

线性方程组的直接解法实验报告

PB20010429 侯相龙

2022 年 9 月 17 日

1 问题描述

1. Gauss 消去法、全主元 Gauss 消去法、列主元 Gauss 消去法解线性方程组。
2. 平方根法、改进的平方根法解正定方程组。
3. 比较各方法的优劣

2 概要设计

- 前代法、回代法解方程

在对矩阵进行三角分解后, 利用前代法求解下三角方程, 回代法求解上三角方程。复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$

- LU 分解

通过逐列消元将原矩阵分解成下三角阵和上三角阵乘积。复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$ 。

- 置换行/列

交换矩阵的行/列。复杂度 $\mathcal{O}(n)$ 。

- 选主元的三角分解

先通过置换操作在消元前选择尽可能大的主元, 再进行消元。复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$ 。

- Cholesky 分解

将正定矩阵分解成下三角矩阵及其转置的乘积, 逐列计算下三角矩阵的元素。复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$

- 改进的平方根法分解

为避免开方, 将正定阵分解为单位下三角阵、对角阵、单位下三角阵的置换的乘积。复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$

3 测试数据及运行结果

3.1 Gauss 消去法

- 测试数据: 84 阶方程组

(1)

(2)

方程右端项初始化的随机向量:
24623 14092 23851 27798 29484 21082 26546 11249 15243 31788 7857 12757 20606
21433 13843 28113 357 20660 21841 32202 30623 11727 26598 3233 10912 23678 20
994 1040 23108 26109 23938 5589 867 23956 29472 24595 678 18458 29671 12533 2
2937 7352 18155 11668 18945 17135 28470 24603 15215 12764 15877 28969 7957 53
07 30005 4214 17881 6315 28152 20666 23720 18352 6092 31434 781 5374 25518 71
72 12290 32373 28554 21486 22790 26472 1527 9498 3951 4258 17953 19789 2050 2
0907 2054 26847 16577 30535 20710 25957 14596 27456 27636 1934 28619 2405 315
70 2123 7251 17875 5436 3379

• 程序运行结果 1

(1) 平方根法:

平方根法解方程的解:
2365.6 966.986 2056.54 2318.6 2555.44 1610.99 2416.62 768.761 1144.76 3026.63 376.906
1061.31 1767.02 1874.54 920.578 2762.68 -434.386 1938.18 1712.59 2776.89 2720.53 640.8
25 2598.22 -25.0198 884.979 2087.23 1920.71 -300.306 2122.36 2184.75 2139.17 361.543 -
165.6 2161.46 2507.01 2240.47 -316.689 1604.42 2730.46 761.975 2182.79 347.13 1697.91
828.791 1682.18 1294.41 2508.71 2088.51 1209.22 1034.3 1211.75 2725.22 505.037 181.412
2987.84 -54.8386 1774.54 190.409 2636.37 1597.91 2050.51 1616.97 131.789 3157.14 -269
224 316.093 2482.3 378.94 900.301 2908.05 2392.24 1723.51 1858.62 2480.28 -189.432 94
1.037 277.061 239.352 1587.42 1839.42 -192.621 2136.79 -268.239 2599.61 1119.16 2785.7
5 1558.3 2341.23 986.382 2390.95 2560.12 -356.103 2934.92 -374.093 3211.01 -166.012 57
2.109 1695.92 343.654 303.535

(2) 改进的平方根法:

改进的平方根法解方程的解:
2365.6 966.986 2056.54 2318.6 2555.44 1610.99 2416.62 768.761 1144.76 3026.63 376.906
1061.31 1767.02 1874.54 920.578 2762.68 -434.386 1938.18 1712.59 2776.89 2720.53 640.8
25 2598.22 -25.0198 884.979 2087.23 1920.71 -300.306 2122.36 2184.75 2139.17 361.543 -
165.6 2161.46 2507.01 2240.47 -316.689 1604.42 2730.46 761.975 2182.79 347.13 1697.91
828.791 1682.18 1294.41 2508.71 2088.51 1209.22 1034.3 1211.75 2725.22 505.037 181.412
2987.84 -54.8386 1774.54 190.409 2636.37 1597.91 2050.51 1616.97 131.789 3157.14 -269
224 316.093 2482.3 378.94 900.301 2908.05 2392.24 1723.51 1858.62 2480.28 -189.432 94
1.037 277.061 239.352 1587.42 1839.42 -192.621 2136.79 -268.239 2599.61 1119.16 2785.7
5 1558.3 2341.23 986.382 2390.95 2560.12 -356.103 2934.92 -374.093 3211.01 -166.012 57
2.109 1695.92 343.654 303.535

• 测试数据 2: 系数矩阵 A 为 $n=40$ 阶 Hilbert 矩阵, 即 A 的第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

向量 b 的第 i 个分量为

$$b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1}$$

• 程序运行结果 2

(1) 平方根法:

平方根法解方程的解:
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(i
nd) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -n
an(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan
(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(i
nd) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -n
an(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan
(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(i
nd) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)

(2) 改进的平方根法:

改进的平方根法解方程的解:
1 0.999957 1.00141 0.981278 1.11765 0.634084 1.68622 -1.57649 13.3351 -27.9216 25.2015
8.5266 -6.58239 0.0378113 -65.7442 92.1943 -15.2484 20.3442 -49.9488 51.8719 -43.3947
-64.241 96.4096 -85.3889 222.924 -223.738 154.82 -144.561 -14.1851 226.474 -164.327 -
16.0552 54.8627 -9.4533 -31.6136 36.6529 -103.406 -10.1911 119.339 56.0384 -24.9291 -1
1.4122 91.4622 -112.799 -64.6918 -39.5595 144.454 71.6154 -70.3498 -26.6912 -75.8154 -
79.5946 134.671 135.826 -133.541 9.78893 -41.4501 -181.832 -34.2271 162.214 -17.7347 1
28.124 334.585 -37.3894 -155.205 -18.543 -1.55582 -51.8962 230.316 -132.675 -158.892 -
304.666 -74.5634 -266.301 147.053 452.814 144.698 194.596 -59.2636 29.2543 -491.279 -1
23.149 330.528 212.781 37.5266 162.345 -28.3789 -133.992 -413.228 -16.4368 74.7542 22.
1767 -78.1529 -53.6832 140.21 299.745 -37.0325 -254.893 239.939 -134.552

3.3 各方法比较

对 3.2 平方根法和改进的平方根法中的两组测试数据使用 Gauss 消去法，分别得到如下运行结果：

- 程序运行结果 1

(1) Gauss 消去法

```
不选主元的解：
2365.6 966.986 2056.54 2318.6 2555.44 1610.99 2416.62 768.761 1144.76 3026.63 376.906
1061.31 1767.02 1874.54 920.578 2762.68 -434.386 1938.18 1712.59 2776.89 2720.53 640.8
25 2598.22 -25.0198 884.979 2087.23 1920.71 -300.306 2122.36 2184.75 2139.17 361.543 -
165.6 2161.46 2507.01 2240.47 -316.689 1604.42 2730.46 761.975 2182.79 347.13 1697.91
828.791 1682.18 1294.41 2508.71 2088.51 1209.22 1034.3 1211.75 2725.22 505.037 181.412
2987.84 -54.8386 1774.54 190.409 2636.37 1597.91 2050.51 1616.97 131.789 3157.14 -269
224 316.093 2482.3 378.94 900.301 2908.05 2392.24 1723.51 1858.62 2480.28 -189.432 94
1.037 277.061 239.352 1587.42 1839.42 -192.621 2136.79 -268.239 2599.61 1119.16 2785.7
5 1558.3 2341.23 986.382 2390.95 2560.12 -356.103 2934.92 -374.093 3211.01 -166.012 57
2.109 1695.92 343.654 303.535
```

(2) 全主元 Gauss 消去法

```
全主元的解
2365.6 966.986 2056.54 2318.6 2555.44 1610.99 2416.62 768.761 1144.76 3026.63 376.906
1061.31 1767.02 1874.54 920.578 2762.68 -434.386 1938.18 1712.59 2776.89 2720.53 640.8
25 2598.22 -25.0198 884.979 2087.23 1920.71 -300.306 2122.36 2184.75 2139.17 361.543 -
165.6 2161.46 2507.01 2240.47 -316.689 1604.42 2730.46 761.975 2182.79 347.13 1697.91
828.791 1682.18 1294.41 2508.71 2088.51 1209.22 1034.3 1211.75 2725.22 505.037 181.412
2987.84 -54.8386 1774.54 190.409 2636.37 1597.91 2050.51 1616.97 131.789 3157.14 -269
224 316.093 2482.3 378.94 900.301 2908.05 2392.24 1723.51 1858.62 2480.28 -189.432 94
1.037 277.061 239.352 1587.42 1839.42 -192.621 2136.79 -268.239 2599.61 1119.16 2785.7
5 1558.3 2341.23 986.382 2390.95 2560.12 -356.103 2934.92 -374.093 3211.01 -166.012 57
2.109 1695.92 343.654 303.535
```

(3) 列主元 Gauss 消去法

```
列主元的解
2365.6 966.986 2056.54 2318.6 2555.44 1610.99 2416.62 768.761 1144.76 3026.63 376.906
1061.31 1767.02 1874.54 920.578 2762.68 -434.386 1938.18 1712.59 2776.89 2720.53 640.8
25 2598.22 -25.0198 884.979 2087.23 1920.71 -300.306 2122.36 2184.75 2139.17 361.543 -
165.6 2161.46 2507.01 2240.47 -316.689 1604.42 2730.46 761.975 2182.79 347.13 1697.91
828.791 1682.18 1294.41 2508.71 2088.51 1209.22 1034.3 1211.75 2725.22 505.037 181.412
2987.84 -54.8386 1774.54 190.409 2636.37 1597.91 2050.51 1616.97 131.789 3157.14 -269
224 316.093 2482.3 378.94 900.301 2908.05 2392.24 1723.51 1858.62 2480.28 -189.432 94
1.037 277.061 239.352 1587.42 1839.42 -192.621 2136.79 -268.239 2599.61 1119.16 2785.7
5 1558.3 2341.23 986.382 2390.95 2560.12 -356.103 2934.92 -374.093 3211.01 -166.012 57
2.109 1695.92 343.654 303.535
```

- 程序运行结果 2

(1) Gauss 消去法

```
不选主元的解：
1 1 0.999302 1.02284 0.675424 3.50505 -10.5644 34.397 -60.7248 77.6571 -77.0817 86.198
7 -72.4943 16.5499 23.9588 -7.31923 32.2195 -71.5173 -9.46833 102.148 -4.39896 -49.225
9 -65.4284 77.2985 8.93783 10.7393 -2.85848 -94.7048 18.5097 112.925 53.2932 -77.7178
-45.6003 0.852756 -20.4096 -56.1519 106.645 -3.43305 45.7688 8.18463 -62.1443 10.4768
26.8102 -75.727 76.4337 -55.6616 -22.2777 89.8267 -63.1822 111.922 -73.8649 28.5538 -2
2.5285 -44.4054 -20.7347 45.2838 -39.7352 -57.6491 101.374 57.6956 47.3377 105.397 -47
4.4092 -159.087 -38.1213 -73.9696 18.9134 -69.1624 118.196 26.6726 141.974 69.7617 -144
1.157 -13.4546 67.8139 -44.4608 -126.18 -39.03 192.483 -67.4864 16.6392 82.763 -146.844
-90.7014 164.564 126.839 11.1138 -223.706 -6.50593 67.2569 -139.337 216.161 2.02364 -
98.0808 114.963 -3.84268 -55.4881 -100.47 98.0132 -7.24171
```

(2) 全主元 Gauss 消去法

```
全主元的解
1 0.999799 1.00965 0.810151 2.89327 -9.45644 32.9848 -44.7898 -4.73389 103.077 -89.246
4 -1.06089 -46.247 103.259 -50.8531 148.058 -83.0398 -129.019 -70.9494 6.89411 271.801
71.4147 -65.0359 -158.142 -133.384 118.788 100.774 -47.2603 -79.9164 118.862 -12.4719
-18.6927 -74.3493 152.716 -260.979 309.813 198.627 -270.772 -313.732 -78.7688 362.11
3.08091 353.334 -267.657 -173.367 -40.5504 -200.645 217.85 222.279 -11.9003 -33.469 12
3.784 -155.634 -145.895 -61.0678 52.752 -76.1437 439.051 -306.276 -29.665 134.778 -33.
6987 237.211 -330.879 64.1598 147.758 52.8242 -209.322 178.144 -388.228 -54.7495 -64.5
354 674.214 -245.378 -269.608 433.321 -34.5722 -303.771 121.496 -31.0565 388.672 -407.
428 72.6214 -199.011 -309.038 -0.744212 743.988 209.932 -176.744 -11.0375 -41.3825 -46
4.065 86.7087 128.592 -219.036 56.6469 38.8477 379.691 -104.644 -123.533
```

(3) 列主元 Gauss 消去法

```
列主元的解
0.999979 1.00424 0.795632 5.14098 -42.8373 269.257 -985.209 2134.88 -2350.47 378.243 1
345.71 673.015 -3098.92 256.008 4352.92 -3109.68 -2105.85 2475.87 1525.37 -1905.89 124
2.37 -3346.17 1158.04 2935.47 1430.79 -5952.82 3716.96 -1642.43 -909.09 405.723 -527.7
1 2068.5 247.352 426.18 4613.86 -3445.92 186.664 -3224.21 -3252.71 -2973.4 6181.35 325
2.32 -2660.54 -323.408 4122.87 -6903.66 1475.85 -8.68192 -1431.9 4497.24 5626.42 -2670
81 -1405.12 -2102.24 1137.48 706.093 3521.18 -3896.3 -1006.09 -1654.87 -7629.15 27.99
12 -4812.48 11055.9 -2144.97 535.184 2477.92 -276.603 4488.19 1070.95 6031.71 -640.611
-4725.17 -1229.96 -326.657 -4205.93 2765.56 -1629.62 2351.04 879.677 -825.767 -11733.
8 3648.08 -6189.06 371.444 3070.1 7538.09 3672.11 -673.803 -144.723 4958.14 -5086.54 7
535.26 -3480.27 -7887 4541.88 -6979.71 621.639 1035.28 2610.69
```

4 结果分析

我们用 $\|A\bar{x} - b\|_\infty$ 来度量解的误差，其中 \bar{x} 为算法得到的解。设计算法计算可得：

4.1 Gauss 消去法

- (1) Gauss 消去法: ○ 误差: $5.96046E - 8$ ○ 时间: 0.008s
- (2) 全主元 Gauss 消去法: ○ 误差: $1.77636E - 15$ ○ 时间: 0.011s
- (3) 列主元 Gauss 消去法: ○ 误差: $1.77636E - 15$ ○ 时间: 0.008s

4.2 平方根法和改进的平方根法

- 测试数据 1

- (1) 平方根法: ○ 误差: $1.09129E - 11$ ○ 时间: 0.007s
- (2) 改进的平方根法: ○ 误差: $7.27596E - 12$ ○ 时间: 0.006s

- 测试数据 2

- (1) 平方根法: ○ 误差: NAN ○ 时间: 0.011s
- (2) 改进的平方根法: ○ 误差: $5.9952E - 15$ ○ 时间: 0.007s

4.3 各方法比较

- 测试数据 1

- (1) Gauss 消去法: ○ 误差: $7.596E - 12$ ○ 时间: 0.015s
- (2) 全主元 Gauss 消去法: ○ 误差: $1.09129E - 11$ ○ 时间: 0.031s
- (3) 列主元 Gauss 消去法: ○ 误差: $7.27596E - 12$ ○ 时间: 0.016s

- 测试数据 2

- (1) Gauss 消去法: ○ 误差: $3.55271E - 15$ ○ 时间: 0.02s
- (2) 全主元 Gauss 消去法: ○ 误差: $7.54952E - 15$ ○ 时间: 0.028s
- (3) 列主元 Gauss 消去法: ○ 误差: $1.08136E - 13$ ○ 时间: 0.017s

就用时而言，全主元消去法明显比普通消去法、列主元消去法用时更多，而后两者用时几乎相同；对于正定矩阵的来说，无论是平方根法还是改进的平方根法用时都比 Gauss 消去法用时少，两者比较的话，则由于没有开方运算，改进的平方根法用时更少。

就运算精确度而言，列主元和全主元的 Gauss 消去法精度都明显高于普通的 Gauss 消去法。对于正定方阵来说，（改进的）平方根法略优于列主元消去法。

综合两方面考虑，在处理一般方程组时，使用列主元 Gauss 消去法；处理正定方程组时，则使用改进的平方根法。