信号处理原理 第 6 次作业

李祥泽 2018011331

1

对于信号 $f(t)$, 用间隔 T 的冲激串采样, 得到采样信号:

$$\hat{f}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t)\delta(t-kT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\delta(t-kT)$$

对 $\hat{f}$ 作 FT, 利用定义式得到:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\hat{f}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\delta(t-kT)\right)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[f(kT)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)e^{-j\omega kT}
\end{aligned}$$

利用 FT 的卷积性质和冲激函数的搬移特性又可以得到

$$\mathcal{F}[\hat{f}] = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(\omega - k\omega_0)$$

以上两个式子相等, 再代入 $\omega = 0$, 得到:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(-k\omega_0)$$

等号两侧的 k 互相无关, 用 $n = -k$ 代换右边, 即得到所求式:

$$T\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n\omega_0)$$

2

(a)

$$\begin{aligned}
DTFT[x(n) * x^*(-n)] &= DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x^*(-n)] \\
&= X(\omega)\cdot X^*(\omega)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
DTFT[x(2n+1)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n+1)e^{-jn\omega} \\
&\text{(let } m = 2n+1 \text{, then } m \text{ ranges from } -\infty \text{ to } +\infty \\
&\text{(BUT } m \text{ can only have ODD values)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1+(-1)^{m-1}}{2}\cdot x(m)e^{-j(\frac{m-1}{2})\omega} \\
&= e^{\frac{1}{2}j\omega}\left[X(\frac{1}{2}\omega) - X(\frac{1}{2}\omega+\pi)\right]
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} DTFT[x(n) - x(n-2)] &= DTFT[x(n)] - DTFT[x(n-2)] \\ &= X(\omega) - e^{-2j\omega} \cdot X(\omega) \\ &= (1 - e^{-2j\omega})X(\omega) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} DTFT[x(n) * x(n-1)] &= DTFT[x(n)] \cdot DTFT[x(n-1)] \\ &= X(\omega) \cdot e^{-j\omega} X(\omega) \\ &= e^{-j\omega} X^2(\omega) \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= DTFT[y(n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=kL} x(n/L) e^{-jn\omega} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ &\text{(let } m = n/L) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-jLm\omega} \\ &= X(L\omega) \end{aligned}$$