信号处理原理 第一次作业

李祥泽 2018011331

1

用微分方程的角度来说明.

设 $f(x)=\cos x+i\sin x$, 则 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=i\cos x-\sin x=i\cdot f(x)$. 如此得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=i\cdot f(x)$$

解这个方程得到 $f(x)=e^{ix+C}$. 代入边界条件 $f(0)=1$ 得到 $f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

2

证明:

1. 对于 $m,\ n\in\mathbb{Z},\ m\neq n$:

   $\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{jm\omega_0 t}\cdot(e^{jn\omega_0 t})^*\mathrm{d}t$

   $=\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{j(m-n)\omega_0 t}\mathrm{d}t$

   $=\frac{1}{j(m-n)\omega_0}\cdot e^{j(m-n)\omega_0 t}\Big|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}$

   $=\frac{1}{j(m-n)\omega_0}\cdot(e^{j(m-n)\pi}-e^{-j(m-n)\pi})$

   $=\frac{e^{-j(m-n)\pi}}{j(m-n)\omega_0}\cdot(e^{j\cdot(m-n)\cdot 2\pi}-1)=0$

2. 对于 $m=n$:

   $\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{jn\omega_0 t}\cdot(e^{jn\omega_0 t})^*\mathrm{d}t$

   $=\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{2j(n-n)\omega_0 t}\mathrm{d}t$

   $=\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} 1\mathrm{d}t=2\pi/\omega_0\neq 0$

   由以上 1, 2 知 $\{e^{jn\omega_0 t}|n=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ 在区间 $[-\pi/\omega_0,\pi/\omega_0]$ 上是正交函数集.

附加部分:

> **结论**: 该函数集是该区间上的完备正交函数集.