线性方程组的古典迭代解法实验报告

PB20010429 侯相龙

2022 年 10 月 27 日

1 问题描述

1. 分别用 Jacobi 迭代法，G-S 迭代法和 SOR 迭代法求线性方程组的解（ODE），并比较迭代次数、运行时间与精确解的误差。

2. 用 Jacobi 迭代法，G-S 迭代法和 SOR 迭代法求解上述代数方程组（PDE），并比较在不同精细程度的网格时收敛所需要的迭代次数

2 代数方程组与线性方程组的转换

网格化操作得到的代数方程组为：

$$u_{i,j} = \frac{1}{4+h^2g(ih,jh)}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}+h^2f(ih,jh))$$

对进行 u“拉直”操作，得到形如 $Au=b$ 的线性方程组。

$$A = \begin{pmatrix} T+D_1+2I & -I & & \\ -I & T+D_2+2I & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I & T+D_{n-1}+2I \end{pmatrix}$$

其中，T 为主对角元均为 2，邻近对角线的元素均为-1 的三对角方阵（n-1 维）；
$D_i = diag(h^2g(ih,h), h^2g(ih,2h), \cdots, h^2g(ih,(n-1)h))$

2.1 Jacobi 迭代法

令 $D = diag(D_1+4I, D_2+4I, \cdots, D_{n-1}+4I)$，迭代矩阵 $B = I - D^{-1}A$。将上面的 A 代入，即得：

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4+h^2g(ih,jh)}(u_{i-1,j}^{(k)}+u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)}+u_{i,j+1}^{(k)}+h^2f(ih,jh))$$

2.2 G-S 迭代法

G-S 法与 Jacabi 迭代法不同之处在于，用已经迭代更新的分量计算目标值。考虑到 u 是按自然顺序排列的，故在计算 $u_{i,j}^{(k+1)}$ 时，$u_{i-1,j}^{(k+1)}, u_{i,j-1}^{(k+1)}$ 已经算出。再利用 Jacobi 迭代法的迭代公式，就有：

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4+h^2g(ih,jh)}(u_{i-1,j}^{(k+1)}+u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k+1)}+u_{i,j+1}^{(k)}+h^2f(ih,jh))$$

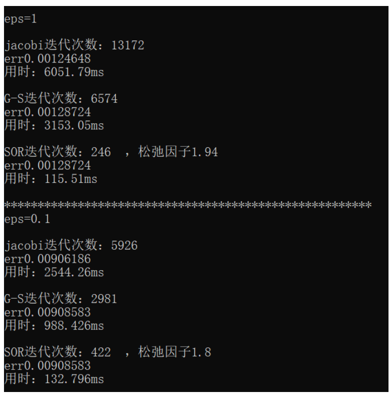
2.3 SOR 迭代法

对于分量自然顺序排列的 u 的各分量，SOR 迭代法相较于 G-S 法，对原右式乘松弛因子 w，并加上 $1-w$ 乘迭代前的值。故迭代公式为：

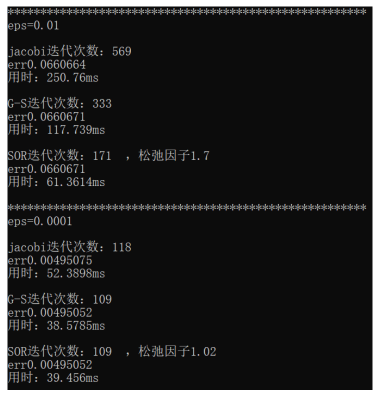
$$u_{i,j}^{(k+1)}=(1-w)u_{i,j}^{(k)}+\frac{w}{4+h^2g(ih,jh)}(u_{i-1,j}^{(k+1)}+u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k+1)}+u_{i,j+1}^{(k)}+h^2f(ih,jh))$$

3 运行结果

3.1 上机习题 1

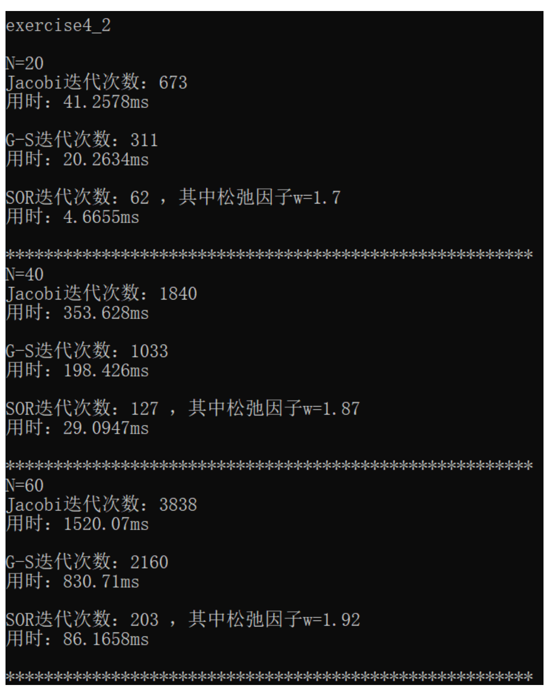


```
eps=1

jacobi迭代次数：13172
err0.00124648
用时：6051.79ms

G-S迭代次数：6574
err0.00128724
用时：3153.05ms

SOR迭代次数：246 ，松弛因子1.94
err0.00128724
用时：115.51ms

****************************************************
eps=0.1

jacobi迭代次数：5926
err0.00906186
用时：2544.26ms

G-S迭代次数：2981
err0.00908583
用时：988.426ms

SOR迭代次数：422 ，松弛因子1.8
err0.00908583
用时：132.796ms
```



```
****************************************************
eps=0.01

jacobi迭代次数：569
err0.0660664
用时：250.76ms

G-S迭代次数：333
err0.0660671
用时：117.739ms

SOR迭代次数：171 ，松弛因子1.7
err0.0660671
用时：61.3614ms

****************************************************
eps=0.0001

jacobi迭代次数：118
err0.00495075
用时：52.3898ms

G-S迭代次数：109
err0.00495052
用时：38.5785ms

SOR迭代次数：109 ，松弛因子1.02
err0.00495052
用时：39.456ms
```

3.2 上机习题 2



```
exercise4_2

N=20
Jacobi迭代次数：673
用时：41.2578ms

G-S迭代次数：311
用时：20.2634ms

SOR迭代次数：62 ，其中松弛因子w=1.7
用时：4.6655ms

*******************************************************
N=40
Jacobi迭代次数：1840
用时：353.628ms

G-S迭代次数：1033
用时：198.426ms

SOR迭代次数：127 ，其中松弛因子w=1.87
用时：29.0947ms

*******************************************************
N=60
Jacobi迭代次数：3838
用时：1520.07ms

G-S迭代次数：2160
用时：830.71ms

SOR迭代次数：203 ，其中松弛因子w=1.92
用时：86.1658ms

*******************************************************
```

4 结果分析

4.1 上机习题 1

对于实验的所有 ϵ, 三种方法的实验结果基本上都有如下规律：

1) G-S 迭代法的迭代次数小于 Jacobi 迭代法的迭代次数（后者大概是前者的 2 倍）；选择合适的松弛因子进行的 SOR 迭代次数明显少于 G-S 的迭代次数（对于 $\epsilon = 1e - 4$ 例外）

2) 对于同一规模的问题，三种方法每次迭代的时间复杂度是相同的，故运行时间的结果也和 1) 大致相同。即：Jacobi 迭代法用时大于 G-S 迭代法，G-S 迭代法用时明显大于 SOR 迭代法。

3) 由于迭代终止条件是相同的，对于同一问题，三种方法得到的数值解与精确解的误差基本是相同的。

4.2 上机习题 2

不同矩阵维数的迭代次数、迭代时间如下表。

Method \ N	20	40	60
Jacobi	673	1840	3838
G-S	311	1011	2160
SOR	62	127	203

表 1: 不同 N、不同方法的迭代次数

Method \ N	20	40	60
Jacobi	4.13E1	3.54E2	1.52E3
G-S	2.03E1	1.98E2	8.31E2
SOR	4.67E0	2.91E1	8.62E1

表 2: 不同 N、不同方法的运行时间（单位：ms）

从表中数据可以看出，SOR 迭代法相较于 G—S 迭代次数明显更少、CPU 耗时明显更短；G-S 迭代法相较于 Jacobi 迭代法迭代次数更少、CPU 耗时更短。