非对称特征值问题的计算方法实验报告

PB20010429 侯相龙

2022 年 12 月 9 日

1 问题描述

1. 利用幂法求多项式方程的模最大根。

2. 利用 QR 方法求实矩阵的全部特征值，并求多项式方程的全部根。

2 多项式方程求根问题与矩阵特征值问题的转换

对于首一多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in \mathbb{F}[x]$，考虑它所对应的友方阵：

$$
A = \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}
$$

该方阵的特征对象是即为 $f(x)$，它的特征值与 $f(x)$ 的根一一对应，于是多项式求根的问题可以转化为求矩阵特征值的问题。

在幂法中，我们对于此稀疏矩阵可以直接考虑迭代形式。令 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$, 则迭代形式为：

$$
\begin{cases} x_1^{(k)} = -a_0 x_n^{(k-1)} \\ x_j^{(k)} = x_{j-1}^{(k-1)} - a_{k-1} x_n^{(k-1)}, j = 2, 3, \cdots n \end{cases}
$$

3 运行结果

3.1 求高次方程的模最大根

方程 1：$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

方程 2：$x^3 - 3x - 1 = 0$

方程 3：$x^8 + 101x^7 + 208.01x^6 + 10891.01x^5 + 9802.08x^4 + 79108.9x^3 - 99902x^2 + 790x - 1000 = 0$

```
Exercise_6_1
迭代次数1000
The largest root of equation (1) is:-3
time consumption:1.1645ms

迭代次数1000
The largest root of equation (2) is:1.87939
time consumption:1.5163ms

迭代次数1000
The largest root of equation (3) is:-100
time consumption:1.6263ms
```

3.2 计算方程 $x^{41} + x^3 + 1 = 0$ 的所有根

```
Exercise_6_2_1
The solution of the equation is:
(1.0143, 0.080923) (1.0143, -0.080923) (0.987184, 0.240354) (0.987184, -0.240354) (0.933664, 0.
392546) (0.933664, -0.392546) (0.855158, 0.532634) (0.855158, -0.532634) (0.75372, 0.65538) (0
.75372, -0.65538) (0.63234, 0.753401) (0.63234, -0.753401) (0.507569, 0.810574) (0.507569, -0.8
10574) (0.417152, 0.871067) (0.417152, -0.871067) (0.289812, 0.946424) (0.289812, -0.946424) (
0.139165, 0.992477) (0.139165, -0.992477) (-0.0197286, 1.00935) (-0.0197286, -1.00935) (-0.180
206, 0.997962) (-0.180206, -0.997962) (-0.336984, 0.959228) (-0.336984, -0.959228) (-0.48528, 0
.894538) (-0.48528, -0.894538) (-0.620673, 0.805889) (-0.620673, -0.805889) (-0.739101, 0.6959
04) (-0.739101, -0.695904) (-0.836863, 0.567826) (-0.836863, -0.567826) (-0.910511, 0.425528)
(-0.910511, -0.425528) (-0.956339, 0.273776) (-0.956339, -0.273776) (-0.96814, 0.120867) (-0.9
6814, -0.120867) (-0.952484, 0)
```

3.3 求矩阵的全部特征值

$$A = \begin{pmatrix} 9.1 & 3.0 & 2.6 & 4.0 \\ 4.2 & 5.3 & 4.7 & 1.6 \\ 3.2 & 1.7 & 9.4 & x \\ 6.1 & 4.9 & 3.5 & 6.2 \end{pmatrix}$$

其中，x 取 0.9，1.0，1.1。

```
Exercise_6_2_2
x =0.9时
The eigenvalues are:
(17.4397, 0) (2.8704, 0.642891) (2.8704, -0.642891) (6.81952, 0)

x =1时
The eigenvalues are:
(17.4765, 0) (2.868, 0.688748) (2.868, -0.688748) (6.78752, 0)

x =1.1时
The eigenvalues are:
(17.513, 0) (2.86546, 0.73217) (2.86546, -0.73217) (6.75606, 0)
```

4 结果分析

下面分析一下在求矩阵全部特征值时，随着 x 的变化特征值实部、虚部和模长的变化情况

1) x 从 1 向 0.9 或 1.1 变化时，特征值实部最大变化约为 0.037；虚部最大变化约为 0.046；模长最大变化为 0.047，变化较小。

2) 这一结果说明了：计算该矩阵的特征值是比较良态的。