi r_{\min}}{v_R} \quad (4)$$

其中， r_{\min} 為最小顆粒半徑、 V_R 為表面 Rayleigh wave 波速，可表示為式(5) [7]：

$$v_R = (0.163\sigma_p + 0.877) \sqrt{\frac{G_p}{\rho_p}} \quad (5)$$

其中， ρ_p 為顆粒之密度、 σ_p 為顆粒之蒲松比、 G_p 為顆粒之剪力模數。

本研究設定為 20 % 雷諾時間步長作為離散元素法計算之時間步長，使 EDEM 的時間步長遠小於 ADAMS 時間步長，避免雙向耦合時所耗費的時間過長，並且也同時防止時間步長過短而導致結果失真。

五、 結果與討論

5.1 減振效果驗證

本研究將模擬分為無顆粒無動平衡(case 1)、具顆粒無動平衡(case 2)、無顆粒做動平衡(case 3)、具顆粒做動平衡(case 4)之四種案例來驗證顆粒的減振效果。研究中將針對 Mid Plane 之 MP 點，如圖 6 所示，進行位移量測，並將其結果繪製成軸心軌跡圖，如圖 7 所示，橫軸為 Mid Plane 之水平軸(X 軸)之位移軌跡，縱軸為垂直軸(Z 軸)之位移軌跡，可發現同樣在無動平衡的條件下，具顆粒之軸心軌跡相較於無顆粒之軸心軌跡，無論在水平或垂直方向之運動軌跡均有顯著之下降趨勢。而同樣在做動平衡之條件下，有無顆粒之軸心軌跡亦表現出相同趨勢。

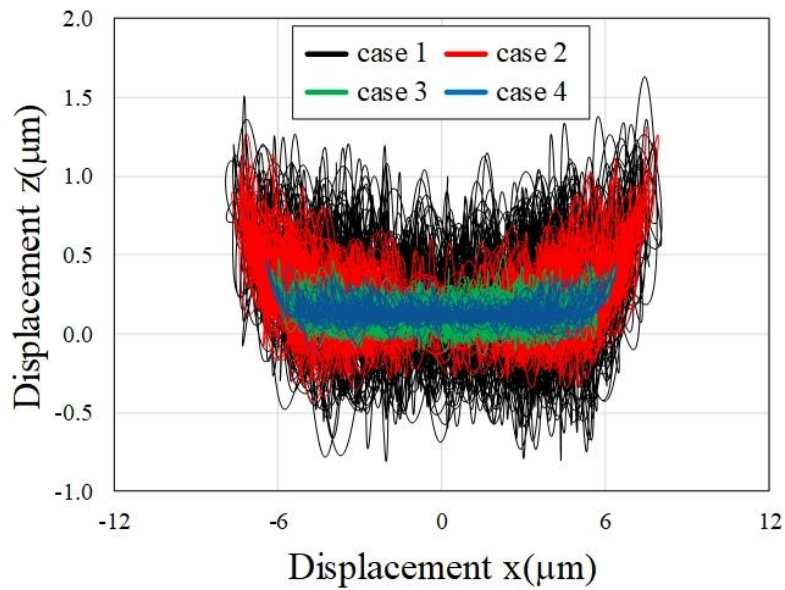


圖 7 不同案例之轉子模型於 800 rpm 下 Mid Plane 之軸心軌跡圖

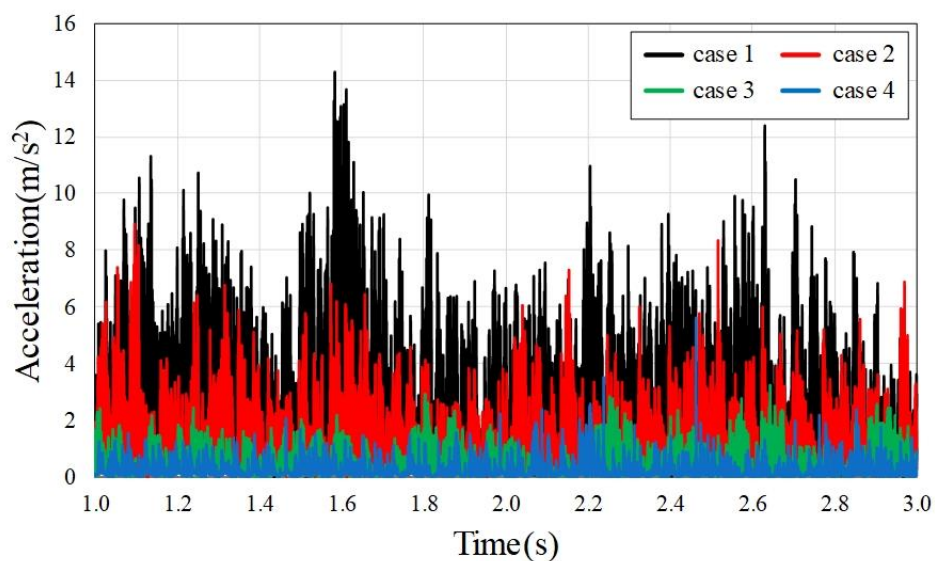


圖 8 不同案例之轉子模型於 800 rpm 下 Mid Plane 之軸心加速度

此外，本研究亦針對 Mid Plane 之軸心振動加速度進行分析，並將其結果繪製成軸心加速度圖。如圖 8 所示，具顆粒無動平衡之軸心加速度方均根(RMS)值為 1.92 m/s^2 ，無顆粒無動平衡之軸心加速度 RMS 值則為 3.48 m/s^2 ；具顆粒做動平衡之軸心加速度 RMS 值為 0.45 m/s^2 ，無顆粒做動平衡之軸心加速度 RMS 值則為 0.77 m/s^2 。由此可知，無論是否做動平衡，具顆粒下之振動相對無顆粒下之振動均具有顯著下降之趨勢，且具顆粒做動平衡之振動亦明顯低於具顆粒無動平衡之振動，由此可證實顆粒可同時達成減振及動平衡之校正。

5.2 不同平面減振分析

為進一步確認數據之合理性，故本研究選定如圖 4 模型中所提及之 Mid Plane 之 MP 點、Plane I 之 BP1 點及 Plane II 之 BP2 點等三個不同平面，在無顆粒填充下其軸心水平徑向之振動加速度隨時間的變化。結果如圖 9 所示，在 Mid Plane 上之軸心振動加速度明顯小於另外兩平面，且 Plane I 及 Plane II 之振動加速度趨勢較為接近。此外，從圖中可知三個平面表現出相似之振動趨勢，因此確定其振動具有一致性，而往後的模擬也將選用 Mid Plane 作為主要的分析平面。

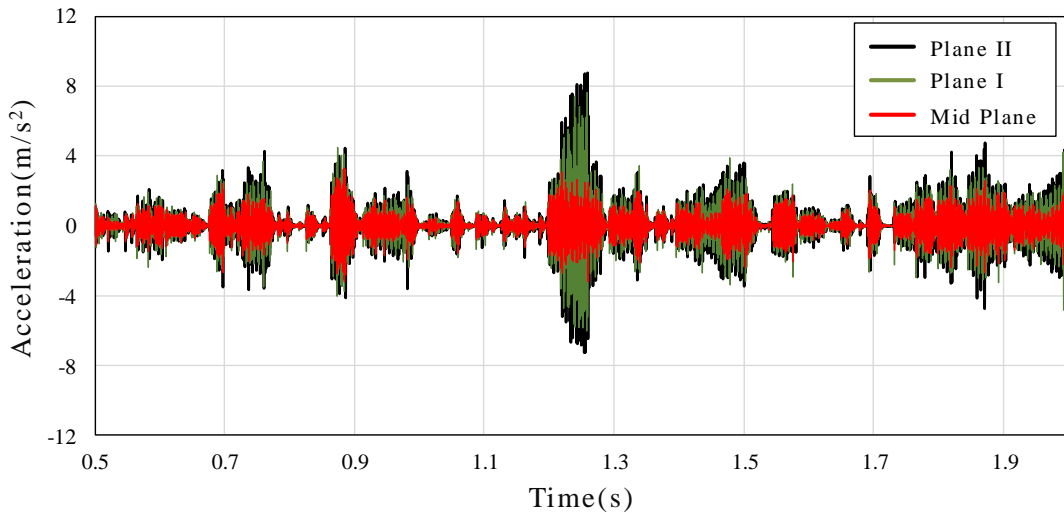


圖 9 無顆粒時三個不同平面的水平徑向之振動加速度比較

5.3 剛體與彈性體減振比較

為使分析結果更貼近真實，並確認軸剛性對轉子系統振動之影響，圖 10、11 將旋轉軸設為剛體(Rigid)及彈性體(Flex)進行分析，參考 5.1 節中之四種案例，分別分析其在不同平面下之振動加速度 RMS 值。從結果中可發現，無論是剛體或彈性體於不同平面上，是否進行動平衡所造成之影響均顯著大於是否添加顆粒所造成之影響。

以 Mid Plane 剛體為例，無顆粒無動平衡之加速度 RMS 值為 6.65 m/s^2 ，具顆粒未進行動平衡之加速度 RMS 為 3.82 m/s^2 ，具顆粒無動平衡之加速度 RMS 值為 1.12 m/s^2 ，具顆粒進行動平衡之加速度 RMS 值為 0.95 m/s^2 。此外，無論在 Mid Plane 或 Plane I 上，彈性體之加速度 RMS 值均小於剛體。本研究推論該現象是因彈性體在轉動過程中，因其變形使其運動軌跡較為符合實際行為，不會因為些微偏差而造成旋轉軸異常跳動所導致。

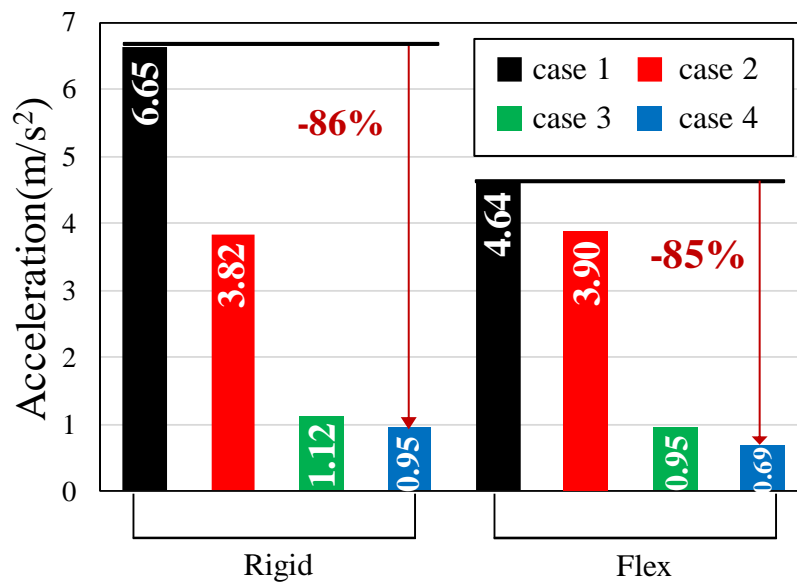


圖 10 剛體與彈性體於 Plane I 之振動加速度 RMS 值分析

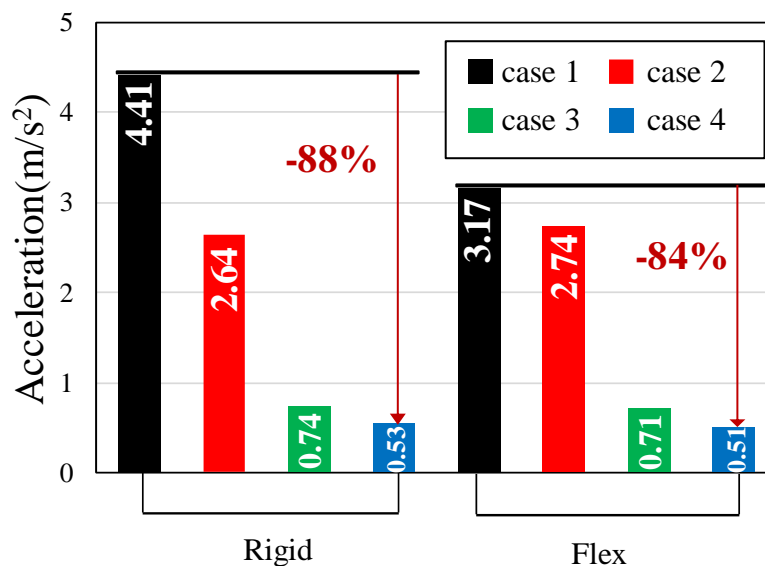


圖 11 剛體與彈性體於 Mid Plane 振動加速度 RMS 值分析

5.4 不同基礎填充率下減振分析

為研究不同填充率對振動所造成之影響，本章將針對 Mid Plane 之 MP 點的加速度進行分析，並比對無顆粒無動平衡、20%基礎填充率、30%基礎填充率三種案例。此外，為保證分析結果之精確性，本研究會排除在 0.5 秒前轉子系統未達穩定之數據，僅考慮 0.5 秒後之分析結果。

針對無顆粒無動平衡之案例進行分析，結果如圖 12 所示，其中在水平加速度振幅值為 7.53 m/s^2 ，垂直加速度振幅值為 8.92 m/s^2 。可發現無論 X 或 Z 軸之振動加速度均有不穩之趨勢，在軸心振動上有異常之振動行為。

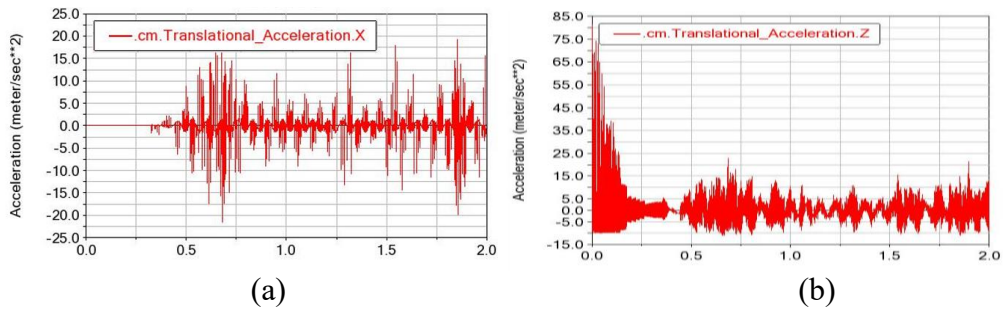


圖 12 無顆粒無動平衡於 Mid Plane 之振動加速度：(a) 水平加速度;(b)垂直加速度

針對 20%基礎填充率之案例進行分析，結果如圖 13 所示，其中水平加速度振幅值為 5.04 m/s^2 ，垂直加速度振幅值為 6.12 m/s^2 。由圖中可見相較於無顆粒無動平衡之案例，無論在水平或垂直方向之振動行為均較為穩定，且從圖形上可較為清楚觀察到軸心之運動規律。

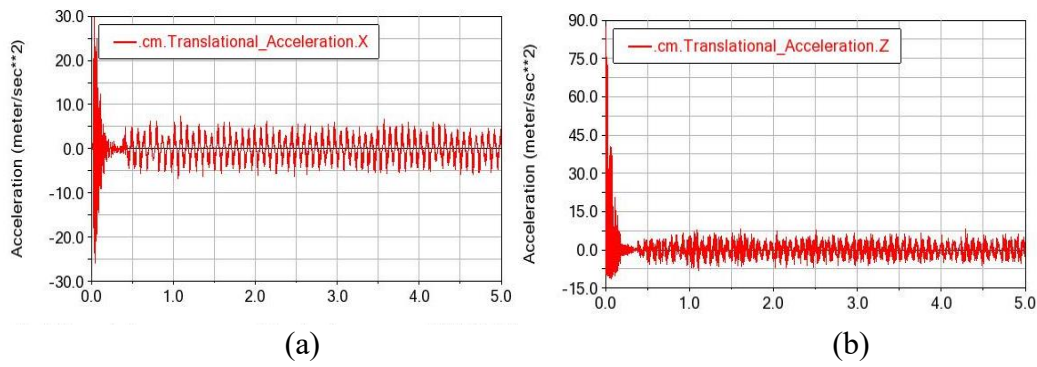


圖 13 20%填充率於 Mid Plane 之振動加速度：(a) 水平加速度;(b) 垂直加速度

針對 30%基礎填充率之案例進行分析，結果如圖 14 所示，其中水平加速度振幅值為 2.78 m/s^2 ，垂直加速度振幅值為 3.45 m/s^2 。相較於 20%基礎填充率之案例，在 30%基礎填充率下可更為清楚觀察到軸心之運動軌跡呈現弦波之圖形，且同時可發現軸心之振動加速度亦呈現最低之趨勢。

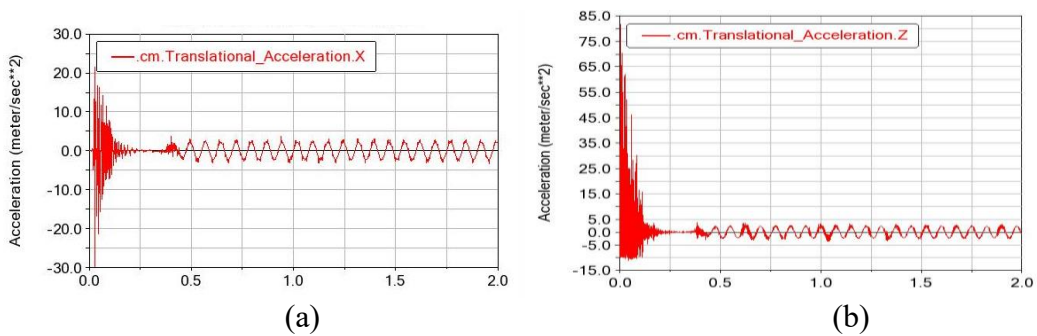


圖 14 30%填充率於 Mid Plane 之振動加速度：(a) 水平加速度;(b) 垂直加速度

從以上三組結果中可發現，無顆粒無動平衡之結果無論是在水平方向或垂直方向之加速度值均明顯大於具顆粒做動平衡的模型，且顆粒之減振效果會隨著顆粒填充率上升而增加。此外，軸心軌跡亦隨著顆粒填充率上升呈現出越發平穩之趨勢，由此可證明隨著顆粒填充率上升，可使轉子達到更理想之運轉狀態。

六、 結論、遭遇困難及未來展望

6.1 結論

本研究基於多體動力學及離散元素法之理論，建立一具阻尼顆粒轉子之雙向耦合分析模型，藉由填充顆粒阻尼以同時達到動平衡及減振之效果。模擬結果顯示徑向上是主要的振動產生來源，故結果分析時本研究選取水平及垂直軸進行分析，而軸向則忽略不計。下方以條列呈現本研究主題：

1. 藉由軸心軌跡圖及軸心加速度分析，印證顆粒阻尼具有減振效果。
2. 透過分析不同平面上的振動行為，得知振動不只單純發生於特定平面上，而是整個系統皆有振動產生，並透過分析各平面振動行為證實於多個不同平面上之振動行為均有相似之趨勢。
3. 藉由分析剛體及彈性體的振動行為，可得剛體及彈性體皆具有良好之減振效果，且剛體相較彈性體具有更佳之減振效果。
4. 通過分析等效質量及 20%、30% 基礎填充率下之振動加速度，發現 30% 基礎填充率有著最小的振動加速度，證實隨著顆粒填充率的上升，減振效果更為顯著。

6.2 計劃過程之阻礙及解決

研究初期時，對於操作程式相關功能並未熟悉，為順利建立出一個完整的雙平面動平衡轉子系統模型，透過和指導教授的討論、翻閱教科書及汲取網路上的資料，持續嘗試並有效完成。

研究過程中，在數據模擬過程時，模擬若是設定過長的時間會產生數據發散的問題，導致模擬數據無法有效產出，而在經過跟學長以及指導教授的再三討論過程中，並從網路上搜尋相關的資料及論文，多次改變參數後順利地得出最終的結果。

在研究最後進行數據處理的部分，由於有相當多的數據，因此也和教授及學長一再討論出要針對那些平面進行分析或是要呈現何種內容才能使數據較為客觀且有說服力，得以產出最後的結果報告。

6.3 未來展望

我們計畫將此模擬結果推廣到具阻尼顆粒轉子之動平衡的實驗中，希望能透過建立實驗來印證模擬的可行性，而我們也有著手在規劃實驗流程，並且手邊也有實驗機台可以進行實驗量測，再利用我們手邊現有的 NOVIAN 程式進行數據量測，希望未來可以將這技術廣泛的使用於業界之中。

七、 參考文獻

- [1] N. Ahmad, R. Ranganath, A. Ghosal (2017), "Modeling and experimental study of a honeycomb beam filled with damping particles," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 391, pp. 20-34.
- [2] Z. Lu, X.L. Lu, S.F. Masri (2010), "Studies of the performance of particle dampers under dynamic loads," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 26, pp. 5415-5433.
- [3] Y.C. Chung, C.W. Wu, C.Y. Kuo, S.S. Hsiau (2019), "A rapid granular chute avalanche impinging on a small fixed obstacle: DEM modeling, experimental validation and exploration of granular stress," *Applied Mathematical Modelling*, Vol.74, pp. 540-568.
- [4] W.Q. Xiao, J.N. Li (2017), "Investigation into the influence of particles' friction coefficient on vibration suppression in gear transmission," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 108, pp. 217-230.
- [5] B. Huang, Y. Lu (2017), " Application of NOPD Technique to Vibration Reduction of Rotor Compressors," *Noise and Vibration Control*, Vol. 37(6), pp. 216-219.
- [6] Y.C. Chung, Y.R. Wu (2019), "Dynamic modeling of a gear transmission system containing damping particles using coupled multi-body dynamics and discrete element method". *Nonlinear Dynamics*, Vol. 98, pp. 129-149.
- [7] H. Deresiewicz, "Mechanics of granular matter," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 5, 1958.