

拉普拉斯方程的数值解（静电场分布）研究

朱思宇

（云南大学 物理与天文学院，云南 650500）

摘要：本研究聚焦于静电场分布问题，采用数值方法求解拉普拉斯方程。论文首先阐述静电场与拉普拉斯方程的定义及其物理意义，通过有限差分法将拉普拉斯方程离散化，并运用 Gauss-Seidel 迭代法进行数值模拟。数值结果以等值线图和静电场分布图的形式呈现，验证了数值解的合理性和收敛性。研究证明数值方法可有效解决复杂边界条件下的静电场分布问题，为相关理论研究和技术应用提供了有力支持。

关键词：拉普拉斯方程；静电场分布；Gauss-Seidel 迭代法

静电场在物理学、电气工程等众多领域具有重要地位，从电学基础理论研究到实际应用如高压输电、静电除尘等，静电场的分布情况直接或间接影响着设备的性能和效率。然而，传统解析方法在处理复杂边界条件和不规则几何形状的静电场问题时存在局限性，难以得到精确解。因此，采用数值方法求解拉普拉斯方程来研究静电场分布显得尤为重要和必要。拉普拉斯方程的数值解能够更好的适应复杂问题，具有较高的精度和灵活性，其研究不仅具有理论研究价，还可以推动技术创新发展。

1 静电场与拉普拉斯方程

1.1 静电场的定义和特性

在早期电磁学中，我们学过静电场的定义以及物理特性。静电场是由静电荷产生的电场。在库仑定律：由 N 个静止的点电荷，携带电量为 q_1, q_2, \dots, q_N ，位于 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ ，则任一电荷 j ，受到的其它电荷的力为 $\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \vec{e}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ ，其中 ϵ_0 为真空中的介电常量， $\vec{e}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ 为沿着 $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ 方向的单位矢量。电力是由电场来实现，用电场强

度 \vec{E} 表示单位电荷受的力，则其它电荷在 \vec{r}_j 处产生的场为 $\vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \vec{e}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ 。

由库仑定律可知静电场的大小和方向，以及相关的叠加原理；而静电场的最显著特征为有源无旋。

1.2 拉普拉斯方程的定义和特性

拉普拉斯算子可以看成梯度的散度，故 $\nabla^2 = \frac{1}{fgh} [\frac{\partial}{\partial u} (\frac{gh}{f} \frac{\partial}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\frac{fh}{g} \frac{\partial}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w} (\frac{fg}{h} \frac{\partial}{\partial w})]$ 。静电学的基本问题是求解给定边界条件的泊松方程 $\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon}$ ，自由电荷只出现在导体的表面，在空中没有其他自由电荷分布，即自由电荷密度为 $\rho = 0$ ，因此泊松方程就简化为拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。拉普拉斯方程是基于无源区域（即没有自由电荷等源的存在）物理量所满足的规律而建立起来的数学方程，用于描述物理量在空间中的稳态分布情况。由此，求解空间电场分布问题就转化为求解满足边界条件的拉普拉斯方程的解。

2 拉普拉斯方程数值方法求解

2.1 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法比较

对于给定的静电几何形状，拉普拉斯方程的解可以用于以一般方式模拟电位分布。但有一个限制条件是所测试的几何形状中必须存在边界，并且所有的最大值和最小值点（最大和最小电位）都必须位于边界点上。Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法这两种方法，矩阵都是从左上角依次更新到右下角的。而这两种方法的区别在于每个点的更新方式。设定一个“增量 v ”值。这是旧的势点与新势点之间差值的总和。增量 v 值越小，数值解就越精确。

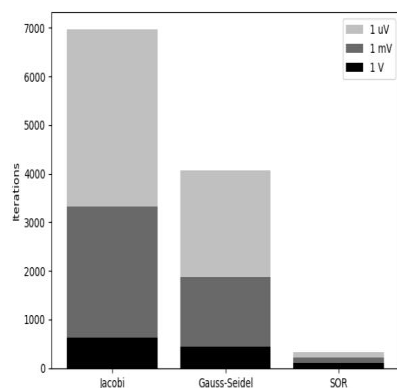


图1 三种不同迭代方法的堆叠柱状图

从图1中（此处忽略SOR方法）可以得到Jacobi方法需要迭代的次数最多，且收敛速度最慢，而GS迭代法比Jacobi方法需要迭代次数少且收敛速度较快，因此选择GS迭代法用于求拉普拉斯方程的数值解更高效准确。Gauss-Seidel迭代法是对Jacobi迭代法的一种改进。它在迭代过程中，利用已经更新的最新成分值来代替旧值进行后续成分的计算，从而加速了收敛过程。

2.2 Gauss-Seidel 迭代法

Gauss-Seidel 迭代法使矩阵来存储和更新数值。

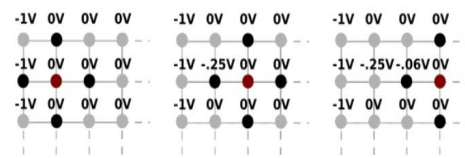


图2 2次 Gauss-Seidel 迭代法的矩形图示。

将线性方程 $A = xb$ 中的系数矩阵 $A = a_{ij} \in R^{n \times n}$ 分成三部分，其中 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 阶非奇异矩阵； b 为 n 阶已知向量； x 为 n 阶未知向量。为了不失一般性，令 $A = I - L - U$ （ I 为单位矩阵）， L 为严格的下三角矩阵， U 为严格的上三角矩阵，则 Gauss-Seidel 迭代矩阵为 $T_{GS} = (I - L)^{-1}U$ 。

2.3 利用有限差分法和 Gauss-Seidel 迭代法求拉普拉斯方程数值解

有限差分法的基本思想是将场域划分成网格，把求解场域内连续的场分布用求解网格节点上的离散的数值解来代替，即用网格节点的差分方程近似代替场域内的偏微分方程来求解。

在一个边界为 L 的二维无源区域 S 内，电位函数 $\varphi(x, y)$ 满足拉普拉斯方程和边界

$$\text{条件为: } \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ \varphi|_L = f(x, y) \end{cases}, \text{ 通常将场域分成足}$$

够小的正方形网格，网格线之间的距离为 h ，节点 (x_i, y_i) 处的电位 φ_{ij} 可以由其周围直接相邻的四个节点的电位表示，即二维拉普拉斯方程的差分形式： $\varphi_{ij} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1})$ 。将二维拉普拉斯方

程的差分形式重写为 $4\varphi_{ij} - (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1}) = 0$ ，将其写成矩阵形式 $A\varphi = b$ ，将边界条件已知的节点给到矩阵的 b 中。所有节点设置一个初始猜测值 $\varphi_{ij}^{(0)}$ （通常可以设为 0 或边界条件的平均值）。再使用 Gauss-Seidel 迭代法来更新每个内部节点的电位值： $\varphi_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{(k+1)} + \varphi_{i,j-1}^{(k+1)} + \varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)})$ ， k 为当前的迭代步数，而 $\varphi_{ij}^{(k+1)}$ 是下一次迭代步数的电位值。

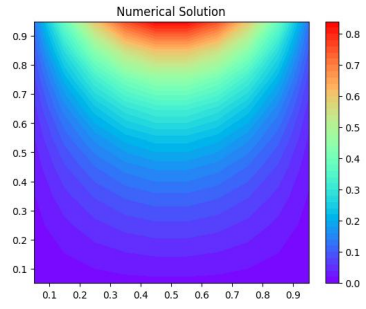


图 3 利用 Gauss-Seidel 迭代法绘制的拉普拉斯方程数值解等值线图

图 3 为利用 Gauss-Seidel 迭代法将拉普拉斯数值解可视化的图，通过 Gauss-Seidel 迭代法进行多次迭代后，得到的电位分布较为稳定，没有出现明显的振荡或异常现象，这说明迭代过程是收敛的。经过足够多的迭代次数，数值解逐渐趋近于真实的解。

从图中可以看到，中间区域的颜色变化相对较为平缓，主要是以绿色、蓝色为主，这表明在该区域内电位变化比较缓慢，电位值相对较为稳定，处于一个中间状态。这符合静电场中远离场源的区域电位变化会减小的物理规律；在靠近边界的地方，颜色变

化较为明显，从红色逐渐过渡到绿色、蓝色等，这说明在边界附近电位变化较大。这是边界条件对电位的分布产生了显著的影响，电位从边界向内部区域逐渐衰减，导致边界附近的电位梯度较大。

3 数值模拟与结果分析

这一部分中，利用 Gauss-Seidel 迭代法求解二维拉普拉斯方程。

3.1 Gauss-Seidel 迭代法运行时间（网格大小）

在此部分，首先研究不同网格大小对于 Gauss-Seidel 迭代法运行时间的影响，通过图示得到迭代次数最少的网格大小，用此进一步分析拉普拉斯方程的静电分布。

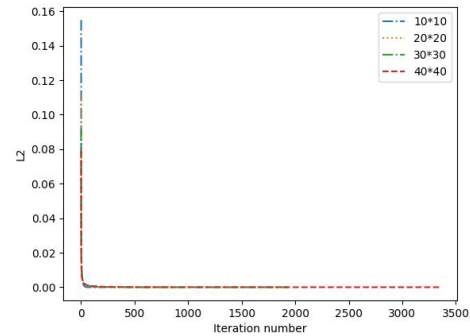


图 4 不同网格大小对于迭代次数的影响

表 1 不同网格大小对于迭代时间和次数的影响

Grid size(mm)	CPU Time(seconds)	Number of iterations
10*10	0.0392116	232
20*20	0.4490815	888
30*30	2.0411070	1931
40*40	6.1114645	3345

根据图 4 和表 1 可知，网格越大，迭代所需时间越多，迭代次数越多，收敛速度越慢；因此选择的网格 10*10 最合适，此时迭代次数较少且收敛速度较快。

3.2 拉普拉斯方程的静电场分布

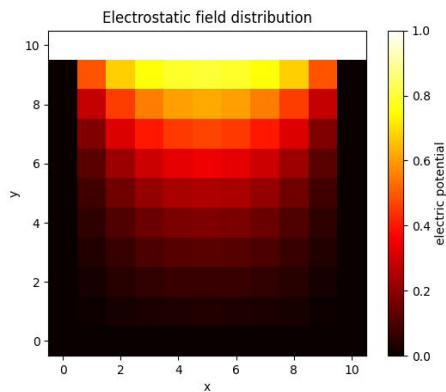


图5 拉普拉斯方程的静电场分布图

在二维无源区域 S 中, 将所有节点的初始点位设为 0, 然后设置边界条件, 将上边界电位设置为 1, 其他边界为 0, 采用 Gauss-Seidel 迭代法更新每个内部节点的电位值。在每次迭代中, 利用周围的四个相邻节点的电位值来计算当前节点的新电位值, 并不断重复这个过程, 直到达到设定的迭代次数或满足收敛条件。

通过观察绘制的拉普拉斯方程数值解的静电场分布图 (图 5), 可以直观地看到电位在区域内的变化情况。通常在边界附近电位变化较大, 而内部区域电位变化相对平缓, 这符合静电场的物理特性。此外还可以通过监测相邻两次迭代的电位差的最大值或平均值来判断迭代过程的收敛性。随着迭代次数的增加, 电位差逐渐减小, 说明迭代结果逐渐趋于稳定和收敛。

将图 3 和图 5 对比来看, 两者都表示静电场中电位的分布情况, 从不同角度呈现数

值解的特征, 可以更全面地分析静电场分布反映了电位在二维空间的变化规律; 图 3 展示了电位相同的区域, 图 5 展示了电位变化的趋势; 图 3 中等值线密集且颜色为红色的区域, 显示电位变化剧烈, 而同时也与图 5 上颜色变化快速且为黄色的区域, 说明电位梯度大; 同理, 图 3 中等值线稀疏区域对应图 5 中上颜色比较深的区域, 电位梯度小。

4 总结

本研究深入探讨了拉普拉斯方程在静电场分布问题中的数值解法, 对比分析了 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的性能, 确定了 Gauss-Seidel 迭代法在求解效率和收敛速度上的优势。通过有限差分法对拉普拉斯方程进行离散化处理, 并结合 Gauss-Seidel 迭代法实现了对二维静电场分布的数值模拟。数值结果以等值线图和静电场分布图的形式呈现, 清晰地展示了电位在空间中的变化规律, 验证了数值解的合理性和方法的可靠性。本研究不仅为解决复杂边界条件下的静电场问题提供了有效的数值方法, 还为相关领域的技术创新和工程应用奠定了理论基础, 具有重要的理论价值和实际意义。未来的研究可以进一步优化算法, 提高计算效率, 减少计算误差, 拓展数值方法在更多复杂物理问题中的应用。

参考文献:

- [1] 赵凯华, 陈熙谋. (2013). 《电磁学》(第4版). 高等教育出版社
- [2] Giordano, N. J., & Nakanishi, H. (2006). *Computational physics*. Pearson Education.
- [3] Jain, M. K., Iyengar, S. R. K., & Jain, R. K. (1985). Numerical methods for scientific and engineering computation. New York, N.Y.: Wiley.
- [4] Jakuska. (n.d.). laplace_equation. GitHub. Retrieved from https://github.com/Jakuska/laplace_equation
- [5] MehradTJ. (n.d.). Numerical-Laplace-Solver. GitHub. Retrieved from <https://github.com/MehradTJ/Numerical-Laplace-Solver>
- [6] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 384.
- [7] 李晓奇. (2007). 静电场中拉普拉斯方程的求解要领. 思茅师范高等专科学校学报, 23(3), 442700.
- [8] 郝艳花. (2017). Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法. 山西大同大学学报(自然科学版), 33(5), 037009.
- [9] Hamza, Y. F., Jiang, H., & Lan, H. (2021). Gauss-Seidel 最小二乘渐进迭代逼近. 计算机辅助设计与图形学报, 33(1), 1-11. <https://doi.org/10.3724/SP.J.1089.2021.18289>.
- [10] 霍文晓. (2015). 静电场边值问题有限差分法的仿真分析. 科技视界, (5), 002. <https://doi.org/10.19694/j.cnki.issn2095-2457.2015.05.002>

Numerical solution of Laplace's equation for electrostatic fields.

ZHU Si-yu

(School of Physics and Astronomy, Yunnan University, Yunnan 650500, China)

Abstract: This study focuses on the problem of electrostatic field distribution and employs numerical methods to solve the Laplace equation. The paper first elaborates on the definitions and physical meanings of the electrostatic field and the Laplace equation. It discretizes the Laplace equation using the finite difference method and conducts numerical simulations using the Gauss-Seidel iterative method. The numerical results are presented in the form of contour plots and electrostatic field distribution maps, verifying the rationality and convergence of the numerical solutions. The study demonstrates that the numerical method can effectively solve the electrostatic field distribution problem under complex boundary conditions, providing strong support for related theoretical research and technical applications.

Key words: laplace equation; electrostatic field distribution; Gauss-Seidel iterative method