最小二乘法实验报告

PB20010429 侯相龙

2022 年 10 月 11 日

1 问题描述

1.QR 分解求解线性方程组并与前面结果比较

2. 利用最小二乘法进行二次多项式拟合

3. 对线性模型利用最小二乘求模型参数

2 概要设计

- **Household 变换**

需要注意的是，为避免溢出，我们用 $x/|x|_\infty$ 代替构造 v；为避免相近数相减的舍入误差，我们使用除法。

- **QR 分解**

逐列进行 Household 变换使其变为下三角阵。

- **QR 分解解方程/最小二乘拟合**

计算 QR 分解后对右端项 b 进行 household 变换，最后求解上三角方程组。

3 测试数据及运行结果

3.1 QR 分解求解线性方程组

- **测试数据 1：**

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & \\ & 8 & 6 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{83} \\ x_{84} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix} \tag{1}$$

- **程序运行结果 1：**

```
exercise3.1.1

方程的解为:
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0.999999 1 0.999997 1.00001 0.99999 1.
00002 0.999958 1.00008 0.999832 1.00034 0.999329 1.00134 0.997315 1.00537 0.9
8926 1.02147 0.957073 1.08577 0.828796 1.34106 0.323242 2.33203 -1.57812 5.81
25 -7.25 12

误差:11
用时: 0.519s
```

- **测试数据 2:**

100 阶方程组 $Ax=b$，其中 b 随机选取，系数矩阵 A 为 100 阶矩阵

$$
\begin{bmatrix}
10 & 1 & & & & \\
1 & 10 & 1 & & & \\
 & 1 & 10 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & 1 & 10 & 1 \\
 & & & & 1 & 10
\end{bmatrix} \tag{2}
$$

- **程序运行结果 2:**

```
方程的解为:
1070.65 1447.49 825.49 1875.61 577.381 -11.4238 1210.86 2160.86 445.562 2618.52 1067.22 249.2
39 1318.39 2310.87 1754.93 313.84 2047.67 2041.49 40.3873 400.632 1282.29 1466.45 1364.26 288
1.98 2234.9 1202.03 2196.84 2642.57 -12.5245 1272.68 885.759 1898.73 1975.94 639.912 150.948
531.613 -75.0731 2963.12 -269.115 1411.03 707.81 840.865 2754.54 -99.256 250.021 2778.05 1834
.49 874.098 1940.53 301.58 1861.67 2552.75 -320.178 2461.02 2121.93 823.678 -111.711 1304.44
-235.645 2226.02 307.456 2416.42 2100.35 870.091 1471.74 1435.53 454.96 196.872 2784.32 107.9
 2142.67 255.369 945.633 1632.3 1753.34 -204.745 2601.11 2651.65 2290.42 1421.11 1912.44 209.
505 2441.51 49.4172 556.32 807.384 2136.84 -55.79 452.06 231.191 841.028 98.5254 112.718 1883
.29 2237.34 2671.31 120.543 1772.26 2027.85 1989.21

误差:1.45519e-11
用时: 0.685s
```

- **测试数据 3:**

40 阶 Hilbert 矩阵，真实解为 $(1,1,\cdots,1)$

- **程序运行结果 3:**

```
方程的解为:
1.00002 0.996929 1.12768 -1.33382 24.3697 -142.321 572.133 -1513.14 2640.3 -2855.15 1781.99 -
1182.23 2133.22 -2199.16 1335.62 -3162.77 3544.74 1774.74 -2457.83 -2721.66 340.604 4663.97 -
2771.53 1354.13 -825.518 -3411.94 4754.6 -2964.17 5529.53 -4918.42 -2227.62 3052.95 -2206 358
6.37 2146.97 -4133.01 -974.055 -135.682 2872.51 -1268.36

误差:5528.53
用时: 0.096s
```

3.2 利用最小二乘法进行二次多项式拟合

- **测试数据:**

t_i	-1	-0.75	-0.5	0	0.25	0.5	0.75
y_i	1.00	0.8125	0.75	1.00	1.3125	1.75	2.3125

- **程序运行结果:**

```
exercise3.2
二次项、一次项、常数项的系数分别为:
1 1 1
```

亦即拟合的二次多项式为：x^2+x+1.

3.3 对线性模型利用最小二乘求模型参数

- **测试数据：**略，数据庞大，见附表
- **程序运行结果：**

```
exercise3.3
最小二乘拟合的各项系数分别为:
2.07752 0.718888 9.6802 0.153506 13.6796 1.98683 -0.958225 -0.484023 -0.0736469 1.0187 1.44352 2.90279
```

4 结果分析

在结果分析中，结合 Lab1 中的数据，我们比较求解线性方程组的 QR 分解法和 Lab1 中的求解方法的优劣。

就时间开销而言，QR 分解法耗时高于其他方法。（调用了其他函数, 例如：构造子向量以增强泛用性，而导致的耗时增加）全主元消去法明显比普通消去法、列主元消去法用时更多，而后两者用时几乎相同；

就精度而言，在本实验中，某些特定情况下（如对角占优阵）QR 分解法精度甚至低于普通 Gauss 消去法。在多数情况下，其精度低于列主元/全主元 Gauss 消去法。

当然我们并不能因此否定 QR 分解方法，原因在于实验中的样例更适合用选主元的 Gauss 消去法求解。但值得注意的是，QR 分解的泛用性很高，而且在处理一些特定问题上更具优势。