

利用玻尔兹曼分布研究恒星光谱

樊一川、滕欣玥、叶育恒、杨思羽

(云南大学 物理与天文学院 天文系, 云南 昆明)

摘要: 恒星光谱中存在各种原子的吸收线,这些吸收线是原子的核外电子跃迁所致,原子能级的粒子数密度会对此产生影响.从静态的物理参数到动态的演化过程,模型拟合是其中的重要方法,通过将合成光谱与实际观测光谱进行对比,考虑局部热动平衡(LTE)或非LTE效应,不断调整模型参数,本文假设恒星处于局部热平衡,其原子能级粒子数密度遵循玻尔兹曼分布,并根据玻尔兹曼分布计算各原子吸收线强度,得到等效宽度,与实际数据进行比较,分析差异来源,验证恒星中各原子能级粒子数分布是否遵循玻尔兹曼分布.

关键词: 玻尔兹曼分布; 恒星光谱; 吸收线; 等效宽度

光谱学是天体物理的核心,无论所研究的领域是行星大气还是恒星大气,是热而稀的星际介质还是冷而密的分子云,是星系际介质、吸积或是发生在非常致密天体表面附近的热核过程,是星系核中的能量产生过程、宇宙的膨胀还是宇宙背景辐射,光谱测量几乎永远是一种最主要的诊断工具.通过分析吸收线,我们能获得恒星元素丰度、温度等性质,进而了解恒星的演化进程.还可以了解恒星与地球间星际介质的组分、和速度,了解星际介质的物理性质和分布情况,为研究恒星的形成和演化提供更广阔的星际环境背景.

本实验仅对恒星光谱中的吸收线进行了初步的模拟,根据玻尔兹曼分布以及辐射转移方程,推导了恒星吸收谱的强度公式,并用数值模拟吸收谱的轮廓,求得吸收线等效宽度来表征吸收强度,并与真实恒星谱线进行对比,进行误差分析.

1 相关公式推导

1.1 玻尔兹曼分布的推导

考虑一个系统有 N 个粒子,系统总能量为 E .系统能级为 $\epsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$,每个能级的简并度为 g_i (即第 i 个能级有 g_i 个微观状态).我们要求的是每个能级上的粒子数 n_i ,使得系统的熵 S 最大,同时满足约束条件粒子总数守恒和总能量守恒:

$$\sum_{i=1}^n n_i = N \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n n_i \epsilon_i = E \quad (2)$$

在统计力学中,熵 S 与系统的微观状态数 Ω 有关,根据玻尔兹曼熵公式: $S = k \ln \Omega$, 其中 k 为玻尔兹曼常数.对于玻尔兹曼系统(粒子可分辨),微观状态数为:

$$\Omega = N! \prod_{i=1}^n \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (3)$$

由于熵 S 是 Ω 的单调递增函数,最大化 S 等价于最大化 $\ln \Omega$.因此,我们可以将目标函数设

为 $\ln\Omega$ ，并应用斯特林公式 (*Stirling's approximation*) 进行简化得：

$$\ln\Omega \approx N\ln N + \sum_{i=1}^n n_i \ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) \quad (4)$$

由于 $N\ln N$ 是常数，最大化 $\ln\Omega$ 等价于：

$$S' = \sum_{i=1}^n n_i \ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) = \sum_{i=1}^n [n_i \ln g_i - n_i \ln n_i] \quad (5)$$

使用拉格朗日乘子法，在约束条件下最大化 S' ，约束条件：

$$f_1 = \sum_i n_i - N = 0 \quad (6)$$

$$f_2 = \sum_i n_i \varepsilon_i - E = 0 \quad (7)$$

构造拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} L &= S' + \alpha \left(N - \sum_i n_i \right) + \beta \left(E - \sum_i n_i \varepsilon_i \right) \\ &= \sum_i [n_i \ln g_i - n_i \ln n_i] + \left(N - \sum_i n_i \right) \\ &\quad + \beta \left(E - \sum_i n_i \varepsilon_i \right) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 α 和 β 是拉格朗日乘子。

对每个 n_i 求偏导数并令其为零：

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = \ln g_i - \ln n_i - 1 - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = \ln g_i - \ln n_i - 1 - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0 \quad (10)$$

整理得：

$$\ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) = 1 + \alpha + \beta \varepsilon_i \quad (11)$$

即：

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{1+\alpha+\beta\varepsilon_i} \quad (12)$$

所以：

$$n_i = g_i e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta\varepsilon_i} \quad (13)$$

令常数 $A = e^{-(1+\alpha)}$ ，则：

$$n_i = A g_i e^{-\beta\varepsilon_i} \quad (14)$$

现在利用粒子数守恒条件：

$$\sum_i n_i = \sum_i A g_i e^{-\beta\varepsilon_i} = A \sum_i g_i e^{-\beta\varepsilon_i} = N \quad (15)$$

所以：

$$A = N / \left(\sum_i g_i e^{-\beta\varepsilon_i} \right) \quad (16)$$

定义配分函数 Z ： $Z = \sum_i g_i e^{-\beta\varepsilon_i}$ ，则： $A =$

N / Z

得到玻尔兹曼分布：

$$n_i = (N/Z) g_i e^{-\beta\varepsilon_i} \quad (17)$$

1.2 吸收谱公式推导

辐射在介质中传播的转移方程：

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \quad (18)$$

其中： I_ν 是频率 ν 处的辐射强度， α_ν 是吸收系数（单位长度）， s 是传播路径长度

对均匀介质积分得：

$$I_\nu = I_\nu^c \exp(-\tau_\nu) \quad (19)$$

其中 $\tau_\nu = \int_0^s \alpha_\nu ds$ 是光学深度， I_ν^c 是背景连续谱强度。

吸收系数由量子跃迁截面和粒子数密度决定：

吸收系数由量子跃迁截面和粒子数密度决定：

定：

$$\alpha_\nu = \sigma_\nu N_l \quad (20)$$

其中 N_l 是低能态粒子数密度。

由爱因斯坦系数关系：

$$B_{lu} = \frac{4\pi^2 e^2}{h\nu m_e c} f_{lu} \quad (21)$$

吸收截面定义为：

$$\sigma_\nu = \frac{h\nu}{c} B_{lu} \Phi(\nu) \quad (22)$$

代入 B_{lu} , 得到跃迁截面与振子强度和谱线轮廓函数的关系:

$$\sigma_v = \frac{h\nu}{c} \left(\frac{4\pi^2 e^2}{h\nu m_e c} f_{lu} \right) \phi(v) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} \phi(v) \quad (23)$$

将(23)代入得吸收系数表达式:

$$\alpha_v = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} N_l \phi(v) \quad (24)$$

假设介质均匀 (N_l 常数), 积分光学深度:

$$\tau_v = \int_0^s \alpha_v ds = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} N_l \phi(v) \cdot s \quad (25)$$

定义柱密度 $N_l^{\text{col}} = N_l \cdot s$ (单位面积粒子数):

$$\tau_v = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} N_l^{\text{col}} \phi(v) \quad (26)$$

代入辐射转移方程解式:

$$\begin{aligned} I_v^{\text{abs}} &= I_v^c \exp(-\tau_v) \\ &= I_v^c \exp \left[-\frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} N_l^{\text{col}} \phi(v) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

当 N_l 为柱密度时简化为:

$$I_v^{\text{abs}} = I_v^c \exp \left[-\frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} N_l \phi(v) \right] \quad (28)$$

由 $v = c/\lambda$ 和轮廓函数归一化 $\phi(v)dv = \phi(\lambda)d\lambda$ 得:

$$\phi(\lambda) = \phi(v) \left| \frac{dv}{d\lambda} \right| = \phi(v) \frac{c}{\lambda^2} \quad (29)$$

代入吸收谱公式:

$$I_\lambda^{\text{abs}} = I_\lambda^c \exp \left[-\frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} N_l \phi(\lambda) \right] \quad (30)$$

1.3 公式关键参数说明

振子强度 f_{lu} , 由量子力学定义:

$$f_{lu} = \frac{2m_e \omega_{ul}}{3\hbar e^2} |\langle u | \hat{r} | l \rangle|^2, \omega_{ul} = \frac{E_u - E_l}{\hbar} \quad (31)$$

此处我们直接取已经测得的值.

粒子数 N_l , 按玻尔兹曼分布:

$$N_l = \frac{g_l e^{-E_l/kT}}{Z(T)} N_{\text{total}} \quad (32)$$

在高温等离子体中, 原子电离会显著减少中

性原子数 N_l , 直接影响吸收线强度. 仅用玻尔兹曼分布会高估 N_l . 引入萨哈方程:

考虑原子从中性态 (I) 电离为一级离子态 (II) 的过程:



萨哈电离方程为:

$$\frac{N_{II} n_e}{N_I} = \frac{2 g_{II}}{g_I} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_I}{kT} \right) \quad (34)$$

设原子的总数密度为:

$$N_{\text{total}} = N_I + N_{II}$$

若只考虑一级电离 (忽略更高电离态), 则中性原子占比:

$$f_I = \frac{N_I}{N_I + N_{II}} = \frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}} \quad (35)$$

代入萨哈方程右侧表达式, 得到这就是考虑电离平衡下, 中性原子占比 f_I 的计算公式:

$$f_I = \frac{1}{1 + \frac{2 g_{II}}{g_I} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{n_e} \exp \left(-\frac{\chi_I k}{T} \right)} \quad (36)$$

根据玻尔兹曼分布, 能级 E_l 上的粒子数:

$$N_l = \frac{g_l e^{-E_l/kT}}{Z(T)} \cdot N_I \quad (37)$$

将上一步的 $N_I = f_I \cdot N_{\text{total}}$ 代入:

$$N_l = \frac{g_l e^{-E_l/kT}}{Z(T)} f_I \cdot N_{\text{total}} \quad (38)$$

谱线轮廓函数 $\phi(v)$:

高斯型 (热多普勒展宽)

$$\phi(v) = \frac{1}{\Delta v_D \sqrt{\pi}} \exp \left[-\left(\frac{v - v_0}{\Delta v_D} \right)^2 \right], \quad (39)$$

$$\Delta v_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (40)$$

Voigt型 (多普勒+自然展宽):

$$\phi(v) = \frac{1}{\Delta v_D \sqrt{\pi}} H(a, u) \quad (41)$$

其中 $H(a, u)$ 是Voigt函数, 需数值计算:

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(u-y)^2 + a^2} dy \quad (42)$$

2 不同光谱型恒星的吸收线

2.1 等效宽度的计算

为计算不同温度恒星的氢原子的吸收线强度,进而得到等效宽度(主要针对允许线),需得到振子强度、恒星的连续谱分布、低能级粒子数密度.

计算振子强度时,详见(30)式,需处理电偶极跃迁矩阵(磁偶极跃迁和电四极跃迁可忽略).氢原子为单电子体系,其波函数有解析解.将电偶极跃迁矩阵分解为径向和角向积分,再利用球谐函数的正交性,即可得到氢原子振子强度的解析解.由于振子强度求解过程较为复杂,这里直接采用NIST 数据库中各谱线振子强度的数值,振子强度为无量纲量.

对于不同温度恒星的背景连续谱,我们使用其有效温度下的黑体谱来近似代替:

$$I_c^v = B_v = \frac{2hv^3}{c^2} \frac{1}{e^{hv/(kT)} - 1} \quad (43)$$

要计算氢原子能级粒子数密度,要先得到总粒子数密度,对于主序星,我们使用以下经验公式来进行计算:

$$\log N_{\text{total}} \approx 19.5 - 0.5 \log T_{\text{eff}} - 0.4 \log g + 0.1 M \quad (44)$$

式中 g 为表面重力加速度,对于主序星, $\log g$ 的值为3-5.5,这里选 $\log g = 4$. M 为金属丰度, T_{eff} 为恒星有效温度.得到总粒子数密度,再

利用萨哈方程得出中性氢占比,进而得到能级粒子数密度,用能级粒子数密度乘以标高,得到柱密度.

对于配分函数,其是所有玻尔兹曼因子的和,本文取前20项进行求和,避免高温时无意义地累加太多能级.

基于以上方式确定出吸收线强度表达式中各项的值,代入进行计算.

我们选择温度为7000K、7500K、8000K、8500K、9000K的恒星,计算其氢原子巴尔末线系的吸收线强度和等效宽度,选择 5σ 区域进行计算.

2.2 数值模拟

在数值求解等效宽度的过程中,我们采用的核心数值算法如下所示.

萨哈方程自洽迭代(电离平衡):采用定点迭代法,自洽求解电子压强 P_e 和中性氢数密度 N_{H} .每次迭代用 P_e 计算 N_{H} ,再用 N_{H} 更新 P_e ,直到收敛.

谱线轮廓函数,高斯展宽和Voigt展宽:

Voigt型谱线轮廓通过Faddeeva函数(scipy.special.wofz)数值实现.返回归一化的谱线轮廓函数,单位为 \AA^{-1} .

吸收线强度与等效宽度:等效宽度用

$$\text{Simpson 积分 (scipy.integrate.simpson) 对 } 1 - \frac{I_{\lambda}^{\text{abs}}}{I_{\lambda}^c}$$

关于波长积分,精度高于梯形法.

计算吸收线强度时,以谱线中心周围 5σ 的区域为计算区间,从中均匀离散出2000个点,计

算这 2000 个点的吸收线强度.同时选取不同的温度和中心波长来用玻尔兹曼分布计算.

在实现过程中, 设置的初始条件是电子压强的初始猜测:

$$P_e = 0.1N_{\text{total}}kT$$

(45)

这是根据总粒子数密度 N_{total} 、温度 T 和玻尔兹曼常数 k 估算的一个合理初值, 保证了迭代的起点物理上不会太偏离实际解。

边界条件体现在, 高温情况下, 配分函数的高能级项会趋于 0, 因此选择前 20 项进行求和.

对于数值计算的精度问题, 代码谱线积分

(等效宽度)使用辛普森积分, 对均匀采样的 2000 个波长点积分, 精度高于梯形法, 适合平滑函数的积分, 能很好地还原吸收线的等效宽度. 谱线轮廓通过 Faddeeva 函数 (scipy.special.wofz)数值实现, 精度高, 适用于物理上常见的展览组合.

对于代码的稳定性, Simpson 积分对平滑曲线非常稳定, 不易受噪声影响. 并且增加了异常处理, 数值超出合理范围会有警告, 迭代不收敛会报错, 增强了健壮性.

以下是利用玻尔兹曼模型数值计算出的氢原子谱线的等效宽度结果:

表 1 等效宽度结果

线名	波长(Å)	温度(K)	波长范围(Å)	等效宽度(Å)
Hβ	4861.3	5000	4848.8-4873.8	0.0001
Hβ	4861.3	6000	4847.6-4875.0	0.1201
Hβ	4861.3	7000	4846.5-4876.1	11.6178
Hβ	4861.3	8000	4845.5-4877.1	31.6545
Hγ	4340.5	5000	4329.3-4351.7	0.0
Hγ	4340.5	6000	4328.3-4352.7	0.0357
Hγ	4340.5	7000	4327.3-4353.7	4.1156
Hγ	4340.5	8000	4326.4-4354.6	28.1554
Hδ	4101.7	5000	4091.1-4112.3	0.0
Hδ	4101.7	6000	4090.1-4113.3	0.0154
Hδ	4101.7	7000	4089.2-4114.2	1.8743
Hδ	4101.7	8000	4088.3-4115.1	24.9612
Hε	3970.1	5000	3959.9-3980.3	0.0
Hε	3970.1	6000	3958.9-3981.3	0.0083
Hε	3970.1	7000	3958.0-3982.2	1.0218
Hε	3970.1	8000	3957.2-3983.0	20.2677
Hζ	3889.0	5000	3879.0-3899.0	0.0
Hζ	3889.0	6000	3878.0-3900.0	0.005
Hζ	3889.0	7000	3877.2-3900.8	0.6273
Hζ	3889.0	8000	3876.3-3901.7	15.606

结果表明, 当温度升高时, 同一谱线的等效宽度会增大, 这是由于电子压强增大, 导致氢原子柱密度增大, 吸收线强度增大所致. 同时同一温度下, 不同谱线的等效宽度也有所不同, 这是

由于高能级粒子数密度较少, 振子强度较小, 因此吸收线强度较低能级吸收线强度更小.

下图为根据玻尔兹曼模型计算出的吸收线强度画出的吸收线谱型:

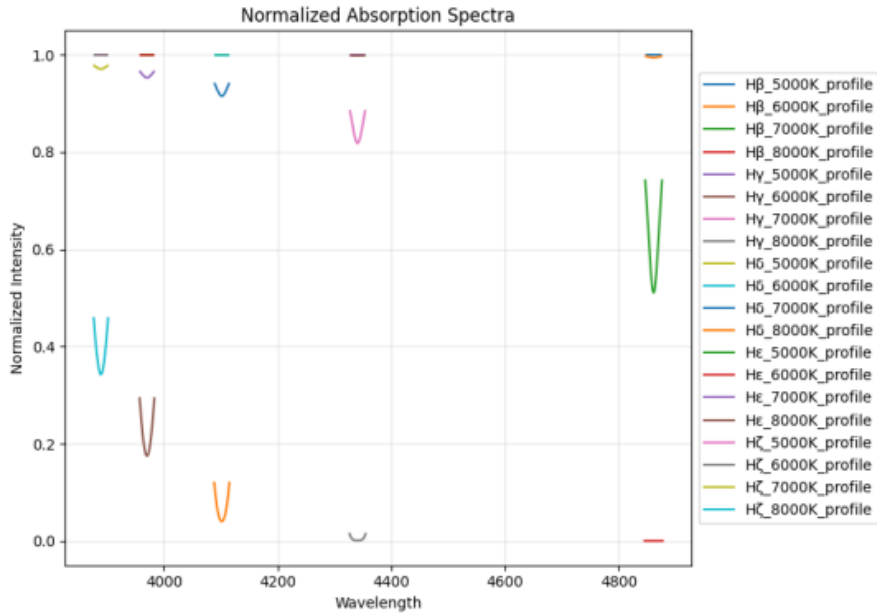


图 1 归一化吸收谱型

图中吸收线基本对称, 在高斯谱型的基础上考虑了自然展宽, 同时也可以看出不同温度、不同能级产生的谱线吸收线强度明显不同, 因为温度会影响能级粒子数密度分布, 这和玻尔兹曼分布的特性有关, 能级粒子数密度会进一步影响吸收线强度. 图中纵坐标显示为 1 的吸收线, 是因为计算出的光学深度基本为 0, 此时光子不会被吸收, 因此吸收线强度为 0, 通量与黑体谱保持一致.

3 数值分析

为对比第 2 节所得的结果, 本节采用 StellarSpecModel 恒星光谱模型工具生成理论光谱, 用于计算吸收线等效宽度与对比拟合数据. 我们使用该模型的 MARCS 光谱库, 在不同有效温度 ($T_{\text{eff}}=5000\text{K}$ 、 6000K 、 7000K 、 8000K)、表面重力 $lg g = 4$ 和金属丰度 $[\text{Fe}/\text{H}]=0$ 参数下的获

取高分辨率光谱, 其波长范围覆盖 $3800 - 9700\text{\AA}$, 通量单位为 $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{\AA}^{-1}$. 对第 2 节所得的结果的分析包括等效宽度 (EW) 的比较、吸收率的比较. 其中, 等效宽度的计算是基于第 2 节所给波段范围, 且连续谱使用的是对应温度下的黑体谱, 此外, 由于黑体谱与理论光谱的通量不一样, 所以在计算时会黑体谱乘一个缩放因子 (scale).

缩放因子 (scale) 是因为黑体谱实际并不是理论光谱的连续谱. 黑体谱乘一个缩放因子 (scale) 是为了更好地实现归一化, 从而算出更加精准的 EW 和吸收率谱. 缩放因子 (scale) 默认为 1.1, 之后通过归一化光谱对缩放因子 (scale) 进行认为调整, 以获得较好的缩放因子.

在这里, 我们假定基于 StellarSpecModel 恒星光谱模型工具的吸收率谱和等效温度是更加

真实的数值.

3.1 等效宽度 (EW)

基于等效宽度公式： $EW(\text{\AA}) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} 1 - \frac{F_{abs}}{F_c} d\lambda$ ($F=I/\pi$)，我们计算出了不同温度的吸收

线等效宽度 (表格 1). Equivalent Width(\AA) 使

用 StellarSpecModel 恒星光谱模型工具计算的等效宽度， $EW_{model}(\text{\AA})$ 是第 2 节使用玻尔兹曼分布计算的等效宽度.

表 2 使用 StellarSpecModel 获取的光谱计算 H 的巴尔末线在不同温度下的等效宽度，以及基于玻尔兹曼分布计算的等效宽度 (EW_{model})

Line	Center Wavelength (\AA)	Temperature (K)	Wavelength Range (\AA)	Scale	Equivalent Width (\AA)	EW_{model} (\AA)
H β	4861.3	5000	4848.8-4873.8	1.2	2.2264	0.0001
H β	4861.3	6000	4847.6-4875.0	1.1	1.8665	0.1201
H β	4861.3	7000	4846.5-4876.1	1.1	4.8483	11.6178
H β	4861.3	8000	4845.5-4877.1	1.1	7.5686	31.6545
H γ	4340.5	5000	4329.3-4351.7	1.1	1.8998	0.0
H γ	4340.5	6000	4328.3-4352.7	1.1	1.4781	0.0357
H γ	4340.5	7000	4327.3-4353.7	1.15	4.2294	4.1156
H γ	4340.5	8000	4326.4-4354.6	1.15	6.686	28.1554
H δ	4101.7	5000	4091.1-4112.3	1.25	1.8357	0.0
H δ	4101.7	6000	4090.1-4113.3	1.3	2.9231	0.0154
H δ	4101.7	7000	4089.2-4114.2	1.25	4.7805	1.8743
H δ	4101.7	8000	4088.3-4115.1	1.25	7.1643	24.9612
H ϵ	3970.1	5000	3959.9-3980.3	0.8	8.7485	0.0
H ϵ	3970.1	6000	3958.9-3981.3	1.1	8.1876	0.0083
H ϵ	3970.1	7000	3958.0-3982.2	1.2	6.5563	1.0218
H ϵ	3970.1	8000	3957.2-3983.0	1.25	7.5671	20.2677
H ζ	3889.0	5000	3879.0-3899.0	0.75	4.3284	0.0
H ζ	3889.0	6000	3878.0-3900.0	1.1	3.813	0.005
H ζ	3889.0	7000	3877.2-3900.8	1.2	4.4715	0.6273
H ζ	3889.0	8000	3876.3-3901.7	1.2	6.2376	15.606

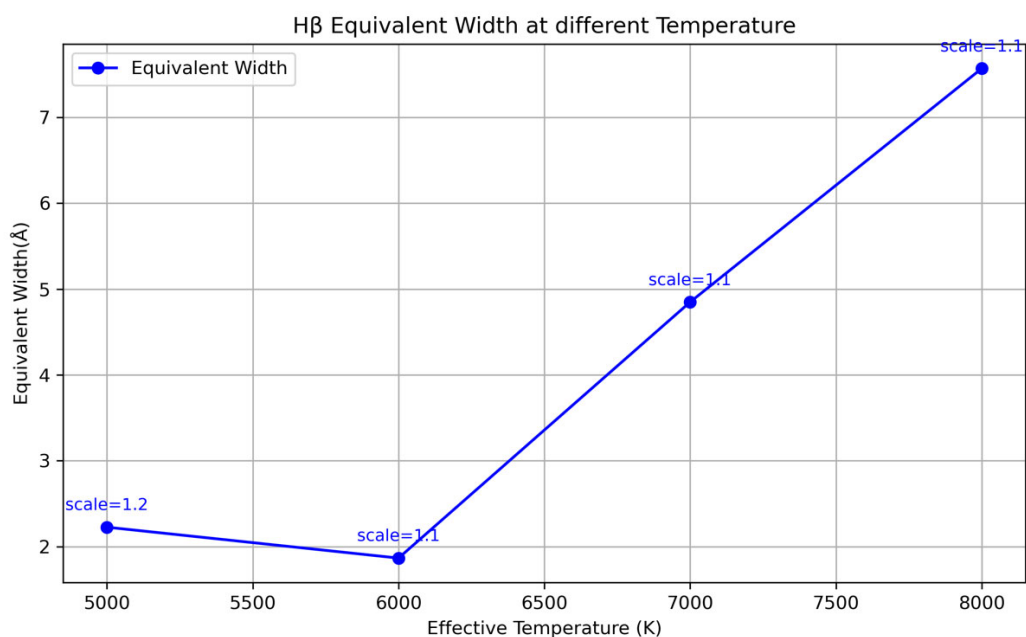


图 3 H β 等效宽度随有效温度变化

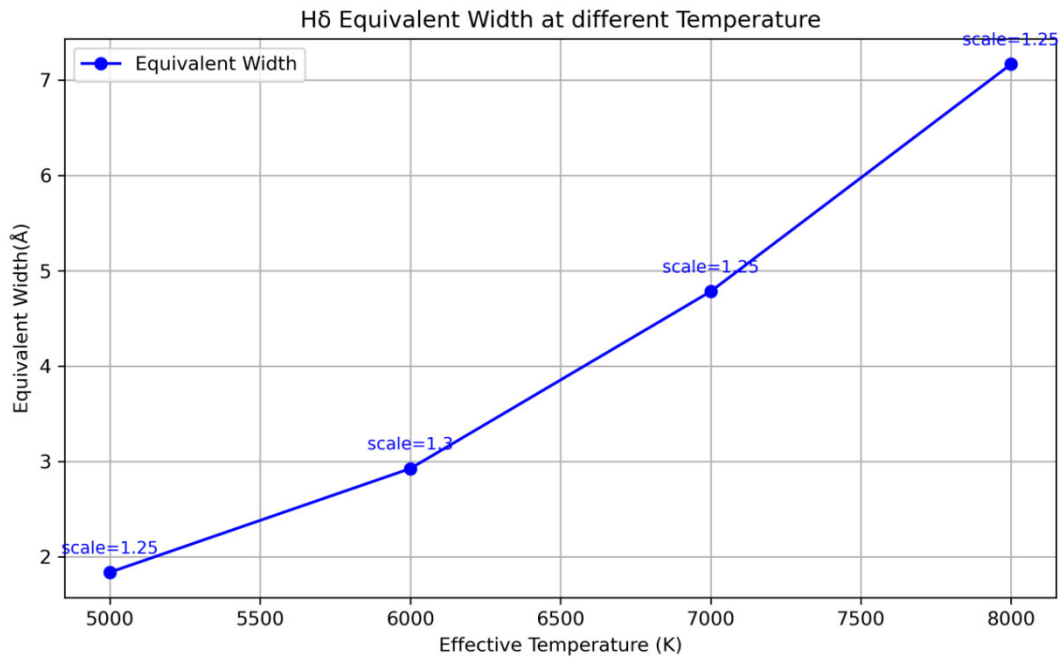


图 4 H δ 等效宽度随有效温度的变化

此外，我们还绘制 H β 、H δ 等效宽度随有效温度下的变化（图表 1、图表 2）。上图大致显示了等效宽度随温度的增加而变大，但 H β 等效宽度在 6000K 存在异常，其原因在于其设置的波长范围与稍宽，使得等效宽度积分到了其它的吸收线或者噪声明显的区域。与 EW_model(Å) 对比，对同一吸收线不同温度，其等效宽度是随温度增大而增大的，基本符合以上结论。但其数值相较于我们的 Equivalent Width(Å) 计算的等效宽度数值上有明显的不同，我们分析其可能存在的原因在于：

- 1) 基于玻尔兹曼分布的等效宽度仅仅考虑了多普勒展宽，而没有考虑其它影响展宽（如压力展宽）；
- 2) 吸收线仅考虑了束缚-束缚跃迁（使用玻尔兹曼分布计算），而忽略了其它因

素（如分子吸收）。

此外，H ϵ 和 H ζ 的等效宽度随温度的变化趋势明显反直觉。我们分析其原因可能在于：

- 1) H ϵ （3970.1 Å）紧邻 CaIIK 线（3933.7 Å），容易导致 EW 被高估或受扰。H ζ （3889.0 Å）处于紫外区，光谱拥挤、金属线干扰严重，在低温高密度大气下，金属吸收也显著增强。
- 2) 乘了一个缩放因子（scale）的黑体谱并不能很好的作为吸收谱的连续谱。

以下是计算等效宽度的部分代码：


```

# 读取 MARCS 模型光谱 (单位: erg / (s cm² Å))
data = np.loadtxt('marcs_spectrum_teff8000_feh0_logg4.dat')
wavelength_all = data[:, 0] # 单位: Å
flux_all = data[:, 1] # 单位: erg / (s cm² Å)

# --- 滤波预处理 ---
flux_smoothed = savgol_filter(flux_all, window_length=51, polyorder=3)

# 参数
T_eff = 8000 # 与模型一致

# 黑体函数, 输出单位: erg / (s cm² Å steradian)
def blackbody_lambda(wavelength, T):
    lam_cm = wavelength * 1e-8 # Å → cm
    h_val = h.cgs.value
    c_val = c.cgs.value
    k_val = k.B.cgs.value
    exponent = h_val * c_val / (lam_cm * k_val * T)
    B = (2.0 * h_val * c_val**2 / lam_cm**5) / (np.exp(exponent) - 1.0)
    return B * 1e-8 # 单位: erg / (s cm² Å steradian)

wave_min = 3876.3
wave_max = 3901.7
# 选择目标波段
mask = (wavelength_all >= wave_min) & (wavelength_all <= wave_max)
wavelength = wavelength_all[mask]
flux = flux_smoothed[mask]
B_lam_1 = blackbody_lambda(wavelength, T_eff) * np.pi
scale = 1.2
continuum = B_lam_1 * scale

# 归一化后的谱 (模型 / 连续谱)
flux_norm_1 = flux / continuum

ew = np.trapz(1 - flux_norm_1, wavelength)

print(f'使用黑体连续谱计算的 H 等效宽度 EW = {ew:.4f} Å')

```

该代码计算归一化流量 flux_norm_1 , 再计算等效宽度, 通过绘制 flux_norm_1 调整 scale 大小, 从而再次计算等效宽度.

3.2 吸收率

等效宽度 (EW) 与吸收率在本篇文章表征都是吸收线的强度, 而本节给出吸收率是为了更加直观展示吸收线强度. 我们使用的吸收率公式为:

$$\text{abs_rate} = 1 - \frac{F_{\text{abs}}}{F_c}$$

以下是绘制等效宽度的部分代码:

```

# 读取 MARCS 模型光谱 (单位: erg / (s cm² Å))
data = np.loadtxt('marcs_spectrum_teff8000_feh0_logg4.dat')
wavelength_all = data[:, 0] # 单位: Å
flux_all = data[:, 1] # 单位: erg / (s cm² Å)

# --- 滤波预处理 ---
flux_smoothed = savgol_filter(flux_all, window_length=51, polyorder=3)

# 恒星参数
T_eff = 8000 # 与模型一致

# 黑体函数 (输出单位: erg / (s cm² Å))
def blackbody_lambda(wavelength, T):
    lam_cm = wavelength * 1e-8 # Å → cm
    h_val = h.cgs.value
    c_val = c.cgs.value
    k_val = k.B.cgs.value
    exponent = h_val * c_val / (lam_cm * k_val * T)
    B = (2.0 * h_val * c_val**2 / lam_cm**5) / (np.exp(exponent) - 1.0)
    return B * 1e-8 * np.pi # 单位: erg / (s cm² Å)

# 波长范围 (Hβ)
wave_min = 3876.3
wave_max = 3901.7

# 截取目标波段
mask = (wavelength_all >= wave_min) & (wavelength_all <= wave_max)
wavelength = wavelength_all[mask]
flux = flux_smoothed[mask]

# 黑体连续谱计算并缩放
B_lam = blackbody_lambda(wavelength, T_eff)
scale = 1.2
continuum = B_lam * scale

# 归一化光谱
flux_norm = flux / continuum

# 吸收率: 1 - 归一化流量
absorption = 1 - flux_norm

# 计算等效宽度 (积分)
ew = np.trapz(absorption, wavelength)

```

在此, 我们主要绘制了低温 (5000K) 和高温 (8000K) 的吸收率谱.

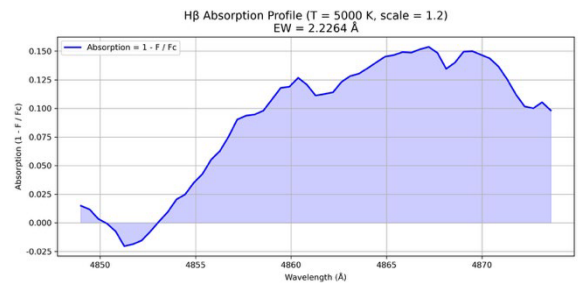


图 4 H β 在 4848.8-4873.8Å 的吸收率谱

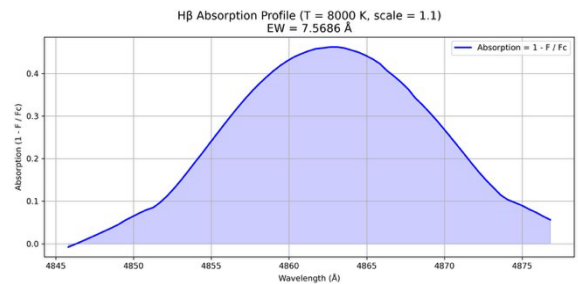


图 5 H β 在 4845.5-4877.1Å 的吸收率谱

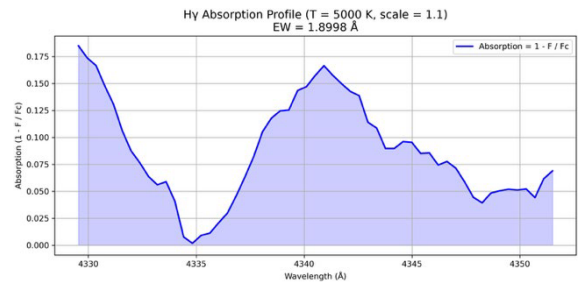


图 6 H γ 在 4329.3-4351.7Å 的吸收率谱

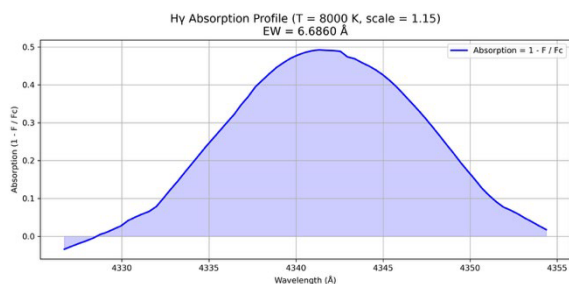


图 7 $H\gamma$ 在 4326.4–4354.6 Å 的吸收率谱

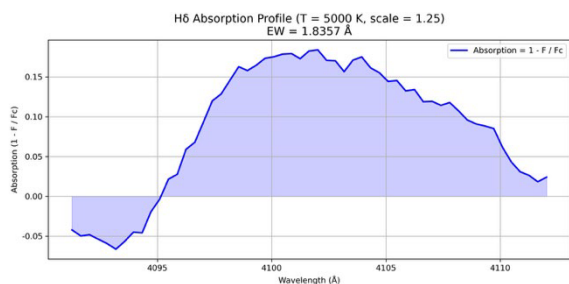


图 8 $H\delta$ 在 4091.1–4112.3 Å 的吸收率谱

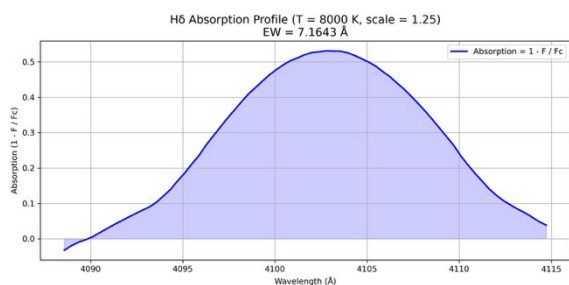


图 9 $H\delta$ 在 4088.3–4115.1 Å 的吸收率谱

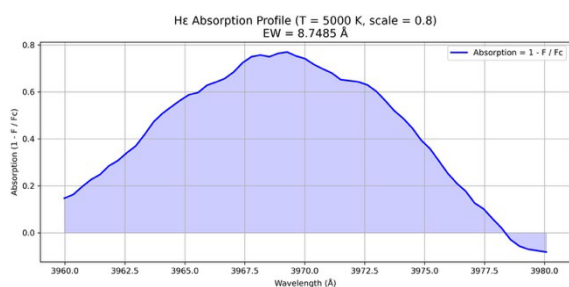


图 10 $H\epsilon$ 在 3879.0–3899.0 Å 的吸收率谱

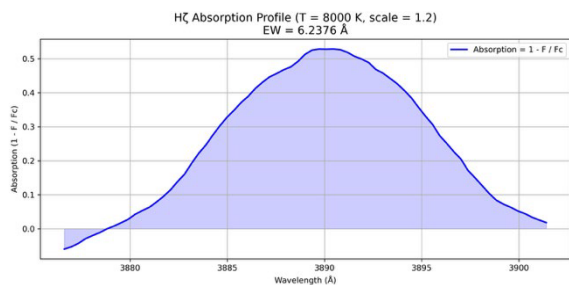


图 11 $H\zeta$ 在 3876.3–3901.7 Å 的吸收率谱

从以上图片可以看出，高温（8000K）吸收

率是总体大于低温的.其可以较好的使用玻尔兹曼分布解释，即在较低温度（如 5000 K）时，大部分氢原子处于基态（ $n=1$ ），吸收跃迁几率小，随着温度升高，玻尔兹曼分布使更多原子处于激发态.

此外，低温下 Balmer 线（如 $H\beta$ ）吸收线形状“奇怪”或不规则，而高温下呈现出平滑、高斯型轮廓.其原因可能为：

- 1) 在低温（如 5000K），几乎所有氢原子都处于基态，这导致跃迁对应的吸收信号很弱，再加上拟合误差、谱线噪声，吸收谱形状就会显得异常.
- 2) 在高温恒星中，吸收线主要以热展宽为主，其趋向于高斯分布.

因此，在与第 2 节数据做对比时，我们选择了 7000K 的吸收线谱进行分析.

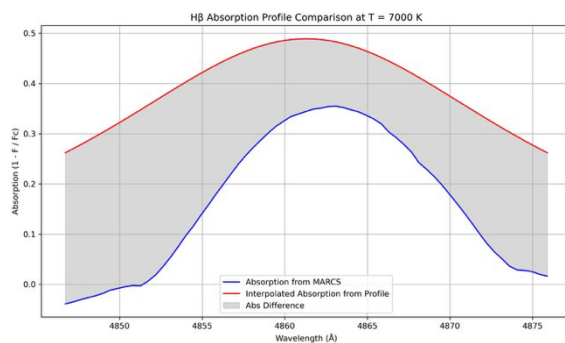


图 12 不同方法计算 7000K 的 $H\beta$ 吸收率谱. 红线是玻尔兹曼分布方法的谱，StellarSpecModel 恒星光谱模型工具的谱

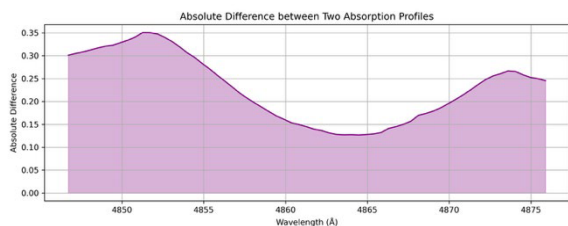


图 13 两种方法计算的吸收谱的差值绝对值（最大绝对差值：0.3507，平均绝对差值：0.2289）

两种方法计算得的吸收率谱大致都符合高斯型,但基于玻尔兹曼分布计算的吸收率谱明显大于基于 StellarSpecModel 恒星光谱模型工具的吸收率谱.我们分析其原因可能在于:

- 1) 玻尔兹曼分布假设系统处于局部热力学平衡 (LTE)，即粒子（原子、离子等）的能级分布仅由温度决定，且辐射场与物质达到热平衡.但在实际恒星大气中辐射场与物质可能未达到平衡，导致实际激发态粒子数低于 LTE 预测.因此，理论模型可能高估了吸收线的强度（即吸收率偏大）；
- 2) 理论模型通常采用理想黑体作为连续谱，而实际观测的连续谱会受到大气中存在的多种连续吸收源（如氢的束缚-自由吸收，金属原子的光电离等）的影响，使得连续吸收系数不准确与我们设置的存在偏差；
- 3) 未考虑大气是非均匀的情况.在非均匀大气中，源函数随深度变化，导致实际吸收线轮廓偏离纯指数衰减形式.

综上所述，我们使用玻尔兹曼分布计算吸收线目前只能得到一个大致符合规律的吸收线，仍有许

多实际的物理情况未考虑.因此，该篇文章仍有许多问题需要解决.

4 总结与展望

本实验根据玻尔兹曼分布、萨哈方程以及辐射转移方程，推导了恒星吸收谱的强度公式，综合运用了非线性方程迭代、统计物理分布、谱线轮廓数值计算和数值积分等多种数值模拟方法，模拟了恒星大气中氢巴尔末线的形成与强度变化，求得吸收线等效宽度来表征吸收强度，其中，吸收谱线考虑了 $H\beta$ 、 $H\gamma$ 、 $H\delta$ 、 $H\zeta$.在与实际谱线进行对比后，高温（8000K）吸收率是总体大于低温的，其可以较好的使用玻尔兹曼分布解释，而低温下 Balmer 线（如 $H\beta$ ）吸收线形状“奇怪”或不规则，这是由于几乎所有氢原子都处于基态，这导致跃迁对应的吸收信号很弱，再加上拟合误差、谱线噪声.

通过此次实验，我们建立了吸收线强度与温度的函数关系，接下来我们将考虑更多的元素产生的吸收线，从而更好地拟合真实恒星的谱线，并建立更准确的模型，进一步构建一个根据谱线反推恒星的温度、元素丰度等特征的程序，实现对恒星光谱吸收线背后物理过程研究.

参考文献：

- [1] Pierre Kervellat.Observational Astrophysics[M]. Translated by S. Lyle. Heidelberg Dordrecht London New York,2012:441-463.
- [2] 彭芳麟.计算物理基础[M].北京：高等教育出版社，2010.1:99-151
- [3] Jesse M.Kinder,Philip Nelson.Python 物理建模初学者指南[M].盖磊，译.北京：人民邮电出版社，2017.11:146-149
- [4] G.B. Rybicki , A.P. Lightman.Radiative Processes in Astrophysics[M].WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA,Weinheim,2004:3-42

- [5] 尤峻汉.天体物理中的辐射机制[M].北京:科学出版社,1998.8:79-84
- [6] 陈凌蛟,侯吉旋.玻尔兹曼分布的严格推导[J].大学物理, 2015,34(3):60-65

Research Stellar Spectrum with Boltzmann distribution

Yichuan Fan, Xinyue Teng, Yuheng Ye, Siyu Yang

(Department of Astronomy, School of Physics and Astronomy, Yunnan University, Kunming 650504, China)

Abstract: The spectrum of a star contains absorption lines from various atoms, which are caused by the transitions of electrons outside the atomic nucleus. The number density of particles at atomic energy levels affects these absorption lines. From static physical parameters to dynamic evolutionary processes, model fitting is a crucial method. By comparing synthetic spectra with actual observed spectra and considering local thermal equilibrium (LTE) or non-LTE effects, the model parameters are continuously adjusted. This paper assumes that the star is in local thermal equilibrium, where the number density of particles at atomic energy levels follows the Boltzmann distribution. Based on this distribution, the intensity of each atomic absorption line is calculated, and the equivalent width is determined. The results are compared with actual data to analyze the sources of differences and verify whether the number distribution of particles at atomic energy levels in the star follows the Boltzmann distribution.

Key words: Boltzmann distribution; stellar spectrum; absorption line; equivalent width