Exercice 1

- Question 1

Soit $j \in \{0, \cdots, L-1\}$, $a_j^* = b_j^* = -$, on a alors $D\left(a_j^*,\ b_j^*\right) = D\,(-,-) = 0$

On veut montrer qu'on peut construire un autre alignement $\left(a_j'^*,\ b_j'^*\right)$ de même distance et de longueur $L-1$.

On a $D(a^*, b^*) = \sum_{k=0}^{L-1}(a_k^*,\ b_k^*) = \sum_{k=0}^{j-1}(a_k^*,\ b_k^*) + D\left(a_j^*,\ b_j^*\right) + \sum_{j+1}^{L-1}(a_k^*,\ b_k^*)$

Or $D\left(a_j^*,\ b_j^*\right) = 0$

On a donc $D(a^*, b^*) = \sum_{k=0}^{L-1} D(a_k^*,\ b_k^*) = \sum_{k=0}^{j-1} D(a_k^*,\ b_k^*) + \sum_{j+1}^{L-1} D(a_k^*,\ b_k^*)$

On note $(a'^*, b'^*) = \left(a_0^* \cdots a_{J-1}^* a_{j+1}^* \cdots a_{L-1}^*, b_0^* \cdots b_{J-1}^* b_{j+1}^* \cdots b_{L-1}^*\right)$ le nouvel alignement forme

de l'anciennes alignement privées du couple $\left(a_j^*,\ b_j^*\right)$ de longueur $L-1$ et de distance $D(a'^*, b'^*) = D(a^*, b^*)$.

- Question 2

Supposons que la longueur est maximum, dans ce cas-là, on a pour tous éléments des deux séquences a et b on insère un élément nul $-$.
D'après la question précèdent, la longueur maximum de l'alignement est $L_{max} = n + m$, et on en déduit aussi que la distance D_{max} est aussi le maximum car l'alignement est de la forme :

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & \cdots & a_{n-1} & - & \cdots & - \\ | & | & | & | & | & | \\ - & \cdots & - & b_0 & \cdots & b_{m-1} \end{array}$$

$$L_{max} = n + m = D_{max}$$

Donc si on trouve un alignement de distance qui est inferieur a la D_{max} alors la nouvelle longueur maximum L_{max} est donc inferieur a $n+m$.

$$L_{max} \leq n + m$$

- Question 2

Soit le couple (a^*, b^*) un alignement de longueur L de séquences a et b de distance minimum D_{min} avec $n > 0$ et $m > 0$ et $a_{L-1}^* = -$,$b_{L-1}^* = b_{m-1}$, le couple $(a_0^* \cdots a_{L-2}^*, b_0^* \cdots b_{L-2}^*)$ de distance *d* n'est pas un alignement optimal de a avec la sous-séquence $b_0 \cdots\ b_{m-2}$.

Puisque l'alignement (a^*, b^*) est constitué de $(a_0^* \cdots a_{L-2}^*, b_0^* \cdots b_{L-2}^*)$ et de $a_{L-1}^* = -$,$b_{L-1}^* = b_{m-1}$ alors $D_{min} = d + D(\ a_{L-1}^*, b_{L-1}^*\ ) = d + 1$

Si le couple $(a_0^* \cdots a_{L-2}^*, b_0^* \cdots b_{L-2}^*)$ n'est pas un alignement optimal alors on peut construire en

fessant des opérations d'insertion, de suppression, de substitution sur élément nul pour obtenir un nouvel alignement qui est optimal de distance *d'*.
Donc on vient de construire un nouvel alignement avec les mêmes séquences a et b de nouvelle distance noté $D_{nouvelle}$ qui est égale à $D_{nouvelle} = d' + 1$ avec $d' < d$ donc $D_{nouvelle} < D_{min}$ or D_{min} est la distance minimum possible pour les séquences a et b donc contradiction.
Le couple$(a_0^* \cdots a_{L-2}^*, b_0^* \cdots b_{L-2}^*)$ est bien un alignement optimal de a avec la sous-séquence $b_0 \cdots b_{m-2}$.