

# 共轭梯度法实验报告

PB20010429 侯相龙

2022 年 11 月 3 日

## 1 问题描述

1. 共轭梯度法、SOR 迭代法求解差分方程，并比较。
2. 共轭梯度法求解以 Hilbert 矩阵为系数矩阵的方程。
3. Jacobi 迭代法，G-S 迭代法和共轭梯度法求解方程。

## 2 运行结果

### 2.1 上机习题 1

共轭梯度法：

```
共轭梯度法迭代次数：55  
用时：281.563ms
```

SOR 方法：

(选取的松弛因子为 1.75)

```
共轭梯度法迭代次数：55  
用时：281.563ms
```

### 2.2 上机习题 2

```
Hilbert矩阵阶数：20  
共轭梯度法迭代次数：8  
0.333317 0.333637 0.332238 0.333954 0.334261 0.333702 0.333039 0.332627 0.332  
537 0.332708 0.333037 0.333422 0.333776 0.334034 0.334151 0.334099 0.33386 0.  
33343 0.332808 0.332002  
用时：1.1084ms, err:0.00133152
```

图 1: N=20

```

Hilbert矩阵阶数: 40
共轭梯度法迭代次数: 12
0.333331 0.333383 0.333069 0.333699 0.333474 0.333165 0.333061 0.333132 0.333
279 0.333423 0.333521 0.333562 0.333551 0.333501 0.333429 0.333348 0.33327 0.
333204 0.333155 0.333126 0.333118 0.333129 0.333158 0.3332 0.333252 0.33331 0
.33337 0.333428 0.333481 0.333524 0.333554 0.33357 0.333567 0.333544 0.333499
0.33343 0.333336 0.333216 0.333068 0.332893
用时: 2.3412ms, err:0.000440037

```

图 2: N=40

```

Hilbert矩阵阶数: 60
共轭梯度法迭代次数: 15
0.333334 0.333304 0.333506 0.333051 0.333285 0.333502 0.333527 0.33343 0.3333
06 0.333213 0.333169 0.333173 0.333209 0.333265 0.333326 0.333383 0.333429 0.
333461 0.333478 0.333481 0.33347 0.33345 0.333422 0.333389 0.333355 0.33332 0
.333287 0.333258 0.333233 0.333214 0.3332 0.333193 0.333192 0.333196 0.333206
0.333221 0.33324 0.333263 0.333288 0.333315 0.333343 0.33337 0.333397 0.3334
22 0.333445 0.333464 0.333478 0.333488 0.333493 0.333491 0.333482 0.333466 0.
333442 0.333409 0.333368 0.333318 0.333258 0.333188 0.333108 0.333018
用时: 5.3879ms, err:0.000315037

```

图 3: N=60

```

Hilbert矩阵阶数: 80
共轭梯度法迭代次数: 18
0.333333 0.333346 0.333246 0.333512 0.333331 0.333202 0.333242 0.333333 0.3334
08 0.333439 0.33343 0.333396 0.333352 0.333308 0.333274 0.333251 0.333242 0.3
33245 0.333256 0.333275 0.333298 0.333322 0.333345 0.333367 0.333385 0.3334 0
.33341 0.333415 0.333417 0.333414 0.333408 0.333399 0.333387 0.333374 0.33336
0.333345 0.33333 0.333316 0.333302 0.33329 0.333279 0.333269 0.333262 0.3332
56 0.333253 0.333252 0.333252 0.333255 0.33326 0.333266 0.333274 0.333283 0.3
33294 0.333305 0.333317 0.33333 0.333343 0.333356 0.333368 0.33338 0.333391 0
.333401 0.33341 0.333417 0.333423 0.333426 0.333427 0.333425 0.333421 0.33341
4 0.333404 0.33339 0.333373 0.333352 0.333328 0.333299 0.333266 0.333229 0.33
3188 0.333142
用时: 7.4698ms, err:0.000190931

```

图 4: N=80

### 2.3 上机习题 3

```
jacobi迭代次数: 65  
1 -2 3 -2 0.999997  
用时: 3.8852ms
```

图 5: Jacobi 迭代法

```
G-S迭代次数: 37  
1 -2 3 -2 0.999999  
用时: 1.0307ms
```

图 6: G-S 迭代法

```
共轭梯度法迭代次数: 6  
1 -2 3 -2 1  
用时: 0.7675ms
```

图 7: 共轭梯度法

## 3 结果分析

- 1) 对于上机实验第一题，两种方法迭代次数和迭代时间相差不多，没有明显的优劣之分。
- 2) 第二题，求解以 Hilbert 矩阵为系数矩阵的线性方程组的结果误差都比较小，明显优于前面的直接解法。
- 3) 第三题，实验数据表明，迭代次数、运行时间都有以下关系：Jacobi 迭代 > G-S 迭代 > 共轭梯度法。这是因为，共轭梯度法本质上是直接法，理论上最多能够在矩阵阶数次内收敛到最优解。而处理低阶问题时，能够很好的保持正交性，实验结果与理论相符。