计算解精度估计实验报告

PB20010429 侯相龙

2022 年 10 月 2 日

1 问题描述

1. 估计 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵无穷范数的条件数
2. 列主元 Gauss 消去法解求解方程组，估计计算解的精度并与真实相对误差比较

2 概要设计

- **优化法求矩阵的 1 范数**

通过转轴运算不断优化目标函数（Bx 的 1 范数）的取值，达到最优条件停止。复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$

- **求逆矩阵的无穷范数**

在已知矩阵 A 的列主元三角分解的情况下，我们可以用优化法求矩阵 $A^{-\mathrm{T}}$ 的 1 范数。计算 $w = A^{-\mathrm{T}}x$ 和 $z = A^{-1}v$ 可使用 Lab1 中的利用列主元三角分解解线性方程组。复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$

- **求矩阵的条件数**

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

- **计算解的误差估计**

$$\rho = \kappa_\infty(A) \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

其中 $r = b - A\hat{x}$

3 测试数据及运行结果

3.1 Hilbert 矩阵无穷范数条件数估计

- **测试数据：**

5-20 阶 Hilbert 矩阵

- **程序运行结果**

```
exercise2_1

5阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 943656
6阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 2.90703e+07
7阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 9.85195e+08
8阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 3.38728e+10
9阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 1.09965e+12
10阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 3.53538e+13
11阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 1.23062e+15
12阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 3.83167e+16
13阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 4.6293e+17
14阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 1.37122e+19
15阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 1.12484e+18
16阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 1.34428e+18
17阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 1.97137e+18
18阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 9.12824e+19
19阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 3.3957e+19
20阶Hilbert矩阵的∞范数条件数为: 3.1628e+18
```

3.2 计算解的精度估计及其与真实精度的比较

- **测试数据:** 真实解 x 随机选取 0 到 1 的随机数，系数矩阵 A_n 为 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$b = Ax$。用列主元 Gauss 消去法求得 $Ax = b$ 的计算解 $\hat{x}$

- **程序运行结果:**

```
exercise2_2

5阶矩阵计算解的估计精度:1.82215e-15  真实精度:3.54499e-16
6阶矩阵计算解的估计精度:1.01155e-15  真实精度:1.18166e-16
7阶矩阵计算解的估计精度:1.96858e-15  真实精度:5.31748e-16
8阶矩阵计算解的估计精度:2.37888e-15  真实精度:4.13582e-16
9阶矩阵计算解的估计精度:2.64769e-16  真实精度:1.77249e-16
10阶矩阵计算解的估计精度:3.44385e-14  真实精度:3.55792e-15
11阶矩阵计算解的估计精度:2.62062e-14  真实精度:3.80398e-15
12阶矩阵计算解的估计精度:5.38276e-14  真实精度:1.37287e-14
13阶矩阵计算解的估计精度:1.39466e-14  真实精度:3.31776e-15
14阶矩阵计算解的估计精度:2.55437e-13  真实精度:5.46104e-14
15阶矩阵计算解的估计精度:2.99425e-12  真实精度:4.68146e-13
16阶矩阵计算解的估计精度:1.13367e-13  真实精度:2.10301e-14
17阶矩阵计算解的估计精度:1.21747e-12  真实精度:4.60867e-13
18阶矩阵计算解的估计精度:7.62877e-12  真实精度:1.57754e-12
19阶矩阵计算解的估计精度:1.86994e-12  真实精度:5.68152e-13
20阶矩阵计算解的估计精度:1.55713e-11  真实精度:6.5444e-12
21阶矩阵计算解的估计精度:3.55336e-11  真实精度:8.27526e-12
22阶矩阵计算解的估计精度:1.63735e-11  真实精度:4.6548e-12
23阶矩阵计算解的估计精度:1.6672e-10  真实精度:6.80799e-11
24阶矩阵计算解的估计精度:3.56183e-10  真实精度:1.35566e-10
25阶矩阵计算解的估计精度:8.57054e-10  真实精度:2.0712e-10
26阶矩阵计算解的估计精度:1.93568e-09  真实精度:2.67109e-10
27阶矩阵计算解的估计精度:1.09006e-08  真实精度:3.35745e-09
28阶矩阵计算解的估计精度:7.64055e-09  真实精度:1.19117e-09
29阶矩阵计算解的估计精度:2.22873e-08  真实精度:6.84365e-09
30阶矩阵计算解的估计精度:2.97465e-08  真实精度:9.70625e-09
```

4 结果分析

第一题，Hilbert 矩阵的条件数很大，并且随着矩阵阶数的增加，条件数明显增大。这也解释了 Lab1 中求解系数矩阵为高阶 Hilbert 矩阵的线性方程组时，相对误差很大的原因。

第二题，通过比较不难发现，真实误差是小于估计的计算解精度的，这与我们推导的事实相符。随着系数矩阵的阶数增加，真是误差和计算解精度都是递增的；但由于 A_n 的条件数较小 (n), 在一定阶数范围内，计算精度都比较高。