

哈尔滨工程大学
硕士研究生入学考试高等代数历年试题参考解答

张祥振

October 23, 2022

目录

1	2004	2
2	2005	9
3	2006	19
4	2007	25
5	2008	32
6	2009	40
7	2010	50
8	2011	59
9	2012	68
10	2013	74
11	2014	78
12	2015	90
13	2016	94
14	2017	103
15	2019	107
	参考文献	109

1 2004

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 使 $x^2 - 2$ 在 $\mathbb{P}[x]$ 内可约的最小数域为 ()。

解. 由 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的定义知, 包含 \mathbb{Q} 和 $\sqrt{2}$ 的最小数域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。(相关知识可看 [1])

□

2. 多项式 $x^5 - 1$ 在多项式环 $\mathbb{Q}[x]$ 中的标准分解式为 ()。

解. $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ 。

□

3. $n(n \geq 2)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

的值为 ()。

解. 记原行列式为 D_n , 按第一列展开得

$$D_n = x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

□

4. 设 A_m 为 m 阶方阵, A_n 为 n 阶方阵, $|A_m| = a$, $|B_n| = b$, 则 $\begin{vmatrix} 0 & A_m \\ B_n & 0 \end{vmatrix} = ()$ 。

解. 记所求行列式为 D_{m+n} , 按前 m 行展开得

$$D_{m+n} = (-1)^{(1+2+\cdots+m)+[(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)]}|A_m||B_n| = (-1)^{mn}ab.$$

□

5. 向量组 $\alpha_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\alpha_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\alpha_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\alpha_4 = (3, 4, -1, 2)$ 的一个极大无关组为 ()。

解. 记 $A = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$, 对 A 作初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的秩为 3, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 。

□

6. 已知三个 3 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中 α_1, α_2 线性无关, 而矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的秩为 2, A^* 为 A 的伴随阵, 则齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的通解为 ()。

解. 因为 $A^*A = |A| = 0$, 所以

$$A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0, A\alpha_3 = 0.$$

因为 α_3 可由 α_1, α_2 线性表出, 所以齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的基础解系为 α_1, α_2 . 所以通解为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. \square

7. 设 A 为 n 阶方阵, $A^m = 0$ (m 为一个正整数), 则 A 的特征多项式为 ().

解. 因为 $A^m = 0$, 所以 x^m 是 A 的零化多项式, 从而 A 的极小多项式为 $x^k, k \leq m, k \in \mathbb{Z}_+$. 因此 A 的特征值全为 0, 从而 A 的特征多项式为 x^n . \square

8. 设 3 阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = (2, 1, 2)^T, \alpha_2 = (1, 2, -2)^T$, 则对应于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 ().

解. 设 A 对应于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $(x, y, z)^T$. 因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交, 所以

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

解得

$$(x, y, z)^T = k(-2, 2, 1)^T, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

所以 A 对应于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $(x, y, z)^T = k(-2, 2, 1)^T, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. \square

9. 设 A 为正交矩阵, 且 $|A| = -1$, 则 A 必有特征值 ().

解. 显然, -1 . \square

二、(15 分) 在 \mathbb{R}^3 中, 线性变换 \mathcal{A} 定义如下:

$$\mathcal{A}\alpha_1 = (-5, 0, 3)$$

$$\mathcal{A}\alpha_2 = (0, -1, 6)$$

$$\mathcal{A}\alpha_3 = (-5, -1, 9)$$

其中

$$\alpha_1 = (-1, 0, 2)$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 1)$$

$$\alpha_3 = (3, -1, 0)$$

求 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A .

解. 因为

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\alpha_1 \\ \mathcal{A}\alpha_2 \\ \mathcal{A}\alpha_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\alpha_1 \\ \mathcal{A}\alpha_2 \\ \mathcal{A}\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

□

三、(15 分) 求正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

化二次型 $f = x^2 + 4xy + 4xz + y^2 + 4yz + z^2$ 为标准型。

解. 二次型 $f(x, y, z)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5).$$

所以 A 的特征值为 -1 (二重), 5 (一重)。

解线性方程组 $(-I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, -1, 0)', \xi_2 = (1, 0, -1)'.$$

解线性方程组 $(5I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (1, 1, 1)'.$$

用 Schmidt 正交化法把 ξ_1, ξ_2 正交化:

$$\xi'_1 = \xi_1;$$

$$\xi'_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)'.$$

把 ξ'_1, ξ'_2, ξ_3 单位化:

$$\eta_1 = \frac{\xi'_1}{|\xi'_1|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)';$$

$$\eta_2 = \frac{\xi'_2}{|\xi'_2|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)';$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)'.$$

令

$$P = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3).$$

则 P 是正交矩阵, 且

$$P^T A P = \text{diag}\{2, 2, 5\}.$$

因此, 作正交线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

得

$$f = -u^2 - v^2 + 5w^2.$$

□

四、(15 分) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 应满足的条件。

解. A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

A 有 3 个线性无关的特征向量 $\iff A$ 可对角化 $\iff A$ 的最小多项式没有重因式

$\iff A$ 的最小多项式为 $\lambda - 1$ 或 $\lambda + 1$ 或 $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ 。

因为 $A \neq I$, $A \neq -I$, 所以应该有

$$(A - I)(A + I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ x & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & y \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x + y & 0 & x + y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $x + y$ 应满足的条件为 $x + y = 0$ 。

□

五、(15 分) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^m = 0$ (m 为一个大于 1 的自然数), 现令 $e^A \equiv E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1}$, 求证矩阵 e^A 可逆。

证明. 由 $A^m = 0$ 得

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^{-A} &= \left(E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1} \right) \left(E_n - A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}A^{m-1} \right) \\ &= E_n. \end{aligned}$$

所以矩阵 e^A 可逆。

□

六、(15 分) 设 A 为 n 维数线性空间 V 上的线性变换, 且 $A^2 = A$ 。求证 A 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 这里 $r = \dim A(V)$ 。

证明. 幂等矩阵必可对角化, 重题。 □

七、(15 分) 设 A, B 为数域 \mathbb{P} 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, λ_0 是 AB 的特征值且 β 为相应的特征向量:

- (1) 若 $\lambda_0 \neq 0$, 求证 λ_0 也是 BA 的特征值, 并求相应的一个特征向量;
- (2) 若 $\lambda_0 = 0$ 时, λ_0 是否也是 BA 的特征值, 说明理由。

证明. (1) 因为 λ_0 是 AB 的特征值且 β 为相应的特征向量, 所以

$$AB\beta = \lambda_0\beta.$$

因此

$$BAB\beta = \lambda_0 B\beta.$$

于是 λ_0 也是 BA 的特征值, BA 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量为 $B\beta$ 。

(2) 是。因为 $|BA| = |B||A| = |AB| = 0$ 。 □

八、(15 分) 设 V 为复数域上的 n 维线性空间, \mathcal{A}, \mathcal{B} 为 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 求证:

- (1) 若 λ 为 \mathcal{A} 的特征值, 则 \mathcal{A} 的对应的特征子空间 $V_\lambda = \{v \in V | \mathcal{A}v = \lambda v\}$ 为 \mathcal{B} 的不变子空间;
- (2) \mathcal{A}, \mathcal{B} 至少有一个公共的特征向量。

证明. (1) 任取 $\alpha \in V_\lambda$, 有

$$\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha.$$

又

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

所以

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\alpha = \mathcal{B}\mathcal{A}\alpha = \lambda\mathcal{B}\alpha.$$

因此 $\mathcal{B}\alpha \in V_\lambda$ 。从而 V_λ 是 \mathcal{B} 的不变子空间。

(2) 因为 V_λ 是 \mathcal{B} 的不变子空间, 所以 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 上的线性变换。由于 V_λ 是复数域上的线性空间, 因此 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 有特征值。取它的一个特征值 μ , 则在 V_λ 中存在非零向量 ξ , 使得 $(\mathcal{B}|_{V_\lambda})\xi = \mu\xi$, 即 $\mathcal{B}\xi = \mu\xi$ 。又有 $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$, 因此 ξ 是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的公共的特征向量。 □

九、(15 分) 设 V 为 n 维欧式空间, V 的保持内积的线性变换称为正交变换, 对 V 的任何单位向量 η , 线性变换 $A_\eta: A_\eta(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta (\alpha \in V)$ 称为 V 的镜面反射, 求证:

- (1) A_η 为正交变换;
- (2) A_η 的行列式为 -1 ;
- (3) 若 \mathcal{A} 为 V 的正交变换, 1 为其特征值, 且相应的特征子空间 V_λ 的维数为 $n-1$, 则 \mathcal{A} 为 V 的镜面反射。

证明. (1) 任取 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$\begin{aligned}(A_{\eta}(\alpha), A_{\eta}(\beta)) &= (\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \beta - 2(\eta, \beta)\eta) \\ &= (\alpha, \beta) - 2(\eta, \beta)(\alpha, \eta) - 2(\eta, \alpha)(\eta, \beta) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta)(\eta, \eta) \\ &= (\alpha, \beta).\end{aligned}$$

(2) 因为

$$A_{\eta}(\eta) = \eta - 2(\eta, \eta)\eta = -\eta.$$

所以 $\langle \eta \rangle$ 是 A_{η} 的一个不变子空间, 从而存在 $\langle \eta \rangle$ 的正交补空间 $\langle \eta \rangle^{\perp}$ 使得

$$V = \langle \eta \rangle \oplus \langle \eta \rangle^{\perp}.$$

取 $\langle \eta \rangle^{\perp}$ 的一个标准正交基 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$, 得到 V 的一个标准正交基 $\eta, \eta_2, \dots, \eta_n$. 此时

$$A_{\eta}(\eta) = -\eta, A_{\eta}(\eta_i) = \eta_i, i = 2, 3, \dots, n.$$

于是 A_{η} 在 V 的标准正交基 $\eta, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的矩阵为

$$A = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}.$$

由于 $|A| = -1$, 所以 A_{η} 的行列式为 -1 .

(3) $V = V_{\lambda} \oplus V_{\lambda}^{\perp}$. 由于 $\dim V_{\lambda} = n - 1$, 因此 $\dim V_{\lambda}^{\perp} = 1$, 从而 $V_{\lambda}^{\perp} = \langle \eta \rangle$, 其中 η 是单位向量。由于 \mathcal{A} 的特征子空间 V_{λ} 是 \mathcal{A} 的不变子空间, 因此 V_{λ}^{\perp} 也是 \mathcal{A} 的不变子空间。从而 η 是 \mathcal{A} 的一个特征向量。由于 \mathcal{A} 的属于 1 的特征子空间 V_{λ} 的维数等于 $n - 1$, 且正交变换 \mathcal{A} 的特征值等于 1 或 -1 , 因此 $\mathcal{A}(\eta) = -\eta$ 。

从而

$$\mathcal{A}(\eta) = -\eta = \eta - 2(\eta, \eta)\eta.$$

在 V_{λ} 中取一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, 则

$$\mathcal{A}(\alpha_i) = \alpha_i = \alpha_i - 2(\eta, \alpha_i)\eta, i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \eta$ 是 V 的一个基, 因此

$$\mathcal{A}(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \text{对任意的 } \alpha \in V.$$

从而 \mathcal{A} 是 V 的镜面反射。 □

注 1.1. 镜面反射的另一个定义: 设 V 是 n 维欧几里得空间, η 是 V 中一个单位向量, \mathcal{P} 是 V 在 $\langle \eta \rangle$ 上的正交投影, 令

$$\mathcal{A} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P},$$

则 \mathcal{A} 称为关于超平面 $\langle \eta \rangle^{\perp}$ 的镜面反射。

十、(10 分) 若 A 为 n 阶方阵, 求证 A^n 的秩等于 A^{n+1} 的秩。

证明. 因为

$$n \geq r(A^0) \geq r(A) \geq r(A^2) \geq \cdots \geq r(A^n) \geq r(A^{n+1}) \geq 0.$$

所以由抽屉原理知, 存在正整数 $m \leq n$, 使得

$$r(A^m) = r(A^{m+1}).$$

因此

$$r(A^m) = r(A^{m+1}) = \cdots = r(A^n) = r(A^{n+1}).$$

□

2 2005

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 若 \mathbb{P} 为同时包含 \mathbb{Q} 和 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域, 则 \mathbb{P} 作为 \mathbb{Q} 上的线性空间的维数是 ()。

解.

定理 2.1. 设 \mathbb{K}/\mathbb{F} 是域扩张, $\alpha \in \mathbb{K}$ 且 α 是 \mathbb{F} 上的代数元。如果 α 在 \mathbb{F} 上的极小多项式 $m(x)$ 的次数为 n , 那么

$$[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] = n,$$

并且 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}(\alpha)/\mathbb{F}$ 的一个基。

解. 假如 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 在 \mathbb{F} 上线性相关, 则有 \mathbb{F} 中不全为 0 的元素 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$, 使得

$$b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = 0.$$

令 $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$, 则 $g(\alpha) = 0$, 且 $g(x) \neq 0$ 。这与 $m(x)$ 是 α 在 \mathbb{F} 上的极小多项式矛盾。因此 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 在 \mathbb{F} 上线性无关。

又由于

$$\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}[\alpha] = \{c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1} \mid c_i \in \mathbb{F}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

因此 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}(\alpha)$ 的一个基。从而

$$[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] = n.$$

□

因为 \mathbb{P} 为同时包含 \mathbb{Q} 和 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域, 所以 $\mathbb{P} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 。在定理中令 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt[3]{2}$, 则由 $\sqrt[3]{2}$ 在 \mathbb{Q} 上的极小多项式为 $x^3 - 2$ 得

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3.$$

所以 \mathbb{P} 作为 \mathbb{Q} 上的线性空间的维数是 3。(相关知识可看 [1])

□

2. 多项式 $x^7 + 2x^6 + 6x^2 + 2$ 在复数域内所有根之间的关系是 ()。

解. 设

$$f(x) = x^7 + 2x^6 + 6x^2 + 2,$$

则

$$f'(x) = 7x^6 + 12x^5 + 12x.$$

显然 $f'(x) \nmid f(x)$, 所以 $(f'(x), f(x)) = 1$, 因此 $f(x)$ 无重根, 故多项式 $x^7 + 2x^6 + 6x^2 + 2$ 在复数域内的所有根互不相等。

□

3. 行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

的值为 ()。

解. 若 $a=0$, 易得行列式值为 bcd ;

若 $b=0$, 易得行列式值为 acd ;

若 $c=0$, 易得行列式值为 abd ;

若 $d=0$, 易得行列式值为 abc ;

若 a, b, c, d 都不为 0, 则

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \quad \text{将第一行的 } (-1) \text{ 倍加到其余各行}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad \text{将第二列的 } \left(\frac{a}{b}\right) \text{ 倍加到第一列, 将第三列的 } \left(\frac{a}{c}\right) \text{ 倍加到第一列, 将第四列的 } \left(\frac{a}{d}\right) \text{ 倍加到第一列}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd + abc + abd + acd + bcd.$$

当 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$ 或 $d=0$ 时, 上式依然成立, 因此行列式为 $abcd+abc+abd+acd+bcd$ 。 □

4. 设 n 阶方阵 A 的秩为 r , 且满足 $A^2 = A$, 则 $|2E - A| = ()$ 。

解. 因为 A 是幂等矩阵, $\text{rank}(A) = r$, 所以存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix} := \Lambda.$$

所以

$$|2E - A| = |2E - \Lambda| = 2^{n-r}.$$

□

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}^4$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 的线性相关性为 ()。

解. 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

所以, 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性相关。□

6. 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则两个齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解的充分必要条件为 $r(A) = r(B) = (\quad)$ 。

解. 显然,

$$r(A) = r(B) = r \left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right).$$

□

7. 设 \mathcal{A} 为 3 维线性空间 V 中的线性变换, 则 $\dim \mathcal{A}(V)$ 与 $\dim \text{Ker } \mathcal{A}$ 的关系是 ()。

解. 因为 V 是有限维的线性空间, 所以 $\mathcal{A}(V)$ 和 $\text{Ker } \mathcal{A}$ 都是有限维的。由于

$$V / \text{Ker } \mathcal{A} \cong \mathcal{A}(V).$$

所以 $\mathcal{A}(V)$ 是有限维的, 且

$$\dim V - \dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}(V).$$

因此, $\dim \mathcal{A}(V) + \dim \text{Ker } \mathcal{A} = 3$ 。□

8. 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 与 A^T 的关系是 ()。

解.

引理 2.1. 设 $J_n(a)$ 是对角元素为 a 的 n 级 Jordan 块, 则 $J_n(a) \sim J_n(a)'$ 。

证明. 由于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \vdots \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1),$$

因此

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从而 $J_n(a) \sim J_n(a)'$. □

引理 2.2. 任一 n 级复矩阵 A 与 A' 相似。

证明. 由于 A 是复数域上的矩阵, 因此 A 有 Jordan 标准形

$$J = \text{diag} \{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \dots, J_{r_m}(\lambda_m)\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 可能有相同的, $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$. 据引理 1 得, $J_{r_i}(\lambda_i) \sim J_{r_i}(\lambda_i)'$, 且可逆矩阵 $P_i = \{\epsilon_{r_i}, \epsilon_{r_i} - 1, \dots, \epsilon_2, \epsilon_1\}$ 使得 $P_i^{-1} J_{r_i}(\lambda_i) P_i = J_{r_i}(\lambda_i)'$. 令 $P = \text{diag} \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, 则 $P^{-1} J P = J'$. 从而 $J \sim J'$. 由于 $A \sim J$, 因此 $A' \sim J'$. 从而 $A \sim A'$. □

引理 2.3. 数域 \mathbb{K} 上 n 级矩阵 A 与 B 相似当且仅当把它们看成复矩阵后相似。

证明. 设数域 \mathbb{K} 上 n 级矩阵 A 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$. 把 A 看成复矩阵后, 不变因子仍然是 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$. 因此

$$\begin{aligned} & \text{数域 } \mathbb{K} \text{ 上的 } n \text{ 级矩阵 } A \text{ 与 } B \text{ 相似} \\ & \iff A \text{ 与 } B \text{ 有相同的不变因子} \\ & \iff \text{把 } A \text{ 与 } B \text{ 看成复矩阵后相似}. \end{aligned}$$

□

由引理知, A 与 A^T 相似。

□

9. 设 A 为 n 阶实反对称阵, \boldsymbol{x} 是非零的 n 维列向量, 则 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ 为 ()。

解. 因为

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})^T = -\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}.$$

所以 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0$ 。

□

10. A 为 n 阶是正交阵, λ 为其特征值, 则 $|\lambda^{-1}E - A| = ()$ 。

解.

$$\begin{aligned} |\lambda^{-1}E - A| &= |\lambda^{-1}AA^T - A| = \frac{1}{\lambda^n} |AA^T - \lambda A| = \frac{1}{\lambda^n} |A| |A^T - \lambda E| \\ &= \frac{(-1)^n}{\lambda^n} |\lambda E - A^T| = 0. \end{aligned}$$

□

二、(15 分) 在 \mathbb{R}^3 中, 线性变换 \mathcal{A} 定义为

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 0) \\ A\boldsymbol{\beta}_2 = (3, 3, 2) \\ A\boldsymbol{\beta}_3 = (3, 3, 1) \end{cases},$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 0) \\ \boldsymbol{\beta}_2 = (1, 1, 0) \\ \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 1, 1) \end{cases}.$$

(1) 求 \mathcal{A} 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵 B ;

(2) 求 \mathcal{A} 的特征值与特征向量。

解. (1) 因为

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}_1 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}_2 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$B = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}_1 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}_2 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) B 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - B| = (x+1)(x-1)(x-3).$$

所以 B 的特征值为 $-1, 1, 3$ 。

解线性方程组 $(-I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0, -1, 1)'.$$

解线性方程组 $(\frac{1}{3}I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_2 = (1, 0, 0)'$$

解线性方程组 $(-I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (0, 1, 1)'$$

因此, \mathcal{A} 的特征值为 $-1, 1, 3$ 。 \mathcal{A} 的属于特征值 -1 的特征向量为 $k(0, -1, 1)', k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, \mathcal{A} 的属于特征值 1 的特征向量为 $l(1, 0, 0)', l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, \mathcal{A} 的属于特征值 3 的特征向量为 $m(0, 1, 1)', m \in \mathbb{R}, m \neq 0$ 。□

三、(15 分) 设 \mathcal{A} 为数域 \mathbb{K} 上的 2 维线性空间 V 上的非零的幂零线性变换, 求证在 V 的某个基下 \mathcal{A} 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

证明. 任取 $\alpha \in V$, 先证 $\alpha, \mathcal{A}\alpha$ 是线性无关的。

设

$$k_1\alpha + k_2\mathcal{A}\alpha = 0, k_1, k_2 \in \mathbb{K}.$$

因为 \mathcal{A} 是幂零线性变换, 所以 $\mathcal{A}^2 = 0$, 所以

$$k_1\mathcal{A}\alpha = 0.$$

所以 $k_1 = 0$, 从而 $k_2 = 0$, 所以 $\alpha, \mathcal{A}\alpha$ 是线性无关的。于是 $\alpha, \mathcal{A}\alpha$ 是 V 的一个基。

因为

$$\mathcal{A}(\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 \mathcal{A} 在 $\alpha, \mathcal{A}\alpha$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。□

四、(15 分) 用二次型的理论求三元实函数 $f(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ 在单位球面上的最大值和最小值, 并求最大值点和最小值点。

解. 先用正交变换化二次型为标准型。

二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = (x - 1)^2(x - 4).$$

所以矩阵 A 的特征值为 1 (2 重), 4 (1 重)。

解线性方程组 $(E - A)X = 0$, 得一个基础解系

$$\xi_1 = (1, 0, -1)', \xi_2 = (1, -1, 0)'.$$

解线性方程组 $(4E - A)X = 0$, 得一个基础解系

$$\xi_3 = (1, 1, 1)'.$$

用 Schmidt 正交化法把 ξ_1, ξ_2 化为正交向量:

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= (1, 0, -1)', \\ \xi'_2 &= \xi_2 - \frac{(\xi_2, \xi'_1)}{(\xi'_1, \xi'_1)} \xi'_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)'.\end{aligned}$$

把 ξ'_1, ξ'_2, ξ_3 单位化得

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{\xi'_1}{|\xi'_1|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)', \\ \eta_2 &= \frac{\xi'_2}{|\xi'_2|} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}\right)', \\ \eta_3 &= \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)'. \end{aligned}$$

令 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 T 是正交矩阵, 且

$$TAT' = \text{diag}\{1, 1, 4\}.$$

因此, 作正交变换

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z', \\ y = -\frac{3\sqrt{11}}{11}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z', \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z'. \end{cases}$$

后, 原二次型 $f(x, y, z)$ 在新的坐标系下的表达式为

$$f(x, y, z) = x'^2 + y'^2 + 4z'^2.$$

而单位球面经过正交变换后仍是单位球面, 因此只需求 $x'^2 + y'^2 + 4z'^2$ 在单位球面上的最大值。

因为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

所以

$$x'^2 + y'^2 + 4z'^2 = 1 + 3z'^2.$$

因此 $f(x, y, z)$ 的最大值为 4, 此时 $(x', y', z') = (0, 0, 1)$ 或 $(0, 0, -1)$, 于是 $(x, y, z)' = T(x', y', z')' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)'$ 或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)'$; 最小值为 1, 此时 $(x', y', z') = (x', y', 0)$, $x'^2 + y'^2 = 1$, 于是 $(x, y, z)' = T(x', y', z')' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y', -\frac{3\sqrt{11}}{11}y', -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y'\right)'$, 其中 x', y' 可取满足 $x'^2 + y'^2 = 1$ 的一切实数。

综上所述, $f(x, y, z)$ 在单位球面上的最大值为 4, 最小值为 1, 最大值点为

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)' \text{ 或 } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)',$$

最小值点为

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y', -\frac{3\sqrt{11}}{11}y', -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y'\right),$$

其中 x', y' 可取满足 $x'^2 + y'^2 = 1$ 的一切实数。 □

五、(15 分) 设 A, B 为 n 维向量空间 V 上的线性变换, 且 $AB = A + B$ 。

(1) 求证 $A - E$ 与 $B - E$ 都可逆;

(2) 求证 $AB = BA$ 。

证明. (1) 因为 $AB = A + B$, 所以 $(A - E)(B - E) = E$, 所以 $A - E$ 与 $B - E$ 都可逆。

(2) 因为 $(A - E)(B - E) = E$, 所以 $(B - E)(A - E) = E$, 所以 $BA = B + A$, 所以 $AB = BA$ 。□

六、(15 分) 设 A 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证 $V = \mathcal{A}(V) \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$ 的充分必要条件是 $\text{Ker } \mathcal{A}^2 = \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

证明. 必要性. 显然 $\text{Ker } \mathcal{A} \subset \text{Ker } \mathcal{A}^2$, 下证 $\text{Ker } \mathcal{A}^2 \subset \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

任取一个向量 $\alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}^2$, 有

$$\mathcal{A}^2 \alpha = 0.$$

从而 $\mathcal{A} \alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

由于 $V = \mathcal{A}(V) \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$, 所以

$$\mathcal{A}(V) \cap \text{Ker } \mathcal{A} = 0.$$

因为 $\mathcal{A} \alpha \in \mathcal{A}V$, 所以

$$\mathcal{A} \alpha \in \mathcal{A}V \cap \text{Ker } \mathcal{A} = 0.$$

从而 $\alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}$ 。于是 $\text{Ker } \mathcal{A}^2 = \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

充分性. 由于

$$V/\text{Ker } \mathcal{A} \cong \mathcal{A}V.$$

所以

$$\dim V = \dim \mathcal{A}V + \dim \text{Ker } \mathcal{A}.$$

任取一个向量 $\alpha \in \mathcal{A}V \cap \text{Ker } \mathcal{A}$, 有

$$\mathcal{A} \alpha = 0, \text{ 存在 } \beta \in V, \text{ 使得 } \alpha = \mathcal{A} \beta.$$

因此

$$\mathcal{A}^2 \beta = \mathcal{A} \alpha = 0.$$

因为 $\text{Ker } \mathcal{A}^2 = \text{Ker } \mathcal{A}$, 所以

$$\alpha = \mathcal{A} \beta = 0.$$

从而 $\mathcal{A}V \cap \text{Ker } \mathcal{A} = 0$, 于是 $V = \mathcal{A}V \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$ 。□

七、(15 分) 设 A 为 n 阶实对称阵, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 为 A 的一切不同特征值; 若非零 n 维实列向量 β 与特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ 的特征向量都正交, 求证 β 为对应特征值 λ_m 的特征向量。

证明. 因为 A 是实对称矩阵, 所以 A 可以对角化。于是

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}.$$

设

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m, \beta_i \in V_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, m.$$

则

$$(\beta, \beta_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m-1.$$

又 $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}, i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$, 所以

$$\beta = \beta_m.$$

因此 β 为对应特征值 λ_m 的特征向量。 \square

八、(15 分) 设 A 为 n 阶实对称阵, 且对任何非零 n 维实列向量 x 有 $x^T A x \neq 0$, 求证 A 正定或负定。

证明. 反证, 假设 A 既不是正定矩阵也不是负定矩阵。因为 A 为 n 阶实对称阵, 所以存在可逆矩阵 P , 使得

$$PAP' = \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $x = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1 \text{ 个}}, 1, 0, \dots, 0 \right)$, $y = Px$, 则 $y \neq 0$, 且 $y^T A y = 0$, 矛盾。 \square

九、(15 分) 设 V 为复数域上的 n 维线性空间, \mathcal{A} 为 V 上的线性变换, λ 为一个复数; 令 $V_\lambda = \{v \in V | (A - \lambda E)^k v = 0 (\exists k \geq 1)\}$ 。

- (1) 求证 λ 为 A 的特征值的充分必要条件为 $V_\lambda \neq \{0\}$;
- (2) 求证 V_λ 为 \mathcal{A} 的不变子空间;
- (3) 求证当 $V_\lambda \neq \{0\}$ 时, \mathcal{A} 在 V_λ 上没有与 λ 不同的特征值。

证明. (1) 必要性。设 λ 为 A 的特征值, α 为 A 的属于 λ 的特征向量, 则

$$(A - \lambda E)\alpha = 0.$$

因此, $V_\lambda \neq \{0\}$ 。

充分性。设 $V_\lambda \neq \{0\}$, 则存在 $k \geq 1$, 使得

$$\{v \in V | (A - \lambda E)^k v = 0 (\exists k \geq 1)\} \neq \emptyset.$$

因此存在非零向量 $\alpha \in V$, 使得

$$(A - \lambda E)(A - \lambda E)^{k-1}\alpha = 0.$$

显然 $(A - \lambda E)^{k-1}\alpha \neq 0$, 所以 λ 为 A 的特征值。

(2) 显然 V_λ 是 \mathcal{A} 的子空间, 下证它是 \mathcal{A} 的不变子空间。为此, 先证对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{A} 与 $(\mathcal{A} - \lambda E)^k$ 可交换。

$k = 1$ 时, 显然。

假设 $\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda E)^{k-1} = (\mathcal{A} - \lambda E)^{k-1}\mathcal{A}$, 则

$$\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda E)^k = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda E)^{k-1}(\mathcal{A} - \lambda E) = (\mathcal{A} - \lambda E)^{k-1}\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda E) = (\mathcal{A} - \lambda E)^k \mathcal{A}.$$

由数学归纳法原理得, $\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda E)^k = (\mathcal{A} - \lambda E)^k \mathcal{A}$ 对任意 $k \in \mathbb{N}^*$ 都成立。

任取一个向量 $\alpha \in V_\lambda$, 有

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^k (\mathcal{A} \alpha) = \mathcal{A} (\mathcal{A} - \lambda E)^k \alpha = 0.$$

因此 $\mathcal{A} \alpha \in V_\lambda$, 所以 V_λ 为 \mathcal{A} 的不变子空间。

(3) 先证明 λ 是 \mathcal{A} 在 V_λ 上的特征值。这只需证明 $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda E) \subset V_\lambda$ 。注意到对任意的 $k \geq 1$,

$$\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda E) \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda E)^k.$$

因此, $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda E) \subset V_\lambda$ 。

再设存在复数 $\mu \neq \lambda$ 是 \mathcal{A} 在 V_λ 上的特征值。因为对任意的 $k \geq 1$, $x - \mu$ 与 $(x - \lambda)^k$ 互素, 因此存在 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$, 使得

$$f(x)(x - \mu) + g(x)(x - \lambda)^k = 1.$$

任取一个 \mathcal{A} 的属于 μ 的特征向量 u , 由 Hamilton-Cayley 定理得

$$u = f(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mu E)u + g(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda E)^k u = 0 + 0 = 0.$$

这与 u 是特征向量矛盾。因此, \mathcal{A} 在 V_λ 上没有与 λ 不同的特征值。 □

十、(12 分) 若 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 试用三种不同的方法证明 (每个方法 4 分) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ 。

证明. 证法一。设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 其中 $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 m 维列向量。则

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

因为向量组 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出, 所以向量组 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$ 的秩小于等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的秩, 因此 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ 。

证法二。 □

3 2006

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 若 \mathbb{P} 为同时包含 \mathbb{Q} 和 π 的最小数域, 则 \mathbb{P} 作为 \mathbb{Q} 上的线性空间的维数是 ()。

解. 因为 π 是超越数, 所以不存在一个有限次数的多项式以 π 为 \mathbb{Q} 上的根. 由 2005 年填空题第一题知, \mathbb{P} 作为 \mathbb{Q} 上的线性空间的维数是无穷。 \square

2. 若 $f(x)$ 为数域 \mathbb{P} 上的不可约多项式, 则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的关系为 ()。

解. 互素。这是定理。 \square

3. 设 A 为 n 阶可逆的实对称矩阵, 则 n 一定为 ()。

解. 因为

$$|A| = |A'| = |-A| = (-1)^n |A|.$$

所以 n 为偶数。 \square

4. 设 A 为方阵, 且 $A^3 = 0$, 则 $E + A + A^2$ 一定为 () 矩阵。

解. 注意到

$$(E - A)(E + A + A^2) = E.$$

所以 $E + A + A^2$ 是可逆矩阵。 \square

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}^5$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1$ 的线性相关性为 ()。

解. 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

所以, 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1$ 线性相关。 \square

6. 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) + r(B) < n$, 则线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的关系为 ()。

解. 有共同的非零解。考虑 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 即可。 \square

7. 设 σ 为 n 维线性空间 V 的线性变换, $\text{Ker } \sigma = 0$, 则 σ 为 ()。

解. 因为有限维空间之间的线性映射如果是单射则必是满射, 所以 σ 是可逆的线性变换。 □

8. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 A 可逆, 则 AB 与 BA 的关系是 ()。

解. 因为

$$A^{-1}(AB)A = BA.$$

所以 AB 相似于 BA 。 □

9. 若 A, B 为同阶正交阵, 且 $|AB| = -1$, 则 $|A+B| = ()$ 。

解. 因为

$$|A+B| = |A||E + A^{-1}B| = |A||B^{-1} + A^{-1}||B| = -|B^T + A^T| = -|A+B|$$

所以 $|A+B| = 0$ 。 □

10. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, $r(A) = m$, \mathbf{x} 为非零实 m 维列向量, 则 $\mathbf{x}^T(AA^T)\mathbf{x}$ 为 ()。

解. 因为 $r(A) = m$, 所以 m 元齐次线性方程组 $A^T\mathbf{x} = 0$ 只有零解, 因此对任意的非零实 m 维向量 \mathbf{x} , $A^T\mathbf{x} \neq 0$ 。从而 $\mathbf{x}^T(AA^T)\mathbf{x} = (A^T\mathbf{x})^T A^T\mathbf{x} > 0$ 。因此 $\mathbf{x}^T(AA^T)\mathbf{x}$ 为正实数。 □

二、(15 分) 设 V 为实数域 \mathbb{R} 上的三维线性空间, σ 为 V 的一个线性变换, 且 σ 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 V 的另一组基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 使 σ 在此基下的矩阵 B 为对角阵;

(2) 求 A^k 。

解. (1) A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \lambda^2 - 25\lambda + 25 = (\lambda + 5)(\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

因此 A 的全部特征值为 $-5, 1, 5$ 。

解线性方程组 $(-5E - A)\mathbf{x} = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (5, -6, 3)'.$$

解线性方程组 $(E - A)\mathbf{x} = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_2 = (1, 0, 0)'.$$

解线性方程组 $(5E - A)\mathbf{x} = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (0, 1, 2)'.$$

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix} := B.$$

因此

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)PB.$$

于是, 令 $\beta_1 = 5\alpha_1 - 6\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3$ 即可。

(2) 由 (1) 知

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = P^{-1} \begin{pmatrix} (-5)^k & & \\ & 1 & \\ & & 5^k \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + 5^{n-1} & 0 & -\frac{2}{15} + \frac{2}{3}5^{n-1} \\ -4 - 5^n + (-1)^n 5^{n+1} & (-5)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}5^n \\ -\frac{6}{5} + 6 \cdot 5^{n-1} & 0 & \frac{1}{5} + 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}.$$

□

三、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $r(A)$;

(2) 求线性空间 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | A^* \mathbf{x} = 0\}$ 的维数和一个基。

解. (1) 对 A 作初等行变换, 将其化为行最简形:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, $r(A) = 3$ 。

(2) 因为 $\text{rank}(A) = 1$, 所以 $\text{rank}(A^*) = 1$, 所以

$$\dim V = 4 - \text{rank}(A^*) = 4 - 1 = 3.$$

又因为 $A^*A = |A| = 0$, A 的前三列向量是 A 的列向量组的一个极大线性无关组, 所以 V 的一个基为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

□

四、(15 分) 设 σ, τ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, $(\sigma + \tau)^2 = \sigma + \tau, \sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$, 求证: $\sigma\tau = 0$ 。

证明. 由题意

$$(\sigma + \tau)^2 = \sigma^2 + \sigma\tau + \tau\sigma + \tau^2 = \sigma + \sigma\tau + \tau\sigma + \tau = \sigma + \tau.$$

因此

$$\sigma\tau = -\tau\sigma. \quad (1)$$

由 (1) 式得

$$\sigma^2\tau = \tau\sigma^2$$

于是

$$\sigma\tau = \tau\sigma. \quad (2)$$

由 (1) 式和 (2) 式得

$$\sigma\tau = 0.$$

□

五、(15 分) 设 σ 为数域 \mathbb{P} 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换; $f_1(x), f_2(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中两个互素多项式, $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 求证: $\text{Ker } f(\sigma) = \text{Ker } f_1(\sigma) \oplus \text{Ker } f_2(\sigma)$.

证明. 因为 $f_1(x), f_2(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中两个互素多项式, 所以存在 $u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$, 使得

$$u(x)f_1(x) + v(x)f_2(x) = 1.$$

任取 $\alpha \in \text{Ker } f(\sigma)$, 有

$$u(\sigma)f_1(\sigma)\alpha + v(\sigma)f_2(\sigma)\alpha = \alpha$$

$$0 = f(\sigma)\alpha = f_1(\sigma)f_2(\sigma)\alpha$$

因此

$$u(\sigma)f_1(\sigma)\alpha \in \text{Ker } f_2(\sigma), v(\sigma)f_2(\sigma)\alpha \in \text{Ker } f_1(\sigma).$$

于是

$$\text{Ker } f(\sigma) = \text{Ker } f_1(\sigma) + \text{Ker } f_2(\sigma).$$

任取 $\beta \in \text{Ker } f_1(\sigma) \cap \text{Ker } f_2(\sigma)$, 有

$$f_1(\sigma)\alpha = f_2(\sigma)\alpha = 0.$$

所以

$$\alpha = u(\sigma)f_1(\sigma)\alpha + v(\sigma)f_2(\sigma)\alpha = 0.$$

故 $\text{Ker } f_1(\sigma) \cap \text{Ker } f_2(\sigma) = 0$, 因此

$$\text{Ker } f(\sigma) = \text{Ker } f_1(\sigma) \oplus \text{Ker } f_2(\sigma).$$

□

六、(15 分) 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = \mathcal{E}$, 求证 σ 可对角化。

证明. 因为

$$\sigma^2 = \mathcal{E}$$

所以 $(x-1)(x+1)$ 是 σ 的零化多项式. 若 $\sigma = \mathcal{E}$ 或 $\sigma = -\mathcal{E}$, 则 σ 显然可以对角化. 若 $\sigma \neq \mathcal{E}$ 且 $\sigma \neq -\mathcal{E}$, 则 $(x-1)(x+1)$ 是 σ 的最小多项式, 因此 σ 可对角化. \square

七、(15 分) 设 A 为 n 阶方阵, λ_0 为 A 的特征值, 此时我们称 $n - r(\lambda_0 E - A)$ 为 λ_0 的几何重数, λ_0 作为 A 的特征多项式 $|\lambda E - A|$ 之根的重数称为 λ_0 的代数重数. 求证: λ_0 的几何重数不超过其代数重数.

证明. 设 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 W 的维数为 r , 则 $r = n - r(\lambda_0 E - A)$. 在 W 中取一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 把它扩充为 \mathbb{K}^n 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r}$. 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r})$$

则 P 是 \mathbb{K} 上的 n 级可逆矩阵, 并且有

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_r, A\beta_1, \dots, A\beta_{n-r}) \\ &= (\lambda_0 P^{-1}\alpha_1, \lambda_0 P^{-1}\alpha_2, \dots, \lambda_0 P^{-1}\alpha_r, P^{-1}A\beta_1, \dots, P^{-1}A\beta_{n-r}). \end{aligned}$$

由于 $I = P^{-1}P = (P^{-1}\alpha_1, P^{-1}\alpha_2, \dots, P^{-1}\alpha_r, P^{-1}\beta_1, \dots, P^{-1}\beta_{n-r})$,

因此 $\varepsilon_1 = P^{-1}\alpha_1, \varepsilon_2 = P^{-1}\alpha_2, \dots, \varepsilon_r = P^{-1}\alpha_r$.

从而

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (\lambda_0 \varepsilon_1, \lambda_0 \varepsilon_2, \dots, \lambda_0 \varepsilon_r, P^{-1}A\beta_1, \dots, P^{-1}A\beta_{n-r}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于相似的矩阵有相等的特征多项式, 因此

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda I_r - \lambda_0 I_r & -B \\ 0 & \lambda I_{n-r} - C \end{vmatrix} \\ &= |\lambda I_r - \lambda_0 I_r| |\lambda I_{n-r} - C| \\ &= (\lambda - \lambda_0)^r |\lambda I_{n-r} - C|. \end{aligned}$$

从而 λ_0 的代数重数大于或等于 r , 即 λ_0 的代数重数大于或等于 λ_0 的几何重数. \square

八、(15 分) 设 A, B 为 n 元实对称矩阵; 且 B 正定, 求证: 存在一个实可逆阵 P 使得 $P^T A P$ 和 $P^T B P$ 同时为对角阵.

证明. 因为 B 是正定矩阵, 所以存在可逆矩阵 Q , 使得

$$Q^T B Q = E_n.$$

这时, QAQ^T 是实对称矩阵, 从而存在正交矩阵 U , 使得

$$U^T Q^T A Q U = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} := \Lambda_n.$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $Q^T A Q$ 的全部特征值。

令 $P = QU$, 则 $P^T A P = \Lambda_n$, $P^T B P = E_n$ 都是对角矩阵。

□

4 2007

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 若 \mathbb{F} 为同时包含 \mathbb{Q} 和 $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 的最小的数域, 则 \mathbb{F} 作为 \mathbb{Q} 上的线性空间有基 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, (\quad)$ 。

解. 由题意, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$, 因为 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上的极小多项式为 $x^2 - 3$, $\sqrt{2}$ 在 \mathbb{Q} 上的极小多项式为 $x^2 - 2$, 所以

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\} = \{c + d\sqrt{2} + e\sqrt{3} + f\sqrt{6} | c, d, e, f \in \mathbb{Q}\}.$$

因此, 基为 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 。(相关知识可看 [1]) □

2. 多项式 $x^3 + px + 1$ 在复数域 \mathbb{C} 内有重根, 则 p 应满足 (\quad) 。

解.

引理 4.1. 设 \mathbb{K} 是数域, 在 $\mathbb{K}(x)$ 中, $f(x) = x^3 + ax + b$, 则 $f(x)$ 有重因式的充分必要条件为 $4a^3 + 27b^2 = 0$ 。

证明. 由题意, $f'(x) = 3x^2 + a$ 。

设 $a \neq 0$, 用辗转相除法求 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式:

$$h_2(x) = 3x - \frac{9b}{2a} \left| \begin{array}{cc|c} f'(x) & 3f(x) & h_1(x) \\ 3x^2 + a & 3x^3 + 3ax + 3b & x \\ 3x^2 + \frac{9b}{2a}x & 3x^3 + ax & \\ \hline -\frac{9b}{2a}x + a & r_1(x) = 2ax + 3b & \\ -\frac{9b}{2a}x - \frac{27b^2}{4a^2} & \frac{1}{2a}r_1(x) = x + \frac{3b}{2a} & \\ \hline r_2(x) = \frac{4a^3 + 27b^2}{4a^2} & & \end{array} \right.$$

$f(x)$ 有重因式 $\iff (f(x), f'(x)) \neq 1 \iff 4a^3 + 27b^2 = 0$ 。

当 $a = 0$ 时, 上述结论仍然成立。 □

回到原题, 易得 p 应满足 $4p^2 + 27 = 0$ 。 □

3. 设方阵 $A_{k \times k}, B_{l \times l}, C_{m \times m}$ 的行列式都为 1, 则 $\begin{vmatrix} & & A \\ & B & \\ C & & \end{vmatrix} = (\quad)$ 。

解.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} & & A \\ & B & \\ C & & \end{vmatrix} &= |A| \cdot (-1)^{(1+2+\cdots+k)+(m+l+1)+(m+k+2)+\cdots+(m+l+k)} \cdot \begin{vmatrix} & B \\ C & \end{vmatrix} \\ &= |A| \cdot (-1)^{k(m+l+k+1)} |B| \cdot (-1)^{(1+2+\cdots+l)+[(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+l)]} |C| \\ &= (-1)^{lm+km+kl}. \end{aligned}$$

□

4. 若 $\alpha = (a, b, c, d)$, 则 $|E - \alpha^T \alpha| = (\quad)$ 。

解. $|E - \alpha^T \alpha| = |1 - \alpha \alpha^T| = 1 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. □

5. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$ 线性无关, 则向量组 $b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3, b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{23}\alpha_3, b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3$ 的线性无关的充要条件为 ().

解.

$$(b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3, b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{23}\alpha_3, b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3) \\ = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

所以, 向量组 $b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3, b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + b_{23}\alpha_3, b_{31}\alpha_1 + b_{32}\alpha_2 + b_{33}\alpha_3$ 线性无关的充要条件为矩阵 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$ 可逆. □

6. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 且 $\text{rank}(A) = r$, 则 $\{X \in \mathbb{R}^{n \times s} | AX = 0\}$ 作为数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 其维数为 ().

解. 设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_s)$, 则

$$AX = 0 \iff AX_i = 0, i = 1, 2, \dots, s.$$

记 $V = \{X \in \mathbb{R}^{n \times s} | AX = 0\}$, 设 W 为矩阵方程 $AX = 0$ 的解空间, 则 $\dim W = n - r$. 因此, $\dim V = (n - r)s$. □

7. 设 $\mathbb{F}[x]_n$ 为数域 \mathbb{F} 上次数不超过 $n-1$ 的多项式集合, 其为 \mathbb{F} 上的线性空间, 对任何 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$, 令 $Df(x) = f'(x)$, 则 D 作为 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性变换, 其最小多项式为 ().

解. 因为 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的一组基,

$$D(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n-1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 D 的最小多项式为 x^n . □

8. 设 σ 为数域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = 0$, 则 $\dim \sigma(V)$ 最大为 ().

解. 考虑幂零指数为 2 的 n 级幂零矩阵 A , 则 A 的 Jordan 标准形中的 Jordan 块的总数为

$$n - \text{rank}(A),$$

且每个 Jordan 块的级数不超过 2. 因此 Jordan 块的总数最少为 $\frac{n}{2}$, 从而 $\text{rank}(A)$ 的最大值为 $\frac{n}{2}$, 因此 $\dim \sigma(V)$ 最大为 $\frac{n}{2}$. □

9. 一切 $n \times n$ 实对称阵按合同分类, 可分 () 类.

解.

个数	秩	正惯性指数
1	0	0
2	1	0
	1	1
3	2	0
	2	1
	2	2
\vdots	\vdots	\vdots
$n+1$	n	0
	n	1
	\vdots	\vdots
	n	n

因此, 共有 $1+2+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 种。 □

10. 一切 4×4 幂零方阵在复数域中按相似分类, 可分 () 类。

解. 5 类。仿照 2008 年填空题第 10 题。 □

二、(15 分) 将 $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 视为 \mathbb{R} 上的线性空间, 令 $W_1 = \{A \in V | A^T = A\}$, $W_2 = \{A \in V | A^T = -A\}$ 。

(1) 求证 W_1 和 W_2 为 V 的子空间, 并分别写出 W_1 和 W_2 的一组基;

(2) 求证 $V = W_1 \oplus W_2$ 。

解. (1) 因为 $0 \in W_1$, 所以 W_1 非空。又

$$\text{任意 } A, B \in W_1 \iff A^T = A, B^T = B \iff (A+B)^T = A^T + B^T = A+B \iff A+B \in W_1;$$

$$\text{任意 } A \in W_1, \text{任意 } k \in \mathbb{R} \iff kA \in W_1.$$

所以, W_1 是 V 的子空间。同理可证 W_2 是 V 的子空间。

W_1 的一组基为

$$\{E_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq 3\},$$

W_2 的一组基为

$$\{E_{ij} | 1 \leq i < j \leq 3\}.$$

其中 E_{ij} 表示 (i, j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 n 阶矩阵。

(2) 任取 $A \in V$, 有

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}.$$

因为

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A+A^T}{2},$$

所以

$$\frac{A+A^T}{2} \in W_1.$$

又

$$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = -\frac{A-A^T}{2},$$

所以

$$\frac{A-A^T}{2} \in W_2.$$

因此

$$V = W_1 + W_2.$$

又

$$\dim V = 9 = 6 + 3 = \dim W_1 + \dim W_2,$$

所以

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

□

三、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角阵;

(2) 求 A^n 。

解. (1) A 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5).$$

所以, A 的全部特征值为 2 (2 重), 5 (1 重)。

解线性方程组 $(2I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, -1, 0)', \xi_2 = (1, 0, -1)'.$$

解线性方程组 $(5I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (1, 1, 1)'.$$

用 Schmidt 正交化法把 ξ_1, ξ_2 正交化:

$$\xi'_1 = \xi_1;$$

$$\xi'_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)'.$$

把 ξ'_1, ξ'_2, ξ_3 单位化:

$$\eta_1 = \frac{\xi'_1}{|\xi'_1|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)';$$

$$\eta_2 = \frac{\xi'_2}{|\xi'_2|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)';$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)'.$$

令

$$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

则 P 是正交矩阵, 且

$$P^T A P = \text{diag}\{2, 2, 5\}.$$

(2) 由 (1) 得,

$$\begin{aligned} A^n &= \left[P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix} P^T \right]^n = P \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 5^n \end{pmatrix} P^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{5^n}{3} & -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} & -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} \\ -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} & \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{5^n}{3} & -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} \\ -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} & -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} & \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{5^n}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

四、(15 分) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为数域 \mathbb{F} 上的方阵, 令 A^S 为将 A 中的每个元素 a_{ij} 换为元素 $a_{n+1-i, n+1-j}$ 所得到的矩阵, 即将 A 旋转 180 度, 例如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}^S = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, 求证 A 与 A^S 相似。

解. 由题意, 有

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{nn-1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{n-1n} & a_{n-1n-1} & \cdots & a_{n-11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

所以 A 与 A^S 相似。

□

五、(15 分) 复数域 \mathbb{C} 上的一切 $n \times n$ 矩阵的集合 $C^{n \times n}$ 为复数域 \mathbb{C} 上的线性空间, 对任何选定的矩阵 $A \in C^{n \times n}$, 定义映射 $\phi_A : C^{n \times n} \rightarrow C^{n \times n}$, $X \rightarrow AX - XA$ 。

(1) 求证 ϕ_A 为线性空间 $C^{n \times n}$ 上的线性变换;

(2) 若矩阵 A 可对角化, 求证线性变换 ϕ_A 也可对角化。

解. (1) 保持加法:

$$\text{任取 } X, Y \in C^{n \times n}, \phi_A(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = (AX - XA) + (AY - YA) = \phi_A(X) + \phi_A(Y).$$

保持数乘:

$$\text{任取 } X \in C^{n \times n}, k \in \mathbb{C}, \phi_A(kX) = A(kX) - (kX)A = k(AX - XA) = k\phi_A(X).$$

因此, ϕ_A 为线性空间 $C^{n \times n}$ 上的线性变换。

(2) 因为 A 可对角化, 所以存在复数域上的 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$PAP^{-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} := \Lambda_n.$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值。注意到

$$\phi_A(P^{-1}E_{ij}P) = AP^{-1}E_{ij}P - P^{-1}E_{ij}PA = P^{-1}(\Lambda_n E_{ij} - E_{ij}\Lambda_n)P = (\lambda_i - \lambda_j)P^{-1}E_{ij}P.$$

其中 E_{ij} 是 (i, j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 n 阶矩阵。因此

$$\begin{aligned} \phi_A(P^{-1}E_{11}P, P^{-1}E_{12}P, \dots, P^{-1}E_{nn}P) \\ = (P^{-1}E_{11}P, P^{-1}E_{12}P, \dots, P^{-1}E_{nn}P)\text{diag}\{\lambda_1 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_n - \lambda_n\}. \end{aligned}$$

容易验证 $P^{-1}E_{11}P, P^{-1}E_{12}P, \dots, P^{-1}E_{nn}P$ 是 $C^{n \times n}$ 的一组基, 因此线性变换 ϕ_A 可对角化。

□

六、(15 分) 设 V 为数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, σ 为 V 上的线性变换, 求证 $V = \sigma^n(V) \oplus \text{Ker } \sigma^n$ 。

证明. 首先有子空间升链:

$$\text{Ker } \sigma \subset \text{Ker } \sigma^2 \subset \dots \subset \text{Ker } \sigma^n \subset \dots \subset V$$

因为 V 是有限维线性空间, 所以存在正整数 n , 使得

$$\text{Ker } \sigma^n = \text{Ker } \sigma^{n+i}, i = 1, 2, \dots$$

又由于

$$\dim V = \dim \sigma^n \oplus \dim \text{Ker } \sigma^n = \dim \sigma^{n+i} \oplus \dim \text{Ker } \sigma^{n+i}, i = 1, 2, \dots$$

所以

$$\dim \sigma^n = \dim \sigma^{n+i}, i = 1, 2, \dots$$

任取一个向量 $\alpha \in V$, 有

$$\alpha = \sigma^n(\alpha) + \alpha - \sigma^n(\alpha).$$

因为 $\sigma^n(\alpha - \sigma^n(\alpha)) = 0$, 所以 $\alpha - \sigma^n(\alpha) \in \text{Ker } \sigma^n$, 故

$$V = \sigma^n(V) + \text{Ker } \sigma^n.$$

任取一个向量 $\alpha \in \sigma^n(V) \cap \text{Ker } \sigma^n$, 有

$$\text{存在向量 } \beta \in V, \text{ 使得 } \alpha = \sigma^n(\beta),$$

$$\sigma^n(\alpha) = 0.$$

因此 $\sigma^n(\beta) = \sigma^{2n}(\beta) = \sigma^n(\alpha) = 0$, 从而 $\alpha = 0$, 故 $\sigma^n(V) + \text{Ker } \sigma^n$ 是直和。因此

$$V = \sigma^n(V) \oplus \text{Ker } \sigma^n.$$

□

七、(15 分) 用数学归纳法证明, 在复数域 \mathbb{C} 内, 任意一个 $n \times n$ 矩阵相似于一个上三角矩阵。

证明. 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法. $n = 1$ 时, 显然命题为真, 假设 $n - 1$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵. 现在来看 n 级复矩阵 A . 设 λ_1 是 n 级复矩阵 A 的一个特征值, α_1 是属于 λ_1 的一个特征向量. 把 α_1 扩充成 \mathbb{C}^n 的一个基: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 令 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 P_1 是 n 级可逆矩阵, 且

$$P_1^{-1}AP_1 = P_1^{-1}(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (P_1^{-1}\lambda_1\alpha_1, P_1^{-1}A\alpha_2, \dots, P_1^{-1}A\alpha_n).$$

由于 $P_1^{-1}P_1 = I$, 因此 $P_1^{-1}\alpha_1 = \varepsilon_1$. 从而

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

对 $n - 1$ 级复矩阵 B 用归纳假设, 有 $n - 1$ 级可逆矩阵 P_2 , 使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵. 令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},$$

则 P 是 n 级可逆矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha P_2 \\ 0 & P_2^{-1}BP_2 \end{pmatrix}.$$

因此 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理, 对一切正整数 n , 此命题为真。 □

5 2008

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 令 \mathbb{F} 为 $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ 的一切有理式的集合所构成的数域, 则 \mathbb{F} 中元素的简约形式为 ()。

解. 由题意知 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, 显然 ε 在 \mathbb{Q} 上的极小多项式为 $x^5 - 1$, 因此 \mathbb{F} 中元素的简约形式为 $c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + c_4\varepsilon^4$, 其中 $c_i \in \mathbb{Q}, i = 0, 1, 2, 3, 4$. (相关知识可看 [1]) \square

2. 多项式 $x^{21} - 1$ 和 $x^4 - 1$ 的最高公因式为 ()。

解. (把最高公因式改为首一最高 (或最大) 公因式) 因为 $x^{21} - 1$ 和 $x^4 - 1$ 的首一最大公因式不随数域的扩大而改变, 所以我们只需求 $x^{21} - 1$ 和 $x^4 - 1$ 在复数域上的首一最大公因式。

$x^4 - 1$ 在复数域上的全部根为: $1, -1, i, -i$. 不难验证 $x^{21} - 1$ 和 $x^4 - 1$ 在复数域上的公共根是 1 , 因此 $x^{21} - 1$ 和 $x^4 - 1$ 在复数域上的首一最大公因式是 $x - 1$, 从而 $x^{21} - 1$ 和 $x^4 - 1$ 在任一数域上的首一最大公因式是 $x - 1$. \square

3. n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{vmatrix} \quad (n \geq 2)$$

的值为 ()。

解. 把第 $2, 3, \dots, n$ 列都加到第 1 列上, 然后按第 1 列展开:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot D_{n-1} + (-1)^{n+1} 1 \cdot (-1)^{n-1} \\ &= D_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

由此看出, D_1, D_2, \dots, D_n 是首项为 2、公差为 1 的等差数列。

因此

$$D_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1.$$

\square

4. 若 P 为 5 阶正交矩阵, 则 $|E - P^2| = ()$ 。

解. 因为 P 是正交矩阵, 所以 P^2 是正交矩阵。又因为 P^2 是 5 阶矩阵, 所以 P^2 必有特征值 1 (不然, $(-1)^5 = |P^2| = 1$, 矛盾)。因此 $|E - P^2| = 0$. \square

5. 在空间直角坐标系 xOy 中, 向量 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \alpha_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 共面的充要条件为 ()。

解.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

□

6. 设

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}, V = \{X \in R^{4 \times 4} | SX + X^T S = 0\},$$

则 V 作为数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 其维数为 ()。

解. 设

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

则由 $SX + X^T S = 0$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{11} + X_{12} \\ -X_{11} - X_{22} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

因此

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -X_{11} \end{pmatrix}, X_{11}, X_{12}, X_{21} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

所以 V 的维数为 3。

□

7. 设 $A, B \in R^{m \times n}$, 则矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件为 ()。

解. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \ B)$ 。考虑

$$A(X_1, X_2, \dots, X_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

□

8. 若 3 阶方阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 的特征值为 1, 2, 3, 则 $\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{ji} \right) = ()$ 。

解. $\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{ji} \right) = \text{tr}(A^2) = 1 + 4 + 9 = 14$ 。

□

9. 令 $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}, A^3 = E, 1 = 5 - r(E - A)$, 则 $\text{tr}(E + A + A^2) = ()$ 。

解. 因为 $r(E - A) = 4$, 所以 1 是 A 的一重特征值。因为 $A^3 = E$, 所以 A 是幂等矩阵, 所以 A 的特征值为 1 (1 重), 0 (4 重), 所以 $E + A + A^2$ 的特征值为 3 (1 重), 1 (4 重), 因此

$$\text{tr}(E + A + A^2) = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

□

10. 特征值为 1, 1, 1, 1 的一切 4×4 阶复数矩阵在复数域内按相似可分 () 类。

解. 任取一个满足已知条件的复数矩阵 A 。

若 A 的最小多项式为 $\lambda - 1$, 则 $A - I = 0$, 因此 $A = I$ 。

若 A 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^2$, 则 A 的 Jordan 标准形的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数 N_1 为:

$$N_1 = 4 - \text{rank}(A - I),$$

其中 1 级 Jordan 块 $J_1(1)$ 的个数 $N_1(1)$ 为:

$$N_1(1) = \text{rank}(A - I)^2 + \text{rank}(A - I)^0 - 2\text{rank}(A - I) = 4 - 2\text{rank}(A - I),$$

2 级 Jordan 块 $J_2(1)$ 的个数 $N_1(2)$ 为:

$$N_1(2) = \text{rank}(A - I)^3 + \text{rank}(A - I)^1 - 2\text{rank}(A - I)^2 = \text{rank}(A - I).$$

因此, 此时 A 的 Jordan 标准形只可能有以下两种情况:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^3$, 则 A 的 Jordan 标准形的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数 N_1 为:

$$N_1 = 4 - \text{rank}(A - I),$$

其中 1 级 Jordan 块 $J_1(1)$ 的个数 $N_1(1)$ 为:

$$N_1(1) = \text{rank}(A - I)^2 + \text{rank}(A - I)^0 - 2\text{rank}(A - I) = \text{rank}(A - I)^2 + 4 - 2\text{rank}(A - I),$$

2 级 Jordan 块 $J_2(1)$ 的个数 $N_1(2)$ 为:

$$N_1(2) = \text{rank}(A - I)^3 + \text{rank}(A - I)^1 - 2\text{rank}(A - I)^2 = \text{rank}(A - I) - 2\text{rank}(A - I)^2.$$

3 级 Jordan 块 $J_3(1)$ 的个数 $N_1(3)$ 为:

$$N_1(3) = \text{rank}(A - I)^4 + \text{rank}(A - I)^2 - 2\text{rank}(A - I)^3 = \text{rank}(A - I)^2.$$

此时只有 $\text{rank}(A - I) = 2, \text{rank}(A - I)^2 = 1$ 满足要求。因此, 此时 A 的 Jordan 标准形只可能有以下一种情况:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^4$, 则 A 的 Jordan 标准形的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数 N_1 为:

$$N_1 = 4 - \text{rank}(A - I),$$

其中 1 级 Jordan 块 $J_1(1)$ 的个数 $N_1(1)$ 为:

$$N_1(1) = \text{rank}(A - I)^2 + \text{rank}(A - I)^0 - 2\text{rank}(A - I) = \text{rank}(A - I)^2 + 4 - 2\text{rank}(A - I),$$

2 级 Jordan 块 $J_2(1)$ 的个数 $N_1(2)$ 为:

$$N_1(2) = \text{rank}(A - I)^3 + \text{rank}(A - I)^1 - 2\text{rank}(A - I)^2.$$

3 级 Jordan 块 $J_3(1)$ 的个数 $N_1(3)$ 为:

$$N_1(3) = \text{rank}(A - I)^4 + \text{rank}(A - I)^2 - 2\text{rank}(A - I)^3 = \text{rank}(A - I)^2 - 2\text{rank}(A - I)^3.$$

4 级 Jordan 块 $J_4(1)$ 的个数 $N_1(4)$ 为:

$$N_1(4) = \text{rank}(A - I)^5 + \text{rank}(A - I)^3 - 2\text{rank}(A - I)^4 = \text{rank}(A - I)^3.$$

此时只有 $\text{rank}(A - I) = 3, \text{rank}(A - I)^2 = 2, \text{rank}(A - I)^3 = 1$ 满足要求。因此, 此时 A 的 Jordan 标准形只可能有以下一种情况:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

综上, A 在复数域内按相似可分为 5 类。 □

注 5.1. (1) 另一种方法 (以 A 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^2$ 为例): 因为 A 的最小多项式是 A 的 Jordan 标准形中的各个 Jordan 块的最小多项式 (也是特征多项式) 的最小公倍式, 所以要确定 A 的 Jordan 标准形, 只需要确定 A 的 Jordan 标准形中的各个 Jordan 块的最小多项式 $(\lambda - 1)^{t_i}, i = 1, 2, 3, 4$, 进而只需要确定次数 $t_i, i = 1, 2, 3, 4$, t_i 满足:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2, 0 \leq t_i \leq 2, \max_{1 \leq i \leq 4} t_i = 2.$$

这样的 t_i 只有: $2, 2, 0, 0, 2, 1, 1, 0$. (0 表示没有相应的 Jordan 块)

(2) 因为存在可逆矩阵 P 使得 $P(A - I)P^{-1} = J - I$, 所以 $\text{rank}(A - I)^r = \text{rank}(J - I)^r, 0 \leq r \leq 4$, 由 $J - I$ 的形状得: $\text{rank}(A - I)^{r+1} = \text{rank}(A - I)^r - 1$.

二、(15 分) 实数域 \mathbb{R} 上的次数不超过 2 的多项式集合 $\mathbb{P}_2[x]$ 为实数域上的线性空间。取 $\mathbb{P}_2[x]$ 的一个基

$$\alpha_1 = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设 σ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中的线性变换, 且

$$\sigma(\alpha_1) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\alpha_2) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\alpha_3) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A ;

(2) 求 σ 的特征值和特征向量;

(3) 说明 σ 可对角化, 并求 $\mathbb{P}_2[x]$ 的一个基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 使 σ 在此基下的矩阵为对角矩阵。

解. (1) 因为

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A,$$

所以

$$(1, x, x^2) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

因此

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) σ 的特征值和特征向量即 A 的特征值和特征向量。 A 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

因此 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ 。

解线性方程组 $(-I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, 0, -1)'.$$

解线性方程组 $(I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_2 = (1, 0, 1)'.$$

解线性方程组 $(2I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (1, 3, 2)'.$$

因此 A 的属于特征值 -1 的特征向量为: $k\xi_1, k \in \mathbb{Z}$, A 的属于特征值 1 的特征向量为: $l\xi_2, l \in \mathbb{Z}$, A 的属于特征值 2 的特征向量为: $m\xi_3, m \in \mathbb{Z}$ 。

故 σ 的特征值为 $-1, 1, 2$, σ 的属于特征值 -1 的特征向量为: $k\xi_1, k \in \mathbb{Z}$, σ 的属于特征值 1 的特征向量为: $l\xi_2, l \in \mathbb{Z}$, σ 的属于特征值 2 的特征向量为: $m\xi_3, m \in \mathbb{Z}$ 。

(3) 因为 σ 有三个互不相同的特征值, 所以 σ 可对角化。因为

$$\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

且 ξ_1, ξ_2, ξ_3 显然是线性无关的。所以, 取 $\beta_1 = \xi_1, \beta_2 = \xi_2, \beta_3 = \xi_3$ 即可。 □

三、(15 分) 设 $V = \{A \in R^{n \times n} | \text{tr}(A) = 0\}, W = \{aE | a \in R\}$ 。

(1) 求证 V 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间, 并求 $\dim V$;

(2) 求证 $\mathbb{R}^{n \times n} = V \oplus W$ 。

证明. 重复。 □

四、(15 分)

(1) 将二次型 $f(x, y, z) = -2xy + 2xz + 2yz$ 正交标准化;

(2) 求三元实函数 $f(x, y, z)$ 在单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最大值和最小值, 并分别求一个最值点。

解. (1) 二次型 $f(x, y, z)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 的特征值为: -2 (1 重), 1 (2 重)。

解线性方程组 $(-2I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, 1, -1)'.$$

解线性方程组 $(I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_2 = (1, -1, 0)', \xi_3 = (1, 0, 1)'.$$

用 Schmidt 正交化法将 ξ_1 与 ξ_2 正交化:

$$\begin{aligned} \xi_2' &= \xi_2; \\ \xi_3' &= \xi_3 - \frac{(\xi_3, \xi_2)}{(\xi_2, \xi_2)} \xi_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)' \end{aligned}$$

其中 (\cdot, \cdot) 是欧式空间中的标准内积。将 ξ_1, ξ_2', ξ_3' 单位化得:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)'; \\ \eta_2 &= \frac{\xi_2'}{|\xi_2'|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)'; \\ \eta_3 &= \frac{\xi_3'}{|\xi_3'|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)'. \end{aligned}$$

因此, 取

$$T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

则 T 是正交矩阵, 作正交线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

则二次型 $f(x, y, z)$ 化为正交标准形 $-2x_1^2 - 2y_1^2 + z_1^2$ 。

(2) 作正交线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

后, 单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 变为单位球面 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$ 。

□

五、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in R^{m \times n},$$

求证齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充要条件为行向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与 β_1, \dots, β_m 等价。

证明. 必要性. 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间为 W_1 , $Bx = 0$ 的解空间为 W_2 , 则有

$$W_1 = W_2.$$

因此

$$\text{rank} A = n - \dim W_1 = n - \dim W_2 = \text{rank} B$$

从而行向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与 β_1, \dots, β_m 等价。

充分性. 任取一个向量 $\gamma \in W_1$, 有

$$A\gamma = 0.$$

因为行向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与 β_1, \dots, β_m 等价, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P , 使得

$$A = PB.$$

于是

$$PB\gamma = 0,$$

从而

$$B\gamma = 0.$$

因此

$$W_1 \subset W_2.$$

同理, 有

$$W_2 \subset W_1.$$

所以, $W_1 = W_2$, 于是, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解。 □

六、(15 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为实对称矩阵, 定义

$$\phi_A : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X \longmapsto AXA'$$

求证 ϕ_A 为线性空间 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的可对角化线性变换。

证明. 因为 A 是实对称矩阵, 所以存在正交矩阵 T , 使得

$$T'AT = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 因此, 有

$$\phi_A(TE_{ij}T') = ATE_{ij}T'A' = \lambda_i\lambda_jTE_{ij}T', i, j = 1, 2, \dots, n.$$

其中, $E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ 是 (i, j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 n 阶矩阵。于是

$$\phi_A(TE_{11}T', TE_{12}T', \dots, TE_{nn}T') = (TE_{11}T', TE_{12}T', \dots, TE_{nn}T') \text{diag}\{\lambda_1\lambda_1, \lambda_1\lambda_2, \dots, \lambda_n\lambda_n\}.$$

因此 ϕ_A 为线性空间 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的可对角化线性变换。□

七、(15 分) 设 V 为复数域 \mathbb{C} 上的有限维线性空间, α, β 为其上两个可对角化线性变换, 且 $\alpha\beta = \beta\alpha$, 求证: α 和 β 可同时对角化。

证明. 看 2009 年第六题引理三。□

八、(15 分) 设 $f(x, y)$ 为数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数, U 为 V 的子空间, $U^\perp = \{v \in V | f(v, U) = 0\}$ 。若 $U \cap U^\perp = \{0\}$, 求证 $V = U \oplus U^\perp$ 。

证明. 由题意, 只需要证明 $V = U + U^\perp$ 。

任取 $\alpha \in V$, 想证存在 $\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in U^\perp$, 使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 。设 $\dim U = m$, 在 U 中取一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, 设 $\alpha_1 = \sum_{i=1}^m k_i \eta_i, k_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 待定。令 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$, 则

$$\begin{aligned} \alpha_2 \in U^\perp &\iff (\alpha_2, \eta_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\iff (\alpha - \alpha_1, \eta_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\iff (\alpha, \eta_j) = (\alpha_1, \eta_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\iff (\alpha, \eta_j) = \left(\sum_{i=1}^m k_i \eta_i, \eta_j \right), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\iff (\alpha, \eta_j) = \sum_{i=1}^m k_i (\eta_i, \eta_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\iff (\alpha, \eta_j) = k_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

于是 $\alpha_1 = \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \eta_i, \alpha_2 = \alpha - \alpha_1$, 则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 且 $\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in U^\perp$ 。因此 $V = U + U^\perp$ 。又 $U \cap U^\perp = \{0\}$, 所以 $V = U \oplus U^\perp$ 。□

6 2009

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 满足 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 的数域 \mathbb{F} 有 ()。

解. 由 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的定义知, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是包含 \mathbb{Q} 和 $\sqrt{2}$ 的最小数域, 因此 \mathbb{F} 为 \mathbb{Q} 或 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。

□

2. 有理数域上以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根首项系数为 1 的不可约多项式是 ()。

解. 设 $t = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, 则 $t^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $t^4 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 49 + 20\sqrt{6}$, 于是 $t^4 - 10t^2 + 1 = 0$ 。从而 $t = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是 $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ 的一个实根。把 $f(x)$ 看作实数域上的多项式进行分解:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 10x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 12x^2 = (x^2 + 1)^2 - (2\sqrt{3}x)^2 \\ &= (x^2 + 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) \\ &= [x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})]. \end{aligned}$$

于是根据唯一因式分解定理得, $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上没有一次因式, 也没有二次因式。从而 $x^4 - 10x^2 + 1$ 在 \mathbb{Q} 上不可约。因此有理数域上以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根首项系数为 1 的不可约多项式是 $x^4 - 10x^2 + 1$ 。

□

3. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$ 的值为 ()。

解.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

□

4. 若 A 为可逆矩阵, 则 $(A^{-1})^* = ()A$ 。

解. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = |A^*|^{-1}(A^*)^* = ||A|A^{-1}|^{-1}A = |A|^{1-n}A$ 。

□

5. 若 V_1, V_2 为 3 维线性空间中两个不同的 2 维子空间, 则 $\dim(V_1 + V_2) = ()$ 。

解. 由题意, 有

$$\dim V_1 = \dim V_2 = 2, \dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

所以

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3.$$

□

6. 令 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$, 则 $V = \{f(A) | f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ 作为实数域上的线性空间其维数为 ().

解. 易知 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ 是 V 的一个基, 故 $\dim V = n$.

□

7. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 对任何向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有解的充要条件为 ().

解.

线性方程组 $Ax = b$ 对任何向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有解

$$\iff \text{对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m, \text{rank} A = \text{rank}(A|b)$$

$$\iff \text{对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m, b \text{ 可由 } A \text{ 的列向量线性表出.}$$

$$\iff \mathbb{R}^m \subset \mathcal{R}(A), \text{ 其中 } \mathcal{R}(A) \text{ 表示由 } A \text{ 的列向量生成的线性空间.}$$

$$\iff \dim \mathcal{R}(A) \geq \dim \mathbb{R}^m = m.$$

$$\iff A \text{ 的列秩大于等于 } m.$$

$$\iff A \text{ 的秩大于等于 } m.$$

由题意, $\text{rank} A \leq m$, 所以

$$\text{线性方程组 } Ax = b \text{ 对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m \text{ 都有解} \iff \text{rank} A = m.$$

□

8. 若 A 为 3 阶实对称阵, 其特征值为 $-3, 1, 4$, 则当 t 满足 () 时, $tE + A$ 正定。

解. $tE + A$ 的特征值为 $t - 3, t + 1, t + 4$, 因此

$$tE + A \text{ 正定} \iff t - 3 > 0 \text{ 且 } t + 1 > 0 \text{ 且 } t + 4 > 0 \iff t > 3 \text{ 且 } t > -1 \text{ 且 } t > -4$$

$$\iff t > 3.$$

因此当 $t > 3$ 时, $tE + A$ 正定。

□

9. 令 $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 则 $\text{tr}(A^2) =$ ().

解. 因为 A 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 所以 A^2 的特征值为 $1, 4, 9, 16$, 所以 $\text{tr}(A^2) = 30$.

□

10. 一切 n 阶幂等阵 ($A^2 = A$) 在复数域内按相似可分为 () 类。

解. (复数域是多余的) 因为幂等矩阵必可对角化, 所以

$$A \sim \begin{cases} \text{diag}\{E_r, 0_{n-r}\}, & 1 \leq r = \text{rank} A \leq n, \\ 0, & \text{rank} A = 0. \end{cases}$$

所以一切 n 阶幂等阵 ($A^2 = A$) 在复数域内按相似可分为 $n+1$ 类。 \square

二、(15 分) 设 V 为实数域 \mathbb{R} 上的 5 维线性空间, \mathcal{A} 为其上的线性变换, 且 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

(1) 求 V 的另一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, 使 \mathcal{A} 在此基下的矩阵为对角阵。

(2) 求 A^n 。

解. (1) 因为

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} \mathcal{A}\varepsilon_1 = \varepsilon_5, \\ \mathcal{A}\varepsilon_2 = \varepsilon_4, \\ \mathcal{A}\varepsilon_3 = \varepsilon_3, \\ \mathcal{A}\varepsilon_4 = \varepsilon_2, \\ \mathcal{A}\varepsilon_5 = \varepsilon_1. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_5), \\ \mathcal{A}(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_4), \\ \mathcal{A}\varepsilon_3 = \varepsilon_3, \\ \mathcal{A}(\varepsilon_1 - \varepsilon_5) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_5), \\ \mathcal{A}(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_4). \end{cases}$$

于是

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_4) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_4) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

因此, 取 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_4)$ 即可。

(2) 记

$$B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5),$$

$$C = (\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_4).$$

由 (1) 知

$$B^{-1}C \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} C^{-1}B = A.$$

因此

$$A^n = B^{-1}C \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (-1)^n & \\ & & & & (-1)^n \end{pmatrix} C^{-1}B.$$

又

$$C = B \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & & & -1 & \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & & & -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (-1)^n & \\ & & & & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & & & -1 & \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n & & & & 1 + (-1)^{n+1} \\ & 1 + (-1)^n & & & 1 + (-1)^{n+1} \\ & & 1 & & \\ & & & 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^n \\ 1 + (-1)^{n+1} & & & & 1 + (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

三、(15 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$, $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ 。若 A 与 A^2 有相同的秩。

求证:

(1) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $A^2X = 0$ 同解。

(2) $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$ 。

解。(回忆错了。)

(1) 显然 $AX = 0$ 的解是 $A^2X = 0$ 的解, 下证 $A^2X = 0$ 的解也是 $AX = 0$ 的解。

因为 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}A$, 所以存在可逆矩阵 P , 使得

$$PA^2 = A.$$

任取 $A^2X = 0$ 的一个解 B , 有

$$A^2B = 0,$$

从而

$$PA^2B = 0,$$

于是

$$AB = 0.$$

因此 B 是 $AX = 0$ 的一个解。

因此齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $A^2X = 0$ 同解。

(2) (补充条件: $A = A^2$) 任取一个向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\alpha = A\alpha + \alpha - A\alpha.$$

因为

$$A(\alpha - A\alpha) = 0,$$

所以 $\alpha - A\alpha \in N(A)$. 又 $A\alpha \in R(A)$, 所以

$$\mathbb{R}^n = R(A) + N(A).$$

任取一个向量 $\beta \in R(A) \cap N(A)$, 有

$$A\beta = 0, \text{ 存在向量 } \gamma \in \mathbb{R}^n, \text{ 使得 } A\gamma = \beta.$$

因此

$$A\gamma = A^2\gamma = A\beta = 0,$$

于是

$$\beta = 0.$$

从而 $R(A) \cap N(A) = 0$ 。

因此

$$\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A).$$

□

四、(15 分) 设 V 为数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间 ($n \geq 2$), \mathcal{A} 为其上的线性变换, $\mathcal{A}^{n-1} \neq 0, \mathcal{A}^n = 0$ 。

求证: \mathcal{A} 在 V 的某个基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明.

引理 6.1. 对任意的 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关, 从而是 V 的一个基。

证明. 任取 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, 设

$$k_0\alpha + k_1\mathcal{A}\alpha + k_2\mathcal{A}^2\alpha + \dots + k_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0, k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

3式两边同时用 \mathcal{A}^{n-1} 作用之, 得到

$$k_0\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0.$$

从而 $k_0 = 0$. 于是3式变为

$$k_1\mathcal{A}\alpha + k_2\mathcal{A}^2\alpha + \dots + k_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0. \quad (4)$$

4式两端同时用 \mathcal{A}^{n-2} 作用之, 得到

$$k_1\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0.$$

从而 $k_1 = 0$, 于是4式变为

$$k_2\mathcal{A}^2\alpha + \dots + k_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0. \quad (5)$$

仿照上面的步骤, 依次用 $\mathcal{A}^{n-3}, \mathcal{A}^{n-4}, \dots, \mathcal{A}$ 作用之, 可得

$$k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0.$$

因此 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关, 断言成立. \square

因为

$$\mathcal{A}(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 \mathcal{A} 在基 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. \square

五、(15 分) (1) 求证任何一个正定矩阵 $A = B^2$, B 也为正定矩阵。

(2) 求证任何一个可逆实矩阵 $A = QP$, Q 为正定矩阵, P 为正交阵。

证明. (1) 参见 2010 年第六题。

(2) 因为 A 是 n 级实可逆矩阵, 所以 AA' 是正定矩阵。由 (1) 得, 存在正定矩阵 Q , 使得

$$AA' = Q^2.$$

从而 $A = Q^2 A'^{-1}$ 。记 $P = QA'^{-1}$ 。由于

$$\begin{aligned} P'P &= A^{-1}Q'QA'^{-1} = A^{-1}Q^2A'^{-1} = A^{-1}AA'A'^{-1} \\ &= E_n. \end{aligned}$$

因此 P 是正交矩阵。从上述 A 的表示式得, $A = QP$ 。 □

注 6.1. 注意极分解定理。

定理 6.1 (极分解定理). 对于任一实可逆矩阵 A , 一定存在一个正交矩阵 T 和两个正定矩阵 S_1, S_2 , 使得

$$A = TS_1 = S_2T,$$

并且这两种分解的每一种都是唯一的。

六、(15 分) 设 \mathbb{F} 为数域, $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n} (n \geq 1): A + B = E_n, AB = BA, A^2 = A, B^2 = B$ 。求证存在一个可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_s & \\ & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & \\ & E_t \end{pmatrix}.$$

这里 $s + t = n$ 。

证明. 首先证明四个引理。

引理 6.2. 幂等矩阵一定可对角化, 并且如果 n 级幂等矩阵 A 的秩为 $r (r > 0)$, 那么

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 若 $r = n$, 则 A 可逆。从 $A^2 = A$ 得出, $A = I$, 结论显然成立。

若 $r = 0$, 则 $A = 0$ 。结论也成立。下面设 $0 < r < n$ 。

注意到: 当 $0 < r < n$ 时, 幂等矩阵 A 的全部特征值是 $0, 1$ 。

对于特征值 0 , 齐次线性方程组 $(0I - A)X = 0$ 的解空间 W_0 的维数等于 $n - \text{rank}(-A) = n - r$ 。

由于 A 是幂等矩阵, 因此 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I - A) = n$ 。从而 $\text{rank}(I - A) = n - r$ 。

对于特征值 1 , 齐次线性方程组 $(I - A)X = 0$ 的解空间 W_1 的维数等于 $n - \text{rank}(I - A) = n - (n - r) = r$ 。

因此

$$\dim W_0 + \dim W_1 = (n - r) + r = n.$$

从而 A 可对角化。 A 的相似标准形中, 特征值 1 在主对角线上出现的次数等于 W_1 的维数 r , 特征值 0 在主对角线上出现的次数等于 W_0 的维数 $n - r$ 。因此

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

引理 6.3. 数域 \mathbb{F} 上的幂等矩阵的秩等于它的迹。

证明. 设 A 是数域 \mathbb{F} 上 n 级幂等矩阵, 且 $\text{rank}(A) = r > 0$. 则据引理 1 得

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于相似的矩阵有相等的迹, 因此

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r = \text{rank}(A).$$

若 $A = 0$, 则 $\text{tr}(0) = 0 = \text{rank}(0)$. □

引理 6.4. 如果域 \mathbb{F} 上的 n 级矩阵 A 与 B 都是可对角化的, 且 $AB = BA$, 那么存在域 \mathbb{F} 上一个 n 级可逆矩阵 S , 使得 $S^{-1}AS$ 与 $S^{-1}BS$ 都为对角矩阵。

证明. 已知 A 可对角化, 设 A 的所有不同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 其中 λ_i 的重数为 $n_i, i = 1, 2, \dots, s$. 于是存在域 \mathbb{F} 上的一个 n 级可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \text{diag} \{\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \dots, \lambda_s I_{n_s}\}$. 记 $D = P^{-1}AP$, 令 $G = P^{-1}BP$, 由于 $AB = BA$, 因此

$$DG = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) = GD.$$

由于 $D = \text{diag} \{\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \dots, \lambda_s I_{n_s}\}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 两两不等, 因此 $G = \text{diag} \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$, 其中 B_i 是 n_i 级矩阵, $i = 1, 2, \dots, s$. 由于 B 可对角化, 因此 $G = P^{-1}BP$ 也可对角化. 从而 G 的最小多项式 $m_G(x)$ 在 $\mathbb{F}[x]$ 中可以分解成不同的一次因式的乘积. 设 B_i 的最小多项式为 $m_i(\lambda), i = 1, 2, \dots, s$, 则

$$m_G(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots, m_s(\lambda)].$$

于是 $m_i(\lambda) | m_G(\lambda)$, 从而 $m_i(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}[\lambda]$ 中也可分解成不同的一次因式的乘积, 因此 B_i 可对角化, 于是存在域 \mathbb{F} 上 n_i 级可逆矩阵 Q_i , 使得 $Q_i^{-1}B_iQ_i$ 为对角矩阵, $i = 1, 2, \dots, s$. 令

$$Q = \text{diag} \{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\},$$

则 $Q^{-1}GQ = \text{diag} \{Q_1^{-1}B_1Q_1, Q_2^{-1}B_2Q_2, \dots, Q_s^{-1}B_sQ_s\}$ 为对角矩阵. 令 $S = PQ$, 则

$$\begin{aligned} S^{-1}BS &= Q^{-1}P^{-1}BPQ = Q^{-1}GQ \\ S^{-1}AS &= Q^{-1}P^{-1}APQ = Q^{-1} \text{diag} \{\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \dots, \lambda_s I_{n_s}\} Q \\ &= \text{diag} \{Q_1^{-1}(\lambda_1 I_{n_1})Q_1, Q_2^{-1}(\lambda_2 I_{n_2})Q_2, \dots, Q_s^{-1}(\lambda_s I_{n_s})Q_s\} \\ &= \text{diag} \{\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \dots, \lambda_s I_{n_s}\}. \end{aligned}$$

于是 $S^{-1}BS$ 和 $S^{-1}AS$ 都是对角矩阵. □

引理 6.5. 设 V 是域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间, \mathcal{A} 是 V 上的一个线性变换. 证明: \mathcal{A} 是幂等变换的充分必要条件是

$$\text{rank}(\mathcal{A}) + \text{rank}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^2) = n.$$

证明. V 上的线性变换 \mathcal{A} 是幂等变换 $\iff \mathcal{A}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) = 0$.

考虑域 \mathbb{F} 上的一元多项式 $f(x) = x(x-1)$, 由于 $(x, x-1) = 1$, 因此, $\text{Ker } f(\mathcal{A}) = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})$, 从而

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \text{ 是幂等变换} &\iff \mathcal{A}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) = 0 \\ &\iff f(\mathcal{A}) = 0 \\ &\iff V = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) \\ &\iff \dim V = \dim(\text{Ker } \mathcal{A}) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})) \\ &\iff \text{rank}(\mathcal{A}) + \text{rank}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) = n. \end{aligned}$$

其中倒数第二个 \iff 的“ \Leftarrow ”理由是: $\text{Ker } \mathcal{A} + \text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})$ 是直和, 因此 $\dim(\text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})) = \dim(\text{Ker } \mathcal{A}) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I}))$. 于是 $\dim V = \dim(\text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I}))$. 从而 $V = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})$. \square

回到原题. 因为 A 和 B 都是幂等矩阵, 所以 A 和 B 都可对角化, 又因为 $AB = BA$, 所以 A 和 B 可以同时对角化. 故存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_s & \\ & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & \\ & E_t \end{pmatrix}.$$

其中 $s = \text{rank}(A)$, $t = \text{rank}(B)$. 由引理6.5 知

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(E_n - A) = n.$$

所以 $s + t = n$. 证毕. \square

七、(15 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, A 为 n 阶幂零阵, 求证

$$|A + B| = |B|.$$

证明. 因为 A 是 n 阶幂零阵, 所以

$$A^{n-1} \neq 0, A^n = 0.$$

于是

$$A^{n-1}(A + B) = A^n + A^{n-1}B = A^{n-1}B.$$

因此

$$|A^{n-1}||A + B| = |A^{n-1}||B|.$$

故

$$|A + B| = |B|.$$

\square

八、(15 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 可逆. 求证矩阵方程 $AXA^T - X = 0$ 仅有零解的充要条件为 A 的任何两个特征值的乘积不为 1.

证明.

引理 6.6. 设 A, B 是 n 级复矩阵。则矩阵方程 $AX - XB = 0$ 只有零解的充分必要条件是: A 与 B 没有公共的特征值。

证明. 必要性. 假设 A 与 B 有公共的特征值 λ , 则存在 $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 且 $\alpha \neq 0$ 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$ 由于

$$|\lambda_0 I - B'| = |(\lambda_0 I - B)'| = |\lambda_0 I - B| = 0,$$

因此 λ_0 也是 B' 的一个特征值, 从而存在 $\beta \in \mathbb{C}^n$ 且 $\beta \neq 0$, 使得 $B'\beta = \lambda_0\beta$. 于是 $\beta'B = \lambda_0\beta'$. 从而

$$A(\alpha\beta') - (\alpha\beta')B = \lambda_0\alpha\beta' - \alpha\lambda_0\beta' = 0.$$

因此 $\alpha\beta'$ 是矩阵方程 $AX - XB = 0$ 的一个解。

由于 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 因此 α 的某个分量 $a_i \neq 0$, B 的某个分量 $b_i \neq 0$. 从而 $\alpha\beta'$ 的 (i, j) 元 $a_i b_j \neq 0$, 因此 $\alpha\beta' \neq 0$, 于是 $\alpha\beta'$ 是 $AX - XB = 0$ 的一个非零解。

充分性. 设 A 与 B 没有公共的特征值, 则 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 B 的特征多项式 $g(\lambda)$ 没有公共的复根, 从而 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}[\lambda]$ 中互素. 于是存在 $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, 使得 $u(\lambda)f(\lambda) + v(\lambda)g(\lambda) = 1$. λ 用 A 代入, 得

$$u(A)f(A) + v(A)g(A) = I.$$

由于 $f(A) = 0$, 因此 $g(A)$ 可逆. 设 $n \times m$ 级复矩阵 C 是矩阵方程 $AX - XB = 0$ 的一个解, 则 $AC = CB$. 设

$$g(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0,$$

则

$$\begin{aligned} g(A)C &= (A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \cdots + b_1A + b_0I)C \\ &= C(B^m + b_{m-1}B^{m-1} + \cdots + b_1B + b_0I) \\ &= C \cdot g(B) = C \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

两边左乘 $g(A)^{-1}$, 即得 $C = 0$. 因此 $AX - XB = 0$ 只有零解。 □

由引理知, 命题显然成立。 □

7 2010

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x) = x^5 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1$, 则 $f(x)$ 的有理根是 ()。

解.

定理 7.1. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个次数 n 大于 0 的整系数多项式, 如果 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根, 其中 p, q 是互素的整数, 那么 $p|a_n, q|a_0$ 。

由定理 (7.1) 知, $2f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm\frac{1}{2}$ 或 ± 1 或 ± 2 。直接验算可知 $2f(x)$ 的有理根为 1, 从而 $f(x)$ 的有理根为 1。□

2. 多项式 $f(x) = x^3 + 5x - 10$ 在有理数域上是 () (可约或不可约) 的。

解. 因为存在素数 5, 使得

$$5|5, 5|-10;$$

$$5 \nmid 1;$$

$$5^2 \nmid -10.$$

所以由 Eisenstein 判别法知, $f(x)$ 在有理数域上式不可约的。□

3. 设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $2A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = ()$ 。

$$\begin{aligned} \text{解. } 2A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -22 - (-16) = \\ & -6. \end{aligned} \quad \square$$

4. 对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 表示为初等对称多项式是 ()。

解. $f(x_1, x_2, x_3)$ 的首项为 x_1^2 , 首项的幂指数组为 $(2, 0, 0)$ 。 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是二次齐次对称多项式, $f_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 也是二次齐次对称多项式, 它们的首项幂指数组 (p_1, p_2, p_3) 应当满足:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2, \quad 2 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3.$$

满足这两个条件的非负整数 3 元组 (p_1, p_2, p_3) 只可能是:

$$(2, 0, 0), (1, 1, 0).$$

它们分别是 f, f_1 的首项幂指数组, 于是 $f_2 = 0$, 且

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^{2-0} \sigma_2^0 \sigma_3^0 = \sigma_1^2,$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = a \sigma_1^{1-1} \sigma_2^{1-0} \sigma_3^0 = a \sigma_2.$$

于是

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Phi_2 + \Phi_1 = a \sigma_2 + \sigma_1^2.$$

为了确定 a, b 的值, x_1, x_2, x_3 分别用 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ 代入, 得

$$3 = 3a + 9.$$

因此 $a = -2$, 故 $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ 。

□

5. 将矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 写成初等矩阵之积 ()。

解. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

□

6. 设 $\alpha_1 = (1, 1, k), \alpha_2 = (1, k, 1), \alpha_3 = (k, 1, 1)$ 是线性无关的, 则 k 的取值为 ()。

解. 由题意,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此, $-k^3 + 3k - 2 \neq 0$, 解得 $k \neq -2$ 且 $k \neq 1$ 。

□

7. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为 ()。

解. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & t & 3 \end{pmatrix}.$$

因为二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的, 所以矩阵 A 是正定矩阵, 所以 $|A| > 0$, 由此得 $-\sqrt{6} < t < \sqrt{6}$ 。

□

8. \mathbb{R}^3 中的向量 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (0, 0, 1)$ 下的坐标是 ()。

解. 设 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 (x_1, x_2, x_3) 。则

$$\begin{cases} a_1 = x_1 \\ a_2 = x_1 + x_2 \\ a_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

因此坐标为 $(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2)$ 。

□

9. 在 \mathbb{R}^3 中与向量 $(1, 1, 2)$ 和 $(-1, 1, 0)$ 都正交的单位向量是 ()。

解. 设满足题设条件的单位向量为 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)$, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + 2\boldsymbol{\eta}_3 = 0, \\ -\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = 0, \\ \sqrt{\boldsymbol{\eta}_1^2 + \boldsymbol{\eta}_2^2 + \boldsymbol{\eta}_3^2} = 1. \end{cases}$$

解得 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \pm(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. □

10. 令 $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 的特征值为 1, 2, 3, 4, 则 $\text{tr}(A^2) = (\quad)$ 。

解. 由 2014 年的填空题的第九题下的 Remarks 知, A^2 的特征值为 1, 4, 9, 16, 所以 $\text{tr}(A^2) = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$. □

二、(15 分) 在 \mathbb{R}^3 中, 线性变换 \mathcal{A} 定义为

$$\begin{cases} \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0), \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = (3, 3, 2), \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 3, 1). \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0), \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0), \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1). \end{cases}$$

(1) 求 \mathcal{A} 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 B 。

(2) 求 \mathcal{A} 的特征值与特征向量。

解. (1) 因为

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$B = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) \mathcal{A} 的特征多项式为

$$|\lambda I - B| = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

所以 \mathcal{A} 的特征值为 $-1, 1, 3$ 。

解线性方程组 $(-I - B)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解线性方程组 $(I - B)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解线性方程组 $(3I - B)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此 \mathcal{A} 的对应于 -1 的特征向量为 $k(0, -1, 1)', k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, \mathcal{A} 的对应于 -1 的特征向量为 $l(1, 0, 0)', l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, \mathcal{A} 的对应于 -1 的特征向量为 $m(0, 1, 1)', m \in \mathbb{R}, m \neq 0$. \square

三、(15 分) 设

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr}(A) = 0\}, W = \{aE \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(1) 求证 V 为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间, 并求 $\dim V$.

(2) 求证 $\mathbb{R}^{n \times n} = V \oplus W$.

证明. (1) 易知 V 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子集. 因为 $0 \in V$, 所以 V 非空. 又

$$B, C \in V \implies \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0 \implies \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = 0 \implies A + B \in V,$$

$$A \in V, k \in \mathbb{R} \implies \text{tr}(A) = 0 \implies \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A) = 0 \implies kA \in V.$$

因此 V 对于矩阵的加法和纯量乘法封闭, 于是 V 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。

$$X = (x_{ij}) \in V$$

$$\iff x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn} = 0$$

$$\iff X = x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + \cdots + x_{1n}E_{1n}$$

$$+ x_{21}E_{11} + x_{22}E_{22} + \cdots + x_{2n}E_{2n}$$

$$+ \cdots$$

$$+ x_{n1}E_{n1} + x_{n2}E_{n2} + \cdots - (x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{n-1,n-1})E_{nn}$$

$$\iff X = x_{11}(E_{11} - E_{nn}) + x_{12}E_{12} + \cdots + x_{1n}E_{1n}$$

$$+ x_{21}E_{21} + x_{22}(E_{22} - E_{nn}) + \cdots + x_{2n}E_{2n}$$

$$+ \cdots$$

$$+ x_{n1}E_{n1} + x_{n2}E_{n2} + \cdots + x_{n,n-1}E_{n,n-1}$$

又容易验证 $E_{11} - E_{nn}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22} - E_{nn}, E_{23}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n-1,1}, \dots, E_{n-1,n-1} - E_{nn}, E_{n-1,n}, E_{n1}, E_{n2}, \dots$ 线性无关. 因此它们就是 V 的一个基, 从而

$$\dim V = n^2 - 1.$$

(2) 第 1 步, 证明 $\mathbb{R}^{n \times n} = V + W$ 。任取 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 想把 A 表示成 $A_1 + A_2$, 其中 $A_1 \in V, A_2 \in W$ 。设 $A_2 = kI$, 令 $A_1 = A - A_2$, 它应满足 $\text{tr}(A_1) = 0$, 即 $(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) - nk = 0$ 。于是有 $k = \frac{1}{n}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ 。由此构造的 A_1 与 A_2 就满足 $A = A_1 + A_2$ 。于是 $A \in V + W$ 。从而得出

$$\mathbb{R}^{n \times n} = V + W.$$

第 2 步, 证明 $V \oplus W$ 是直和。因为

$$\dim V + \dim W = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathbb{R}^{n \times n} = \dim(V + W).$$

所以 $V \oplus W$ 是直和。 □

四、(15 分) 设 4 元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4.$$

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵表达式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X^TAX$ 。

(2) 求 A 的特征值和特征向量。

(3) 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角阵。

(4) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准型。

解. (1)

$$X^TAX = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵 A 的特征多项式为:

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2.$$

所以 A 的特征值为 -1 (二重), 1 (二重)。

解线性方程组 $(-I - A)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, -1, 0, 0)', \xi_2 = (0, 0, 1, -1)'.$$

解线性方程组 $(I - A)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (1, 1, 0, 0)', \xi_4 = (0, 0, 1, 1)'.$$

因此, A 的属于特征值 -1 的特征向量为 $k\xi_1 + l\xi_2, k, l \in \mathbb{Z}$, A 的属于特征值 1 的特征向量为 $m\xi_3 + n\xi_4, m, n \in \mathbb{Z}$ 。

(3) 注意到 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 两两正交。下面将 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 单位化。

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right)'; \\ \eta_2 &= \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)'; \\ \eta_3 &= \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right)'; \\ \eta_4 &= \frac{\xi_4}{|\xi_4|} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)' .\end{aligned}$$

令 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, 则 P 是正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{-1, -1, 1, 1\}.$$

(4) 标准型为

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

□

五、(15 分) 设矩阵 A 与 B 没有公共的特征值, $f_A(x)$ 是 A 的特征多项式, 证明:

(1) 矩阵 $f_A(B)$ 可逆。

(2) 矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解。

证明. (1) 设

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)^{l_1}(x - \lambda_2)^{l_2} \cdots (x - \lambda_s)^{l_s}.$$

则

$$f_A(B) = (B - \lambda_1 I)^{l_1}(B - \lambda_2 I)^{l_2} \cdots (B - \lambda_s I)^{l_s}.$$

因为矩阵 A 与 B 没有公共的特征值, 所以

$$|B - \lambda_i I| \neq 0, i = 1, 2, \dots, s.$$

因此,

$$|f_A(B)| \neq 0.$$

故矩阵 $f_A(B)$ 可逆。

(2) 设 C 是矩阵方程 $AX = XB$ 的一个解, 则

$$f_A(A)C = Cf_A(B).$$

因此

$$Cf_A(B) = 0,$$

因为矩阵 $f_A(B)$ 可逆, 所以 $C = 0$ 。因此矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解。

□

六、(15 分) 设 A 是 n 阶正定阵, 求证: 存在唯一的正定阵 B , 使得

$$A = B^2.$$

解. 存在性. 设 A 是 n 级正定矩阵, 则 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 全大于 0. 由于 A 是实对称矩阵, 因此存在 n 级正交矩阵 T , 使得

$$\begin{aligned} A &= T^{-1} \operatorname{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \} T \\ &= T^{-1} \operatorname{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \} T \quad T^{-1} \operatorname{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \} T \\ &= B^2, \end{aligned}$$

其中

$$B = T^{-1} \operatorname{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \} T.$$

显然 B 是正定矩阵。

唯一性. 设还有一个 n 级正定矩阵 C , 使得 $A = C$. 设 C 的全部特征值是 v_1, v_2, \dots, v_n , 则 A 的全部特征值是 $v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2$. 设 B 的全部特征值是 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 则 A 的全部特征值是 $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2$. 于是适当调换 v_1, v_2, \dots, v_n 的下标可以使 $\mu_i^2 = v_i^2, i = 1, 2, \dots, n$. 由于 μ_i, v_i 都大于 0, 因此 $\mu_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$.

由于 B 和 C 都是 n 级实对称矩阵, 因此存在 n 级正交矩阵 T, T_1 , 使得

$$\begin{aligned} B &= T^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \} T, \\ C &= T_1^{-1} \operatorname{diag} \{ v_1, v_2, \dots, v_n \} T_1. \end{aligned}$$

由于 $B^2 = A = C^2$, 且 $\mu_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$, 因此

$$T^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2 \} T = T_1^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2 \} T_1.$$

两边左乘 T_1 , 右乘 T^{-1} , 得

$$T_1 T^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2 \} = \operatorname{diag} \{ \mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2 \} T_1 T^{-1}. \quad (6)$$

记 $T_1 T^{-1} = (t_{ij})$. 比较 (9) 式两边的 (i, j) 元, 得

$$t_{ij} \mu_j^2 = \mu_i^2 t_{ij} \quad (7)$$

若 $t_{ij} \neq 0$, 则从 (7) 式得, $\mu_j^2 = \mu_i^2$, 由于 μ_j, μ_i 都是正数, 因此 $\mu_j = \mu_i$, 从而有

$$t_{ij} \mu_j = \mu_i t_{ij}. \quad (8)$$

若 $t_{ij} = 0$, 则显然 (8) 式也成立. 由于 (8) 式对于 $1 \leq i, j \leq n$ 都成立, 因此

$$T_1 T^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \} = \operatorname{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \} T_1 T^{-1} \quad (9)$$

从而

$$T^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \} T = T_1^{-1} \operatorname{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \} T_1.$$

即 $B = C$. 这就证明了唯一性. □

七、(15 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, A 是 V 上的线性变换。证明: A 是可逆的, 当且仅当 $\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \dots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$ 也是 V 的基。

证明. 因为 $\dim V = n$, 所以

A 是可逆的, 当且仅当 $\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \dots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$ 也是 V 的基。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当 $\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \dots, \mathcal{A}(\varepsilon_n)$ 线性无关。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当对任意的一组常数 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$,

若 $k_1\mathcal{A}(\varepsilon_1) + k_2\mathcal{A}(\varepsilon_2) + \dots + k_n\mathcal{A}(\varepsilon_n) = 0$, 则 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当对任意的一组常数 $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$,

若 $\mathcal{A}(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n) = 0$, 则 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当对任意的向量 $\alpha \in V$, 若 $\mathcal{A}(\alpha) = 0$, 则 $\alpha = 0$ 。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当 \mathcal{A} 是单射。

因为有限维空间之间的单射必是满射, 所以

A 是可逆的, 当且仅当 \mathcal{A} 是单射。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当 \mathcal{A} 是单射且 \mathcal{A} 是满射。

$\iff A$ 是可逆的, 当且仅当 \mathcal{A} 是可逆的线性变换。

这是显然的。 □

八、(15 分) 设 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 为 n 维欧式空间 V 上的两个线性变换。若对任意的 $\alpha \in V$, 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\mathcal{B}\alpha, \mathcal{B}\alpha)$$

则 $\mathcal{A}V$ 与 $\mathcal{B}V$ 作为欧式空间是同构的。

证明. 设欧式空间 V 是数域 \mathbb{K} 上的欧式空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 由第七题知, $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是 $\mathcal{A}V$ 的一个基, $\mathcal{B}\varepsilon_1, \mathcal{B}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{B}\varepsilon_n$ 是 $\mathcal{B}V$ 的一个基。令

$$\sigma(t_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + t_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \dots + t_n\mathcal{A}\varepsilon_n) = t_1\mathcal{B}\varepsilon_1 + t_2\mathcal{B}\varepsilon_2 + \dots + t_n\mathcal{B}\varepsilon_n \quad (t_i \in \mathbb{K}).$$

我们来证明 σ 是 $\mathcal{A}V$ 到 $\mathcal{B}V$ 的同构映射。

(i) 显然 $\mathcal{A}V$ 中任一向量 $t_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + t_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \dots + t_n\mathcal{A}\varepsilon_n$ 被 σ 映为 $\mathcal{B}V$ 中的向量 $t_1\mathcal{B}\varepsilon_1 + t_2\mathcal{B}\varepsilon_2 + \dots + t_n\mathcal{B}\varepsilon_n$; 而且 $\mathcal{B}V$ 中的任何向量 $t_1\mathcal{B}\varepsilon_1 + t_2\mathcal{B}\varepsilon_2 + \dots + t_n\mathcal{B}\varepsilon_n$ 都是 $\mathcal{A}V$ 中的向量 $t_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + t_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \dots + t_n\mathcal{A}\varepsilon_n$ 在 σ 下的象, 因此 $\mathcal{A}V$ 到 $\mathcal{B}V$ 的映射 σ 是映上的。

(ii) 设 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}V$, 则

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{A}\varepsilon_k, \beta = \sum_{k=1}^n d_k \mathcal{A}\varepsilon_k \\ \sigma(\alpha) &= \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{B}\varepsilon_k, \sigma(\beta) = \sum_{k=1}^n d_k \mathcal{B}\varepsilon_k. \end{aligned}$$

其中 $c_k, d_k \in \mathbb{K}$ 。若 $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ ，则由上式得到

$$\delta = \sigma(\alpha) - \sigma(\beta) = \sum_{k=1}^n (c_k - d_k) \mathcal{B}\varepsilon_k = 0.$$

于是

$$(\delta, \delta) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (c_i - d_i)(c_j - d_j) (\mathcal{B}\varepsilon_i, \mathcal{B}\varepsilon_j) = 0.$$

记

$$\theta = \alpha - \beta = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{A}\varepsilon_k - \sum_{k=1}^n d_k \mathcal{A}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^n (c_k - d_k) \mathcal{A}\varepsilon_k.$$

依题设条件及内积性质，我们有

$$\begin{aligned} (\theta, \theta) &= \left(\sum_{k=1}^n (c_k - d_k) \mathcal{A}\varepsilon_k, \sum_{k=1}^n (c_k - d_k) \mathcal{A}\varepsilon_k \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (c_i - d_i)(c_j - d_j) (\mathcal{A}\varepsilon_i, \mathcal{A}\varepsilon_j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (c_i - d_i)(c_j - d_j) (\mathcal{B}\varepsilon_i, \mathcal{B}\varepsilon_j) \\ &= (\delta, \delta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\theta = 0$ ，即 $\alpha = \beta$ ，故 σ 是单射，从而 σ 是 $\mathcal{A}V$ 到 $\mathcal{B}V$ 的一一映射。

(iii) 此外，依 σ 的定义知

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha + \beta) &= \sigma \left(\sum_{k=1}^n (c_k + d_k) \mathcal{A}\varepsilon_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (c_k + d_k) \mathcal{B}\varepsilon_k \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{B}\varepsilon_k + \sum_{k=1}^n d_k \mathcal{B}\varepsilon_k \\ &= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta). \end{aligned}$$

类似地可验证

$$\sigma(a\alpha) = a\sigma(\alpha), \text{ 其中 } a \in \mathbb{K},$$

以及

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta).$$

由 (1)、(2)、(3) 得， σ 是 $\mathcal{A}V$ 到 $\mathcal{B}V$ 的同构映射。于是 $\mathcal{A}V$ 与 $\mathcal{B}V$ 作为欧式空间是同构的。 \square

8 2011

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 多项式 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 1$ 在有理数域上是 (). (可约或不可约)

解. 因为 $f(x)$ 是一个次数大于 0 的本原多项式, 且存在素数 2, 使得

$$\begin{cases} 2 \mid 2, 2 \mid 4, 2 \mid 6, \\ 2 \nmid 1, \\ 2^2 \nmid 2. \end{cases}$$

所以, 由 Eisenstein 判别法知, $f(x)$ 在有理数域上不可约. \square

2. 设 A 和 B 均为 n 阶方阵, A^* 与 B^* 分别为他们的伴随矩阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| = ()$.

解.

$$\begin{aligned} |A^{-1}|B|B^{-1}| &= |(|B| - |A|)A^{-1}B^{-1}| \\ &= (|B| - |A|)^n |A|^{-1} |B|^{-1} \\ &= \frac{-(-5)^n}{6}. \end{aligned}$$

\square

3. 设 3 阶方阵 A 按下列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$, 且 $|A| = 5$, 又设 $B = (A_1 + 2A_2, 3A_1 + 4A_3)$, 则 $|B| = ()$.

解.

$$\begin{aligned} |B| &= |(A_1 + 2A_2, 3A_1 + 4A_3)| = |(A_1, 3A_1 + 4A_3)| + |(2A_2, 3A_1 + 4A_3)| \\ &= 0 + 24|(A_2, A_1, A_3)| = -24|(A_2, A_1, A_3)| \\ &= -24 \times 5 = -120. \end{aligned}$$

\square

4. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1), \alpha_2 = (2, 0, t, 0), \alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2, 则 $t = ()$.

解. 对

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & 0 & 3-t & 0 \end{pmatrix}$$

因此, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 则 $t = 3$. \square

5. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 合同, 则二次型 $X^T A X$ 的规范型为 ()。

解. 先求实对称矩阵 B 的特征值。因为

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

所以, 矩阵 B 的特征值为 $-2, 1, 2$ 。

所以, 二次型 $X^T B X$ 的秩为 3, 正惯性指数为 2。因为实对称矩阵 A 与实对称矩阵 B 合同, 所以二次型 $X^T A X$ 的秩为 3, 正惯性指数为 2。

所以, 二次型 $X^T A X$ 的规范型是 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 。□

6. \mathbb{R}^3 中的向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)$ 下的坐标是 ()。

解. 设 $\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$, 则向量 (k_1, k_2, k_3) 满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

解线性方程组 (10) 得,

$$\begin{cases} k_1 = x_1, \\ k_2 = x_2 - x_1, \\ k_3 = x_3 - x_2. \end{cases}$$

因此, α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$ 。□

7. 设 3 阶方阵 A 的三个特征值为 $1, 2, -2$, 矩阵 B 与 A 相似, 则 B 的伴随矩阵 B^* 的三个特征值为 ()。

解. 先研究下述命题:

设 A 是复数域上的 n 级矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 求 A^* 的全部特征值。

解. 情形 1. 由于 $AA^* = |A|I$, 因此 $A^* = |A|A^{-1}$, 所以 A^* 的全部特征值是

$$\lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n, \lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}.$$

情形 2. A 不可逆。此时 0 是 A 的一个特征值, 不妨设 $\lambda_n = 0$ 。由于当 $\text{rank}(A) < n - 1$ 时, $A^* = 0$ 。此时 0 是 A^* 的 n 重特征值。当 $\text{rank}(A) = n - 1$ 时, $\text{rank}(A^*) = 1$, 从而 $(0I - A^*)X = 0$ 的解空间的维数等于 $n - 1$, 于是 0 是 A^* 的至少 $n - 1$ 重特征值。设 μ 也是 A^* 的一个特征值, 则 $|\lambda I - A^*| = \lambda^{n-1}(\lambda - \mu)$ 。从而 $\mu = \text{tr}(A^*) = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$ 。由于 $|\lambda I - A|$ 的一次项系数等于 $(-1)^{n-1}$ 乘以 A 的所有 $n - 1$ 阶主子式的和, 从而等于 $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n A_{ii}$ 。又 A 的一次项系数等于 $(-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}$ 。于是 A^* 的全部特征值是 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}, 0$ (至少 $n - 1$ 重)。□

回到原题。 B 的特征值为 $1, 2, -2$, 所以 B^* 的特征值为 $-4, -2, 2$ 。□

注 8.1. 一个更一般的命题是:

设 A 是数域 \mathbb{K} 上 n 级矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征多项式在复数域上的全部根, 则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征多项式在复数域中的全部根为

$$\lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n, \lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}.$$

先证明下面三个引理:

引理 8.1. 任一 n 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。

证明. 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法. $n=1$ 时, 显然命题为真, 假设 $n-1$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵. 现在来看 n 级复矩阵 A . 设 λ_1 是 n 级复矩阵 A 的一个特征值, α_1 是属于 λ_1 的一个特征向量. 把 α_1 扩充成 \mathbb{C}^n 的一个基: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 令 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 P_1 是 n 级可逆矩阵, 且

$$P_1^{-1}AP_1 = P_1^{-1}(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (P_1^{-1}\lambda_1\alpha_1, P_1^{-1}A\alpha_2, \dots, P_1^{-1}A\alpha_n).$$

由于 $P_1^{-1}P_1 = I$, 因此 $P_1^{-1}\alpha_1 = \epsilon_1$. 从而

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

对 $n-1$ 级复矩阵 B 用归纳假设, 由 $n-1$ 级可逆矩阵 P_2 , 使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵. 令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

则 P 是 n 级可逆矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha P_2 \\ 0 & P_2^{-1}BP_2 \end{pmatrix}.$$

因此 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理, 对一切正整数 n , 此命题为真。□

引理 8.2. 设 A, B 都是数域 \mathbb{K} 上的 n 级矩阵 ($n \geq 2$). A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵, 如果 $A \sim B$, 那么 $A^* \sim B^*$ 。

证明. 如果 $A \sim B$, 则存在 \mathbb{K} 上 n 级可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 所以 $P^*A^*(P^{-1})^* = B^*$, $(P^{-1})^* = (P^*)^{-1}$, 从而

$$P^*A^*(P^*)^{-1} = B^*.$$

因此 $A^* \sim B^*$ 。□

引理 8.3. 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 级矩阵, 如果 A 可对角化, 那么 A 的伴随矩阵 A^* 也可对角化。

证明. 若 A 可对角化, 则 $A \sim D$, 其中 $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 据 (8.2) 得, $A^* \sim D^*$. 直接计算可得

$$D^* = \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

因此 A^* 可对角化。

□

接下来回到以上命题：

证明. 把 A 看成复矩阵, 据 (8.1) 得, $A \sim B$, 其中 B 是上三角矩阵, B 的主对角元为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。据 (8.3) 得, $A^* \sim B^*$ 。直接计算可得

$$B^* = \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $|\lambda I - A^*| = |\lambda I - B^*|$, 因此 A^* 的特征多项式在复数域中的全部根是：

$$\lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n, \lambda_1 \lambda_3 \cdots \lambda_n, \dots, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}.$$

□

8. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则 A 的最小多项式为 ()。

解. A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 (\lambda - 3).$$

因为 $A(A - 3I) = 0$, 所以 A 的最小多项式为 $m(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)$ 。

□

9. \mathbb{R}^3 中的子空间 $V_1 = L(\alpha)$, 其中 $\alpha = (1, 1, 1)$, 则 $V_1^\perp = ()$ 。

解. 解线性方程组 $\alpha X = 0$, 得一个基础解系：

$$\eta_1 = (1, -1, 0)', \eta_2 = (1, 0, -1)'.$$

因此 $V_1^\perp = \{\eta_1, \eta_2\}$ 。

□

10. 特征值为 1, 1, 1, 1 的一切 4×4 复数矩阵在复数域内按相似可分为 () 类。

解. 5。

□

二、已知实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

问：

(1) x, y 为何值时, A 合同于 B ?

(2) x, y 为何值时, A 相似于 B ?

解. (1) 若 A 与 B 合同, 则 A 与 B 有相同的秩与正惯性指数. 对 A 和 B 作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3}{4}y \end{pmatrix}.$$

因此, 应当有

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 1-\frac{3}{4}y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2>0 \\ 1-\frac{3}{4}y>0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2<0 \\ 1-\frac{3}{4}y<0 \end{cases}$$

即

$$x=2, y=\frac{4}{3} \text{ 或 } x>2, y<\frac{4}{3} \text{ 或 } x<2, y>\frac{4}{3}.$$

(2) A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - (2+x)\lambda + 2x - 4.$$

B 的特征多项式为

$$|\lambda I - B| = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 3y.$$

若 A 与 B 相似, 则 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$, 因此

$$\begin{cases} 2+x=5 \\ 2x+4=4-3y \end{cases}$$

解得 $x=3, y=\frac{3}{2}$.

□

三、 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

且 A 与 B 相似。

(1) 求 α 和 β 的值;

(2) 求可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$ 。

解. (1) A 的特征多项式为:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^3 - (1 + 2\alpha + \beta^2)(\lambda - 1) - (2 + \alpha)\beta.$$

B 的特征多项式为:

$$|\lambda I - B| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

解

$$\begin{cases} -1 - (1 + 2\alpha + \beta^2)(-1) - (2 + \alpha)\beta = 0, \\ -(2 + \alpha)\beta = 0, \\ 1 - (1 + 2\alpha + \beta^2) - (2 + \alpha)\beta = 0. \end{cases}$$

得

$$\alpha = 0, \beta = 0 \text{ 或 } \alpha = -2, \beta = \pm 2.$$

(2)

□

四、在 \mathbb{R}^3 中定义线性变换 \mathcal{A} 为

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1).$$

- (1) 求 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵。
(2) 设 $\alpha = (1, 0, -2)$, 求 $\mathcal{A}\alpha$ 在基 $\alpha_1 = (2, 0, 1), \alpha_2 = (0, -1, 1), \alpha_3 = (-1, 0, 2)$ 下的坐标。
(3) \mathcal{A} 是否可逆? 若可逆, 求 \mathcal{A}^{-1} , 若不可逆, 说明原因。

解. (1) 由已知,

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\varepsilon_1 \\ \mathcal{A}\varepsilon_2 \\ \mathcal{A}\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由已知

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\alpha_1 \\ \mathcal{A}\alpha_2 \\ \mathcal{A}\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解线性方程组

$$X \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha,$$

得一个基础解系

$$\xi = (0, 0, -1).$$

因此

$$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\xi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = (0, -1, 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = (0, -1, 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

故坐标为 $(0, -1, 0)$ 。

(3) 因为 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$|A| \neq 0$, 所以 \mathcal{A} 可逆。又因为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

所以 \mathcal{A}^{-1} 为

$$\mathcal{A}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - 2x_3).$$

□

五、分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}.$$

为正定矩阵, 其中 B 是 B 的转置。证明:

(1) A 可逆。

(2) $D - B^T A^{-1} B$ 也是正定。

证明. (1) 由于 M 正定, 因此 M 的所有主子式全大于 0。而 A 是 M 的 r 阶顺序主子式, 因此 $|A| \neq 0$, 从而 A 可逆。

(2) 引理: 设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

是一个 n 级对称矩阵, 且 A_1 是 r 级可逆矩阵。证明:

$$A \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}.$$

证明. 由于 A 是对称矩阵, 因此 $A' = A$, 即

$$\begin{pmatrix} A_1' & A_3' \\ A_2' & A_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

从而 A_1, A 都是对称矩阵, 且 $A_3 = A_2'$ 。由于 A_1 可逆, 因此

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2' & A_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 - A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_2' A_1^{-1} & I_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A_1^{-1} A_2 \\ 0 & I_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $(-A_1^{-1} A_2)' = -A_2' (A_1^{-1})' = -A_2' (A_1')^{-1} = -A_2' A_1^{-1}$, 因此从上式推出

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2' A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}.$$

□

回到原题, 由引理得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - B' A^{-1} B \end{pmatrix}.$$

从而上式右边的矩阵也是正定矩阵。于是根据刚才证得的结论, $D - B' A^{-1} B$ 是正定矩阵。

□

六、 给定数域 \mathbb{P} 上的分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 A 为 $m \times n$ 的矩阵, B 为 $k \times l$ 的矩阵, 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq \text{rank}(M).$$

注: $\text{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

解. 设 $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = t$ 。则 A 有一个 r 级子矩阵 A_1 , 使得 $|A_1| \neq 0$; B 有一个 t 级子矩阵 B_1 , 使得 $|B_1| \neq 0$ 。从而 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有一个 $r+t$ 阶子式:

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{vmatrix} = |A_1| |B_1| \neq 0.$$

因此

$$\text{rank}(M) = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r + t = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

□

七、 设 A 是半正定矩阵, 证明存在唯一的半正定矩阵 B 使得

$$A = B^2.$$

解. 设 A 是 n 级半正定矩阵, 则存在 n 级正交矩阵 T , 使得

$$A = T^{-1} \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \} T,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 它们全非负。于是有

$$\begin{aligned} A &= T^{-1} \text{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \} T T^{-1} \text{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \} T \\ &= C^2 \end{aligned}$$

其中

$$C = T^{-1} \text{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \} T.$$

显然 C 是半正定矩阵。

□

八、 设 V 为 n 维欧氏空间, 求证:

(1) 对 V 中每个线性变换 \mathcal{A} , 都存在唯一的共轭变换 \mathcal{A}^* , 即存在唯一的线性变换 \mathcal{A}^* , 使得对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta).$$

(2) \mathcal{A} 为对称变换当且仅当 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ 。

(3) \mathcal{A} 为正交变换当且仅当

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

其中 \mathcal{E} 是 V 上的恒等变换。

证明.

引理 8.4. 设 f 是域 \mathbb{F} 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数。则

f 是非退化的当且仅当映射 $R_f: \beta \mapsto \beta_R$ 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射。

证明. 看 [3] 第 435 页。 □

(1) 任给 $\beta \in V$, 据已知条件和引理得, $R_f: \beta \mapsto \beta_R$ 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射。由于 $\beta_R \mathcal{A} \in V^*$, 因此存在唯一的向量 $\beta' \in V$, 使得 $\beta_R \mathcal{A} = \beta'_R$, 从而 $\beta_R(\mathcal{A}a) = \beta'_R(a), \forall a \in V$ 。于是有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \beta'), \quad \forall \alpha \in V. \quad (11)$$

于是我们得到 V 到自身的一个映射 $\mathcal{A}^*: \beta \mapsto \beta'$ 。由 (11) 式得

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V. \quad (12)$$

现在来验证 \mathcal{A}^* 是 V 上的线性变换。任取 $\alpha, \beta, \gamma \in V, k \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} (\alpha, \mathcal{A}^*(k\beta + \gamma)) &= (\mathcal{A}\alpha, k\beta + \gamma) = (\mathcal{A}\alpha, k\beta) + (\mathcal{A}\alpha, \gamma) \\ &= \bar{k}(\mathcal{A}\alpha, \beta) + (\mathcal{A}\alpha, \gamma) = \bar{k}(\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\alpha, \mathcal{A}^*\gamma) \\ &= (\alpha, k\mathcal{A}^*\beta) + (\alpha, \mathcal{A}^*\gamma) = (\alpha, k\mathcal{A}^*\beta + \mathcal{A}^*\gamma), \end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{A}^*(k\beta + \gamma) = k\mathcal{A}^*\beta + \mathcal{A}^*\gamma.$$

从而 \mathcal{A}^* 是 V 上的一个线性变换。这证明了存在性。

唯一性。假设还有线性变换 \mathcal{B} 使得

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{B}\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V. \quad (13)$$

则从 (12) 和 (13) 式得

$$(\alpha, \mathcal{A}^*\beta) = (\alpha, \mathcal{B}\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

由此得出, $\mathcal{A}^*\beta = \mathcal{B}\beta, \forall \beta \in V$, 因此 $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$ 。

(2) 由对称变换的定义与 (1) 的唯一性即得。

(3) 充分性。因为 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, 所以 \mathcal{A} 是可逆的线性变换, 当然是满的。又

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\mathcal{A}\beta) = (\alpha, \mathcal{E}\beta) = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in V.$$

因此 \mathcal{A} 为正交变换。

必要性。因为 \mathcal{A} 是正交变换, 所以

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\beta) = (\alpha, \mathcal{A}^{-1}\beta).$$

由伴随变换的唯一性知, $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$, 所以

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

□

9 2012

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 三阶行列式有两个元素为 4, 其余为 ± 1 , 则此行列式可能的最大值为 ()。

解. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19$ □

2. $\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta$ 皆为三维列向量, $A = (\alpha, 2\gamma_1, 3\gamma_2), B = (\beta, \gamma_1, 2\gamma_2)$ 且 $|A| = 18, |B| = 4$, 则 $|A - B| = ()$ 。

解. $|A - B| = |(\alpha - \beta, \gamma_1, \gamma_2)| = |(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)| - |(\beta, \gamma_1, \gamma_2)| = \frac{1}{6}|A| - \frac{1}{2}|B| = 3 - 2 = 1$. □

3. 三阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 则 $A^2 + 4A^{-1}$ 的特征值 ()。

解. 显然, $5, -3, 6$. □

4. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f^{(k)}(x)$ 的 s 重因子, 且 $p(x) \nmid f(x)$, 那么 $p(x)$ () $f(x)$ 的 $s+k$ 重因子。

解. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 t 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f^{(k)}(x)$ 的 $t-k$ 重因式, 因此 $t-k=s$, 所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $s+k$ 重因式. □

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2b & 0 \end{pmatrix}$$

相似于对角阵, 则 a 与 b 的关系式为 ()。

解. 矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda + 6)(\lambda - 6)^2.$$

因为 A 相似于对角阵, 所以 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda + 6)(\lambda - 6).$$

因此 $(A + 6I)(A - 6I) = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & 6a + 18b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a + 12b & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

于是 $a + 3b = 0$. □

6. 设 \mathbb{R}^2 中的内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha' A \beta, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

在此内积之下的度量矩阵为 ()。

解. 设所求的度量矩阵为 B , 记 $\alpha_1 = (1, 0)'$, $\alpha_2 = (0, 1)'$, 则

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1' A \alpha_1 & \alpha_1' A \alpha_2 \\ \alpha_2' A \alpha_1 & \alpha_2' A \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

7. 令 $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 则 $\text{tr}(A^2) = ()$ 。

解. $1 + 4 + 9 + 16 = 30$ 。

□

8. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 在矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件为 ()。

解. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \ B)$ 。

□

9. 设 A 为正交矩阵, 且 $|A| = -1$, 则 A 必有特征值为 ()。

解. -1 。若全为 1 , 则 $|A| = 1$ 。

□

10. 向量组 $\alpha_1 = (1, 1, k)$, $\alpha_2 = (1, k, 1)$, $\alpha_3 = (k, 1, 1)$ 是线性无关的, 则 k ()。

解.

$$|(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2).$$

所以 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 。

□

二、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 3b & 1 \end{pmatrix}.$$

B 是三阶非零方阵, 且 $AB = O$, 求 a, b 以及 B 的秩。

解. 对矩阵 A 作初等行变换得

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & -b(2-a) \end{pmatrix}$$

所以 $\text{rank}(A) \geq 2$ 。

又 B 是三阶非零方阵, 所以 $\text{rank} B \geq 1$, 于是由 Sylvester 不等式得

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 3.$$

因此 $\text{rank}(A) \leq 2$, 所以 $\text{rank}(A) = 2$, 即 $b = 0$ 且 $a = 2$, 此时 $\text{rank}(B) = 1$ 。

□

三、(15 分) 设 A 是 n 阶正定矩阵, B 为 n 阶实方阵, 证明:

(1) 若 B 正定, 则 AB 的特征值皆大于 0。

(2) 若 B 正定, 且 $AB = BA$, 则 AB 正定。

证明. (1) 因为 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 所以存在正定矩阵 S, T , 使得

$$S^{-1}(AB)S = S^{-1}S^2T^2S = ST^2S = (TS)'(TS) =: C.$$

因为 $C' = (TS)'(TS) = C$, 所以 C 是实对称矩阵。

又对任意 n 维非零实向量 x , 由 TS 可逆知 $TSx \neq 0$, 故

$$x'Cx = x'(TS)'(TS)x = (TSx)'(TSx) > 0.$$

因此 C 是正定矩阵, 从而 C 的特征值全大于零。因为 AB 与 C 相似, 所以 AB 的特征值全大于零。

(2) 因为 $AB = BA$, 所以

$$(AB)' = B'A' = BA = AB.$$

所以 AB 是实对称矩阵。由 (1) 知 AB 的特征值全大于零, 故 AB 是正定矩阵。 \square

四、 A 为 n 阶方阵, 如果 $A^2 = A$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵。

五、 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

试求 A^n 。

解. 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

所以 A 的特征值为 $-5, 1, 5$ 。

解线性方程组 $(-5I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, -2, 1)'.$$

解线性方程组 $(I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (1, 0, 0)'.$$

解线性方程组 $(5I - A)x = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)'.$$

令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{-5, 1, 5\}.$$

因此

$$\begin{aligned} A^n &= \left[P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n = P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 5^{n-1} - 2(-1)^n 5^{n-1} & -1 + 4 \cdot 5^{n-1} + (-1)^n 5^{n-1} \\ 0 & 5^{n-1} + 4(-1)^n 5^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} - 2(-1)^n 5^{n-1} \\ 0 & 2 \cdot 5^{n-1} - 2(-1)^n 5^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} + (-1)^n 5^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

六、 设 A 为 n 阶实方阵，已知 A 的特征值全为实数，且

$$AA^T = A^T A.$$

证明： A 必为对称矩阵。

证明.

引理 9.1. n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是： A 的特征多项式在复数域中的根都是实数。

证明. 必要性. 设 n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵 $B = (b_{ij})$ ， 则

$$|xI - A| = |I - B| = (\lambda - b_1)(\lambda - b_2) \cdots (\lambda - b_m).$$

这表明 $|AI - A|$ 的根 $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ 都是实数。

充分性. 对实矩阵的级数作数学归纳法. $n = 1$ 时，显然命题为真. 假设对于 $n - 1$ 级实矩阵命题为真， 现在来看 n 级实矩阵 A . 由于 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数， 因此可以取 A 的一个特征值 λ_1 . 设 η_1 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量， 且 $|\lambda| = 1$. 把 η_1 扩充成 \mathbb{R}^n 的一个基， 然后经过施密特正交化和单位化， 得到 \mathbb{R}^n 的一个标准正交基： $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. 令 $T_1 = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ， 则 T_1 是正交矩阵。

$$T_1^{-1}AT_1 = T_1^{-1}(A\eta_1, A\eta_2, \dots, A\eta_n) = (T_1^{-1}\lambda_1\eta_1, T_1^{-1}A\eta_2, \dots, T_1^{-1}A\eta_n).$$

由于 $T_1^{-1}T_1 = I$ ， 因此 $T_1^{-1}\eta_1 = \varepsilon_1$. 从而

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

于是 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - B|$. 因此 $n - 1$ 级实矩阵 B 的特征多项式在复数域中的根都是实数. 从而对 B 可用归纳假设： 存在 $n - 1$ 级正交矩阵 T_2 ， 使得 $T_2^{-1}BT_2$ 为上三角矩阵。

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则 T 是 n 级正交矩阵, 且

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix}^{-1} T_1^{-1}AT_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha T_2 \\ \mathbf{0} & T_2^{-1}BT_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理, 对一切正整数 n , 此命题为真。 \square

由引理 (9.1) 得, 存在 n 级正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT = B$, 其中 $B = (b_{ij})$ 是上三角矩阵。从而 $T'A'(T^{-1})' = B'$, 即 $T^{-1}A'T = B'$ 。由于 $AA' = A'A$, 因此 $BB' = B'B$ 。于是

$$\sum_{k=1}^n b_{ik}^2 = \sum_{k=1}^n b_{ki}^2, i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

当 $i = 1$ 时, (14) 式成为

$$\sum_{k=1}^n b_{1k}^2 = b_{11}^2.$$

由此推出, $b_{12}^2 + b_{13}^2 + \dots + b_{1n}^2 = 0$ 。从而 $b_{12} = b_{13} = \dots = b_{1n} = 0$ 。

当 $i = 2$ 时, (14) 式成为

$$\sum_{k=1}^n b_{2k}^2 = b_{12}^2 + b_{22}^2 = b_{22}^2.$$

由此推出, $b_{23} = b_{24} = \dots = b_{2n} = 0$ 。

依次下去, 可得

$$b_{34} = \dots = b_{3n} = 0, \dots, b_{n-1,n} = 0.$$

因此 B 是对角矩阵。由于 A 正交相似于对角矩阵 B , 因此 A 是对称矩阵。 \square

七、 设

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 3b & 1 \end{pmatrix}.$$

B 是三阶非零方阵, 且 $AB = O$, 求 a, b 以及 B 的秩。

解. 重复。 \square

八、 (15 分) 设 A, B 为 n 元实对称矩阵, 且 B 正定, 求证: 存在一个实可逆阵 P 使得 P^TAP 和 P^TBP 同时为对角阵。

证明. 由于 B 是 n 元正定矩阵。因此 $A \simeq I$ 。从而存在 n 元实可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1^T B P_1 = I$ 。
 由于 $(P_1^T A P_1)^T = P_1^T A^T P_1 = P_1^T A P_1$, 因此 $P_1^T A P_1$ 是 n 元实对称矩阵。于是存在 n 级正交矩阵 T , 使得

$$T^T (P_1^T A P_1) T = T^{-1} (P_1^T A P_1) T = \text{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \}.$$

令 $P = P_1 T$, 则 P 是实可逆矩阵, 且使得

$$\begin{aligned} P^T B P &= (P_1 T)^T B (P_1 T) = T^T (P_1^T B P_1) T = T^T I T = I, \\ P^T A P &= T^T (P_1^T A P_1) T = \text{diag} \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \}. \end{aligned}$$

□

10 2013

一、填空题

1. 设 $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首一最大公因式为 ()。

解. $(f(x), g(x)) = (f(x), f(x) - g(x)) = (x^4 - 10x^2 + 1, 4\sqrt{2}x^3 - 16x^2 - 4\sqrt{2}x)$ 。

显然 $x \nmid x^4 - 10x^2 + 1$, 所以

$$(x^4 - 10x^2 + 1, 4\sqrt{2}x^3 - 16x^2 - 4\sqrt{2}x) = (x^4 - 10x^2 + 1, x^2 - 2\sqrt{2}x - 1).$$

方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ 的两个解为 $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ 。不难验证 x_1 和 x_2 都不满足方程 $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, 所以 $x^4 - 10x^2 + 1$ 和 $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$ 没有相同的实数根, 所以 $(x^4 - 10x^2 + 1, x^2 - 2\sqrt{2}x - 1) = 1$, 因此 $(f(x), g(x)) = 1$, 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为 1。□

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 中, 第一行元素的代数余子式之和为 ()。

解. 将题中行列式的第一行元素全换为 1, 则原行列式的第一行元素的代数余子式之和为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16. \quad \square$$

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -10 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

则 $A^{2015} = ()$ 。

解. 先求矩阵 A 的特征多项式:

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -2 \\ -8 & \lambda & -4 \\ 10 & 0 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 1).$$

用 $\phi(\lambda)$ 去除 λ^n , 作带余除法, 得

$$\lambda^n = h(\lambda)\phi(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c. \quad (15)$$

其中 $h(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], a, b, c \in \mathbb{R}$ 。

由于 0 是 A 的 2 重特征值, -1 是 A 的 1 重特征值, 因此在 (15) 中分别令 $\lambda = 0, \lambda = -1$ 有

$$\begin{cases} 0 = c, \\ (-1)^n = a - b + c. \end{cases} \quad (16)$$

在 (15) 式两端同时求导, 得

$$n\lambda^{n-1} = h'(\lambda)\phi(\lambda) + h(\lambda)\phi'(\lambda) + 2a\lambda + b. \quad (17)$$

在 (17) 中令 $\lambda = 0$, 得

$$0 = b. \quad (18)$$

由 (16) 和 (18) 得

$$\begin{cases} a = (-1)^n, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

因此,

$$\lambda^n = h(\lambda)\phi(\lambda) + (-1)^n\lambda^2. \quad (19)$$

将 λ 用 A 代入 (19) 式, 由 Hamilton-Cayley 定理得

$$A^{2015} = -A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -10 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

因此,

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -10 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

□

4. 设 A 为 3 阶方阵, $|A| = 2$, A^* 为 A 的伴随阵, 若 $M = \begin{pmatrix} A^2 + 3A^* & 2A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(M^{-1})^* = (\quad)$ 。

解. $(M^{-1})^* = |M^{-1}|(M^{-1})^{-1} = |M^{-1}|M = \frac{1}{|M|}M$ 。

因为 $|M| = -|A||2A^*| = -|A|2^3|A|^2 = -64$,

所以

$$(M^{-1})^* = -\frac{1}{64}M = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} A^2 + 3A^* & 2A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

□

5. 多项式空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 上定义内积 $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, 则 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一组标准正交基 $f_1(x) = 1, f_2(x) = (\quad)$ 。

解. 取 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一个基是 $1, x$ 。先用 Schmidt 正交化法求出与 $f_1(x)$ 正交的向量 $g_2(x)$,

$$g_2(x) = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} = x - \frac{1}{2}.$$

将 $g_2(x)$ 单位化, 得

$$f_2(x) = \frac{g_2(x)}{\sqrt{(g_2(x), g_2(x))}} = \frac{g_2(x)}{\sqrt{\int_0^1 (x-t)^2 dx}} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

因此, $f_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 。 □

6. 线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中, 基 (1):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

基 (2):

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则在基 (1) 与基 (2) 下有相同坐标的矩阵为 ()。

解. 设 A 在基 (1) 与基 (2) 下有相同的坐标 (x_1, x_2, x_3, x_4) , $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, 则

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + x_4 B_4.$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_2 + x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 & x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

由此得

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_4 = 0, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

因此, 在基 (1) 与基 (2) 下有相同坐标的矩阵为 $\begin{pmatrix} k & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $k \in \mathbb{R}$ 。 □

7. 设 A 为 3 阶半正定阵, 向量 α, β 线性无关, 若 $\alpha^T A \alpha = \beta^T A \beta = 0$, 且 $\text{tr} A = 2$, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 经正交变换 $x = Py$ 化成的标准形为 ()。

解. 由向量 α, β 线性无关, $\alpha^T A \alpha = \beta^T A \beta = 0$ 得, A 的秩为 1, 又 $\text{tr}(A) = 2$, 所以 A 的特征值为 2 (一重), 0 (二重)。因此, 标准形为 $2y_1^2$ 。 □

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $3A^8 - 9A^7 + 6A^6 + A^5 - 3A^4 + 2A^3 + 2A + E =$ ()。

解. A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

用 $f(\lambda)$ 去除 $3\lambda^8 - 9\lambda^7 + 6\lambda^6 + \lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda + 1 =: g(\lambda)$, 作带余除法, 得

$$g(\lambda) = h(\lambda)f(\lambda) + a\lambda + b. \quad (20)$$

其中, $h(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], a, b \in \mathbb{R}$.

在 (20) 式中分别令 $\lambda = 1, \lambda = 2$, 得

$$\begin{cases} 3 = a + b, \\ 5 = 2a + b. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

因此

$$g(\lambda) = h(\lambda)f(\lambda) + 2\lambda + 1. \quad (21)$$

在 (21) 式中将 λ 用 A 代入, 由 Hamilton-Cayley 定理, 得

$$g(A) = 2A + E = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

因此,

$$3A^8 - 9A^7 + 6A^6 + A^5 - 3A^4 + 2A^3 + 2A + E = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

9. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1, -2, -2$, 则 $|(\frac{1}{2}A)^*| = (\quad)$ 。

解. 因为 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4$, 所以

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2}A \right)^* \right| &= \left| \frac{1}{2}A \right| \cdot \left(\frac{1}{2}A \right)^{-1} = \left| \frac{1}{2}A \right|^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 |A|^2 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^6 \cdot 4^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

11 2014

一、填空题

1. 当 a, b 满足 () 时, 多项式 $f(x) = x^4 + 4ax - b$ 有重根。

解. 因为 $f'(x) = 4x^3 + 4a = 4(x + a^{\frac{1}{3}})(x^2 - a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}})$, 且 $a^{\frac{2}{3}} - 4a^{\frac{2}{3}} < 0$, 所以 $f'(x)$ 只有一个实数根 $x = -a^{\frac{1}{3}}$. 所以

$$\begin{aligned} \text{多项式 } f(x) \text{ 有重根} &\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = (x + a^{\frac{1}{3}}) \\ &\Rightarrow (x + a^{\frac{1}{3}}) | f(x) \Rightarrow f(-a^{\frac{1}{3}}) = 0 \\ &\Rightarrow a^{\frac{4}{3}} - 4a^{\frac{4}{3}} - b = 0 \\ &\Rightarrow 3a^{\frac{4}{3}} + b = 0. \end{aligned}$$

所以, a 和 b 应满足 $3a^{\frac{4}{3}} + b = 0$. □

2. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为 ()。

解. 先证明一般性命题: 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

其中 $a \neq b$. 当 $n \geq 3$ 时, 将行列式按第一行展开,

$$\begin{aligned} D_n &= (a+b)D_{n-1} + (-1)^{1+2}ab \cdot 1 \cdot D_{n-2}, \\ &= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. \end{aligned}$$

所以有

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}),$$

于是 $D_2 - aD_1, D_3 - aD_2, \dots, D_n - aD_{n-1}$ 是公比为 b 的等比数列. 从而,

$$D_n - aD_{n-1} = (D_2 - aD_1)b^{n-2}.$$

由于

$$\begin{aligned} D_1 &= |a+b| = a+b, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2. \end{aligned}$$

因此

$$D_2 - aD_1 = b^2.$$

又由上式得到

$$D_n - aD_{n-1} = b^n,$$

由对称性,

$$D_n - bD_{n-1} = a^n,$$

联立可解得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

记原行列式为 D , 则

$$D = 2^n \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{5}{2} \end{vmatrix},$$

对于上述命题取 $a = 1, b = \frac{3}{2}$, 即得

$$D = 2^n \frac{1 - (\frac{3}{2})^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

□

3. 设 A 为 n 阶反对称阵, α 是 n 维单位列向量, 则 $\alpha^T(A - E)\alpha = (\quad)$ 。

解. 先证 $\alpha^T A \alpha = 0$ 。因为

$$\alpha^T A \alpha = (\alpha^T A \alpha)^T = -\alpha^T A \alpha,$$

所以,

$$\alpha^T A \alpha = 0.$$

因此,

$$\alpha^T(A - E)\alpha = \alpha^T A \alpha - \alpha^T \alpha = -\alpha^T \alpha = -\sqrt{(\alpha, \alpha)} = -1.$$

□

4. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 的秩为 4, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 (\quad) 。

解. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 的秩为 4, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。(题目中“向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关”条件是多余的)

又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组。

设

$$\alpha_4 = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3,$$

其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4。 □

5. 已知向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3, \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 则方程组 $AX = \beta$ 的通解为 ()。

解. 由题目可知, 方程组的一个特解为

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 所以

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的一个解。

又 $\text{rank}(A) = 3$, 所以 $AX = 0$ 的通解为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$ 。

所以, $AX = \beta$ 的通解为

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

□

6. 线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中, 基 (1):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

到基 (2):

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的过渡矩阵为:

解. 取线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的自然基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 其中 E_{ij} 是 (i, j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 2 阶实方阵. 则有

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

同理,

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

设过渡矩阵为 P , 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

7. 当 a 满足什么条件时, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2$ 正定。

解. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

若 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定, 则有

$$1 > 0, 1 - a^2 > 0.$$

因此, a 需满足的条件为 $-1 < a < 1$.

□

8. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 ()。

解. A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)^2$ 。

因为

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以有

$$(A - I)(A - 4I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

因此 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 有重根。

所以 A 不可对角化, 由题意易知 A 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

9. 设 A 为 3 阶奇异阵, $A + E$ 的行向量组线性相关, $\text{rank}(A + 2E) = 2$, 则 $|A + 3E| =$ ()。

解. 因为 A 为奇异矩阵, 所以 $|A| = 0$, 所以 0 是 A 的一个特征值。

又

$$\begin{aligned} |-E - A| &= (-1)^3 |E + A| = 0, \\ |-2E - A| &= (-1)^3 |2E + A| = 0. \end{aligned}$$

所以 A 的全部特征值为 0, -1, -2, 所以 $A + 3E$ 的全部特征值为 3, 2, 1。

因此, $|A + 3E| = 6$ 。

□

注 11.1. 一般地, 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 级矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在复数域中的全部根 (它们中可能有相同的), 则

(1) 对于复数域上的任一多项式 $g(x)$, 有 $|g(A)| = g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n)$;

(2) 对于数域 \mathbb{K} 上任一多项式 $f(x)$, 有 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征多项式 $|\lambda I - f(A)|$ 在复数域中的全部根, 从而如果 λ_1 是 A 的 l_1 重特征值, 那么 $f(\lambda_1)$ 是 $f(A)$ 的至少 l_1 重特征值。

证明. 由已知条件得, n 级矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在复数域中的因式分解为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \quad (22)$$

(1) 设 $g(x)$ 在复数域中的因式分解为

$$g(x) = b(x - \mu_1)(x - \mu_2)\cdots(x - \mu_n), \quad (23)$$

x 用 A 代入, 由 (23) 式得,

$$g(A) = b(A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I) \cdots (A - \mu_n I). \quad (24)$$

x 用 λ_i 代入, 由 (23) 式得

$$g(\lambda_i) = b(\lambda_i - \mu_1)(\lambda_i - \mu_2) \cdots (\lambda_i - \mu_n) = b \prod_{j=1}^m (\lambda_i - \mu_j). \quad (25)$$

由 (22) 式得,

$$|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda). \quad (26)$$

λ 用 μ_j 代入, 把 (26) 式左端展开成 λ 的多项式后, 由 (26) 式可得

$$|A - \mu_j I| = (\lambda_1 - \mu_j)(\lambda_2 - \mu_j) \cdots (\lambda_n - \mu_j) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_j). \quad (27)$$

由 (24)、(27) 和 (25) 得

$$|g(A)| = b^n |A - \mu_1 I| |A - \mu_2 I| \cdots |A - \mu_m I| = b^n \prod_{j=1}^m |A - \mu_j I| \quad (28)$$

$$= b^n \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_j) = b^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\lambda_i - \mu_j) = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i). \quad (29)$$

(2) 任给数域 \mathbb{K} 上的一个多项式 $f(x)$ 。令

$$g(x) = \lambda - f(x), \quad (30)$$

其中 λ 可以取任意一个复数。当 λ 任意取定一个复数后, 对 $g(x)$ 用第 (1) 小题的结论得

$$|g(A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i). \quad (31)$$

x 用 A 代入, 由 (30), 得

$$g(A) = \lambda I - f(A). \quad (32)$$

x 用 λ_i 代入, 由 (30), 得

$$g(\lambda_i) = \lambda - f(\lambda_i). \quad (33)$$

由 (31)、(32)、(33) 式, 得

$$|\lambda I - f(A)| = \prod_{i=1}^n [\lambda - f(\lambda_i)]. \quad (34)$$

(34) 式对 λ 取任意一个复数都成立。于是 (34) 左端可以看成是变量 λ 的多项式函数, (34) 式就表明 λ 的多项式函数 $|\lambda I - f(A)|$ 在 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 处的函数值都为 0。从而 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的特征多项式 $|\lambda I - f(A)|$ 在复数域中的全部根。□

10. 在向量空间 \mathbb{R}^2 中规定内积 (不一定是标准内积) 后得到欧式空间 V , 且 V 的基 $\alpha_1 = (2, 1), \alpha_2 = (3, 2)$ 的度量矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$, 则基 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ 的度量矩阵为 ()。

解. 设 V 的内积为 (\cdot, \cdot) , 由于 α_1, α_2 的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 17 \end{pmatrix},$$

所以,

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_1)_1 &= 6, \\ (\alpha_1, \alpha_2)_1 &= 10, \\ (\alpha_2, \alpha_1)_1 &= 10, \\ (\alpha_2, \alpha_2)_1 &= 17. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} e_1 &= 2\alpha_1 - \alpha_2, \\ e_2 &= -3\alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (e_1, e_1)_1 &= (2\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)_1 = 1, \\ (e_1, e_2)_1 &= (2\alpha_1 - \alpha_2, -3\alpha_1 + \alpha_2)_1 = 0, \\ (e_2, e_1)_1 &= (-3\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)_1 = 0, \\ (e_2, e_2)_1 &= (-3\alpha_1 + \alpha_2, -3\alpha_1 + \alpha_2)_1 = 2. \end{aligned}$$

所以, e_1, e_2 的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

二、 设 V 为 \mathbb{R} 上的三维线性空间, \mathcal{A} 为 V 的一个线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基,

$$\mathcal{A}(\alpha_1) = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

- (1) 求 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。
- (2) 求 \mathcal{A} 的特征值, 特征向量。
- (3) 求 V 的一组基, 使 \mathcal{A} 在该基下的矩阵为对角阵。

解. (1) 因为

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

所以, σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) 先求 A 的特征值和特征向量。因为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

所以, A 的特征值为 1 (2 重), 4 (1 重)。

解线性方程组 $(A - I)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解线性方程组 $(A - 4I)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此, A 的属于 1 的特征向量为:

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, l \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, k, l \in \mathbb{R}, k, l \neq 0.$$

A 的属于 4 的特征向量为:

$$m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

故 σ 的特征值为 1(2 重), 4(1 重)。

σ 的属于 1 的特征向量为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, l \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, k, l \in \mathbb{R}, k, l \neq 0.$$

σ 的属于 4 的特征向量为:

$$m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

(3) 由 (2) 知, η_1, η_2, η_3 是 V 的一组基, 且

$$\sigma(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

故

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 V 的满足条件的一组基。

□

三、 设 A 为 n 阶方阵 ($n > 1$), 求证:

(1) 若 $r(A) = 1$, 则存在 n 行 1 列矩阵 B 和 1 行 n 列矩阵 C 使 $A = BC$ 。

(2) 若 $r(A) = 1$, 且 $\text{tr} A = 1$ 则 $A^n = A$ 。

证明. 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

其中, α_i 是 \mathbb{F}^n 中的列向量, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

因为 $r(A) = 1$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 发的极大线性无关组中只有一个列向量, 不妨设为 α_1 , 则 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 都是 α_1 的线性组合。

故 $\alpha_2 = k_2\alpha_1, \alpha_3 = k_3\alpha_1, \dots, \alpha_n = k_n\alpha_1, (k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{F})$ 。因此

$$A = (\alpha_1, k_2\alpha_1, \dots, k_n\alpha_1) = \alpha_1(1, k_2, \dots, k_n).$$

取 $\beta = \alpha_1, C = (1, k_2, \dots, k_n)$ 即可。

(2) 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_{k1} \in \mathbb{F}, k = 1, 2, \dots, n.$$

则

$$\text{tr}(A) = \alpha_{11} + k_2\alpha_{21} + \dots + k_n\alpha_{n1} = (1, k_2, \dots, k_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} = CB.$$

所以 $CB = 1$, 故 $A^n = (BC)^n = B(CB)^{n-1}C = BC = A$ 。

□

四、 设 $V = \{A | \text{tr} A = 0, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ 。

(1) 求证: V 按通常的矩阵加法和数乘构成实数域上的线性空间。

(2) 求 $\dim V$, 找出 V 的一组基, 并用基的定义说明找出矩阵是 V 的基。

证明. (1) 证法一: 任取 $B, C, D \in V, k, l \in \mathbb{R}$,

由矩阵的加法知, $B + C = C + B$ (加法交换律)

由矩阵的加法知, $(B + C) + D = B + (C + D)$ (加法结合律)

由矩阵的加法知, 零矩阵是 V 的零元素

由矩阵的加法知, A 的负元素是 $-A$ 。

由矩阵的乘法知, $1A = A$, 其中 1 是 \mathbb{R} 的单位元。

由矩阵的乘法知, $(kl)A = k(lA)$ 。

由矩阵的加法和乘法知, $(k + l)A = kA + lA$ 。

由矩阵的加法和乘法知, $k(A + B) = kA + kB$ 。

因此 V 按通常的矩阵加法和数乘构成实数域上的线性空间。

证法二：易知 V 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子集。因为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in V$ ，所以 V 非空。又

$$B, C \in V \implies \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0 \implies \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = 0 \implies A+B \in V,$$

$$A \in V, k \in \mathbb{R} \implies \text{tr}(A) = 0 \implies \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A) = 0 \implies kA \in V.$$

因此 V 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间，所以 V 按通常的矩阵加法和数乘构成实数域上的线性空间。

(2) 断言：

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 V 的一个基。

证明：设

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

，则有

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & -k_1 \end{pmatrix} = 0.$$

因此 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是线性无关的。

任取 $A \in V$ ，有

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & -l_1 \end{pmatrix},$$

其中 $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$ 。因此

$$A = l_1 K_1 + l_2 K_2 + l_3 K_3.$$

所以 A 可以由 K_1, K_2, K_3 线性表出。

所以 K_1, K_2, K_3 是 V 的一个基。

因此， $\dim V = 3$ 。 □

五、设有向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 2), \alpha_2 = (3, a+4, 2a+5, a+7), \alpha_3 = (4, 6, 8, 10), \alpha_4 = (2, 3, 2a+3, 5)$ 。

当 a, b 如何取值时 $\beta = (0, 1, 3, b)$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示？

证明。记 $A = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$ 。

β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta'$ 不能由 $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$ 线性表示

\Leftrightarrow 线性方程组 $AX = \beta'$ 无解

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) < \text{rank}((A, \beta'))$ 。

对增广矩阵 (A, β') 作初等行变换，化其为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2a+5 & 8 & 2a+3 & 3 \\ 2 & a+7 & 10 & 5 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} =: A_1.$$

当 $a = \frac{1}{2}$ 时,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}.$$

故

$$\text{rank}(A) = 2, \text{rank}((A, \beta')) = 3.$$

当 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, 若 $b = 1$, 则

$$\text{rank}(A) = 3, \text{rank}((A, \beta')) = 3.$$

若 $b \neq 1$, 则

$$\text{rank}(A) = 3, \text{rank}((A, \beta')) = 4.$$

因此, 当且仅当 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{2}$ 且 $b \neq 1$ 时, $\text{rank}(A) < \text{rank}((A, \beta'))$, 即 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示。□

六、 设 V 为 \mathbb{R} 上的 n 维线性空间, V_1, V_2, V_3 是 V 的子空间。

(1) 判断命题 “若 $V_1 \cap V_2 = \{0\}, V_2 \cap V_3 = \{0\}, V_3 \cap V_1 = \{0\}$, 则 $V_1 + V_2 + V_3$ 为直和” 是否正确, 若正确给出证明, 若不正确举出反例。

(2) 判断命题 “若 $V_1 \cap V_2 = \{0\}, V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}$, 则 $V_1 + V_2 + V_3$ 为直和” 是否正确, 若正确给出证明, 若不正确举出反例。

证明. (1) 错误。反例: $V_1 = \{e_1\}, V_2 = \{e_2\}, V_3 = \{e_1 + e_2\}$, 其中 e_1, e_2 是 \mathbb{R}^n 的两个线性无关的单位向量。

(2) 正确。设 Ω_1 是生成 V_1 的向量的集合, Ω_2 是生成 V_2 的向量的集合, Ω_3 是生成 V_3 的向量的集合。因为 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 所以 $V_1 + V_2$ 是直和, 所以 $\Omega_1 + \Omega_2$ 是生成 $V_1 + V_2$ 的向量的集合。因为 $V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}$, 所以 $V_3 + (V_1 + V_2)$ 是直和, 从而 $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cup \Omega_3$ 是线性无关的, 所以 $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ 是线性无关的, 于是 $V_1 + V_2 + V_3$ 是直和。□

注 11.2. 错解: 因为

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}, V_1 \cap V_3 = \{0\}.$$

所以

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}.$$

同理, 有

$$V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{0\},$$

$$V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}.$$

所以 $V_1 + V_2 + V_3$ 为直和。

错因: $V_1 \cap (V_2 + V_3) \supseteq (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$ 。

七、 设 n 阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足 $1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 2$, 求证: 对任意零实向量 X 总有

$$X^T X < X^T A X < 2X^T X.$$

证明. 因为 A 是 n 阶实对称矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 所以存在正交矩阵 U , 使得

$$UAU^T = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} =: \Lambda_n.$$

任取非零实向量 X , 令 $Y = UX$, 则

$$X^TAX = X^TU^T\Lambda_nUX = Y^T\Lambda_nY = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2.$$

因为 $1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 2$, 所以

$$\begin{aligned} \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2 &\geq \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) > y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = Y^TY = X^TX \\ \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2 &\leq \lambda_n(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) < 2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = 2Y^TY = 2X^TX. \end{aligned}$$

即 $X^TX < X^TAX < 2X^TX$. 由 X 的任意性知, 命题成立. \square

八、 求证: 在 n 维欧式空间中, 两两夹角成钝角的元素不多于 $n+1$ 个.

证明. (证明摘抄自 [4])

对维数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 任意向量都是单位向量 ϵ 的常数倍, 考虑任意 3 个向量 $\alpha_i = c_i\epsilon, (i=1, 2, 3)$. 若 c_i 中有一个为 0 (例如 $c_1=0$), 则至多可能 $c_2c_3 < 0$, 从而 $(\alpha_2, \alpha_3) = c_2c_3(\epsilon, \epsilon) = c_2c_3 < 0$, 因此至多可能有一对向量夹角是钝角. 若 c_1, c_2, c_3 全不为 0, 则 c_1, c_2, c_3 中至多有二对反号. 因为 $(\alpha_i, \alpha_j) = c_ic_j(\epsilon, \epsilon) = c_ic_j (i \neq j; i, j=1, 2, 3)$, 因此至多有二对向量夹角是钝角. 由此可知不存在 3 个或 3 个以上的向量, 它们两两夹角都是钝角. 这表明 $n=1$ 时命题成立.

设对于 $n-1$ 维欧氏空间, 命题成立. 考虑 n 维情形用反证法. 假设存在 $n+2$ 个向量 $\gamma_k \in \mathbb{R}^n (k=1, 2, \dots, n+2)$, 其中任意两个夹角都是钝角. 令 V_1 是 γ_1 张成的 (1 维) 线性子空间, 那么 $\mathbb{R}^n = V_1 + V_1^\perp$, 并且 $\dim V_1^\perp = n-1$. 因为

$$\gamma_k = f_k\gamma_1 + \eta_k \quad (k=2, 3, \dots, n+2)$$

其中 $f_k \in \mathbb{R}, \eta_k \in V_1^\perp$ (因而 $(\eta_k, \gamma_1) = 0$), 并且对于 $k=2, 3, \dots, n+2$, γ_k 与 γ_1 的夹角都是钝角, 所以

$$(\gamma_k, \gamma_1) = f_k(\gamma_1, \gamma_1) + (\eta_k, \gamma_1) = f_k(\gamma_1, \gamma_1) < 0$$

从而 $f_k < 0 (k=2, 3, \dots, n+2)$. 但由

$$(\gamma_i, \gamma_j) = (f_i\gamma_1 + \eta_i, f_j\gamma_1 + \eta_j) = f_if_j(\gamma_1, \gamma_1) + (\eta_i, \eta_j)$$

可知当 $i, j=2, 3, \dots, n+2; i \neq j$ (此时 $(\gamma_i, \gamma_j) < 0$)

$$(\eta_i, \eta_j) = (\gamma_i, \gamma_j) - f_if_j(\gamma_1, \gamma_1) < 0$$

从而在 \mathbb{R}^{n-1} 中存在 $n+1 = (n-1) + 2$ 个向量 $\gamma_k (k=2, 3, \dots, n+2)$, 它们两两夹角都是钝角. 这与归纳假设矛盾. 于是归纳证明完成. \square

12 2015

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 若 \mathbb{P} 为包含 \mathbb{Q} 和 $\sqrt{3}$ 的最小数域, 则 \mathbb{P} 视为 \mathbb{Q} 上的线性空间其维数是 ()。

解. 2。过程可参考 2005 年填空题第一题。

□

2. 若 $f(x)$ 为数域 \mathbb{P} 上的不可约多项式, 则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的关系是 ()。

解. 互素。过程可参考 2006 年填空题第二题。

□

3. 若 A 为奇数阶反对称阵, 则 $|A| = ()$ 。

解. 0。过程可参考 2006 年填空题第三题。

□

4. 设 A 为方阵, 且 $A^3 = 0$, 则 $(E - A)^{-1} = ()$ 。

解. $E + A + A^2$ 。过程可参考 2006 年填空题第四题。

□

5. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}^5$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_1$ 的线性相关性是 ()。

解. 线性相关。过程可参考 2006 年填空题第五题。

□

6. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq ()$ 。

解. 由 Sylvester 不等式知

$$r(A) + r(B) \leq n + r(AB) = n.$$

□

7. 设 \mathcal{A} 为 n 维线性空间 V 的线性变换, $\text{Ker } \mathcal{A} = 0$, 则 \mathcal{A} 为 () 线性变换

解. 可逆。过程可参考 2006 年填空题第七题。

□

8. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 A 可逆, 则 AB 与 BA 的关系是 ()。

解. 相似, 过程可参考 2006 年填空题第八题。

□

9. 若 A, B 为同阶正交阵, 且 $|AB| = -1$, 则 $|A + B| = ()$ 。

解. 0。过程可参考 2006 年填空题第九题。

□

10. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, $r(A) = n$, 则 n 元二次型 $X^T(A^T A)X$ 正定性为 ()。

解. 正定。

□

二、(15 分) 设 V 为 \mathbb{R} 上的三维线性空间, \mathcal{A} 为 V 的一个线性变换, 且 \mathcal{A} 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 V 的另一个基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 使 \mathcal{A} 在此基下的矩阵 B 为对角阵。

(2) 求 A^k 。

解. 重复。

□

三、(15 分) 对齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

(1) 求其一个基础解系。

(2) 求其向量形式的通解。

证明. (1) 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

对矩阵 A 作初等行变换得

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得原线性方程组的一个基础解系

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)', \eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)', \eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)'.$$

(2) 通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

□

四、(15 分) 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为 n 维线性空间 V 上的线性变换,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}, \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}.$$

求证: $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$ 。

证明. 重复。 □

五、(15 分) 设 \mathcal{A} 为数域 \mathbb{P} 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, $f_1(x), f_2(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中两个互素的多项式, $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 求证:

$$\text{Ker } f(\mathcal{A}) = \text{Ker } f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker } f_2(\mathcal{A}).$$

证明. 重复。 □

六、(15 分) 设 V 为数域 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, \mathcal{A} 为 V 的线性变换

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}.$$

求证:

(1) $V = \mathcal{A}(V) \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

(2) 存在 V 的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 在此基下 \mathcal{A} 的矩阵为 $A = \text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$ (对角线为 $1, \dots, 1, 0, \dots, 0$ 的对角阵)。

证明. (1) 任取 $\alpha \in V$, 则 $\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}V$ 。由于

$$\mathcal{A}(\alpha - \mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}\alpha - \mathcal{A}^2\alpha = \mathcal{A}\alpha - \mathcal{A}\alpha = 0,$$

因此 $\alpha - \mathcal{A}\alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}$ 。由于 $\alpha = \mathcal{A}\alpha + (\alpha - \mathcal{A}\alpha)$, 因此

$$V = \mathcal{A}V + \text{Ker } \mathcal{A}.$$

任取 $\beta \in \mathcal{A}V \cap \text{Ker } \mathcal{A}$, 由于 $\beta \in \mathcal{A}V$, 因此存在 $\gamma \in V$, 使得 $\beta = \mathcal{A}\gamma$ 。由于 $\beta \in \text{Ker } \mathcal{A}$, 因此 $\mathcal{A}\beta = 0$ 。从而

$$0 = \mathcal{A}\beta = \mathcal{A}(\mathcal{A}\gamma) = \mathcal{A}^2\gamma = \mathcal{A}\gamma = \beta.$$

于是

$$\mathcal{A}V \cap \text{Ker } \sigma = 0.$$

所以 $V = \mathcal{A}V \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

(2) 在 $\mathcal{A}V$ 和 $\text{Ker } \mathcal{A}$ 中分别取一个基, 它们合起来是 V 的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, \mathcal{A} 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r = \text{rank}(A)$ 。 □

七、(15 分) 设 A 为 n 阶方阵, λ_0 为 A 的特征值。此时我们称 $n - r(\lambda_0 E - A)$ 为 λ_0 的几何重数, λ_0 作为 A 的特征多项式 $|\lambda E - A|$ 之根的重数称为 λ_0 的代数重数。求证: λ_0 的几何重数不超过其代数重数。

证明. 重复。

□

八、(15 分) 设 A, B 为 n 阶实对称阵, 且 A 正定, 求证: 存在一个可逆矩阵 P 使得 $P^T A P$ 和 $P^T B P$ 同时为对角阵.

证明. 重复。

□

13 2016

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $(x-1)^2 | Ax^4 + Bx^2 + 1$, 则 $A+B = (\quad)$ 。

解. 记 $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + 1$, 则 1 是 $f(x)$ 的二重实根, 因此,

$$f(1) = 0.$$

故

$$A+B+1=0$$

因此 $A+B=-1$ 。 □

2. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 = (\quad)$ 。

解.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \end{vmatrix} \\ &= 6(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 6(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & 0 & x+2 & (x+2)(x-1) \\ 0 & 0 & -(x-3) & -(x-3)(x+4) \end{vmatrix} \\ &= -6(x+2)(x-1)(x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & 0 & 1 & (x-1) \\ 0 & 0 & 1 & (x+4) \end{vmatrix} \\ &= -30(x+2)(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 的三个根为 $-2, 1, 3$ 。因此, $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ 。 □

3. 若方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_5 = a_4, \\ x_5 - x_1 = a_5. \end{cases}$$

有解, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (\quad)$ 。

解. 方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

增广阵为

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}.$$

因为 $\text{rank}(A) = 5$, 所以方程组只有零解, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$. □

4. 若 3 阶可逆阵 A 交换 1, 3 行得 B , 则 $AB - I = (\quad)$.

解. ??? □

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-5)^5(x-6)^6 + x + 1$, 则 $f(A) = (\quad)$.

解. 矩阵 A 的特征值分别为 1, 4, 6, 由 Hamilton-Cayley 定理得

$$(A - I)(A - 2I)^2(A - 3I)^3(A - 4I)^4(A - 5I)^5(A - 6I)^6 = 0.$$

所以

$$f(A) = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

□

二、(15 分) 设

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}.$$

(1) 当 $y = z$ 时, 计算 D_n .

(2) 当 $y \neq z$ 时, 计算 D_n .

证明. (1) 证法一: 当 $x = z$ 时,

$$D_n = \begin{vmatrix} z & z & z & \cdots & z & z \\ z & z & z & \cdots & z & z \\ z & z & z & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z & z \\ z & z & z & \cdots & z & z \end{vmatrix} = 0.$$

当 $x \neq z$ 时,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & z & z & \cdots & z & z \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & z & z & \cdots & z \\ 0 & z & x & z & \cdots & z \\ 0 & z & z & x & \cdots & z \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & z & z & z & \cdots & x \\ 0 & z & z & z & \cdots & z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & x-z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 \\ -z & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & x-z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 \\ -z & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + n\left(\frac{z}{x-z}\right) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left[1 + n\left(\frac{z}{x-z}\right)\right] (x-z)^n = [x + (n-1)z] (x-z)^{n-1}. \end{aligned}$$

$x = z$ 时, 上式仍然成立。因此, $D_n = [x + (n-1)z](x-z)^{n-1}$ 。

证法二:

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} x & z & z & \cdots & z & z \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+(n-1)z & x+(n-1)z & x+(n-1)z & \cdots & x+(n-1)z & x+(n-1)z \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= [x+(n-1)z] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= [x+(n-1)z] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix} \\
&= [x+(n-1)z](x-z)^{n-1}.
\end{aligned}$$

(2)

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \tag{35}$$

$$= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{36}$$

由对称性,

$$D_n = |A'| = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{37}$$

由 (35) 和 (37) 得,

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z} \quad (n \geq 2).$$

容易验证上式在 $n=1$ 时也成立。因此,

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}.$$

□

三、(15 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为一组 n 维向量, 求证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件为: 任意 n 维向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示。

证明. 必要性. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关. 在 \mathbb{K}^n 中任取一个向量 β . 由于 \mathbb{K}^n 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 必线性相关. 从而 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 充分性. 设 \mathbb{K}^n 中任一向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 因此

$$\text{rank}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} < \text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关, 因此 $\text{rank}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} = n$. 从而 $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = n$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关. □

四、(15 分) 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 且 $|A| \neq 0, AC = CA$. 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证明.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

□

五、(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求证:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

证明. 因为

$$A = 2I + J,$$

$$\text{其中 } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= (2I + J)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (2I)^{n-r} J^r = \binom{n}{0} (2I)^n J^0 + \binom{n}{1} (2I)^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} (2I)^{n-2} J^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

六、(15 分) 设 A 为正交阵。

(1) 求证: 对任意的 n 维向量 X , 有 $\|AX\| = \|X\|$ 。

(2) 若 λ 为 A 的一个特征值, 求证: $|\lambda| = 1$ 。

证明. (1) 对任意的 n 维向量 X ,

$$\|AX\| = \sqrt{(AX, AX)} = \sqrt{X'A'AX} = \sqrt{X'X} = \sqrt{(X, X)} = \|X\|$$

(2) 取 A 对应于特征值 λ 的特征向量 X , 由 (1) 得

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| = \|X\|.$$

因为 $X \neq 0$, 所以 $|\lambda| = 1$ 。

□

七、(15 分) 设 V 为 \mathbb{R} 上的 3 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是空间 V 的一组基, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 。

(1) 求证: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是空间 V 的基。

(2) 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵。

(3) 求 $\gamma = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

证明. (1) 只需证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性无关的。

设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$, 则

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = (k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是空间 V 的一组基, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性无关的。所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是空间 V 的基。

(2) 因为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

所以基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

所以 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(4, -3, -1)'$ 。 \square

八、(15 分) 用正交线性替换化二次型为标准型, 并判断

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1$$

为何种几何曲面? 其中 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 。

证明. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9).$$

所以 A 的全部特征值为 0, 4, 9。

解线性方程组 $(0I - A)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_1 = (-1, 1, 2)'.$$

解线性方程组 $(4I - A)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_2 = (1, 1, 0)'.$$

解线性方程组 $(9I - A)X = 0$, 得一个基础解系:

$$\xi_3 = (7, -1, 1)'.$$

将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 分别单位化得:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)'; \\ \eta_2 &= \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)'; \\ \eta_3 &= \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \left(\frac{7\sqrt{51}}{51}, \frac{-\sqrt{51}}{51}, \frac{\sqrt{51}}{51} \right)'. \end{aligned}$$

令

$$T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{51}}{51} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{51}}{51} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{51}}{51} \end{pmatrix},$$

则 T 是正交阵, 且 $T^{-1}AT = \text{diag}\{0, 4, 9\}$ 。

令

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^{*2} + 9x_3^{*2}.$$

下面判断曲面类型。作直角坐标变换 (38), 则原二次曲面 $5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3 = 1$ 在新的直角坐标系中的方程为:

$$4x_2^{*2} + 9x_3^{*2} = 1.$$

由此看出, 这是椭圆柱面。 □

九、(15 分) 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式, $f(0)$ 与 $f(1)$ 均为奇数, 求证: $f(x)$ 没有整数根。

证明. 假如 $f(x)$ 有一个整数根 b , 则 $x - b$ 是本原多项式, 且 $x - b$ 是 $f(x)$ 的一个因式。又由于 $f(x)$ 也是本原多项式, 因此存在整系数多项式 $h(x)$, 使得

$$f(x) = (x - b)h(x).$$

x 分别用 0 和 1 代入, 从上式得

$$f(0) = (-b)h(0), (1) = (1 - b)h(1).$$

由于 $-b$ 和 $-b + 1$ 必有一个是偶数, 因此 $f(0)$ 和 $f(1)$ 必有一个是偶数。这与已知条件矛盾, 所以 $f(x)$ 没有整数根。 □

十、(10 分) 设 V 为 \mathbb{R} 上的 n 维线性空间, \mathcal{A} 为 V 上的一个线性变换, $\text{Im } (\mathcal{A})$ 与 $\text{Ker } \mathcal{A}$ 分别为线性变换 \mathcal{A} 的值域和核空间, 求证:

$$\text{Im } \mathcal{A} \oplus \text{Ker } \mathcal{A} = V$$

的充分必要条件为:

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{A}^2.$$

证明. 必要性。易知 $\text{Ker } \mathcal{A} \subset \text{Ker } \mathcal{A}^2$, 下证 $\text{Ker } \mathcal{A}^2 \subset \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

任取向量 $\alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}^2$, 有

$$\mathcal{A}^2 \alpha = 0,$$

因此

$$\mathcal{A} \alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}.$$

又

$$\mathcal{A} \alpha \in \text{Im } \mathcal{A},$$

且 $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ 是直和, 所以

$$\mathcal{A} \alpha = 0,$$

即

$$\alpha \in \text{Ker } \mathcal{A}.$$

故 $\text{Ker } \mathcal{A}^2 \subset \text{Ker } \mathcal{A}$ 。

充分性。只需证 $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ 是直和。

任取一个向量 $\alpha \in \text{Im } \mathcal{A} \cap \text{Ker } \mathcal{A}$ ，则 $\mathcal{A}\alpha = 0$ ，且存在一个向量 $\beta \in V$ ，使得 $\alpha = \mathcal{A}\beta$ 。因此 $\mathcal{A}^2\beta = 0$ ，即 $\beta \in \text{Ker } \mathcal{A}^2$ 。因为 $\text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{A}^2$ ，所以 $\beta \in \text{Ker } \mathcal{A}$ ，即 $\mathcal{A}\beta = 0$ 。因此 $\alpha = 0$ 。故 $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ 是直和。

□

14 2017

一、填空题

1.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (\quad).$$

解. 记原行列式为 D , 按第一行展开:

$$D = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = x(1 - 4x) + x(4x - 3) = -2x.$$

□

2. 设实系数多项式 $f(x), g(x)$ 的最大公因式为 $x + 1$, 最小公倍式为 $(x + 1)^2(x + 2)(x + 3)$. 则 $f(x)g(x) = (\quad)$.

证明. 先证明一个引理。

引理 14.1. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, 证明:

$$f(x)g(x) = [f(x), g(x)] \cdot (f(x), g(x)).$$

证明. 设 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则:

$$\begin{aligned} f(x) &= h_1(x)d(x), \\ g(x) &= h_2(x)d(x), \end{aligned}$$

其中, $\deg h_1(x) \geq 0, \deg h_2(x) \geq 0, (h_1(x), h_2(x)) = 1$. 因此,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= h_1(x)h_2(x)d^2(x), \\ [f(x), g(x)] &= h_1(x)h_2(x)d(x). \end{aligned}$$

所以, $f(x)g(x) = [f(x), g(x)] \cdot (f(x), g(x))$.

□

回到原题, $f(x)g(x) = (x + 1)^3(x + 2)(x + 3)$.

□

3. 关于互素问题, 忘记了。
4. 求逆矩阵的问题, 忘记了。
5. 复数域上特征值全为 1 的 4 阶方阵, 按相似分为 () 类。

解. 重题。

□

二、 求证 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \cos a & 1 & & & \\ & 1 & 2 \cos a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 2 \cos a & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos a \end{vmatrix} = \cos na.$$

证明. 记原行列式为 D_n , 按最后一行展开得

$$D_n = 2 \cos a D_{n-1} - D_{n-2}. \quad (39)$$

由 (39) 得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), \quad (40)$$

其中 α, β 是方程 $x^2 - 2 \cos a + 1$ 的两个根:

$$\alpha = \cos a - \sqrt{\cos^2 a - 1}, \beta = \cos a + \sqrt{\cos^2 a + 1}.$$

从而

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) = \beta^{n-2} (2 \cos^2 a - 1 - \alpha \cos a) = \beta^{n-2} (\cos 2a - \alpha \cos a). \quad (41)$$

由对称性,

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2} (D_2 - \beta D_1) = \alpha^{n-2} (2 \cos^2 a - 1 - \beta \cos a) = \alpha^{n-2} (\cos 2a - \beta \cos a). \quad (42)$$

由 (41) 和 (42) 得

$$D_n = \frac{\beta^{n-1} (\cos a - \alpha \cos a) - \alpha^{n-1} (\cos a - \beta \cos a)}{\beta - \alpha}.$$

其中 $\alpha = \cos a - \sqrt{\cos^2 a - 1}, \beta = \cos a + \sqrt{\cos^2 a + 1}$. □

三、 已知

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 互不相同, 且 $AB = BA$. 证明: B 为对角矩阵.

证明. 设 $B = (b_{ij})_n$, 由 $AB = BA$ 得

$$\begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}.$$

所以

$$(a_i - a_j) b_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

因为 $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$), 所以 $b_{ij} = 0$ ($i \neq j$). 所以 B 为对角矩阵. □

四、若方阵 A 交换 2,3 行得 B , B 交换 2,3 列得 C 。求证: A 与 C 相似且合同。

证明. 由题意知

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

所以 A 与 C 相似且合同。 \square

五、求证: 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

是正定的。

解. 二次型的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

因为 A 的 1 阶顺序主子式为 $2 > 0$, 2 阶顺序主子式为 $3 > 0$, 3 阶顺序主子式为 $4 > 0$, 所以 A 是正定矩阵, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的。 \square

六、证明: B 的列向量是方程组 $AX = 0$ 的解的充要条件是 $AB = 0$, 这里 A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵。

证明. 设 B 的列向量为

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s.$$

则

$$\begin{aligned} B \text{ 的列向量是方程组 } AX = 0 \text{ 的解} &\Leftrightarrow A\beta_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, s) \\ &\Leftrightarrow AB = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = 0 \end{aligned}$$

命题成立。 \square

七、(15 分) 设 $V = \{B \text{ 为二阶矩阵} | AB = BA\}$, 这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 V 的基并将 A^{-1} 用 V 的一组基线性表示。

解. 设 $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, 由 $AB = BA$ 得

$$\begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{cases} b_{11} = b_{22} \\ b_{21} = 0 \end{cases}$$

所以 B 是形如 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{pmatrix}$ 的矩阵. 因此 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 V 的一个基.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I - J.$$

□

八、 纯计算题, 求向量组的秩, 极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

九、 忘记了。

十、 已知 n 维线性空间中的线性变换 \mathcal{A} 的属于特征值 λ_0 有 k 个线性无关的特征向量, 求证: \mathcal{A} 的特征值 λ_0 的重数至少为 k 。

证明. 先证明一个引理。

引理 14.2. 设 λ_0 是数域 \mathbb{K} 上 n 级矩阵 A 的一个特征值, 则 λ_0 的几何重数不超过它的代数重数。

证明. 设 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 W 的维数为 r . 在 W 中取一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 把它扩充为 \mathbb{K}^n 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r}$. 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r})$$

则 P 是 \mathbb{K} 上的 n 级可逆矩阵, 并且有

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_r, A\beta_1, \dots, A\beta_{n-r}) \\ &= (\lambda_1 P^{-1}\alpha_1, \lambda_1 P^{-1}\alpha_2, \dots, \lambda_1 P^{-1}\alpha_r, P^{-1}A\beta_1, \dots, P^{-1}A\beta_{n-r}). \end{aligned}$$

由于 $I = P^{-1}P = (P^{-1}\alpha_1, P^{-1}\alpha_2, \dots, P^{-1}\alpha_r, P^{-1}\beta_1, \dots, P^{-1}\beta_{n-r})$, 因此 $\epsilon_1 = P^{-1}\alpha_1, \epsilon_2 = P^{-1}\alpha_2, \dots, \epsilon_r = P^{-1}\alpha_r$.

从而

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (\lambda_1 \epsilon_1, \lambda_1 \epsilon_2, \dots, \lambda_1 \epsilon_r, P^{-1}A\beta_1, \dots, P^{-1}A\beta_{n-r}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于相似的矩阵有相等的特征多项式, 因此

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda I_r - \lambda_1 I_r & -B \\ 0 & \lambda I_{n-r} - C \end{vmatrix} \\ &= |\lambda I_r - \lambda_1 I_r| |\lambda I_{n-r} - C| \\ &= (\lambda - \lambda_1)^r |\lambda I_{n-r} - C|. \end{aligned}$$

从而 λ_1 的代数重数大于或等于 r , 即 λ_1 的代数重数大于或等于 λ_1 的几何重数。

□

由引理立即得到: \mathcal{A} 的特征值 λ_0 的重数至少为 k 。

□

15 2019

一、填空题

1. $x^2 + x + 1$ 除 $x^{1999} + x^{2009} + x^{2019}$ 所得余式为 ().

解. 注意到

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1,$$

$$(x-1)(x^{1999} + x^{2009} + x^{2019}) = (x-1)x^{1999}(1+x^{10}+x^{20}) = x^{1999}(x^{30}-1).$$

而 x^3-1 的每个根都是 $x^{30}-1$ 的根, 所以

$$x^3-1 \mid x^{30}-1.$$

所以余式为 0. □

2. 已知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 2,$$

则

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ().$$

解. 由 Laplace 定理得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3 \times 2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 6.$$

□

3. 设

$$AP = PB, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $A^{2019} = ()$.

解. 注意到 P 是可逆矩阵, 由定义我们可以计算得出

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{aligned} A^{2019} &= (PBP^{-1})^{2019} = PB^{2019}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

4. 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中, 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 的秩为 ().

解.

□

参考文献

- [1] 丘维声. 近世代数. 北京大学出版社, 2015 (cit. on pp. 2, 9, 25, 32).
- [2] 丘维声. 高等代数: 上册. 清华大学出版社, 2010.
- [3] 丘维声. 高等代数: 下册. 清华大学出版社, 2010 (cit. on p. 67).
- [4] 朱尧辰. 高等代数例选通过范例学技巧. 哈尔滨工业大学出版社, 2015 (cit. on p. 89).