哈尔滨工程大学

硕士研究生入学考试高等代数历年试题参考解答

张祥振

October 24, 2022

目录

1 2004

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 使 x^2-2 在 $\mathbb{P}[x]$ 内可约的最小数域为（ ）。

   解. 由 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的定义知，包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{2}$ 的最小数域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。(相关知识可看 [1]) □

2. 多项式 x^5-1 在多项式环 $\mathbb{Q}[x]$ 中的标准分解式为（ ）。

   解. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$。 □

3. $n(n\geq 2)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

   的值为（ ）。

   解. 记原行列式为 D_n，按第一列展开得

$$D_n = x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

□

4. 设 A_m 为 m 阶方阵，A_n 为 n 阶方阵，$|A_m|=a$，$|B_n|=b$，则 $\begin{vmatrix} 0 & A_m \\ B_n & 0 \end{vmatrix}=$（ ）。

   解. 记所求行列式为 D_{m+n}，按前 m 行展开得

$$D_{m+n} = (-1)^{(1+2+\cdots+m)+[(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)]}|A_m||B_n| = (-1)^{mn}ab.$$

□

5. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(5,2,-3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,-2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-1,-2),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,4,-1,2)$ 的一个极大无关组为（ ）。

   解. 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4')$，对 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   所以 A 的秩为 3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$。 □

6. 已知三个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的秩为 2，A^* 为 A 的伴随阵，则齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的通解为（ ）。

解. 因为 $A^*A=|A|=0$，所以

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=0, A\boldsymbol{\alpha}_2=0, A\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，所以齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$。所以通解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2, k_1,k_2\in\mathbb{R}$。 □

7. 设 A 为 n 阶方阵，$A^m=0$（m 为一个正整数），则 A 的特征多项式为（ ）。

解. 因为 $A^m=0$，所以 x^m 是 A 的零化多项式，从而 A 的极小多项式为 $x^k, k\le m, k\in\mathbb{Z}_+$。因此 A 的特征值全为 0，从而 A 的特征多项式为 x^n。 □

8. 设 3 阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，则对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为（ ）。

解. 设 A 对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $(x,y,z)'$。因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交，所以

$$\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$$

解得

$$(x,y,z)'=k(-2,2,1)', k\in\mathbb{Z}, k\neq 0.$$

所以 A 对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $(x,y,z)'=k(-2,2,1)', k\in\mathbb{Z}, k\neq 0.$ □

9. 设 A 为正交矩阵，且 $|A|=-1$，则 A 必有特征值（ ）。

解. 显然，-1。 □

二、（15 分）在 $\mathbb{R}^3$ 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 定义如下：

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1 &= (-5,0,3) \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2 &= (0,-1,6) \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1 &= (-5,-1,9) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= (-1,0,2) \\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= (0,1,1) \\ \boldsymbol{\alpha}_1 &= (3,-1,0) \end{aligned} .$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 A。

解. 因为

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}.$$

所以

$$A=\begin{pmatrix}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&0&3\\0&-1&6\\-5&-1&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&1\\3&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&0&1\\5&-1&0\end{pmatrix}.$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 A 为 $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&0&1\\5&-1&0\end{pmatrix}$。 □

三、（15 分）求正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

化二次型 $f=x^2+4xy+4xz+y^2+4yz+z^2$ 为标准型。

解. 二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5).$$

所以 A 的特征值为 -1（二重），5（一重）。

解线性方程组 $(-I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1)'.$$

解线性方程组 $(5I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)'.$$

用 Schmidt 正交化法把 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_1'&=\boldsymbol{\xi}_1;\\ \boldsymbol{\xi}_2'&=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)'.\end{aligned}$$

把 $\boldsymbol{\xi}_1',\boldsymbol{\xi}_2',\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1&=\frac{\boldsymbol{\xi}_1'}{|\boldsymbol{\xi}_1'|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)';\\ \boldsymbol{\eta}_2&=\frac{\boldsymbol{\xi}_2'}{|\boldsymbol{\xi}_2'|}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)';\\ \boldsymbol{\eta}_3&=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)'.\end{aligned}$$

令

$$P = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3).$$

则 P 是正交矩阵，且

$$P^T A P = \mathrm{diag}\{2, 2, 5\}.$$

因此，作正交线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

得

$$f = -u^2 - v^2 + 5w^2.$$

□

四、（15 分）设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件。

解. A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

$$\begin{aligned} A \text{ 有 3 个线性无关的特征向量} &\Longleftrightarrow A \text{ 可对角化} \Longleftrightarrow A \text{ 的最小多项式没有重因式} \\ &\Longleftrightarrow A \text{ 的最小多项式为 } \lambda - 1 \text{ 或 } \lambda + 1 \text{ 或 } (\lambda - 1)(\lambda + 1)\text{。} \end{aligned}$$

因为 $A \neq I$，$A \neq -I$，所以应该有

$$(A - I)(A + I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ x & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & y \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x+y & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $x + y$ 应满足的条件为 $x + y = 0$。 □

五、（15 分）设 A 为 n 阶方阵，且 $A^m = 0$（m 为一个大于 1 的自然数），现令 $e^A \equiv E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1}$，求证矩阵 e^A 可逆。

证明. 由 $A^m = 0$ 得

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^{-A} &= \left(E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1}\right)\left(E_n - A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}A^{m-1}\right) \\ &= E_n. \end{aligned}$$

所以矩阵 e^A 可逆。 □

六、（15 分）设 A 为 n 维数线性空间 V 上的线性变换，且 $A^2 = A$。求证 A 在 V 的某组基下的矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，这里 $r = \dim A(V)$。

证明. 幂等矩阵必可对角化，重题。 □

七、（15 分）设 A，B 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换，λ_0 是 AB 的特征值且 $\boldsymbol{\beta}$ 为相应的特征向量:

(1) 若 $\lambda_0 \neq 0$，求证 λ_0 也是 BA 的特征值，并求相应的一个特征向量;

(2) 若 $\lambda_0 = 0$ 时，λ_0 是否也是 BA 的特征值，说明理由。

证明. (1) 因为 λ_0 是 AB 的特征值且 $\boldsymbol{\beta}$ 为相应的特征向量，所以

$$AB\boldsymbol{\beta} = \lambda_0\boldsymbol{\beta}.$$

因此

$$BAB\boldsymbol{\beta} = \lambda_0 B\boldsymbol{\beta}.$$

于是 λ_0 也是 BA 的特征值，BA 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量为 $B\boldsymbol{\beta}$。

(2) 是。因为 $|BA| = |B||A| = |AB| = 0$。 □

八、（15 分）设 V 为复数域上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 为 V 上的线性变换，且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$，求证:

(1) 若 λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值，则 $\mathscr{A}$ 的对应的特征子空间 $V_\lambda = \{v \in V | \mathscr{A}v = \lambda v\}$ 为 $\mathscr{B}$ 的不变子空间;

(2) $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量。

证明. (1) 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V_\lambda$，有

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}.$$

又

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}.$$

所以

$$\mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}.$$

因此 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} \in V_\lambda$。从而 V_λ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间。

(2) 因为 V_λ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间，所以 $\mathscr{B}|V_\lambda$ 是 V_λ 上的线性变换。由于 V_λ 是复数域上的线性空间，因此 $\mathscr{B}|V_\lambda$ 有特征值。取它的一个特征值 μ，则在 V_λ 中存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $(\mathscr{B}|V_\lambda)\boldsymbol{\xi} = \mu\boldsymbol{\xi}$，即 $\mathscr{B}\boldsymbol{\xi} = \mu\boldsymbol{\xi}$。又有 $\mathscr{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$，因此 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的公共的特征向量。 □

九、（15 分）设 V 为 n 维欧式空间，V 的保持内积的线性变换称为正交变换，对 V 的任何单位向量 $\boldsymbol{\eta}$，线性变换 $A_{\boldsymbol{\eta}} : A_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\alpha} \in V)$ 称为 V 的镜面反射，求证:

(1) $A_{\boldsymbol{\eta}}$ 为正交变换;

(2) $A_{\boldsymbol{\eta}}$ 的行列式为 -1;

(3) 若 $\mathscr{A}$ 为 V 的正交变换，1 为其特征值，且相应的特征子空间 V_λ 的维数为 $n-1$，则 $\mathscr{A}$ 为 V 的镜面反射。

证明. (1) 任取 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，有

$$\begin{aligned}(A_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\alpha}), A_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\beta})) &= (\boldsymbol{\alpha} - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta} - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\eta}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}) - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta}) + 4(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

(2) 因为

$$A_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}.$$

所以 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$ 是 $A_{\boldsymbol{\eta}}$ 的一个不变子空间，从而存在 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$ 的正交补空间 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}$ 使得

$$V = \langle \boldsymbol{\eta} \rangle \oplus \langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}.$$

取 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$，得到 V 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$。此时

$$A_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) = -\boldsymbol{\eta}, A_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}_i) = \boldsymbol{\eta}_i, i = 2, 3, \ldots, n.$$

于是 $A_{\boldsymbol{\eta}}$ 在 V 的标准正交基 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵为

$$A = \operatorname{diag}\{-1, 1, \ldots, 1\}.$$

由于 $|A| = -1$，所以 $A_{\boldsymbol{\eta}}$ 的行列式为 -1。

(3) $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^{\perp}$。由于 $\dim V_\lambda = n-1$，因此 $\dim V_\lambda^{\perp} = 1$，从而 $V_\lambda^{\perp} = \langle \boldsymbol{\eta} \rangle$，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是单位向量。由于 $\mathscr{A}$ 的特征子空间 V_λ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，因此 $V_\lambda^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间。从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征向量。由于 $\mathscr{A}$ 的属于 1 的特征子空间 V_λ 的维数等于 $n-1$，且正交变换 $\mathscr{A}$ 的特征值等于 1 或 -1，因此 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}) = -\boldsymbol{\eta}$。

从而

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}) = -\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}.$$

在 V_λ 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}_i)\boldsymbol{\eta}, i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}$ 是 V 的一个基，因此

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - 2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta}, \text{对任意的 } \boldsymbol{\alpha} \in V.$$

从而 $\mathscr{A}$ 是 V 的镜面反射。 □

注 1.1. 镜面反射的另一个定义：设 V 是 n 维欧几里得空间，$\boldsymbol{\eta}$ 是 V 中一个单位向量，$\mathscr{P}$ 是 V 在 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$ 上的正交投影，令

$$\mathscr{A} = \mathscr{I} - 2\mathscr{P},$$

则 $\mathscr{A}$ 称为关于超平面 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}$ 的镜面反射。

十、(10 分) 若 A 为 n 阶方阵，求证 A^n 的秩等于 A^{n+1} 的秩。

证明. 因为

$$n \geq r(A^0) \geq r(A) \geq r(A^2) \geq \cdots \geq r(A^n) \geq r(A^{n+1}) \geq 0.$$

所以由抽屉原理知，存在正整数 $m \leq n$，使得

$$r(A^m) = r(A^{m+1}).$$

因此

$$r(A^m) = r(A^{m+1}) = \cdots = r(A^n) = r(A^{n+1}).$$

□

2 2005

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $\mathbb{P}$ 为同时包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域，则 $\mathbb{P}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间的维数是（ ）。

解.

定理 2.1. 设 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ 是域扩张，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{K}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的代数元。如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的极小多项式 $m(x)$ 的次数为 n，那么

$$[\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}):\mathbb{F}]=n,$$

并且 $1,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha})/\mathbb{F}$ 的一个基。

解. 假如 $1,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^{n-1}$ 在 $\mathbb{F}$ 上线性相关，则有 $\mathbb{F}$ 中不全为 0 的元素 $b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}$，使得

$$b_0+b_1\boldsymbol{\alpha}+b_2\boldsymbol{\alpha}^2+\cdots+b_{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{n-1}=0.$$

令 $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$，则 $g(\boldsymbol{\alpha})=0$，且 $g(x)\neq 0$。这与 $m(x)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的极小多项式矛盾。因此 $1,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^{n-1}$ 在 $\mathbb{F}$ 上线性无关。
又由于

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbb{F}[\boldsymbol{\alpha}]=\{c_0+c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\alpha}^2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{n-1}|c_i\in\mathbb{F},i=0,1,2,\ldots,n-1\},$$

因此 $1,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha})$ 的一个基。从而

$$[\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}):\mathbb{F}]=n.$$

□

因为 $\mathbb{P}$ 为同时包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域，所以 $\mathbb{P}=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$。在定理中令 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$，$\mathbb{F}=\mathbb{Q}$，$\boldsymbol{\alpha}=\sqrt[3]{2}$，则由 $\sqrt[3]{2}$在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式为x^3-2 得

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3.$$

所以 $\mathbb{P}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间的维数是 3。（相关知识可看 [1]） □

2. 多项式 $x^7+2x^6+6x^2+2$ 在复数域内所有根之间的关系是（ ）。

解. 设

$$f(x)=x^7+2x^6+6x^2+2,$$

则

$$f'(x)=7x^6+12x^5+12x.$$

显然 $f'(x)\nmid f(x)$，所以 $(f'(x),f(x))=1$，因此 $f(x)$ 无重根，故多项式 $x^7+2x^6+6x^2+2$ 在复数域内的所有根互不相等。 □

3. 行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

的值为（　）。

解. 若 $a=0$，易得行列式值为 bcd；

若 $b=0$，易得行列式值为 acd；

若 $c=0$，易得行列式值为 abd；

若 $d=0$，易得行列式值为 abc；

若 a,b,c,d 都不为 0，则

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{将第一行的}(-1)\text{倍加到其余各行}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal[\text{将第二列的}\left(\frac{a}{b}\right)\text{倍加到第一列，将第三列的}\left(\frac{a}{c}\right)\text{倍加到第一列，将第四列的}\left(\frac{a}{d}\right)\text{倍加到第一列}]{}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd+abc+abd+acd+bcd.$$

当 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$ 或 $d=0$ 时，上式依然成立，因此行列式为 $abcd+abc+abd+acd+bcd$。 □

4. 设 n 阶方阵 A 的秩为 r，且满足 $A^2=A$，则 $|2E-A|=$（　）。

解. 因为 A 是幂等矩阵，$\operatorname{rank}(A)=r$，所以存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix} := \Lambda.$$

所以

$$|2E-A| = |2E-\Lambda| = 2^{n-r}.$$

□

5. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4 \in \mathbb{R}^4$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性相关性为（　）。

解. 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\end{vmatrix}=0.$$

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关。 □

6. 设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，则两个齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解的充分必要条件为 $r(A)=r(B)=$（ ）。

解. 显然，

$$r(A)=r(B)=r\left(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\right).$$

□

7. 设 $\mathscr{A}$ 为 3 维线性空间 V 中的线性变换，则 $\dim\mathscr{A}(V)$ 与 $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的关系是（ ）。

解. 因为 V 是有限维的线性空间，所以 $\mathscr{A}(V)$ 和 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 都是有限维的。由于

$$V/\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cong\mathscr{A}(V).$$

所以 $\mathscr{A}(V)$ 是有限维的，且

$$\dim V-\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\dim\mathscr{A}V.$$

因此，$\dim\mathscr{A}(V)+\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}=3$。 □

8. 设 A 为 n 阶方阵，则 A 与 A^T 的关系是（ ）。

解.

引理 2.1. 设 $J_n(a)$ 是对角元素为 a 的 n 级 *Jordan* 块，则 $J_n(a)\sim J_n(a)'$。

证明. 由于

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_n\\\gamma_{n-1}\\\vdots\\\gamma_2\\\gamma_1\end{pmatrix},$$

$$
(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1),
$$

因此

$$
\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}=I
$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a&1&0&\cdots&0&0\\0&a&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&1\\0&0&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1&a\\0&0&\cdots&1&a&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\\1&a&\cdots&0&0&0\\a&0&\cdots&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&\cdots&0&0&0\\1&a&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&a&0\\0&0&\cdots&0&1&a\end{pmatrix}.
$$

从而 $J_n(a)\sim J_n(a)'$。 □

引理 2.2. 任一 n 级复矩阵 A 与 A' 相似。

证明. 由于 A 是复数域上的矩阵，因此 A 有 Jordan 标准形

$$
J=\operatorname{diag}\left\{J_{r_1}\left(\lambda_1\right),J_{r_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{r_m}\left(\lambda_m\right)\right\},
$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ 可能有相同的，$r_1+r_2+\cdots+r_m=n$。据引理 1 得，$J_{r_i}\left(\lambda_i\right)\sim J_{r_i}\left(\lambda_i\right)'$，且可逆矩阵 $P_i=\{\boldsymbol{\varepsilon}_{r_i},\boldsymbol{\varepsilon}_{r_i}-1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1\}$ 使得 $P_i^{-1}J_{r_i}\left(\lambda_i\right)P_i=J_{r_i}\left(\lambda_i\right)'$。令 $P=\operatorname{diag}\{P_1,P_2,\dots,P_m\}$，则 $P^{-1}JP=J'$。从而 $J\sim J'$。由于 $A\sim J$，因此 $A'\sim J'$。从而 $A\sim A'$。 □

引理 2.3. 数域 $\mathbb{K}$ 上 n 级矩阵 A 与 B 相似当且仅当把它们看成复矩阵后相似。

证明. 设数域 $\mathbb{K}$ 上 n 级矩阵 A 的不变因子为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\dots,d_n(\lambda)$。把 A 看成复矩阵后，不变因子仍然是 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\dots,d_n(\lambda)$。因此

数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵 A 与 B 相似

$\Longleftrightarrow$ A 与 B 有相同的不变因子

$\Longleftrightarrow$ 把 A 与 B 看成复矩阵后相似。

□

由引理知，A 与 A^T 相似。 $\square$

9. 设 A 为 n 阶实反对称阵，$\boldsymbol{x}$ 是非零的 n 维列向量，则 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 为（　）。

解. 因为

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})^T = -\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}.$$

所以 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$。 $\square$

10. A 为 n 阶是正交阵，λ 为其特征值，则 $\left|\lambda^{-1}E - A\right| =$（　）。

解.

$$\begin{aligned}|\lambda^{-1}E - A| &= |\lambda^{-1}AA^T - A| = \frac{1}{\lambda^n}|AA^T - \lambda A| = \frac{1}{\lambda^n}|A||A^T - \lambda E| \\ &= \frac{(-1)^n}{\lambda^n}|\lambda E - A^T| = 0.\end{aligned}$$

$\square$

二、（15 分）在 $\mathbb{R}^3$ 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,0) \\ A\boldsymbol{\beta}_2 = (3,3,2) \\ A\boldsymbol{\beta}_3 = (3,3,1) \end{cases},$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,0) \\ \boldsymbol{\beta}_2 = (1,1,0) \\ \boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,1) \end{cases}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵 B;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量。

解. (1) 因为

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_1\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_2\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}.$$

所以

$$B = \begin{pmatrix}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_1\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_2\\ \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\3&3&2\\3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}.$$

(2) B 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - B| = (x+1)(x-1)(x-3).$$

所以 B 的特征值为 -1，1，3。

解线性方程组 $(-I - A)x = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0,-1,1)'.$$

解线性方程组 $(\frac{1}{3}I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0)'.$$

解线性方程组 $(-I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)'.$$

因此，$\mathscr{A}$ 的特征值为 -1，1，3。$\mathscr{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量为 $k(0,-1,1)',k\in\mathbb{R},k\neq 0$，$\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $l(1,0,0)',l\in\mathbb{R},l\neq 0$，$\mathscr{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量为 $m(0,1,1)',m\in\mathbb{R},m\neq 0$。 □

三、（15 分）设 $\mathscr{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 2 维线性空间 V 上的非零的幂零线性变换，求证在 V 的某个基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$。

证明. 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，先证 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的。

设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=0,k_1,k_2\in\mathbb{K}.$$

因为 $\mathscr{A}$ 是幂零线性变换，所以 $\mathscr{A}^2=0$，所以

$$k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

所以 $k_1=0$，从而 $k_2=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的。于是 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 的一个基。

因为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

所以 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 下的矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$。 □

四、（15 分）用二次型的理论求三元实函数 $f(x,y,z)=2x^2+2xy+2xz+2y^2+2yz+2z^2$ 在单位球面上的最大值和最小值，并求最大值点和最小值点。

解. 先用正交变换化二次型为标准型。

二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(x-1)^2(x-4).$$

所以矩阵 A 的特征值为 1（2 重），4（1 重）。

解线性方程组 $(E-A)X=0$，得一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,-1)',\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)'.$$

解线性方程组 $(4E-A)X=0$，得一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)'.$$

用 Schmidt 正交化法把 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 化为正交向量：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_1' &= (1,0,-1)', \\
\boldsymbol{\xi}_2' &= \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1')}{(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_1')}\boldsymbol{\xi}_1' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)'.
\end{aligned}$$

把 $\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2', \boldsymbol{\xi}_3$ 单位化得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\xi}_1'}{|\boldsymbol{\xi}_1'|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)', \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\xi}_2'}{|\boldsymbol{\xi}_2'|} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{-3\sqrt{11}}{11}, \frac{\sqrt{11}}{11}\right)', \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)'.
\end{aligned}$$

令 $T = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)$，则 T 是正交矩阵，且

$$TAT' = \mathrm{diag}\{1,1,4\}.$$

因此，作正交变换

$$\begin{cases}
x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z', \\
y = -\frac{3\sqrt{11}}{11}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z', \\
z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z'.
\end{cases}$$

后，原二次型 $f(x,y,z)$ 在新的坐标系下的表达式为

$$f(x,y,z) = {x'}^2 + {y'}^2 + 4{z'}^2.$$

而单位球面经过正交变换后仍是单位球面，因此只需求 ${x'}^2 + {y'}^2 + 4{z'}^2$ 在单位球面上的最大值。
因为

$${x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 = 1,$$

所以

$${x'}^2 + {y'}^2 + 4{z'}^2 = 1 + 3{z'}^2.$$

因此 $f(x,y,z)$ 的最大值为 4，此时 $(x',y',z') = (0,0,1)$或$(0,0,-1)$，于是 $(x,y,z)' = T(x',y',z')' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)'$ 或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)'$；最小值为 1，此时 $(x',y',z') = (x',y',0), x'^2 + y'^2 = 1$，于是 $(x,y,z)' = T(x',y',z')' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y', -\frac{3\sqrt{11}}{11}y', -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y'\right)'$, 其中 x', y' 可取满足 $x'^2 + y'^2 = 1$ 的一切实数。
综上所述，$f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大值为 4，最小值为 1，最大值点为

$$(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)' \text{或} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)',$$

最小值点为

$$(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y', -\frac{3\sqrt{11}}{11}y', -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{11}}{11}y'\right),$$

其中 x', y' 可取满足 $x'^2 + y'^2 = 1$ 的一切实数。 □

五、（15 分）设 A、B 为 n 维向量空间 V 上的线性变换，且 $AB = A + B$。

(1) 求证 $A - E$ 与 $B - E$ 都可逆；

(2) 求证 $AB = BA$。

证明. (1) 因为 $AB = A + B$，所以 $(A - E)(B - E) = E$，所以 $A - E$ 与 $B - E$ 都可逆。

(2) 因为 $(A - E)(B - E) = E$，所以 $(B - E)(A - E) = E$，所以 $BA = B + A$，所以 $AB = BA$。 □

六、（15 分）设 A 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，求证 $V = \mathscr{A}(V) \oplus \operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的充分必要条件是 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2 = \operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

证明. 必要性。显然 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \subset \operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$，下证 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2 \subset \operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$，有

$$\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

从而 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

由于 $V = \mathscr{A}(V) \oplus \operatorname{Ker}\mathscr{A}$，所以

$$\mathscr{A}(V) \cap \operatorname{Ker}\mathscr{A} = 0.$$

因为 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}V$，所以

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}V \cap \operatorname{Ker}\mathscr{A} = 0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$。于是 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2 = \operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

充分性。由于

$$V/\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cong \mathscr{A}V.$$

所以

$$\dim V = \dim \mathscr{A}V + \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}V \cap \operatorname{Ker}\mathscr{A}$，有

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = 0, \text{存在}\boldsymbol{\beta} \in V, \text{使得}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}.$$

因此

$$\mathscr{A}^2\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

因为 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2 = \operatorname{Ker}\mathscr{A}$，所以

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = 0.$$

从而 $\mathscr{A}V \cap \operatorname{Ker}\mathscr{A} = 0$，于是 $V = \mathscr{A}V \oplus \operatorname{Ker}\mathscr{A}$。 □

七、（15 分）设 A 为 n 阶实对称阵，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 为 A 的一切不同特征值；若非零 n 维实列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ 的特征向量都正交，求证 $\boldsymbol{\beta}$ 为对应特征值 λ_m 的特征向量。

证明. 因为 A 是实对称矩阵，所以 A 可以对角化。于是

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}.$$

设

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\beta}_i \in V_{\lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, m.$$

则

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

又 $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}, i, j = 1, 2, \ldots, m, i \neq j$，所以

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_m.$$

因此 $\boldsymbol{\beta}$ 为对应特征值 λ_m 的特征向量。 □

八、（15 分）设 A 为 n 阶实对称阵，且对任何非零 n 维实列向量 x 有 $x^T A x \neq 0$，求证 A 正定或负定。

证明. 反证，假设 A 既不是正定矩阵也不是负定矩阵。因为 A 为 n 阶实对称阵，所以存在可逆矩阵 P，使得

$$PAP' = \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{x} = \left(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1\text{个}}, 1, 0 \ldots, 0\right)$，$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{y} \neq 0$，且 $\boldsymbol{y}^T A \boldsymbol{y} = 0$，矛盾。 □

九、（15 分）设 V 为复数域上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换，λ 为一个复数；令 $V_\lambda = \{v \in V | (A - \lambda E)^k v = 0 (\exists k \geq 1)\}$。

(1) 求证 λ 为 A 的特征值的充分必要条件为 $V_\lambda \neq \{0\}$；

(2) 求证 V_λ 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间；

(3) 求证当 $V_\lambda \neq \{0\}$ 时，$\mathscr{A}$ 在 V_λ 上没有与 λ 不同的特征值。

证明. (1) 必要性。设 λ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 A 的属于 λ 的特征向量，则

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

因此，$V_\lambda \neq \{0\}$。

充分性。设 $V_\lambda \neq \{0\}$，则存在 $k \geq 1$，使得

$$\{v \in V | (A - \lambda E)^k v = 0 (\exists k \geq 1)\} \neq 0.$$

因此存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，使得

$$(A - \lambda E)(A - \lambda E)^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

显然 $(A - \lambda E)^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq 0$，所以 λ 为 A 的特征值。

(2) 显然 V_λ 是 $\mathscr{A}$ 的子空间，下证它是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间。为此，先证对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$，$\mathscr{A}$ 与 $(\mathscr{A} - \lambda E)^k$ 可交换。

$k = 1$ 时，显然。

假设 $\mathscr{A}(\mathscr{A} - \lambda E)^{k-1} = (\mathscr{A} - \lambda E)^{k-1}\mathscr{A}$，则

$$\mathscr{A}(\mathscr{A} - \lambda E)^k = \mathscr{A}(\mathscr{A} - \lambda E)^{k-1}(\mathscr{A} - \lambda E) = (\mathscr{A} - \lambda E)^{k-1}\mathscr{A}(\mathscr{A} - \lambda E) = (\mathscr{A} - \lambda E)^k\mathscr{A}.$$

由数学归纳法原理得，$\mathscr{A}(\mathscr{A}-\lambda E)^k=(\mathscr{A}-\lambda E)^k\mathscr{A}$ 对任意 $k\in\mathbb{N}^*$ 都成立。

任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V_\lambda$，有

$$(\mathscr{A}-\lambda E)^k(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\mathscr{A}-\lambda E)^k\boldsymbol{\alpha}=0.$$

因此 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in V_\lambda$，所以 V_λ 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间。

(3) 先证明 λ 是 $\mathscr{A}$ 在 V_λ 上的特征值。这只需证明 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda E)\subset V_\lambda$。注意到对任意的 $k\geq 1$，

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda E)\subset\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda E)^k.$$

因此，$\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda E)\subset V_\lambda$。

再设存在复数 $\mu\neq\lambda$ 是 $\mathscr{A}$ 在 V_λ 上的特征值。因为对任意的 $k\geq 1$，$x-\mu$ 与 $(x-\lambda)^k$ 互素，因此存在 $f(x),g(x)\in\mathbb{C}[x]$，使得

$$f(x)(x-\mu)+g(x)(x-\lambda)^k=1.$$

任取一个 $\mathscr{A}$ 的属于 μ 的特征向量 $\boldsymbol{u}$，由 Hamilton-Cayley 定理得

$$\boldsymbol{u}=f(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mu E)\boldsymbol{u}+g(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda E)\boldsymbol{u}=0+0=0.$$

这与 $\boldsymbol{u}$ 是特征向量矛盾。因此，$\mathscr{A}$ 在 V_λ 上没有与 λ 不同的特征值。 □

十、（12 分）若 A，B 为 $m\times n$ 矩阵，试用三种不同的方法证明（每个方法 4 分）$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$。

证明. 证法一。设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,\ldots,n$ 是 m 维列向量。则

$$A+B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n).$$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩小于等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩，因此 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$。

证法二。 □

3 2006

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $\mathbb{P}$ 为同时包含 $\mathbb{Q}$ 和 π 的最小数域，则 $\mathbb{P}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间的维数是（ ）。

解. 因为 π 是超越数，所以不存在一个有限次数的多项式以 π 为 $\mathbb{Q}$ 上的根。由 2005 年填空题第一题知，$\mathbb{P}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间的维数是无穷。 □

2. 若 $f(x)$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的不可约多项式，则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的关系为（ ）。

解. 互素。这是定理。 □

3. 设 A 为 n 阶可逆的实反对称矩阵，则 n 一定为（ ）。

解. 因为

$$|A| = |A'| = |-A| = (-1)^n|A|.$$

所以 n 为偶数。 □

4. 设 A 为方阵，且 $A^3 = 0$，则 $E + A + A^2$ 一定为（ ）矩阵。

解. 注意到

$$(E - A)(E + A + A^2) = E.$$

所以 $E + A + A^2$ 是可逆矩阵。 □

5. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5 \in \mathbb{R}^5$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5, \boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性相关性为（ ）。

解. 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5, \boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5, \boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关。 □

6. 设 A、B 为 $m \times n$ 矩阵，且 $r(A) + r(B) < n$，则线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的关系为（ ）。

解. 有共同的非零解。考虑 $\binom{A}{B} X = 0$ 即可。 □

7. 设 σ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，$\operatorname{Ker}\sigma = 0$，则 σ 为（ ）。

解. 因为有限维空间之间的线性映射如果是单射则必是满射，所以 σ 是可逆的线性变换。 □

8. 设 A、B 为 n 阶方阵，且 A 可逆，则 AB 与 BA 的关系是（ ）。

解. 因为

$$A^{-1}(AB)A = BA.$$

所以 AB 相似于 BA。 □

9. 若 A、B 为同阶正交阵，且 $|AB| = -1$，则 $|A+B| =$（ ）。

解. 因为

$$|A+B| = |A||E + A^{-1}B| = |A||B^{-1} + A^{-1}||B| = -|B^T + A^T| = -|A+B|$$

所以 $|A+B| = 0$。 □

10. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，$r(A) = m$，$\boldsymbol{x}$ 为非零实 m 维列向量，则 $\boldsymbol{x}^T(AA^T)\boldsymbol{x}$ 为（ ）。

解. 因为 $r(A) = m$，所以 m 元齐次线性方程组 $A^T\boldsymbol{x} = 0$ 只有零解，因此对任意的非零实 m 维向量 $\boldsymbol{x}$，$A^T\boldsymbol{x} \neq 0$。从而 $\boldsymbol{x}^T(AA^T)\boldsymbol{x} = (A^T\boldsymbol{x})^T A^T\boldsymbol{x} > 0$。因此 $\boldsymbol{x}^T(AA^T)\boldsymbol{x}$ 为正实数。 □

二、（15 分）设 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的三维线性空间，σ 为 V 的一个线性变换，且 σ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 V 的另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$，使 σ 在此基下的矩阵 B 为对角阵；

(2) 求 A^k。

解. (1) A 的特征多项式为：

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \lambda^2 - 25\lambda + 25 = (\lambda+5)(\lambda-1)(\lambda-5).$$

因此 A 的全部特征值为 -5，1，5。

解线性方程组 $(-5E - A)\boldsymbol{x} = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (5, -6, 3)'.$$

解线性方程组 $(E - A)\boldsymbol{x} = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 0)'.$$

解线性方程组 $(5E - A)\boldsymbol{x} = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_3 = (0, 1, 2)'.$$

令 $P = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$，则

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix} := B.$$

因此

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)P = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)PB.$$

于是，令 $\boldsymbol{\beta}_1 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 - 6\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$ 即可。

(2) 由 (1) 知

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = P^{-1} \begin{pmatrix} (-5)^k & & \\ & 1 & \\ & & 5^k \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + 5^{n-1} & 0 & -\frac{2}{15} + \frac{2\ 5^{n-1}}{3} \\ -4 - 5^n + (-1)^n 5^{n+1} & (-5)^n & \frac{2}{3} - \frac{2\ 5^n}{3} \\ -\frac{6}{5} + 6\ 5^{n-1} & 0 & \frac{1}{5} + 4\ 5^{n-1} \end{pmatrix}.$$

□

三、（15 分）设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $r(A)$；

(2) 求线性空间 $V = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | A^*\boldsymbol{x} = 0\right\}$ 的维数和一个基。

解. (1) 对 A 作初等行变换，将其化为行最简形：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，$r(A) = 3$。

(2) 因为 $\operatorname{rank}(A) = 1$，所以 $\operatorname{rank}(A^*) = 1$，所以

$$\dim V = 4 - \operatorname{rank}(A^*) = 4 - 1 = 3.$$

又因为 $A^*A = |A| = 0$，A 的前三列向量是 A 的列向量组的一个极大线性无关组，所以 V 的一个基为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

□

四、（15 分）设 σ, τ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，$(\sigma + \tau)^2 = \sigma + \tau, \sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$，求证：$\sigma\tau = 0$。

证明. 由题意

$$(\sigma+\tau)^2=\sigma^2+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau^2=\sigma+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau=\sigma+\tau.$$

因此

$$\sigma\tau=-\tau\sigma. \tag{1}$$

由 (1) 式得

$$\sigma^2\tau=\tau\sigma^2$$

于是

$$\sigma\tau=\tau\sigma. \tag{2}$$

由 (1) 式和 (2) 式得

$$\sigma\tau=0.$$

□

五、（15 分）设 σ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换；$f_1(x), f_2(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中两个互素多项式，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，求证：$\operatorname{Ker} f(\sigma)=\operatorname{Ker} f_1(\sigma)\oplus\operatorname{Ker} f_2(\sigma)$。

证明. 因为 $f_1(x), f_2(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中两个互素多项式，所以存在 $u(x), v(x)\in\mathbb{P}[x]$，使得

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1.$$

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker} f(\sigma)$，有

$$u(\sigma)f_1(\sigma)\boldsymbol{\alpha}+v(\sigma)f_2(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$$
$$0=f(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=f_1(\sigma)f_2(\sigma)\boldsymbol{\alpha}$$

因此

$$u(\sigma)f_1(\sigma)\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker} f_2(\sigma), v(\sigma)f_2(\sigma)\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker} f_1(\sigma).$$

于是

$$\operatorname{Ker} f(\sigma)=\operatorname{Ker} f_1(\sigma)+\operatorname{Ker} f_2(\sigma).$$

任取 $\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Ker} f_1(\sigma)\cap\operatorname{Ker} f_2(\sigma)$，有

$$f_1(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=f_2(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=0.$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}=u(\sigma)f_1(\sigma)\boldsymbol{\alpha}+v(\sigma)f_2(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=0.$$

故 $\operatorname{Ker} f_1(\sigma)\cap\operatorname{Ker} f_2(\sigma)=0$，因此

$$\operatorname{Ker} f(\sigma)=\operatorname{Ker} f_1(\sigma)\oplus\operatorname{Ker} f_2(\sigma).$$

□

六、（15 分）设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 $\sigma^2=\mathscr{E}$，求证 σ 可对角化。

证明. 因为

$$\sigma^2 = \mathscr{E}$$

所以 $(x-1)(x+1)$ 是 σ 的零化多项式。若 $\sigma = \mathscr{E}$ 或 $\sigma = -\mathscr{E}$，则 σ 显然可以对角化。若 $\sigma \neq \mathscr{E}$ 且 $\sigma \neq -\mathscr{E}$，则 $(x-1)(x+1)$ 是 σ 的最小多项式，因此 σ 可对角化。 □

七、（15 分）设 A 为 n 阶方阵，λ_0 为 A 的特征值，此时我们称 $n - r(\lambda_0 E - A)$ 为 λ_0 的几何重数，λ_0 作为 A 的特征多项式 $|\lambda E - A|$ 之根的重数称为 λ_0 的代数重数。求证：λ_0 的几何重数不超过其代数重数。

证明. 设 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 W 的维数为 r，则 $r = n - \mathrm{r}(\lambda_0 E - A)$。在 W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$，把它扩充为 $\mathbb{K}^n$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{n-r}$。令

$$P = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{nr})$$

则 P 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 级可逆矩阵，并且有

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\left(A\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, A\boldsymbol{\alpha}_r, A\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right) \\ &= \left(\lambda_0 P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda_0 P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \lambda_0 P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right). \end{aligned}$$

由于 $I = P^{-1}P = \left(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1, P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r, P^{-1}\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, P^{-1}\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right)$,

因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_r = P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r$。
从而

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left(\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_1, \lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_r, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0 I, & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于相似的矩阵有相等的特征多项式，因此

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda I_r - \lambda_0 I_r & -B \\ 0 & \lambda I_{n-r} - C \end{vmatrix} \\ &= |\lambda I_r - \lambda_0 I_r|\,|\lambda I_{n-r} - C| \\ &= (\lambda - \lambda_0)^r\,|\lambda I_{n-r} - C|. \end{aligned}$$

从而 λ_0 的代数重数大于或等于 r，即 λ_0 的代数重数大于或等于 λ_0 的几何重数。 □

八、（15 分）设 A、B 为 n 元实对称矩阵；且 B 正定，求证：存在一个实可逆阵 P 使得 P^TAP 和 P^TBP 同时为对角阵。

证明. 因为 B 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 Q，使得

$$Q^TBQ = E_n.$$

这时，QAQ^T 是实对称矩阵，从而存在正交矩阵 U，使得

$$U^T Q^T AQU = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} := \Lambda_n.$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 $Q^T AQ$ 的全部特征值。
令 $P = QU$，则 $P^T AP = \Lambda_n$，$P^T BP = E_n$ 都是对角矩阵。 $\square$

4 2007

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $\mathbb{F}$ 为同时包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ 的最小的数域，则 $\mathbb{F}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间有基 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，(　)。

   解. 由题意，$\mathbb{F}=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$，因为 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上的极小多项式为 x^2-3，$\sqrt{2}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式为 x^2-2，所以

$$Q(\sqrt{2})(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}|a,b\in Q(\sqrt{2})\}=\{c+d\sqrt{2}+e\sqrt{3}+f\sqrt{6}|c,d,e,f\in\mathbb{Q}\}.$$

   因此，基为 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$。（相关知识可看 [1]） □

2. 多项式 x^3+px+1 在复数域 $\mathbb{C}$ 内有重根，则 p 应满足（　）。

   解.

   引理 4.1. 设 $\mathbb{K}$ 是数域，在 $\mathbb{K}(x)$ 中，$f(x)=x^3+ax+b$，则 $f(x)$ 有重因式的充分必要条件为 $4a^3+27b^2=0$。

   证明. 由题意，$f'(x)=3x^2+a$。
   设 $a\neq 0$，用辗转相除法求 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式：

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 & f'(x) & 3f(x) & h_1(\mathrm{x}) \\
 & 3x^2+a & 3x^3+3ax+3b & x \\
 & 3x^2+\frac{9b}{2a}x & 3x^3+ax & \\
\cline{2-3}
h_2(x)=3x-\frac{9b}{2a} & -\frac{9b}{2a}x+a & r_1(x)=2ax+3b & \\
 & -\frac{9b}{2a}x-\frac{27b^2}{4a^2} & \frac{1}{2a}r_1(x)=x+\frac{3b}{2a} & \\
\cline{2-2}
 & r_2(x)=\frac{4a^3+27b^2}{4a^2} & &
\end{array}$$

   $f(x)$ 有重因式 $\Longleftrightarrow (f(x),f'(x))\neq 1 \Longleftrightarrow 4a^3+27b^2=0.$
   当 $a=0$ 时，上述结论仍然成立。 □

   回到原题，易得 p 应满足 $4p^2+27=0$ 。 □

3. 设方阵 $A_{k\times k},B_{l\times l},C_{m\times m}$ 的行列式都为 1，则 $\begin{vmatrix} & & A\\ & B & \\ C & & \end{vmatrix}=$(　)。

   解.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} & & A\\ & B & \\ C & & \end{vmatrix} &= |A|\cdot(-1)^{(1+2+\cdots+k)+[(m+l+1)+(m+k+2)+\cdots+(m+l+k)]}\cdot\begin{vmatrix} & B\\ C & \end{vmatrix}\\
&=|A|\cdot(-1)^{k(m+l+k+1)}|B|\cdot(-1)^{(1+2+\cdots+l)+[(m+1)+(m+2)+\cdot+(m+l)]}|C|\\
&=(-1)^{lm+km+kl}.
\end{aligned}$$

   □

4. 若 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c,d)$，则 $\left|E-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\right|=$（　）。

解. $\left|E-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\right| = |1-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T| = 1-(a^2+b^2+c^2+d^2)$。 □

5. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \in \mathbb{R}^3$ 线性无关,则向量组 $b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{13}\boldsymbol{\alpha}_3, b_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{23}\boldsymbol{\alpha}_3, b_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性无关的充要条件为（ ）。

解.

$$\begin{aligned}&(b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{13}\boldsymbol{\alpha}_3, b_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{23}\boldsymbol{\alpha}_3, b_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3)\\ =&(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31}\\ b_{12} & b_{22} & b_{32}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以，向量组 $b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{13}\boldsymbol{\alpha}_3, b_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{23}\boldsymbol{\alpha}_3, b_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件为矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31}\\ b_{12} & b_{22} & b_{32}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{smallmatrix}\right)$ 可逆。 □

6. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且 $\operatorname{rank}(A) = r$，则 $\{X \in \mathbb{R}^{n\times s} | AX = 0\}$ 作为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，其维数为（ ）。

解. 设 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$，则

$$AX = 0 \Longleftrightarrow AX_i = 0, i = 1, 2, \ldots, s.$$

记 $V = \{X \in \mathbb{R}^{n\times s} | AX = 0\}$，设 W 为矩阵方程 $AX = 0$ 的解空间，则 $\dim W = n-r$。因此，$\dim V = (n-r)^s$。 □

7. 设 $\mathbb{F}[x]_n$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上次数不超过 $n-1$ 的多项式集合, 其为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 对任何 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$，令 $Df(x) = f'(x)$，则 D 作为 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性变换，其最小多项式为（ ）。

解. 因为 $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的一组基，

$$D(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}) = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n-1\\ & & & & 0\end{pmatrix}.$$

所以 D 的最小多项式为 x^n。 □

8. 设 σ 为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 $\sigma^2 = 0$，则 $\dim\sigma(V)$ 最大为（ ）。

解. 考虑幂零指数为 2 的 n 级幂零矩阵 A，则 A 的 Jordan 标准形中的 Jordan 块的总数为

$$n - \operatorname{rank}(A),$$

且每个 Jordan 块的级数不超过 2。因此 Jordan 块的总数最少为 $\frac{n}{2}$，从而 $\operatorname{rank}(A)$ 的最大值为 $\frac{n}{2}$，因此 $\dim\sigma(V)$ 最大为 $\frac{n}{2}$。 □

9. 一切 $n\times n$ 实对称阵按合同分类，可分（ ）类。

解.

个数	秩	正惯性指数
1	0	0
2	1	0
	1	1
3	2	0
	2	1
	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	n	0
	n	1
	$\vdots$	$\vdots$
	n	n

因此，共有 $1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 种。 □

10. 一切 4×4 幂零方阵在复数域中按相似分类，可分（　）类。

解. 5 类。仿照 2008 年填空题第 10 题。 □

二、（15 分）将 $V=\mathbb{R}^{3\times 3}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，令 $W_1=\{A\in V|A^T=A\}$，$W_2=\{A\in V|A^T=-A\}$。
(1) 求证 W_1 和 W_2 为 V 的子空间，并分别写出 W_1 和 W_2 的一组基；
(2) 求证 $V=W_1\oplus W_2$。

解. (1) 因为 $0\in W_1$，所以 W_1 非空。又

$$\text{任意}A,B\in W_1 \Longleftrightarrow A^T=A,B^T=B \Longleftrightarrow (A+B)^T=A^T+B^T=A+B \Longleftrightarrow A+B\in W_1;$$
$$\text{任意}A\in W_1,\text{任意}k\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow kA\in W_1.$$

所以，W_1 是 V 的子空间。同理可证 W_2 是 V 的子空间。
W_1 的一组基为

$$\{E_{ij}|1\le i\le j\le 3\},$$

W_2 的一组基为

$$\{E_{ij}|1\le i<j\le 3\}.$$

其中 E_{ij} 表示 (i,j) 元素为 1，其余元素为 0 的 n 阶矩阵。
(2) 任取 $A\in V$，有

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}.$$

因为

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T=\frac{A+A^T}{2},$$

所以

$$\frac{A+A^T}{2}\in W_1.$$

又

$$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T=-\frac{A-A^T}{2},$$

所以

$$\frac{A-A^T}{2}\in W_2.$$

因此

$$V=W_1+W_2.$$

又

$$\dim V=9=6+3=\dim W_1+\dim W_2,$$

所以

$$V=W_1\oplus W_2.$$

□

三、（15 分）设

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

(1) 求正交矩阵 P，使得 P^TAP 为对角阵；

(2) 求 A^n。

解. (1) A 的特征多项式为：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=x^3-9x^2+24x-20=(x-2)^2(x-5).$$

所以，A 的全部特征值为 2（2 重），5（1 重）。

解线性方程组 $(2I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1)'.$$

解线性方程组 $(5I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)'.$$

用 Schmidt 正交化法把 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化：

$$\boldsymbol{\xi}_1'=\boldsymbol{\xi}_1;$$
$$\boldsymbol{\xi}_2'=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)'.$$

把 $\boldsymbol{\xi}_1',\boldsymbol{\xi}_2',\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1'}{|\boldsymbol{\xi}_1'|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)';$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2'}{|\boldsymbol{\xi}_2'|}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)';$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3'}{|\boldsymbol{\xi}_3'|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)'.$$

令
$$P=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3).$$
则 P 是正交矩阵，且
$$P^TAP=\mathrm{diag}\{2,2,5\}.$$
(2) 由 (1) 得，
$$A^n=\left[P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}P^T\right]^n=P\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&5^n\end{pmatrix}P^T$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{5^n}{3}&-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}&-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}\\-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}&\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{5^n}{3}&-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}\\-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}&-\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}&\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{5^n}{3}\end{pmatrix}.$$
□

四、（15 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的方阵，令 A^S 为将 A 中的每个元素 a_{ij} 换为元素 $a_{n+1-i,n+1-j}$ 所得到的矩阵，即将 A 旋转 180 度，例如 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{21}\end{pmatrix}^S=\begin{pmatrix}a_{22}&a_{21}\\a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$，求证 A 与 A^S 相似。

解. 由题意，有
$$\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{nn}&a_{nn-1}&\cdots&a_{n1}\\a_{n-1n}&a_{n-1n-1}&\cdots&a_{n-11}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{1n-1}&\cdots&a_{11}\end{pmatrix}.$$
因为
$$\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}.$$
所以 A 与 A^S 相似。 □

五、（15 分）复数域 $\mathbb{C}$ 上的一切 $n\times n$ 矩阵的集合 $C^{n\times n}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，对任何选定的矩阵 $A\in C^{n\times n}$，定义映射 $\phi_A:C^{n\times n}\to C^{n\times n},\quad X\to AX-XA$。

(1) 求证 ϕ_A 为线性空间 $C^{n\times n}$ 上的线性变换；

(2) 若矩阵 A 可对角化，求证线性变换 ϕ_A 也可对角化。

解. (1) 保持加法：

任取$X,Y\in C^{n\times n},\phi_A(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)A=(AX-XA)+(AY-YA)=\phi_A(X)+\phi_A(Y).$

保持数乘：
$$\text{任取}X\in C^{n\times n},k\in\mathbb{C},\phi_A(kX)=A(kX)-(kX)A=k(AX-XA)=k\phi_A(X).$$

因此，ϕ_A 为线性空间 $C^{n\times n}$ 上的线性变换。

(2) 因为 A 可对角化，所以存在复数域上的 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$PAP^{-1}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}:=\Lambda_n.$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值。注意到

$$\phi_A(P^{-1}E_{ij}P)=AP^{-1}E_{ij}P-P^{-1}E_{ij}PA=P^{-1}(\Lambda_nE_{ij}-E_{ij}\Lambda_n)P=(\lambda_i-\lambda_j)P^{-1}E_{ij}P.$$

其中 E_{ij} 是 (i,j) 元素为 1，其余元素为 0 的 n 阶矩阵。因此

$$\begin{aligned}&\phi_A(P^{-1}E_{11}P,P^{-1}E_{12}P,\ldots,P^{-1}E_{nn}P)\\&=(P^{-1}E_{11}P,P^{-1}E_{12}P,\ldots,P^{-1}E_{nn}P)\mathrm{diag}\{\lambda_1-\lambda_1,\lambda_1-\lambda_2,\ldots,\lambda_n-\lambda_n\}.\end{aligned}$$

容易验证 $P^{-1}E_{11}P,P^{-1}E_{12}P,\ldots,P^{-1}E_{nn}P$ 是 $C^{n\times n}$ 的一组基，因此线性变换 ϕ_A 可对角化。

□

六、（15 分）设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，σ 为 V 上的线性变换，求证 $V=\sigma^n(V)\oplus\mathrm{Ker}\,\sigma^n$。

证明. 首先有子空间升链：

$$\mathrm{Ker}\,\sigma\subset\mathrm{Ker}\,\sigma^2\subset\cdots\subset\mathrm{Ker}\,\sigma^n\subset\cdots\subset V$$

因为 V 是有限维线性空间，所以存在正整数 n，使得

$$\mathrm{Ker}\,\sigma^n=\mathrm{Ker}\,\sigma^{n+i},i=1,2,\ldots$$

又由于

$$\dim V=\dim\sigma^n\oplus\dim\mathrm{Ker}\,\sigma^n=\dim\sigma^{n+i}\oplus\dim\mathrm{Ker}\,\sigma^{n+i},i=1,2,\ldots.$$

所以

$$\dim\sigma^n=\dim\sigma^{n+i},i=1,2,\ldots.$$

任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\sigma^n(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}-\sigma^n(\boldsymbol{\alpha}).$$

因为 $\sigma^n\left(\boldsymbol{\alpha}-\sigma^n(\boldsymbol{\alpha})\right)=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}-\sigma^n(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Ker}\,\sigma^n$，故

$$V=\sigma^n(V)+\mathrm{Ker}\,\sigma^n.$$

任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\sigma^n(V)\cap\mathrm{Ker}\,\sigma^n$，有

$$\begin{aligned}&\text{存在向量}\beta\in V,\text{使得}\boldsymbol{\alpha}=\sigma^n(\beta),\\&\sigma^n(\boldsymbol{\alpha})=0.\end{aligned}$$

因此 $\sigma^n(\beta)=\sigma^{2n}(\beta)=\sigma^n(\boldsymbol{\alpha})=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}=0$，故 $\sigma^n(V)+\mathrm{Ker}\,\sigma^n$ 是直和。因此

$$V=\sigma^n(V)\oplus\mathrm{Ker}\,\sigma^n.$$

□

七、（15 分）用数学归纳法证明，在复数域 $\mathbb{C}$ 内，任意一个 $n\times n$ 矩阵相似于一个上三角矩阵。

证明. 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法。$n=1$ 时，显然命题为真，假设 $n-1$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。现在来看 n 级复矩阵 A。设 λ_1 是 n 级复矩阵 A 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是属于 λ_1 的一个特征向量。把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的一个基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$。令 $P_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 P_1 是 n 级可逆矩阵，且

$$P_1^{-1}AP_1=P_1^{-1}(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_n)=\left(P_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_n\right).$$

由于 $P_1^{-1}P=I$，因此 $P_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$。从而

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

对 $n-1$ 级复矩阵 B 用归纳假设，有 $n-1$ 级可逆矩阵 P_2，使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵。令

$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix},$$

则 P 是 n 级可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}P_2\\ 0 & P_2^{-1}BP_2\end{pmatrix}.$$

因此 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理，对一切正整数 n，此命题为真。 □

5 2008

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 令 $\mathbb{F}$ 为 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ 的一切有理式的集合所构成的数域，则 $\mathbb{F}$ 中元素的简约形式为（　）。

解. 由题意知 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(\varepsilon)$，显然 ε 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式为 x^5-1，因此 $\mathbb{F}$ 中元素的简约形式为 $c_0+c_1\varepsilon+c_2\varepsilon^2+c_3\varepsilon^3+c_4\varepsilon^4$，其中 $c_i\in\mathbb{Q}, i=0,1,2,3,4$。(相关知识可看 [1]) □

2. 多项式 $x^{21}-1$ 和 x^4-1 的最高公因式为（　）。

解.（把最高公因式改为首一最高（或最大）公因式）因为 $x^{21}-1$ 和 x^4-1 的首一最大公因式不随数域的扩大而改变，所以我们只需求 $x^{21}-1$ 和 x^4-1 在复数域上的首一最大公因式。
x^4-1 在复数域上的全部根为：1，-1，i，$-i$。不难验证 $x^{21}-1$ 和 x^4-1 在复数域上的公共根是 1，因此 $x^{21}-1$ 和 x^4-1 在复数域上的首一最大公因式是 $x-1$，从而 $x^{21}-1$ 和 x^4-1 在任一数域上的首一最大公因式是 $x-1$。 □

3. n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix}(n\geq 2)$$

的值为（　）。

解. 把第 2，3，...，n 列都加到第 1 列上，然后按第 1 列展开：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot D_{n-1}+(-1)^{n+1}1\cdot(-1)^{n-1} \\ &= D_{n-1}+1. \end{aligned}$$

由此看出，$D_1,D_2,\dots,D_n$ 是首项为 2、公差为 1 的等差数列。
因此

$$D_n=2+(n-1)\cdot 1=n+1.$$

□

4. 若 P 为 5 阶正交矩阵，则 $|E-P^2|=$（　）。

解. 因为 P 是正交矩阵，所以 P^2 是正交矩阵。又因为 P^2 是 5 阶矩阵，所以 P^2 必有特征值 1（不然，$(-1)^5=|P^2|=1$，矛盾）。因此 $|E-P^2|=0$。 □

5. 在空间直角坐标系 xOy 中，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},a_{13}),\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23}),\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$ 共面的充要条件为（　）。

解.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

□

6. 设

$$S=\begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix},V=\left\{X\in R^{4\times 4}|SX+X^TS=0\right\},$$

则 V 作为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，其维数为（　）。

解. 设

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

则由 $SX+X^TS=0$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{11}+X_{12} \\ -X_{11}-X_{22} & 0 \end{pmatrix}=0.$$

因此

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & -X_{11} \end{pmatrix},X_{11},X_{12},X_{21}\in\mathbb{R}^{2\times 2}.$$

所以 V 的维数为 3。 □

7. 设 $A,B\in R^{m\times n}$，则矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件为（　）。

解. $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\ B)$。考虑

$$A(X_1,X_2,\ldots,X_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

□

8. 若 3 阶方阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1，2，3，则 $\sum_{i=1}^3\left(\sum_{j=1}^3 a_{ij}a_{ji}\right)=$（　）。

解. $\sum_{i=1}^3\left(\sum_{j=1}^3 a_{ij}a_{ji}\right)=\operatorname{tr}(A^2)=1+4+9=14$。 □

9. 令 $A\in\mathbb{C}^{5\times 5},A^3=E,1=5-r(E-A)$，则 $\operatorname{tr}\left(E+A+A^2\right)=$（　）。

解. 因为 $r(E-A)=4$，所以 1 是 A 的一重特征值。因为 $A^3=E$，所以 A 是幂等矩阵，所以 A 的特征值为 1（1 重），0（4 重），所以 $E+A+A^2$ 的特征值为 3（1 重），1（4 重），因此

$$\operatorname{tr}(E+A+A^2)=3+1+1+1+1=7.$$

□

10. 特征值为 1，1，1，1 的一切 4×4 阶复数矩阵在复数域内按相似可分（　）类。

解. 任取一个满足已知条件的复数矩阵 A。

若 A 的最小多项式为 $\lambda-1$，则 $A-I=0$，因此 $A=I$。

若 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$，则 A 的 Jordan 标准形的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数 N_1 为：

$$N_1 = 4-\text{rank}(A-I),$$

其中 1 级 Jordan 块 $J_1(1)$ 的个数 $N_1(1)$ 为：

$$N_1(1) = \text{rank}(A-I)^2+\text{rank}(A-I)^0-2\text{rank}(A-I) = 4-2\text{rank}(A-I),$$

2 级 Jordan 块 $J_2(1)$ 的个数 $N_1(2)$ 为：

$$N_1(2) = \text{rank}(A-I)^3+\text{rank}(A-I)^1-2\text{rank}(A-I)^2 = \text{rank}(A-I).$$

因此，此时 A 的 Jordan 标准形只可能有以下两种情况：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^3$，则 A 的 Jordan 标准形的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数 N_1 为：

$$N_1 = 4-\text{rank}(A-I),$$

其中 1 级 Jordan 块 $J_1(1)$ 的个数 $N_1(1)$ 为：

$$N_1(1) = \text{rank}(A-I)^2+\text{rank}(A-I)^0-2\text{rank}(A-I) = \text{rank}(A-I)^2+4-2\text{rank}(A-I),$$

2 级 Jordan 块 $J_2(1)$ 的个数 $N_1(2)$ 为：

$$N_1(2) = \text{rank}(A-I)^3+\text{rank}(A-I)^1-2\text{rank}(A-I)^2 = \text{rank}(A-I)-2\text{rank}(A-I)^2.$$

3 级 Jordan 块 $J_3(1)$ 的个数 $N_1(3)$ 为：

$$N_1(3) = \text{rank}(A-I)^4+\text{rank}(A-I)^2-2\text{rank}(A-I)^3 = \text{rank}(A-I)^2.$$

此时只有 $\text{rank}(A-I)=2, \text{rank}(A-I)^2=1$ 满足要求。因此，此时 A 的 Jordan 标准形只可能有以下一种情况：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^4$，则 A 的 Jordan 标准形的主对角元为 1 的 Jordan 块的总数 N_1 为：

$$N_1 = 4-\text{rank}(A-I),$$

其中 1 级 Jordan 块 $J_1(1)$ 的个数 $N_1(1)$ 为：

$$N_1(1) = \text{rank}(A-I)^2+\text{rank}(A-I)^0-2\text{rank}(A-I) = \text{rank}(A-I)^2+4-2\text{rank}(A-I),$$

2 级 Jordan 块 $J_2(1)$ 的个数 $N_1(2)$ 为:

$$N_1(2) = \text{rank}(A-I)^3 + \text{rank}(A-I)^1 - 2\text{rank}(A-I)^2.$$

3 级 Jordan 块 $J_3(1)$ 的个数 $N_1(3)$ 为:

$$N_1(3) = \text{rank}(A-I)^4 + \text{rank}(A-I)^2 - 2\text{rank}(A-I)^3 = \text{rank}(A-I)^2 - 2\text{rank}(A-I)^3.$$

4 级 Jordan 块 $J_4(1)$ 的个数 $N_1(4)$ 为:

$$N_1(4) = \text{rank}(A-I)^5 + \text{rank}(A-I)^3 - 2\text{rank}(A-I)^4 = \text{rank}(A-I)^3.$$

此时只有 $\text{rank}(A-I) = 3, \text{rank}(A-I)^2 = 2, \text{rank}(A-I)^3 = 1$ 满足要求。因此，此时 A 的 Jordan 标准形只可能有以下一种情况:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

综上，A 在复数域内按相似可分为 5 类。 □

注 5.1. *(1) 另一种方法（以 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$ 为例）：因为 A 的最小多项式是 A 的 Jordan 标准形中的各个 Jordan 块的最小多项式（也是特征多项式）的最小公倍式，所以要确定 A 的 Jordan 标准形，只需要确定 A 的 Jordan 标准形中的各个 Jordan 块的最小多项式 $(\lambda-1)^{t_i}, i = 1, 2, 3, 4$，进而只需要确定次数 $t_i, i = 1, 2, 3, 4$，t_i 满足:*

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2, 0 \le t_i \le 2, \max_{1\le i\le 4} t_i = 2.$$

这样的 t_i 只有：$2, 2, 0, 0$，$2, 1, 1, 0$。（0 表示没有相应的 Jordan 块）
(2) 因为存在可逆矩阵 P 使得 $P(A-I)P^{-1} = J-I$，所以 $\text{rank}(A-I)^r = \text{rank}(J-I)^r, 0 \le r \le 4$，由 $J-I$ 的形状得：$\text{rank}(A-I)^{r+1} = \text{rank}(A-I)^r - 1$。

二、（15 分）实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数不超过 2 的多项式集合 $\mathbb{P}_2[x]$ 为实数域上的线性空间。取 $\mathbb{P}_2[x]$ 的一个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(1, x, x^2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \left(1, x, x^2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \left(1, x, x^2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设 σ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中的线性变换，且

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) = \left(1, x, x^2\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) = \left(1, x, x^2\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_3) = \left(1, x, x^2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 A;
(2) 求 σ 的特征值和特征向量;
(3) 说明 σ 可对角化，并求 $\mathbb{P}_2[x]$ 的一个基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 使 σ 在此基下的矩阵为对角矩阵。

解. (1) 因为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A,$$

所以

$$(1,x,x^2)\begin{pmatrix}3&3&1\\2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\left(1,x,x^2\right)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}A.$$

因此

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&3&1\\2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) σ 的特征值和特征向量即 A 的特征值和特征向量。A 的特征多项式为:

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2),$$

因此 A 的特征值为 -1，1，2。

解线性方程组 $(-I-A)x=0$，得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,-1)'.$$

解线性方程组 $(I-A)x=0$，得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)'.$$

解线性方程组 $(2I-A)x=0$，得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,3,2)'.$$

因此 A 的属于特征值 -1 的特征向量为: $k\boldsymbol{\xi}_1,k\in\mathbb{Z}$，$A$ 的属于特征值 1 的特征向量为: $l\boldsymbol{\xi}_2,l\in\mathbb{Z}$，$A$ 的属于特征值 2 的特征向量为: $m\boldsymbol{\xi}_3,m\in\mathbb{Z}$。

故 σ 的特征值为 -1，1，2，σ 的属于特征值 -1 的特征向量为: $k\boldsymbol{\xi}_1,k\in\mathbb{Z}$，$\sigma$ 的属于特征值 1 的特征向量为: $l\boldsymbol{\xi}_2,l\in\mathbb{Z}$，$\sigma$ 的属于特征值 2 的特征向量为: $m\boldsymbol{\xi}_3,m\in\mathbb{Z}$。

(3) 因为 σ 有三个互不相同的特征值，所以 σ 可对角化。因为

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 显然是线性无关的。所以，取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3$ 即可。 □

三、（15 分）设 $V=\{A\in R^{n\times n}|\operatorname{tr}(A)=0\},W=\{aE|a\in R\}$。

(1) 求证 V 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间，并求 $\dim V$；

(2) 求证 $\mathbb{R}^{n\times n}=V\oplus W$。

证明. 重复。 □

四、（15 分）

(1) 将二次型 $f(x,y,z)=-2xy+2xz+2yz$ 正交标准化；

(2) 求三元实函数 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^3+y^3+z^3=1$ 上的最大值和最小值，并分别求一个最值点。

解. (1) 二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

A 的特征值为：-2（1 重），1（2 重）。

解线性方程组 $(-2I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,-1)'.$$

解线性方程组 $(I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)',\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,1)'.$$

用 Schmidt 正交化法将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化：

$$\boldsymbol{\xi}_2'=\boldsymbol{\xi}_2;$$

$$\boldsymbol{\xi}_3'=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2)}{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2)}\boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)'$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 是欧式空间中的标准内积。将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2',\boldsymbol{\xi}_3'$ 单位化得：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)';$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2'}{|\boldsymbol{\xi}_2'|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)';$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3'}{|\boldsymbol{\xi}_3'|}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)'.$$

因此，取

$$T=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3),$$

则 T 是正交矩阵，作正交线性变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$$

则二次型 $f(x,y,z)$ 化为正交标准形 $-2x_1^2-2y_1^2+z_1^2$。

(2) 作正交线性变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$$

后，单位球面 $x^3+y^3+z^3=1$ 变为单位球面 $x_1^3+y_1^3+z_1^3=1$。 $\square$

五、（15 分）设

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}\in R^{m\times n},$$

求证齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解的充要条件为行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{m}}$ 等价。

证明. 必要性。设齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间为 W_1，$Bx=0$ 的解空间为 W_2，则有

$$W_1=W_2.$$

因此

$$\mathrm{rank}A=n-\dim W_1=n-\dim W_2=\mathrm{rank}B$$

从而行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{m}}$ 等价。
充分性。任取一个向量 $\boldsymbol{\gamma}\in W_1$，有

$$A\boldsymbol{\gamma}=0.$$

因为行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{m}}$ 等价，所以存在 m 阶可逆矩阵 P，使得

$$A=PB.$$

于是

$$PB\boldsymbol{\gamma}=0,$$

从而

$$B\boldsymbol{\gamma}=0.$$

因此

$$W_1\subset W_2.$$

同理，有

$$W_2\subset W_1.$$

所以，$W_1=W_2$，于是，齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。 □

六、（15 分）设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为实对称矩阵，定义

$$\begin{aligned}\phi_A:\mathbb{R}^{n\times n}&\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}\\ X&\longmapsto AXA'\end{aligned}$$

求证 ϕ_A 为线性空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的可对角化线性变换。

证明. 因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T，使得

$$T'AT=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}.$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值。因此，有

$$\phi_A(TE_{ij}T')=ATE_{ij}T'A'=\lambda_i\lambda_jTE_{ij}T',i,j,=1,2,\ldots,n.$$

其中，$E_{ij}, 1 \le i, j \le n$ 是 (i,j) 元素为 1，其余元素为 0 的 n 阶矩阵。于是

$$\phi_A(TE_{11}T', TE_{12}T', \dots, TE_{nn}T') = (TE_{11}T', TE_{12}T', \dots, TE_{nn}T')\mathrm{diag}\{\lambda_1\lambda_1, \lambda_1\lambda_2, \dots, \lambda_n\lambda_n\}.$$

因此 ϕ_A 为线性空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的可对角化线性变换。 □

七、（15 分）设 V 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为其上两个可对角化线性变换，且 $\boldsymbol{\alpha\beta} = \boldsymbol{\beta\alpha}$，求证：$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 可同时对角化。

证明. 看 2009 年第六题引理三。 □

八、（15 分）设 $f(x,y)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数，U 为 V 的子空间，$U^\perp = \{v \in V | f(v,U) = 0\}$。若 $U \cap U^\perp = \{0\}$，求证 $V = U \oplus U^\perp$。

证明. 由题意，只需要证明 $V = U + U^\perp$。
任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，想证存在 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in U, \boldsymbol{\alpha}_2 \in U^\perp$，使得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$。设 $\dim U = m$，在 U 中取一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_m$，设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\eta}_i, k_i(i = 1,2,\dots,m)$ 待定。令 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_1$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_2 \in U^\perp &\Longleftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\eta}_j\right) = 0, \quad j = 1,2,\dots,m \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\eta}_j\right) = 0, \quad j = 1,2,\dots,m \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}\right) = \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\eta}\right), \quad j = 1,2,\dots,m \\
&\Longleftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j\right), \quad j = 1,2,\dots,m \\
&\Longleftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_j\right) = \sum_{i=1}^m k_i\left(\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_b\right), \quad j = 1,2,\dots,m \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_b\right) = k, \quad j = 1,2,\dots,m.
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^m \left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_i\right)\boldsymbol{\eta}_i, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_1$，则 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in U, \boldsymbol{\alpha}_2 \in U^\perp$。因此 $V = U + U^\perp$。又 $U \cap U^\perp = \{0\}$，所以 $V = U \oplus U^\perp$。 □

6　2009

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 满足 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 的数域 $\mathbb{F}$ 有（　）。

解. 由 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的定义知，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{2}$ 的最小数域，因此 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。

□

2. 有理数域上以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根首项系数为 1 的不可约多项式是（　）。

解. 设 $t=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则 $t^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$，$t^4=(5+2\sqrt{6})^2=49+20\sqrt{6}$，于是 $t^4-10t^2+1=0$。从而 $t=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 的一个实根。把 $f(x)$ 看作实数域上的多项式进行分解：

$$\begin{aligned}
f(x)=x^4-10x^2+1&=x^4+2x^2+1-12x^2=(x^2+1)^2-(2\sqrt{3}x)^2\\
&=(x^2+2\sqrt{3}x+1)(x^2-2\sqrt{3}x+1)\\
&=[x-(\sqrt{2}-\sqrt{3})][x+(\sqrt{2}+\sqrt{3})][x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})][x+(\sqrt{2}-\sqrt{3})].
\end{aligned}$$

于是根据唯一因式分解定理得，$f(x)=x^4-10x^2+1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上没有一次因式，也没有二次因式。从而 x^4-10x^2+1 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。因此有理数域上以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根首项系数为 1 的不可约多项式是 x^4-10x^2+1。 □

3. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}
1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1\\
x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2
\end{vmatrix}$$

的值为（　）。

解.

$$\begin{vmatrix}
1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1\\
x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2
\end{vmatrix}
=\left|E_n+\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|1+\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right|=1+\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

□

4. 若 A 为可逆矩阵，则 $(A^{-1})^*=(\quad)A$。

解. $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=|A^*|^{-1}(A^*)^*=||A|A^{-1}|^{-1}A=|A|^{1-n}A$。 □

5. 若 V_1, V_2 为 3 维线性空间中两个不同的 2 维子空间，则 $\dim(V_1+V_2)=$（　）。

解. 由题意，有

$$\dim V_1 = \dim V_2 = 2, \dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

所以

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3.$$

□

6. 令 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$，则 $V = \{f(A) | f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ 作为实数域上的线性空间其维数为（　）。

解. 易知 $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ 是 V 的一个基，故 $\dim V = n$。 □

7. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则线性方程组 $Ax = b$ 对任何向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有解的充要条件为（　）。

解.

$$\begin{aligned}
&\text{线性方程组 } Ax = b \text{ 对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m \text{ 都有解} \\
&\iff \text{对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m\text{，} \operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(A|b) \\
&\iff \text{对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m\text{，} b \text{ 可由 } A \text{ 的列向量线性表出。} \\
&\iff \mathbb{R}^m \subset \mathcal{R}(A)\text{，其中 } \mathcal{R}(A) \text{ 表示由 } A \text{ 的列向量生成的线性空间。} \\
&\iff \dim \mathcal{R}(A) \geq \dim \mathbb{R}^m = m\text{。} \\
&\iff A \text{ 的列秩大于等于 } m\text{。} \\
&\iff A \text{ 的秩大于等于 } m\text{。}
\end{aligned}$$

由题意，$\operatorname{rank}A \leq m$，所以

$$\text{线性方程组 } Ax = b \text{ 对任何向量 } b \in \mathbb{R}^m \text{ 都有解} \iff \operatorname{rank}A = m\text{。}$$

□

8. 若 A 为 3 阶实对称阵，其特征值为 $-3, 1, 4$，则当 t 满足（　）时，$tE + A$ 正定。

解. $tE + A$ 的特征值为 $t-3, t+1, t+4$，因此

$$\begin{aligned}
tE + A\text{正定} &\iff t-3>0\text{且}t+1>0\text{且}t+4>0 \iff t>3\text{且}t>-1\text{且}t>-4 \\
&\iff t > 3.
\end{aligned}$$

因此当 $t > 3$ 时，$tE + A$ 正定。 □

9. 令 $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 的特征值为 $1, 2, 3, 4$，则 $\operatorname{tr}(A^2) =$ （　）。

解. 因为 A 的特征值为 $1, 2, 3, 4$，所以 A^2 的特征值为 $1, 4, 9, 16$，所以 $\operatorname{tr}(A^2) = 30$。 □

10. 一切 n 阶幂等阵 $(A^2 = A)$ 在复数域内按相似可分为（　）类。

解.（复数域是多余的）因为幂等矩阵必可对角化，所以

$$A \sim \begin{cases} \mathrm{diag}\{E_r, 0_{n-r}\},\ 1 \le r = \mathrm{rank}A \le n, \\ 0,\ \mathrm{rank}A = 0. \end{cases}$$

所以一切 n 阶幂等阵 $(A^2 = A)$ 在复数域内按相似可分为 $n+1$ 类。 □

二、（15 分）设 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 5 维线性空间，$\mathscr{A}$ 为其上的线性变换，且 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

(1) 求 V 的另一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$，使 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为对角阵。

(2) 求 A^n。

解. (1) 因为

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} \mathscr{A}\varepsilon_1 = \varepsilon_5, \\ \mathscr{A}\varepsilon_2 = \varepsilon_4, \\ \mathscr{A}\varepsilon_3 = \varepsilon_3, \\ \mathscr{A}\varepsilon_4 = \varepsilon_2, \\ \mathscr{A}\varepsilon_5 = \varepsilon_1. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_5), \\ \mathscr{A}(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_4), \\ \mathscr{A}\varepsilon_3 = \varepsilon_3, \\ \mathscr{A}(\varepsilon_1 - \varepsilon_5) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_5), \\ \mathscr{A}(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_4). \end{cases}$$

于是

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_4) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_5, \varepsilon_2 - \varepsilon_4) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

因此，取 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_4)$ 即可。

(2) 记

$$B=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5),$$

$$C=(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_4).$$

由 (1) 知

$$B^{-1}C\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&-1&\\&&&&-1\end{pmatrix}C^{-1}B=A.$$

因此

$$A^n=B^{-1}C\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&(-1)^n&\\&&&&(-1)^n\end{pmatrix}C^{-1}B.$$

又

$$C=B\begin{pmatrix}1&&&1&\\&1&&&1\\&&1&&\\&1&&&-1\\1&&&-1&\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}A^n&=\begin{pmatrix}1&&&1&\\&1&&&1\\&&1&&\\&1&&&-1\\1&&&-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&(-1)^n&\\&&&&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&1&\\&1&&&1\\&&1&&\\&1&&&-1\\1&&&-1&\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^n&&&&1+(-1)^{n+1}\\&1+(-1)^n&&1+(-1)^{n+1}&\\&&1&&\\&1+(-1)^{n+1}&&1+(-1)^n&\\1+(-1)^{n+1}&&&&1+(-1)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

三、（15 分）设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n},R(A)=\{Ax|x\in\mathbb{R}^n\},N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|Ax=0\}$。若 A 与 A^2 有相同的秩。求证：

(1) 齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $A^2X=0$ 同解。

(2) $\mathbb{R}^n=R(A)\oplus N(A)$。

解.（回忆错了。）

(1) 显然 $AX=0$ 的解是 $A^2X=0$ 的解，下证 $A^2X=0$ 的解也是 $AX=0$ 的解。

因为 $\mathrm{rank}(A^2)=\mathrm{rank}A$，所以存在可逆矩阵 P，使得

$$PA^2=A.$$

任取 $A^2X=0$ 的一个解 B，有

$$A^2B=0,$$

从而

$$PA^2B=0,$$

于是

$$AB=0.$$

因此 B 是 $AX=0$ 的一个解。

因此齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $A^2X=0$ 同解。

(2) （补充条件：$A=A^2$）任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=A\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha}.$$

因为

$$A(\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha})=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha}\in N(A)$. 又 $A\boldsymbol{\alpha}\in R(A)$，所以

$$\mathbb{R}^n=R(A)+N(A).$$

任取一个向量 $\boldsymbol{\beta}\in R(A)\cap N(A)$，有

$$A\boldsymbol{\beta}=0,\text{存在向量 }\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n\text{，使得 }A\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}\text{。}$$

因此

$$A\boldsymbol{\gamma}=A^2\boldsymbol{\gamma}=A\boldsymbol{\beta}=0,$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}=0.$$

从而 $R(A)\cap N(A)=0$。

因此

$$\mathbb{R}^n=R(A)\oplus N(A).$$

□

四、（15 分）设 V 为数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间 $(n\geq 2)$，$\mathscr{A}$ 为其上的线性变换，$\mathscr{A}^{n-1}\neq 0,\mathscr{A}^n=0$。求证：$\mathscr{A}$ 在 V 的某个基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明.

引理 6.1. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha},\ldots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，从而是 V 的一个基。

证明. 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，设

$$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=0,k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

3式两边同时用 $\mathscr{A}^{n-1}$ 作用之，得到

$$k_0\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

从而 $k_0=0$。于是3式变为

$$k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=0. \tag{4}$$

4式两端同时用 $\mathscr{A}^{n-2}$ 作用之，得到

$$k_1\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

从而 $k_1=0$，于是4式变为

$$k_2\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=0. \tag{5}$$

仿照上面的步骤，依次用 $\mathscr{A}^{n-3}$，$\mathscr{A}^{n-4}$，$\ldots$，$\mathscr{A}$ 作用之，可得

$$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha},\ldots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，断言成立。 □

因为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha},\ldots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha},\ldots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&&&&\\1&\ddots&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&1&0&\\&&&1&0\end{pmatrix}.$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha},\ldots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&&&&\\1&\ddots&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&1&0&\\&&&1&0\end{pmatrix}$。 □

五、（15 分）(1) 求证任何一个正定矩阵 $A=B^2$，B 也为正定矩阵。
(2) 求证任何一个可逆实矩阵 $A=QP$，Q 为正定矩阵，P 为正交阵。

证明. (1) 参见 2010 年第六题。

(2) 因为 A 是 n 级实可逆矩阵，所以 AA' 是正定矩阵。由 (1) 得，存在正定矩阵 Q，使得

$$AA'=Q^2.$$

从而 $A=Q^2A'^{-1}$。记 $P=QA'^{-1}$。由于

$$\begin{aligned}P'P&=A^{-1}Q'QA'^{-1}=A^{-1}Q^2A'^{-1}=A^{-1}AA'A'^{-1}\\&=E_n.\end{aligned}$$

因此 P 是正交矩阵。从上述 A 的表示式得，$A=QP$。 □

注 6.1. 注意极分解定理。

定理 6.1 (极分解定理). 对于任一实可逆矩阵 A，一定存在一个正交矩阵 T 和两个正定矩阵 S_1，S_2，使得

$$A=TS_1=S_2T,$$

并且这两种分解的每一种都是唯一的。

六、（15 分）设 $\mathbb{F}$ 为数域, $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}(n\geq 1): A+B=E_n, AB=BA, A^2=A, B^2=B$。求证存在一个可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}, P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0 & \\ & E_t\end{pmatrix}.$$

这里 $s+t=n$。

证明. 首先证明四个引理。

引理 6.2. 幂等矩阵一定可对角化，并且如果 n 级幂等矩阵 A 的秩为 $r(r>0)$，那么

$$A\sim\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

证明. 若 $r=n$，则 A 可逆。从 $A^2=A$ 得出，$A=I$，结论显然成立。

若 $r=0$，则 $A=0$。结论也成立。下面设 $0<r<n$。

注意到：当 $0<r<n$ 时，幂等矩阵 A 的全部特征值是 $0,1$。

对于特征值 0，齐次线性方程组 $(0I-A)X=0$ 的解空间 W_0 的维数等于 $n-\operatorname{rank}(-A)=n-r$。

由于 A 是幂等矩阵，因此 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$。从而 $\operatorname{rank}(I-A)=n-r$。

对于特征值 1,齐次线性方程组 $(I-A)X=0$ 的解空间 W_1 的维数等于 $n-\operatorname{rank}(I-A)=n-(n-r)=r$。因此

$$\dim W_0+\dim W_1=(n-r)+r=n.$$

从而 A 可对角化。A 的相似标准形中，特征值 1 在主对角线上出现的次数等于 W_1 的维数 r，特征值 0 在主对角线上出现的次数等于 W_0 的维数 $n-r$。因此

$$A\sim\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

□

引理 6.3. 数域 $\mathbb{F}$ 上的幂等矩阵的秩等于它的迹。

证明. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 级幂等矩阵，且 $\operatorname{rank}(A)=r>0$。则据引理 1 得

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于相似的矩阵有相等的迹，因此

$$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=r=\operatorname{rank}(A).$$

若 $A=0$，则 $\operatorname{tr}(0)=0=\operatorname{rank}(0)$。 □

引理 6.4. 如果域 $\mathbb{F}$ 上的 n 级矩阵 A 与 B 都是可对角化的，且 $AB=BA$，那么存在域 $\mathbb{F}$ 上一个 n 级可逆矩阵 S，使得 $S^{-1}AS$ 与 $S^{-1}BS$ 都为对角矩阵。

证明. 已知 A 可对角化，设 A 的所有不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$，其中 λ_i 的重数为 $n_i, i=1,2,\ldots,s$。于是存在域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 级可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1 I_{n_1},\lambda_2 I_{n_2},\ldots,\lambda_s I_{n_s}\right\}$。记 $D=P^{-1}AP$，令 $G=P^{-1}BP$，由于 $AB=BA$，因此

$$DG=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}BP\right)=P^{-1}ABP=P^{-1}BAP=\left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}AP\right)=GD.$$

由于 $D=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1 I_{n_1},\lambda_2 I_{n_2},\ldots,\lambda, I_{n_n}\right\}$, 且 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$, 两两不等, 因此 $G=\operatorname{diag}\left\{B_1,B_2,\ldots,B_s\right\}$，其中 B_i 是 n_i 级矩阵，$i=1,2,\ldots,s$。由于 B 可对角化，因此 $G=P^{-1}BP$ 也可对角化。从而 G 的最小多项式 $m_G(x)$ 在 $\mathbb{F}[x]$ 中可以分解成不同的一次因式的乘积。设 B_i 的最小多项式为 $m_i(\lambda), i=1,2,\ldots,s$，则

$$m_G(\lambda)=\left[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\ldots,m_s(\lambda)\right].$$

于是 $m_i(\lambda)\,|m_G(\lambda)$，从而 $m_i(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}[\lambda]$ 中也可分解成不同的一次因式的乘积，因此 B_i 可对角化，于是存在域 $\mathbb{F}$ 上 n 级可逆矩阵 Q，使得 $Q_i^{-1}B_iQ_i$ 为对角矩阵，$i=1,2,\ldots,s$。令

$$Q=\operatorname{diag}\left\{Q_1,Q_2,\ldots,Q\right\},$$

则 $Q^{-1}GQ=\operatorname{diag}\left\{Q_1^{-1}B_1Q_1,Q_2^{-1}B_2Q_2,\ldots,Q^{-1}B,Q_3\right\}$ 为对角矩阵。令 $S=PQ$，则

$$\begin{aligned}
&S^{-1}BS=Q^{-1}P^{-1}BPQ=Q^{-1}GQ\\
&S^{-1}AS=Q^{-1}P^{-1}APQ=Q^{-1}\operatorname{diag}\left\{\lambda_1 I_{n_1},\lambda_2 I_{n_2},\ldots,\lambda_i I_{n_1}\right\}Q\\
&=\operatorname{diag}\left\{Q_1^{-1}\left(\lambda_1 I_{n_1}\right)Q_1,Q_2^{-1}\left(\lambda_2 I_{n_2}\right)Q_2,\ldots,Q_s^{-1}\left(\lambda_s I_{n_j}\right)Q_s\right\}\\
&=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1 I_{n_1},\lambda_2 I_{n_2},\ldots,\lambda, I_n\right\}.
\end{aligned}$$

于是 $S^{-1}BS$ 和 $S^{-1}AS$ 都是对角矩阵。 □

引理 6.5. 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的一个线性变换。证明：$\mathscr{A}$ 是幂等变换的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}(\mathscr{A})+\operatorname{rank}(\mathscr{A}-\mathscr{I})=n.$$

证明. V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 是幂等变换 $\Longleftrightarrow \mathscr{A}(\mathscr{A}-\mathscr{I})=0$.

考虑域 $\mathbb{F}$ 上的一元多项式 $f(x)=x(x-1)$, 由于 $(x,x-1)=1$, 因此, $\operatorname{Ker} f(\mathscr{A})=\operatorname{Ker}\mathscr{A}\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I})$, 从而

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\text{ 是幂等变换} &\Longleftrightarrow \mathscr{A}(\mathscr{A}-\mathscr{I})=0\\
&\Longleftrightarrow f(\mathscr{A})=0\\
&\Longleftrightarrow V=\operatorname{Ker}\mathscr{A}\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I})\\
&\Longleftrightarrow \dim V=\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A})+\dim(\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I}))\\
&\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\mathscr{A})+\operatorname{rank}(\mathscr{A}-\mathscr{I})=n.
\end{aligned}$$

其中倒数第二个 $\Longleftrightarrow$ 的“$\Longleftarrow$”理由是: $\operatorname{Ker}\mathscr{A}+\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I})$ 是直和, 因此 $\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A}\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I})=\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A})+\dim(\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I}))$。于是 $\dim V=\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A}\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I}))$。从而 $V=\operatorname{Ker}\mathscr{A}\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{I})$。 □

回到原题。因为 A 和 B 都是幂等矩阵，所以 A 和 B 都可对角化，又因为 $AB=BA$，所以 A 和 B 可以同时对角化。故存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}, P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0 & \\ & E_t\end{pmatrix}.$$

其中 $s=\operatorname{rank}(A)$，$t=\operatorname{rank}(B)$。由引理6.5 知

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(E_n-A)=n.$$

所以 $s+t=n$。证毕。 □

七、（15 分）设 A,B 为 n 阶方阵，A 为 n 阶幂零阵，求证

$$|A+B|=|B|.$$

证明. 因为 A 是 n 阶幂零矩阵，所以

$$A^{n-1}\neq 0, A^n=0.$$

于是

$$A^{n-1}(A+B)=A^n+A^{n-1}B=A^{n-1}B.$$

因此

$$|A^{n-1}||A+B|=|A^{n-1}||B|.$$

故

$$|A+B|=|B|.$$

□

八、（15 分）设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆. 求证矩阵方程 $AXA^T-X=0$ 仅有零解的充要条件为 A 的任何两个特征值的乘积不为 1。

证明.

引理 6.6. 设 A，B 是 n 级复矩阵。则矩阵方程 $AX-XB=0$ 只有零解的充分必要条件是：A 与 B 没有公共的特征值。

证明. 必要性。假设 A 与 B 有公共的特征值 λ，则存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 由于

$$|\lambda_0 I-B'|=\left|(\lambda_0 I-B)'\right|=|\lambda_0 I-B|=0,$$

因此 λ_0 也是 B' 的一个特征值，从而存在 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$ 且 $\boldsymbol{\beta}\neq 0$，使得 $B'\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{\beta}$。于是 $\boldsymbol{\beta}'B=\lambda_0\boldsymbol{\beta}'$。从而

$$A\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)-\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)B=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\alpha}\lambda_0\boldsymbol{\beta}'=0.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 是矩阵方程 $AX-XB=0$ 的一个解。

由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0,\boldsymbol{\beta}\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 的某个分量 $a_i\neq 0$，B 的某个分量 $b_i\neq 0$。从而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的 (i,j) 元 $a_ib_j\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\neq 0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 是 $AX-XB=0$ 的一个非零解。

充分性。设 A 与 B 没有公共的特征值，则 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 B 的特征多项式 $g(\lambda)$ 没有公共的复根，从而 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}[\lambda]$ 中互素。于是存在 $u(\lambda),v(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，使得 $u(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=1$。$\lambda$ 用 A 代入，得

$$u(A)f(A)+v(A)g(A)=I.$$

由于 $f(A)=0$，因此 $g(A)$ 可逆。设 $n\times m$ 级复矩阵 $\mathbb{C}$ 是矩阵方程 $AX-XB=0$ 的一个解，则 $AC=CB$。设

$$g(\lambda)=\lambda^m+b_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0,$$

则

$$\begin{aligned}g(A)C&=\left(A^m+b_{m-1}A^{m-1}+\cdots+b_1A+b_0I\right)C\\&=C\left(B^m+b_{m-1}B^{m-1}+\cdots+b_1B+b_0I\right)\\&=C\cdot g(B)=C\cdot 0=0.\end{aligned}$$

两边左乘 $g(A)^{-1}$，即得 $C=0$。因此 $AX-XB=0$ 只有零解。 □

由引理知，命题显然成立。 □

7 2010

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=x^5-2x^4+\frac{3}{2}x^3-3x^2+\frac{1}{2}x-1$，则 $f(x)$ 的有理根是（ ）。

解.

定理 7.1. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个次数 n 大于 0 的整系数多项式，如果 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根，其中 p，q 是互素的整数，那么 $p|a_n$，$q|a_0$。

由定理 (7.1) 知，$2f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm\frac{1}{2}$ 或 ±1 或 ±2。直接验算可知 $2f(x)$ 的有理根为 1，从而 $f(x)$ 的有理根为 1。 □

2. 多项式 $f(x)=x^3+5x-10$ 在有理数域上是（ ）（可约或不可约）的。

解. 因为存在素数 5，使得

$$5|5,5|-10;$$

$$5\nmid 1;$$

$$5^2\nmid -10.$$

所以由 Eisenstein 判别法知，$f(x)$ 在有理数域上式不可约的。 □

3. 设

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\\0&2&3&1\\0&2&4&3\end{vmatrix},$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $2A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$（ ）。

解.

$$2A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&2&3&2\\3&2&4&1\\0&2&3&1\\0&2&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\\0&2&3&1\\0&2&4&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\3&2&4&0\\0&2&3&0\\0&2&4&2\end{vmatrix}=-22-(-16)=-6.$$

□

4. 对称多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 表示为初等对称多项式是（ ）。

解. $f(x_1,x_2,x_3)$ 的首项为 x_1^2，首项的幂指数组为 $(2,0,0)$。$f(x_1,x_2,x_3)$ 是二次齐次对称多项式，$f_i(i=1,2,\ldots,s)$ 也是二次齐次对称多项式，它们的首项幂指数组 (p_1,p_2,p_3) 应当满足：

$$p_1+p_2+p_3=2,\quad 2\geqslant p_t\geqslant p_2\geqslant p_3.$$

满足这两个条件的非负整数 3 元组 (p_1,p_2,p_3) 只可能是：

$$(2,0,0),(1,1,0).$$

它们分别是 f，f_1 的首项幂指数组，于是 $f_2=0$，且

$$\Phi_1(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1^{2-0}\sigma_2^0\sigma_3^0=\sigma_1^2,$$
$$\Phi_2(x_1,x_2,x_3)=a\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=a\sigma_2.$$

于是

$$f(x_1,x_2,x_3)=\Phi_2+\Phi_1=a\sigma_2+\sigma_1^2.$$

为了确定 a，b 的值，x_1,x_2,x_3 分别用 $x_1=x_2=x_3=1$ 代入，得

$$3=3a+9.$$

因此 $a=-2$，故 $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1^2-2\sigma_2$。 □

5. 将矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\4&3\end{smallmatrix}\right)$ 写成初等矩阵之积（ ）。

解.

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

□

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,k),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,k,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(k,1,1)$ 是线性无关的，则 k 的取值为（ ）。

解. 由题意，

$$\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}\neq 0.$$

因此，$-k^3+3k-2\neq 0$，解得 $k\neq -2$ 且 $k\neq 1$。 □

7. 二次型 $f(x,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围为（ ）。

解. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&t\\0&t&3\end{pmatrix}.$$

因为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的，所以矩阵 A 是正定矩阵，所以 $|A|>0$，由此得 $-\sqrt{6}<t<\sqrt{6}$。 □

8. $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_1,a_3)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$ 下的坐标是（ ）。

解. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是 (x_1,x_2,x_3)。则

$$\begin{cases}a_1=x_1\\a_2=x_1+x_2\\a_3=x_1+x_2+x_3\end{cases}$$

因此坐标为 (a_1,a_2-a_1,a_3-a_2)。 □

9. 在 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $(1,1,2)$ 和 $(-1,1,0)$ 都正交的单位向量是（　）。

解. 设满足题设条件的单位向量为 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+2\boldsymbol{\eta}_3=0, \\ -\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=0, \\ \sqrt{\boldsymbol{\eta}_1^2+\boldsymbol{\eta}_2^2+\boldsymbol{\eta}_3^2}=1. \end{cases}$$

解得 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\pm(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$。 □

10. 令 $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ 的特征值为 1，2，3，4，则 $\mathrm{tr}(A^2)=$（　）。

解. 由 2014 年的填空题的第九题下的 Remarks 知，A^2 的特征值为 1, 4, 9, 16，所以 $\mathrm{tr}(A^2)=1+4+9+16=30$。 □

二、（15 分）在 $\mathbb{R}^3$ 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为

$$\begin{cases} \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0), \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2=(3,3,2), \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,1). \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0), \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0), \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1). \end{cases}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 B。

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量。

解. (1) 因为

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$B=\begin{pmatrix} \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda I-B|=-(x+1)(x-1)(x-3).$$

所以 $\mathscr{A}$ 的特征值为 -1, 1 , 3。

解线性方程组 $(-I-B)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解线性方程组 $(I-B)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

解线性方程组 $(3I-B)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因此 $\mathscr{A}$ 的对应于 -1 的特征向量为 $k(0,-1,1)',k\in\mathbb{R},k\neq 0$，$\mathscr{A}$ 的对应于 -1 的特征向量为 $l(1,0,0)',l\in\mathbb{R},l\neq 0$，$\mathscr{A}$ 的对应于 -1 的特征向量为 $m(0,1,1)',m\in\mathbb{R},m\neq 0$。 □

三、（15 分）设

$$V=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\middle|\operatorname{tr}(A)=0\right\},W=\{aE|a\in\mathbb{R}\}.$$

(1) 求证 V 为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间，并求 $\dim V$。

(2) 求证 $\mathbb{R}^{n\times n}=V\oplus W$。

证明. (1) 易知 V 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子集。因为 $0\in V$，所以 V 非空。又

$$\begin{aligned}
&B,C\in V \quad\Longrightarrow \operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=0\Longrightarrow\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)=0\Longrightarrow\quad A+B\in V,\\
&A\in V,k\in\mathbb{R}\Longrightarrow\operatorname{tr}(A)=0\Longrightarrow\operatorname{tr}(kA)=k\operatorname{tr}(A)=0\quad\Longrightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in V.
\end{aligned}$$

因此 V 对于矩阵的加法和纯量乘法封闭，于是 V 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间。

$$\begin{aligned}
&X=(x_{ij})\in V\\
&\quad\Longleftrightarrow x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}=0\\
&\quad\Longleftrightarrow X=x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+\cdots+x_{1n}E_{1n}\\
&\qquad\qquad+x_{21}E_{11}+x_{22}E_{22}+\cdots+x_{2n}E_{2n}\\
&\qquad\qquad+\cdots\\
&\qquad\qquad+x_{n1}E_{n1}+x_{n2}E_{n2}+\cdots-(x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{n-1,n-1})E_{nn}\\
&\quad\Longleftrightarrow X=x_{11}(E_{11}-E_{nn})+x_{12}E_{12}+\cdots+x_{1n}E_{1n}\\
&\qquad\qquad+x_{21}E_{21}+x_{22}(E_{22}-E_{nn})+\cdots+x_{2n}E_{2n}\\
&\qquad\qquad+\cdots\\
&\qquad\qquad+x_{n1}E_{n1}+x_{n2}E_{n2}+\cdots+x_{n,n-1}E_{n,n-1}
\end{aligned}$$

又容易验证 $E_{11}-E_{nn},E_{12},\ldots,E_{1n},E_{21},E_{22}-E_{nn},E_{23},\ldots,E_{2n},\ldots,E_{n-1,1},\ldots,E_{n-1,n-1}-E_{nn},E_{n-1,n},E_{n1},E_{n2},\ldots$ 线性无关。因此它们就是 V 的一个基，从而

$$\dim V=n^2-1.$$

(2) 第 1 步，证明 $\mathbb{R}^{n\times n}=V+W$。任取 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，想把 A 表示成 A_1+A_2，其中 $A_1\in V, A_2\in W$。设 $A_2=kI$，令 $A_1=A-A_2$，它应满足 $\mathrm{tr}(A_1)=0$，即 $(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})-nk=0$。于是有 $k=\frac{1}{n}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a+nn)$。由此构造的 A_1 与 A_2 就满足 $A=A_1+A_2$。于是 $A\in V+W$。从而得出

$$\mathbb{R}^{n\times n}=V+W.$$

第 2 步，证明和 $V\oplus W$ 是直和。因为

$$\dim V+\dim W=n^2-1+1=n^2=\dim\mathbb{R}^{n\times n}=\dim(V+W).$$

所以和 $V\oplus W$ 是直和。 □

四、（15 分）设 4 元二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2+2x_3x_4.$$

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵表达式 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^TAX$。

(2) 求 A 的特征值和特征向量。

(3) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角阵。

(4) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的标准型。

解. (1)

$$X^TAX=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵 A 的特征多项式为：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&-1\\0&0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2\left(\lambda-1\right)^2.$$

所以 A 的特征值为-1（二重），1（二重）。
解线性方程组 $(-I-A)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,-1)'.$$

解线性方程组 $(I-a)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,0,0)',\boldsymbol{\xi}_4=(0,0,1,1)'.$$

因此，A 的属于特征值 -1 的特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}_1+l\boldsymbol{\xi}_2,k,l\in\mathbb{Z}$，$A$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $m\boldsymbol{\xi}_3+n\boldsymbol{\xi}_4,m,n\in\mathbb{Z}$。

(3) 注意到 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 两两正交。下面将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 单位化。

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)';$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2|}=\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)';$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)';$$

$$\boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{\xi}_4}{|\boldsymbol{\xi}_4|}=\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)'.$$

令 $P=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)$，则 P 是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{-1,-1,1,1\}.$$

(4) 标准型为

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

□

五、（15 分）设矩阵 A 与 B 没有公共的特征值，$f_A(x)$ 是 A 的特征多项式，证明:

(1) 矩阵 $f_A(B)$ 可逆。

(2) 矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解。

证明. (1) 设

$$f_A(x)=(x-\lambda_1)^{l_1}(x-\lambda_2)^{l_2}\cdots(x-\lambda_s)^{l_s}.$$

则

$$f_A(B)=(B-\lambda_1 I)^{l_1}(B-\lambda_2 I)^{l_2}\cdots(B-\lambda_s I)^{l_s}.$$

因为矩阵 A 与 B 没有公共的特征值，所以

$$|B-\lambda_i I|\neq 0, i=1,2,\ldots,s.$$

因此，

$$|f_A(B)|\neq 0.$$

故矩阵 $f_A(B)$ 可逆。

(2) 设 C 是矩阵方程 $AX=XB$ 的一个解，则

$$f_A(A)C=Cf_A(B).$$

因此

$$Cf_A(B)=0,$$

因为矩阵 $f_A(B)$ 可逆，所以 $C=0$。因此矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解。 □

六、（15 分）设 A 是 n 阶正定阵，求证：存在唯一的正定阵 B，使得

$$A = B^2.$$

解. 存在性。设 A 是 n 级正定矩阵，则 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 全大于 0。由于 A 是实对称矩阵，因此存在 n 级正交矩阵 T，使得

$$\begin{aligned}
A &= T^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} T \\
&= T^{-1} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right\} T \quad T^{-1} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right\} T \\
&= B^2,
\end{aligned}$$

其中

$$B = T^{-1} \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right\} T.$$

显然 B 是正定矩阵。

唯一性。设还有一个 n 级正定矩阵 C，使得 $A = C$。设 C 的全部特征值是 $v_1, v_2\ \ldots, v_n$，则 A 的全部特征值是 $v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2$。设 B 的全部特征值是 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$，则 A 的全部特征值是 $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2$。于是适当调换 $v_1, v_2\ \ldots, v_n$ 的下标可以使 $\mu_i^2 = v_i^2, i = 1, 2, \ldots, n$。由于 μ_i, v_i 都大于 0，因此 $\mu_i = v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。

由于 B 和 C 都是 n 级实对称矩阵，因此存在 n 级正交矩阵 T，T_1，使得

$$\begin{aligned}
B &= T^{-1} \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\rangle T, \\
C &= T^{-1} \operatorname{diag}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} T_1.
\end{aligned}$$

由于 $B^2 = A = C^2$，且 $\mu_i = v_i, i = 1, 2, \ldots, n$，因此

$$T^{-1} \operatorname{diag}\left\{\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\right\} T = T_1^{-1} \operatorname{diag}\left\{\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\right\} T_1.$$

两边左乘 T_1，右乘 T^{-1}，得

$$T_1 T^{-1} \operatorname{diag}\left\{\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\right\} = \operatorname{diag}\left\{\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\right\} T_1 T^{-1}. \tag{6}$$

记 $T_1 T^{-1} = (t_{ij})$。比较 (9) 式两边的 (i, j) 元，得

$$t_{ij} \mu_j^2 = \mu_i^2 t_{ij} \tag{7}$$

若 $t_{ij} \neq 0$，则从 (7) 式得，$\mu_j^2 = \mu_i^2$，由于 μ_j, μ_i 都是正数，因此 $\mu_j = \mu_i$，从而有

$$t_{ij} \mu_j = \mu_i t_{ij}. \tag{8}$$

若 $t_{ij} = 0$，则显然 (8) 式也成立。由于 (8) 式对于 $1 \leq i, j \leq n$ 都成立，因此

$$T_1 T^{-1} \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} = \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} T_1 T^{-1} \tag{9}$$

从而

$$T^{-1} \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} T = T_1^{-1} \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} T_1.$$

即 $B = C$。这就证明了唯一性。 □

七、（15 分）设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，A 是 V 上的线性变换。证明：A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \ldots, \mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 也是 V 的基。

证明. 因为 $\dim V = n$，所以

A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \ldots, \mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 也是 V 的基。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \ldots, \mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 线性无关。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当对任意的一组常数 $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$，

若 $k_1\mathscr{A}(\varepsilon_1) + k_2\mathscr{A}(\varepsilon_2) + \cdots + k_n\mathscr{A}(\varepsilon_n) = 0$，则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当对任意的一组常数 $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$，

若 $\mathscr{A}(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n) = 0$，则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当对任意的向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，若 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$，则 $\boldsymbol{\alpha} = 0$。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是单射。

因为有限维空间之间的单射必是满射，所以

A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是单射。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是单射且 $\mathscr{A}$ 是满射。

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是可逆的线性变换。

这是显然的。 □

八、（15 分）设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为 n 维欧式空间 V 上的两个线性变换。若对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B}\boldsymbol{\alpha})$$

则 $\mathscr{A}V$ 与 $\mathscr{B}V$ 作为欧式空间是同构的。

证明. 设欧式空间 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的欧式空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一个基，由第七题知，$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\mathscr{A}V$ 的一个基，$\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\mathscr{B}V$ 的一个基。令

$$\sigma(t_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + t_2\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + t_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n) = t_1\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + t_2\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + t_n\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (t_i \in \mathbb{K}).$$

我们来证明 σ 是 $\mathscr{A}V$ 到 $\mathscr{B}V$ 的同构映射。

(i) 显然 $\mathscr{A}V$ 中任一向量 $t_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + t_2\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + t_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 被 σ 映为 $\mathscr{B}V$ 中的向量 $t_1\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + t_2\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + t_n\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_n$；而且 $\mathscr{B}V$ 中的任何向量 $t_1\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + t_2\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + t_n\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 都是 $\mathscr{A}V$ 中的向量 $t_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + t_2\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + t_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 在 σ 下的象，因此 $\mathscr{A}V$ 到 $\mathscr{B}V$ 的映射 σ 是映上的。

(ii) 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathscr{A}V$，则

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\beta} = \sum_{k=1}^{n} d_k\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \sigma(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{n} d_k\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_k.$$

其中 $c_k, d_k \in \mathbb{K}$。若 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\boldsymbol{\beta})$，则由上式得到

$$\delta = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) - \sigma(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_k = 0.$$

于是

$$(\delta, \delta) = \sum_{1 \leq i, j \leqslant n} (c_i - d_i)(c_j - d_j)(\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_j) = 0.$$

记

$$\theta = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k - \sum_{k=1}^{n} d_k \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k = \sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k.$$

依题设条件及内积性质，我们有

$$\begin{aligned}
(\theta, \theta) &= \left(\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k \right) \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leqslant n} (c_i - d_i)(c_j - d_j)(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j) \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leqslant n} (c_i - d_i)(c_j - d_j)(\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_j) \\
&= (\delta, \delta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此 $\theta = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$，故 σ 是单射，从而 σ 是 $\mathscr{A}V$ 到 $\mathscr{B}V$ 的一一映射。

(iii) 此外，依 σ 的定义知

$$\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) &= \sigma\left(\sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_k + \sum_{k=1}^{n} d_k \mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_k \\
&= \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\beta}).
\end{aligned}$$

类似地可验证

$$\sigma(a\boldsymbol{\alpha}) = a\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \text{其中 } a \in \mathbb{K},$$

以及

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

由 (1)、(2)、(3) 得，σ 是 $\mathscr{A}V$ 到 $\mathscr{B}V$ 的同构映射。于是 $\mathscr{A}V$ 与 $\mathscr{B}V$ 作为欧式空间是同构的。 □

8　2011

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 多项式 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 1$ 在有理数域上是（　）。(可约或不可约)

解. 因为 $f(x)$ 是一个次数大于 0 的本原多项式，且存在素数 2，使得

$$\begin{cases} 2 \mid 2,\ 2 \mid 4,\ 2 \mid 6, \\ 2 \nmid 1, \\ 2^2 \nmid 2. \end{cases}$$

所以，由 Eisenstein 判别法知，$f(x)$ 在有理数域上不可约。 □

2. 设 A 和 B 均为 n 阶方阵，A^* 与 B^* 分别为他们的伴随矩阵，$|A| = 2, |B| = -3$，则 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}|$ =（　）。

解.

$$\begin{aligned} \left|A^{-1}\left|B\right|B^{-1}\right| &= \left|\left(\left|B\right| - \left|A\right|\right)A^{-1}B^{-1}\right| \\ &= \left(\left|B\right| - \left|A\right|\right)^n \left|A\right|^{-1}\left|B\right|^{-1} \\ &= \frac{-\left(-5\right)^n}{6}. \end{aligned}$$

□

3. 设 3 阶方阵 A 按下列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$，且 $|A| = 5$，又设 $B = (A_1 + 2A_2, 3A_1 + 4A_3)$，则 $|B| =$（　）。

解.

$$\begin{aligned} |B| &= |(A_1 + 2A_2, 3A_1 + 4A_3)| = |(A_1, 3A_1 + 4A_3)| + |(2A_2, 3A_1 + 4A_3)| \\ &= 0 + 24|(A_2, A_1, A_3)| = -24|(A_2, A_1, A_3)| \\ &= -24 \times 5 = -120. \end{aligned}$$

□

4. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, t, 0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2，则 $t =$（　）。

解. 对

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}$$

作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & 0 & 3-t & 0 \end{pmatrix}$$

因此，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，则 $t = 3$。 □

5. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 合同，则二次型 X^TAX 的规范型为（　）。

解. 先求实对称矩阵 B 的特征值。因为

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

所以，矩阵 B 的特征值为 -2 ，1，2。

所以，二次型 X^TBX 的秩为 3 ，正惯性指数为 2 。因为实对称矩阵 A 与实对称矩阵 B 合同，所以二次型 XA^TX 的秩为 3，正惯性指数为 2。

所以，二次型 X^TAX 的规范型是 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$。 □

6. $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$ 下的坐标是（　）。

解. 设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则向量 (k_1,k_2,k_3) 满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

解线性方程组 (10) 得，

$$\begin{cases} k_1 = x_1, \\ k_2 = x_2 - x_1, \\ k_3 = x_3 - x_2. \end{cases}$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 (x_1,x_2-x_1,x_3-x_2)。 □

7. 设 3 阶方阵 A 的三个特征值为 $1,2,-2$，矩阵 B 与 A 相似，则 B 的伴随矩阵 B^* 的三个特征值为（　）。

解. 先研究下述命题:

设 A 是复数域上的 n 级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，求 A^* 的全部特征值。

解. 情形 1。由于 $AA^*=|A|I$，因此 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 A^* 的全部特征值是

$$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n, \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n, \ldots, \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}.$$

情形 2。A 不可逆。此时 0 是 A 的一个特征值，不妨设 $\lambda_n=0$。由于当 $\operatorname{rank}(A)<n-1$ 时，$A^*=0$。此时 0 是 A^* 的 n 重特征值。当 $\operatorname{rank}(A)=n-1$ 时，$\operatorname{rank}(A^*)=1$，从而 $(0I-A^*)X=0$ 的解空间的维数等于 $n-1$，于是 0 是 A^* 的至少 $n-1$ 重特征值。设 μ 也是 A^* 的一个特征值，则 $|\lambda I-A^*|=\lambda^{n-1}(\lambda-\mu)$。从而 $\mu=\operatorname{tr}(A^*)=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$。由于 $\lambda I-A|$ 的一次项系数等于 $(-1)^{n-1}$ 乘以 A 的所有 $n-1$ 阶主子式的和，从而等于 $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n A_n$。又 A 的一次项系数等于 $(-1)^{n-1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$。于是 A^* 的全部特征值是 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}, 0$（至少 $n-1$ 重）。 □

回到原题。B 的特征值为 $1,2,-2$，所以 B^* 的特征值为 $-4,-2,2$。 □

注 8.1. 一个更一般的命题是：

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的特征多项式在复数域上的全部根，则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征多项式在复数域中的全部根为

$$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n,\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n,\ldots,\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}.$$

先证明下面三个引理：

引理 8.1. 任一 n 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。

证明. 对复矩阵的级数 n 作数学归纳法。$n=1$ 时，显然命题为真，假设 $n-1$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。现在来看 n 级复矩阵 A。设 λ_1 是 n 级复矩阵 A 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是属于 λ_1 的一个特征向量。把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的一个基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$。令 $P_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 P_1 是 n 级可逆矩阵，且

$$P_1^{-1}AP_1=P_1^{-1}\left(A\boldsymbol{a}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{a}_n\right)=\left(P_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,P_1^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_n\right).$$

由于 $P_1^{-1}P_1=I$，因此 $P_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\epsilon_1$。从而

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

对 $n-1$ 级复矩阵 B 用归纳假设，由 $n-1$ 级可逆矩阵 P_2，使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵。令

$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}$$

则 P 是 n 级可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}P_2\\ \mathbf{0} & P_2^{-1}BP_2\end{pmatrix}.$$

因此 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理，对一切正整数 n，此命题为真。 □

引理 8.2. 设 A,B 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵 $(n\geq 2)$。A^*，B^* 分别是 A,B 的伴随矩阵，如果 $A\sim B$，那么 $A^*\sim B^*$。

证明. 如果 $A\sim B$，则存在 $\mathbb{K}$ 上 n 级可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，所以 $P^*A^*\left(P^{-1}\right)^*=B^*$，$\left(P^{-1}\right)^*=(P^*)^{-1}$，从而

$$P^*A^*\left(P^*\right)^{-1}=B^*.$$

因此 $A^*\sim B^*$。 □

引理 8.3. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵，如果 A 可对角化，那么 A 的伴随矩阵 A^* 也可对角化。

证明. 若 A 可对角化，则 $A\sim D$，其中 $D=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_z,\ldots,\lambda_n\}$。据 (8.2) 得，$A^*\sim D^*$。直接计算可得

$$D^*=\begin{pmatrix}\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\end{pmatrix}.$$

因此 A^* 可对角化。 □

接下来回到以上命题：

证明. 把 A 看成复矩阵，据 (8.1) 得，$A \sim B$，其中 B 是上三角矩阵，B 的主对角元为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。据 (8.3) 得，$A^* \sim B^*$。直接计算可得

$$B^* = \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $|\lambda I - A^*| = |\lambda I - B^*|$，因此 A^* 的特征多项式在复数域中的全部根是：

$$\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n, \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n, \ldots, \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}.$$

□

8. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则 A 的最小多项式为（ ）。

解. A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

因为 $A(A-3I)=0$，所以 A 的最小多项式为 $m(\lambda)=\lambda(\lambda-3)$。 □

9. $\mathbb{R}^3$ 中的子空间 $V_1 = L(\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)$，则 $V_1^{\perp} =$（ ）。

解. 解线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}X = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1,-1,0)', \boldsymbol{\eta}_2 = (1,0,-1)'.$$

因此 $V_1^{\perp} = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2\}$。 □

10. 特征值为 1，1，1，1 的一切 4×4 复数矩阵在复数域内按相似可分为（ ）类。

解. 5。 □

二、 已知实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

问：

(1) x, y 为何值时，A 合同于 B?

(2) x, y 为何值时，A 相似于 B?

解. (1) 若 A 与 B 合同，则 A 与 B 有相同的秩与正惯性指数。对 A 和 B 作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0\\0&x-2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4&y\\3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0\\0&1-\frac{3}{4}y\end{pmatrix}.$$

因此，应当有

$$\begin{cases}x-2=0\\1-\frac{3}{4}y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2>0\\1-\frac{3}{4}y>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2<0\\1-\frac{3}{4}y<0\end{cases}$$

即

$$x=2,y=\frac{4}{3}\text{或}x>2,y<\frac{4}{3}\text{或}x<2,y>\frac{4}{3}.$$

(2) A 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\lambda^2-(2+x)\lambda+2x-4.$$

B 的特征多项式为

$$|\lambda I-B|=\lambda^2-5\lambda+4-3y.$$

若 A 与 B 相似，则 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$，因此

$$\begin{cases}2+x=5\\2x+4=4-3y\end{cases}$$

解得 $x=3,y=\frac{3}{2}$。 □

三、 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

且 A 与 B 相似。

(1) 求 α 和 β 的值;

(2) 求可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$。

解. (1) A 的特征多项式为:

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3-(1+2\alpha+\beta^2)(\lambda-1)-(2+\alpha)\beta.$$

B 的特征多项式为:

$$|\lambda I-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

解

$$\begin{cases}-1-\left(1+2\alpha+\beta^2\right)(-1)-(2+\alpha)\beta=0,\\-(2+\alpha)\beta=0,\\1-\left(1+2\alpha+\beta^2\right)-(2+\alpha)\beta=0.\end{cases}$$

得

$$\alpha=0,\beta=0\text{ 或 }\alpha=-2,\beta=\pm2.$$

(2) □

四、 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1).$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵。

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,-2)$，求 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,2)$ 下的坐标。

(3) $\mathscr{A}$ 是否可逆？若可逆，求 $\mathscr{A}^{-1}$，若不可逆，说明原因。

解. (1) 由已知，

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，$\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由已知

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解线性方程组

$$X\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha},$$

得一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi} = (0,0,-1).$$

因此

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\xi}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = (0,-1,0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = (0,-1,0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}.$$

故坐标为 $(0,-1,0)$。

(3) 因为 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$|A| \neq 0$，所以 $\mathscr{A}$ 可逆。又因为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

所以 $\mathscr{A}^{-1}$ 为

$$\mathscr{A}^{-1}(x_1,x_2,x_3)=(x_3,-x_1+2x_3,x_1+x_2-2x_3).$$

$\square$

五、 分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}.$$

为正定矩阵，其中 B 是 B 的转置。证明：

(1) A 可逆。

(2) $D-B^TA^{-1}B$ 也是正定。

证明. (1) 由于 M 正定，因此 M 的所有主子式全大于 0。而 A 是 M 的 r 阶顺序主子式，因此 $|A|\neq 0$，从而 A 可逆。

(2) 引理：设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

是一个 n 级对称矩阵，且 A_1 是 r 级可逆矩阵。证明：

$$A\simeq\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

证明. 由于 A 是对称矩阵，因此 $A'=A$，即

$$\begin{pmatrix} A_1' & A_3' \\ A_2' & A_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

从而 A_1，A 都是对称矩阵，且 $A_3=A_2'$。由于 A_1 可逆，因此

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2' & A_4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4-A_2^{'}A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_2'A_1^{-1} & I_{nr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I_{mr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $\left(-A_1^{-1}A_2\right)'=-A_2'\left(A_1^{-1}\right)'=-A_2'\left(A_1'\right)^{-1}=-A_2'A_1^{-1}$，因此从上式推出

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

回到原题，由引理得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix}.$$

从而上式右边的矩阵也是正定矩阵。于是根据刚才证得的结论，$D-B'A^{-1}B$ 是正定矩阵。

$\square$

六、 给定数域 $\mathbb{P}$ 上的分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 A 为 $m\times n$ 的矩阵，B 为 $k\times l$ 的矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\leq \operatorname{rank}(M).$$

注：$\operatorname{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

解. 设 $\operatorname{rank}(A)=r, \operatorname{rank}(B)=t$。则 A 有一个 r 级子矩阵 A_1，使得 $|A_1|\neq 0$；B 有一个 t 级子矩阵 B_1，使得 $|B_1|\neq 0$。从而 $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ 有一个 $r+t$ 阶子式：

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{vmatrix}=|A_1|\,|B_1|\neq 0.$$

因此

$$\operatorname{rank}(M)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\geq r+t=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

□

七、 设 A 是半正定矩阵, 证明存在唯一的半正定矩阵 B 使得

$$A=B^2.$$

解. 设 A 是 n 级半正定矩阵，则存在 n 级正交矩阵 T，使得

$$A=T^{-1}\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}T,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，它们全非负。于是有

$$\begin{aligned} A&=T^{-1}\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\right\}TT^{-1}\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\right\}T\\ &=C^2\end{aligned},$$

其中

$$C=T^{-1}\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\right\}T.$$

显然 C 是半正定矩阵。 □

八、 设 V 为 n 维欧式空间，求证：

(1) 对 V 中每个线性变换 $\mathscr{A}$，都存在唯一的共轭变换 $\mathscr{A}^*$，即存在唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$，使得对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta}).$$

(2) $\mathscr{A}$ 为对称变换当且仅当 $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$。

(3) $\mathscr{A}$ 为正交变换当且仅当

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

其中 $\mathscr{E}$ 是 V 上的恒等变换。

证明.

引理 8.4. 设 f 是域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数。则

f 是非退化的当且仅当映射 $R_f:\boldsymbol{\beta}\longmapsto\boldsymbol{\beta}_R$ 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射。

证明. 看 [3] 第 435 页。 □

(1) 任给 $\boldsymbol{\beta}\in V$，据已知条件和引理得，$R_f:\boldsymbol{\beta}\longmapsto\boldsymbol{\beta}_R$ 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射。由于 $\boldsymbol{\beta}_R\mathscr{A}\in V^*$，因此存在唯一的向量 $\boldsymbol{\beta}'\in V$，使得 $\boldsymbol{\beta}_R\mathscr{A}=\boldsymbol{\beta}'_R$，从而 $\boldsymbol{\beta}_R(\mathscr{A}a)=\boldsymbol{\beta}'_R(a),\forall a\in V$。于是有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}'\right),\quad\forall\boldsymbol{\alpha}\in V.\tag{11}$$

于是我们得到 V 到自身的一个映射 $\mathscr{A}^*:\boldsymbol{\beta}\longmapsto\boldsymbol{\beta}'$。由 (11) 式得

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta}),\quad\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.\tag{12}$$

现在来验证 A^* 是 V 上的线性变换。任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V,k\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*(k\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}))&=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\\&=\overline{k}\,(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=\overline{k}(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\boldsymbol{\gamma})\\&=(\boldsymbol{\alpha},k\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},k\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta}+\mathscr{A}^*\boldsymbol{\gamma}),\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{A}^*(k\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=k\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta}+\mathscr{A}^*\boldsymbol{\gamma}.$$

从而 $\mathscr{A}^*$ 是 V 上的一个线性变换。这证明了存在性。
唯一性。假设还有线性变换 $\mathscr{B}$ 使得

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}),\quad\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.\tag{13}$$

则从 (12) 和 (13) 式得

$$(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}),\quad\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.$$

由此得出，$\mathscr{A}^*\boldsymbol{\beta}=\mathscr{B}\boldsymbol{\beta},\forall\boldsymbol{\beta}\in V$，因此 $\mathscr{A}^*=\mathscr{B}$。

(2) 由对称变换的定义与 (1) 的唯一性即得。

(3) 充分性。因为 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{E}$，所以 $\mathscr{A}$ 是可逆的线性变换，当然是满的。又

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^*\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{E}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.$$

因此 $\mathscr{A}$ 为正交变换。

必要性。因为 $\mathscr{A}$ 是正交变换，所以

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}).$$

由伴随变换的唯一性知，$\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}^*$，所以

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

□

9 2012

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 三阶行列式有两个元素为 4，其余为 ± 1，则此行列式可能的最大值为（ ）。

解.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19.$$

□

2. 设 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 皆为三维列向量，$A = (\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\gamma}_1, 3\boldsymbol{\gamma}_2)$, $B = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_1, 2\boldsymbol{\gamma}_2)$ 且 $|A| = 18, |B| = 4$，则 $|A - B| =$（ ）。

解. $|A - B| = |(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)| = |(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)| - |(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)| = \frac{1}{6}|A| - \frac{1}{2}|B| = 3 - 2 = 1$。 □

3. 三阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$，则 $A^2 + 4A^{-1}$ 的特征值（ ）。

解. 显然，$5, -3, 6$。 □

4. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f^{(k)}(x)$ 的 s 重因子，且 $p(x)|f(x)$，那么 $p(x)$（ ）$f(x)$ 的 $s+k$ 重因子。

解. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 t 重因式，则 $p(x)$ 是 $f^{(k)}(x)$ 的 $t-k$ 重因式，因此 $t-k=s$，所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $s+k$ 重因式。 □

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2b & 0 \end{pmatrix}$$

相似于对角阵，则 a 与 b 的关系式为（ ）。

解. 矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda + 6)(\lambda - 6)^2.$$

因为 A 相似于对角阵，所以 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda + 6)(\lambda - 6).$$

因此 $(A + 6I)(A - 6I) = 0$，即

$$\begin{pmatrix} 0 & 6a + 18b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a + 12b & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

于是 $a + 3b = 0$。 □

6. 设 $\mathbb{R}^2$ 中的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\beta}, A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

在此内积之下的度量矩阵为（　）。

解. 设所求的度量矩阵为 B，记 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)', \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)'$，则

$$A=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1'A\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1'A\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_2'A\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2'A\boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

□

7. 令 $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ 的特征值为 $1,2,3,4$，则 $\operatorname{tr}\left(A^2\right)=$（　）。

解. $1+4+9+16=30$。 □

8. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，在矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件为（　）。

解. $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\ B)$。 □

9. 设 A 为正交矩阵, 且 $|A|=-1$，则 A 必有特征值为（　）。

解. -1。若全为 1，则 $|A|=1$。 □

10. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,k),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,k,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(k,1,1)$ 是线性无关的，则 k（　）。

解.

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3')|=\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}=(k-1)^2(k+2).$$

所以 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$。 □

二、（15 分）设

$$A=\begin{pmatrix}a&1&2\\1&b&1\\1&3b&1\end{pmatrix}.$$

B 是三阶非零方阵，且 $AB=O$，求 a,b 以及 B 的秩。

解. 对矩阵 A 作初等行变换得

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2-a\\0&0&-b\,(2-a)\end{pmatrix}$$

所以 $\text{rank}(A) \geq 2$。

又 B 是三阶非零方阵，所以 $\text{rank}B \geq 1$，于是由 Sylvester 不等式得

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 3.$$

因此 $\text{rank}(A) \leq 2$，所以 $\text{rank}(A) = 2$，即 $b = 0$ 且 $a = 2$，此时 $\text{rank}(B) = 1$。 □

三、（15 分）设 A 是 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶实方阵，证明：

(1) 若 B 正定，则 AB 的特征值皆大于 0。

(2) 若 B 正定，且 $AB = BA$，则 AB 正定。

证明. (1) 因为 A，B 都是 n 阶正定矩阵，所以存在正定矩阵 S，T，使得

$$S^{-1}(AB)S = S^{-1}S^2T^2S = ST^2S = (TS)'(TS) =: C.$$

因为 $C' = (TS)'(TS) = C$，所以 C 是实对称矩阵。

又对任意 n 维非零实向量 $\boldsymbol{x}$，由 TS 可逆知 $TS\boldsymbol{x} \neq 0$，故

$$\boldsymbol{x}'C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'(TS)'(TS)\boldsymbol{x} = (TS\boldsymbol{x})'(TS\boldsymbol{x}) > 0.$$

因此 C 是正定矩阵，从而 C 的特征值全大于零。因为 AB 与 C 相似，所以 AB 的特征值全大于零。

(2) 因为 $AB = AB$，所以

$$(AB)' = B'A' = BA = AB.$$

所以 AB 是实对称矩阵。由 (1) 知 AB 的特征值全大于零，故 AB 是正定矩阵。 □

四、 A 为 n 阶方阵，如果 $A^2 = A$，其中 E 是 n 阶单位矩阵。

五、 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

试求 A^n。

解. 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

所以 A 的特征值为 -5，1，5。

解线性方程组 $(-5I - A)x = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -2, 1)'.$$

解线性方程组 $(1I - A)x = 0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, 0)'.$$

解线性方程组 $(5I-A)x=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\left(1,\frac{1}{2},1\right)'.$$

令

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&\frac{1}{2}\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{-5,1,5\}.$$

因此

$$\begin{aligned}A^n&=\left(P\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{pmatrix}(-5)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&\frac{1}{2}\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-5)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\1&0&-1\\0&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2\cdot5^{n-1}-2(-1)^n5^{n-1}&-1+4\cdot5^{n-1}+(-1)^n5^{n-1}\\0&5^{n-1}+4(-1)^n5^{n-1}&2\cdot5^{n-1}-2(-1)^n5^{n-1}\\0&2\cdot5^{n-1}-2(-1)^n5^{n-1}&4\cdot5^{n-1}+(-1)^n5^{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

六、 设 A 为 n 阶实方阵，已知 A 的特征值全为实数，且

$$AA^T=A^TA.$$

证明：A 必为对称矩阵。

证明.

引理 9.1. n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是：A 的特征多项式在复数域中的根都是实数。

证明. 必要性。设 n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵 $B=(b_{ij})$，则

$$|xI-A|=|I-B|=(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\cdots(\lambda-b_m).$$

这表明 $|AI-A|$ 的根 $b_{11},b_{22},\ldots,b_{nn}$ 都是实数。

充分性。对实矩阵的级数作数学归纳法。$n=1$ 时，显然命题为真。假设对于 $n-1$ 级实矩阵命题为真，现在来看 n 级实矩阵 A。由于 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，因此可以取 A 的一个特征值 λ_1。设 $\boldsymbol{\eta}_1$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，且 $|\lambda|=1$。把 $\boldsymbol{\eta}_1$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，然后经

过施密特正交化和单位化，得到 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基：$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$。令 $T_1 = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n)$，则 T_1 是正交矩阵。

$$T_1^{-1}AT_1 = T_1^{-1}(A\boldsymbol{\eta}_1, A\boldsymbol{\eta}_2, \ldots, A\boldsymbol{\eta}_n) = (T_1^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1, T_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_2, \ldots, T_1^{-1}A\boldsymbol{\eta}_n).$$

由于 $T_1^{-1}T_1 = I$，因此 $T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\varepsilon_1}$。从而

$$T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

于是 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - B|$。因此 $n-1$ 级实矩阵 B 的特征多项式在复数域中的根都是实数。从而对 B 可用归纳假设：存在 $n-1$ 级正交矩阵 T_2，使得 $T_2^{-1}BT_2$ 为上三角矩阵。

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则 T 是 n 级正交矩阵，且

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix}^{-1} T_1^{-1}AT_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}T_2 \\ \mathbf{0} & T_2^{-1}BT_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵。

据数学归纳法原理，对一切正整数 n，此命题为真。 □

由引理 (9.1) 得，存在 n 级正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT = B$，其中 $B = (b_{ij})$ 是上三角矩阵。从而 $T'A'(T^{-1})' = B'$，即 $T^{-1}A'T = B'$。由于 $AA' = A'A$，因此 $BB' = B'B$。于是

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^2, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

当 $i = 1$ 时，(14) 式成为

$$\sum_{k=1}^{n} b_{1k}^2 = b_{11}^2.$$

由此推出，$b_{12}^2 + b_{13}^2 + \cdots + b_{1n}^2 = 0$。从而 $b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0$。

当 $i = 2$ 时，(14) 式成为

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2k}^2 = b_{12}^2 + b_{22}^2 = b_{22}^2.$$

由此推出，$b_{23} = b_{24} = \cdots = b_{2n} = 0$。

依次下去，可得

$$b_{34} = \cdots = b_{3n} = 0, \ldots, b_{n-1,n} = 0.$$

因此 B 是对角矩阵。由于 A 正交相似于对角矩阵 B，因此 A 是对称矩阵。 □

七、 设

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 3b & 1 \end{pmatrix}.$$

B 是三阶非零方阵，且 $AB=O$，求 a,b 以及 B 的秩。

解. 重复。 □

八、（15 分）设 A B 为 n 元实对称矩阵，且 B 正定，求证：存在一个实可逆阵 P 使得 P^TAP 和 P^TBP 同时为对角阵。

证明. 由于 B 是 n 元正定矩阵。因此 $A\simeq I$。从而存在 n 元实可逆矩阵 P_1，使得 $P_1^TBP_1=I$。
由于 $(P_1^TAP_1)^T=P_1^TA^TP_1=P_1^TAP_1$，因此 $P_1^TAP_1$ 是 n 元实对称矩阵。于是存在 n 级正交矩阵 T，使得

$$T^T\left(P_1^TAP_1\right)T=T^{-1}\left(P_1^TAP_1\right)T=\operatorname{diag}\left\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\right\}.$$

令 $P=P_1T$，则 P 是实可逆矩阵，且使得

$$\begin{aligned} P^TBP &= \left(P_1T\right)^TB\left(P_1T\right)=T^T\left(P_1^TBP_1\right)T=T^TIT=I, \\ P^TAP &= T^T\left(P_1^TAP_1\right)T=\operatorname{diag}\left\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\right\}. \end{aligned}$$

□

10　2013

一、 填空题

1. 设 $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首一最大公因式为（　　）。

解. $(f(x),g(x))=(f(x),f(x)-g(x))=(x^4-10x^2+1,4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x)$。
显然 $x\nmid x^4-10x^2+1$，所以

$$(x^4-10x^2+1,4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x)=(x^4-10x^2+1,x^2-2\sqrt{2}x-1).$$

方程 $x^2-2\sqrt{2}x-1=0$ 的两个解为 $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$。不难验证 x_1 和 x_2 都不满足方程 $x^4-10x^2+1=0$，所以 x^4-10x^2+1 和 $x^2-2\sqrt{2}x-1$ 没有相同的实数根，所以 $(x^4-10x^2+1,x^2-2\sqrt{2}x-1)=1$，因此 $(f(x),g(x))=1$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为 1。 □

2. 行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

中，第一行元素的代数余子式之和为（　　）。

解. 将题中行列式的第一行元素全换为 1，则原行列式的第一行元素的代数余子式之和为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

□

3. 设

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -10 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

则 $A^{2015}=$（　　）。

解. 先求矩阵 A 的特征多项式：

$$\phi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -2 \\ -8 & \lambda & -4 \\ 10 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1).$$

用 $\varphi(\lambda)$ 去除 λ^n，作带余除法，得

$$\lambda^n = h(\lambda)\varphi(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c. \tag{15}$$

其中 $h(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda], a, b, c\in\mathbb{R}$。

由于 0 是 A 的 2 重特征值，-1 是 A 的 1 重特征值，因此在 (15) 中分别令 $\lambda=0, \lambda=-1$ 有

$$\begin{cases} 0 = c, \\ (-1)^n = a - b + c. \end{cases} \tag{16}$$

在 (15) 式两端同时求导，得

$$n\lambda^{n-1} = h'(\lambda)\phi(\lambda) + h(\lambda)\phi'(\lambda) + 2a\lambda + b. \tag{17}$$

在 (17) 中令 $\lambda=0$，得

$$0 = b. \tag{18}$$

由 (16) 和 (18) 得

$$\begin{cases} a = (-1)^n, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

因此，

$$\lambda^n = h(\lambda)\phi(\lambda) + (-1)^n\lambda^2. \tag{19}$$

将 λ 用 A 代入 (19) 式，由 Hamilton–Cayley 定理得

$$A^{2015} = -A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -10 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

因此，

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -10 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

□

4. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=2$，A^* 为 A 的伴随阵，若 $M=\left(\begin{smallmatrix} A^2+3A^* & 2A^* \\ A & 0 \end{smallmatrix}\right)$，则 $(M^{-1})^* = (\quad)$。

解. $(M^{-1})^* = |M^{-1}|(M^{-1})^{-1} = |M^{-1}|M = \frac{1}{|M|}M$。

因为 $|M| = -|A||2A^*| = -|A|2^3|A|^2 = -64$，

所以

$$(M^{-1})^* = -\frac{1}{64}M = -\frac{1}{64}\begin{pmatrix} A^2+3A^* & 2A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

□

5. 多项式空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 上定义内积 $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一组标准正交基 $f_1(x)=1, f_2(x)=$ $(\quad)$。

解. 取 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一个基是 $1, x$。先用 Schmidt 正交化法求出与 $f_1(x)$ 正交的向量 $g_2(x)$，

$$g_2(x) = x - \frac{\int_0^1 x \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x} = x - \frac{1}{2}.$$

将 $g_2(x)$ 单位化，得

$$f_2(x) = \frac{g_2(x)}{\sqrt{(g_2(x), g_2(x))}} = \frac{g_2(x)}{\sqrt{\int_0^1 (x-t)^2 \, \mathrm{dx}}} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

因此，$f_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$。 □

6. 线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，基 (1)：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

基 (2)：

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则在基（1）与基（2）下有相同坐标的矩阵为（　）。

解. 设 A 在基（1）与基（2）下有相同的坐标 $(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$，则

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3 + x_4B_4.$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_2 + x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 & x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

由此得

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_4 = 0, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

因此，在基（1）与基（2）下有相同坐标的矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $k \in \mathbb{R}$。 □

7. 设 A 为 3 阶半正定阵，向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}^T A \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^T A \boldsymbol{\beta} = 0$，且 $\mathrm{tr} A = 2$，则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ 经正交变换 $x = Py$ 化成的标准形为（　）。

解. 由向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}^T A \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^T A \boldsymbol{\beta} = 0$ 得，A的秩为1，又 $\mathrm{tr}(A) = 2$，所以 A 的特征值为 2 （一重），0（二重）。因此，标准形为 $2y_1^2$。 □

8. 设 $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$，则 $3A^8 - 9A^7 + 6A^6 + A^5 - 3A^4 + 2A^3 + 2A + E =$ （　）。

解. A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

用 $f(\lambda)$ 去除 $3\lambda^8 - 9\lambda^7 + 6\lambda^6 + \lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda + 1 =: g(\lambda)$，作带余除法，得

$$g(\lambda) = h(\lambda)f(\lambda) + a\lambda + b. \tag{20}$$

其中，$h(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], a, b \in \mathbb{R}$.

在 (20) 式中分别令 $\lambda = 1, \lambda = 2$，得

$$\begin{cases} 3 = a + b, \\ 5 = 2a + b. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

因此

$$g(\lambda) = h(\lambda)f(\lambda) + 2\lambda + 1. \tag{21}$$

在 (21) 式中将 λ 用 A 代入，由 Hamilton–Cayley 定理，得

$$g(A) = 2A + E = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

因此，

$$3A^8 - 9A^7 + 6A^6 + A^5 - 3A^4 + 2A^3 + 2A + E = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

9. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1, -2, -2$，则 $|(\frac{1}{2}A)^*| =$（　）。

解. 因为 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4$，所以

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right| &= \left|\left|\frac{1}{2}A\right| \cdot \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right| = \left|\frac{1}{2}A\right|^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 |A|^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 4^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

11 2014

一、 填空题

1. 当 a, b 满足（　　）时，多项式 $f(x) = x^4 + 4ax - b$ 有重根。

解. 因为 $f'(x) = 4x^3 + 4a = 4(x + a^{\frac{1}{3}})(x^2 - a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}})$，且 $a^{\frac{2}{3}} - 4a^{\frac{2}{3}} < 0$，所以 $f'(x)$ 只有一个实数根 $x = -a^{\frac{1}{3}}$。所以

$$\begin{aligned}
&\text{多项式 } f(x) \text{ 有重根} \Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = (x + a^{\frac{1}{3}}) \\
&\Rightarrow (x + a^{\frac{1}{3}}) | f(x) \Rightarrow f(-a^{\frac{1}{3}}) = 0 \\
&\Rightarrow a^{\frac{4}{3}} - 4a^{\frac{4}{3}} - b = 0 \\
&\Rightarrow 3a^{\frac{4}{3}} + b = 0.
\end{aligned}$$

所以，a 和 b 应满足 $3a^{\frac{4}{3}} + b = 0$。 □

2. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}
5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5
\end{vmatrix}$$

的值为（　　）。

解. 先证明一般性命题：设

$$D_n = \begin{vmatrix}
a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b
\end{vmatrix}.$$

其中 $a \neq b$。当 $n \geq 3$ 时，将行列式按第一行展开，

$$\begin{aligned}
D_n &= (a+b)D_{n-1} + (-1)^{1+2}ab \cdot 1 \cdot D_{n-2}, \\
&= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.
\end{aligned}$$

所以有

$$D_n - aD_{n-1} = b\left(D_{n-1} - aD_{n-2}\right),$$

于是 $D_2 - aD_1, D_3 - aD_2, \dots, D_n - aD_{n-1}$ 是公比为 b 的等比数列。从而，

$$D_n - aD_{n-1} = \left(D_2 - aD_1\right) b^{n-2}.$$

由于

$$
\begin{aligned}
D_1 &= |a+b| = a+b, \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2.
\end{aligned}
$$

因此

$$D_2 - aD_1 = b^2.$$

又由上式得到

$$D_n - aD_{n-1} = b^n,$$

由对称性，

$$D_n - bD_{n-1} = a^n,$$

联立可解得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

记原行列式为 D，则

$$
D = 2^n \begin{vmatrix}
\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{5}{2} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{5}{2}
\end{vmatrix},
$$

对于上述命题取 $a=1, b=\frac{3}{2}$，即得

$$D = 2^n \frac{1 - (\frac{3}{2})^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

□

3. 设 A 为 n 阶反对称阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维单位列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}^T(A-E)\boldsymbol{\alpha} =$（　）。

解. 先证 $\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} = 0$。因为

$$\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha})^T = -\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha},$$

所以，

$$\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

因此，

$$\boldsymbol{\alpha}^T(A-E)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = -\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})} = -1.$$

□

4. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为（　）。

解. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 4，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。(题目中" 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关" 条件是多余的)

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组。

设

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中 $k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}$ ，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4。 □

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4, A = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 则方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为（　　）。

解. 由题目可知，方程组的一个特解为

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$，所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $AX = 0$ 的一个解。

又 $\operatorname{rank}(A) = 3$，所以 $AX = 0$ 的通解为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$。

所以，$AX=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}.$$

□

6. 线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，基 (1)：

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

到基 (2)：

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},B_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵为：

解. 取线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的自然基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$，其中 E_{ij} 是 (i,j) 元素为 1，其余元素为 0 的 2 阶实方阵。则有

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

同理，

$$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

设过渡矩阵为 P，则

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

故

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&0&0&1\\0&0&1&-1\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

□

7. 当 a 满足什么条件时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2$ 正定。

解. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

若 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定，则有

$$1>0,1-a^2>0.$$

因此，a 需满足的条件为 $-1<a<1$。 □

8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为（　）。

解. A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)^2$。

因为

$$A-I=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},A-4I=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

所以有

$$(A-I)(A-4I)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0,$$

因此 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 有重根。

所以 A 不可对角化，由题意易知 A 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

□

9. 设 A 为 3 阶奇异阵，$A+E$ 的行向量组线性相关，$\text{rank}(A+2E)=2$，则 $|A+3E|=$（　）。

解. 因为 A 为奇异矩阵，所以 $|A|=0$，所以 0 是 A 的一个特征值。

又

$$|-E-A|=(-1)^3|E+A|=0,$$
$$|-2E-A|=(-1)^3|2E+A|=0.$$

所以 A 的全部特征值为 0, -1 ,-2，所以 $A+3E$ 的全部特征值为 3, 2, 1。

因此，$|A+3E|=6$。 □

注 11.1. 一般地，设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 在复数域中的全部根（它们中可能有相同的），则

(1) 对于复数域上的任一多项式 $g(x)$，有 $|g(A)|=g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n)$;

(2) 对于数域 $\mathbb{K}$ 上任一多项式 $f(x)$，有 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征多项式 $|\lambda I - f(A)|$ 在复数域中的全部根，从而如果 λ_1 是 A 的 l_1 重特征值，那么 $f(\lambda_1)$ 是 $f(A)$ 的至少 l_1 重特征值。

证明. 由已知条件得，n 级矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在复数域中的因式分解为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \tag{22}$$

(1) 设 $g(x)$ 在复数域中的因式分解为

$$g(x) = b(x - \mu_1)(x - \mu_2)\cdots(x - \mu_n), \tag{23}$$

x 用 A 代入，由 (23) 式得,

$$g(A) = b(A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I)\cdots(A - \mu_n I). \tag{24}$$

x 用 λ_i 代入，由 (23) 式得

$$g(\lambda_i) = b(\lambda_i - \mu_1)(\lambda_i - \mu_2)\cdots(\lambda_i - \mu_n) = b\prod_{j=1}^{m}(\lambda_i - \mu_j). \tag{25}$$

由 (22) 式得,

$$|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda). \tag{26}$$

λ 用 μ_j 代入，把 (26) 式左端展开成 λ 的多项式后，由 (26) 式可得

$$|A - \mu_j I| = (\lambda_1 - \mu_j)(\lambda_2 - \mu_j)\cdots(\lambda_n - \mu_j) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mu_j). \tag{27}$$

由 (24)、(27) 和 (25) 得

$$|g(A)| = b^n|A - \mu_1 I||A - \mu_2 I|\cdots|A - \mu_m I| = b^n\prod_{j=1}^{m}|A - \mu_j I| \tag{28}$$

$$= b^n\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mu_j) = b^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\lambda_i - \mu_j) = \prod_{i=1}^{n}g\left(\lambda_i\right). \tag{29}$$

(2) 任给数域 $\mathbb{K}$ 上的一个多项式 $f(x)$。令

$$g(x) = \lambda - f(x), \tag{30}$$

其中 λ 可以取任意一个复数。当 λ 任意取定一个复数后，对 $g(x)$ 用第 (1) 小题的结论得

$$|g(A)| = \prod_{i=1}^{n}g\left(\lambda_i\right). \tag{31}$$

x 用 A 代入，由 (30)，得

$$g(A) = \lambda I - f(A). \tag{32}$$

x 用 λ_i 代入，由 (30)，得

$$g\left(\lambda_i\right) = \lambda - f\left(\lambda_i\right). \tag{33}$$

由 (31)、(32)、(33) 式，得

$$|\lambda I - f(A)| = \prod_{i=1}^{n}\left[\lambda - f\left(\lambda_i\right)\right]. \tag{34}$$

(34) 式对 λ 取任意一个复数都成立。于是 (34) 左端可以看成是变量 λ 的多项式函数，(34) 式就表明 λ 的多项式函数 $|\lambda I - f(A)|$ 在 $f\left(\lambda_1\right), f\left(\lambda_2\right), \ldots, f\left(\lambda_n\right)$ 处的函数值都为 0。从而 $f\left(\lambda_1\right), f\left(\lambda_2\right), \ldots, f\left(\lambda_n\right)$ 是 $f(A)$ 的特征多项式 $|\lambda I - f(A)|$ 在复数域中的全部根。 □

10. 在向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中规定内积 (不一定是标准内积) 后得到欧式空间 V ，且 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2)$ 的度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 10 & 17\end{pmatrix}$，则基 $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ 的度量矩阵为（　　）。

解. 设 V 的内积为 $(\cdot,\cdot)$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}6 & 10\\ 10 & 17\end{pmatrix},$$

所以,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)_1&=6,\\(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)_1&=10,\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)_1&=10,\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)_1&=17.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}e_1&=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\\e_2&=-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(e_1,e_1)_1&=(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)_1=1,\\(e_1,e_2)_1&=(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)_1=0,\\(e_2,e_1)_1&=(-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)_1=0,\\(e_2,e_2)_1&=(-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)_1=2.\end{aligned}$$

所以，e_1,e_2 的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

□

二、 设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的三维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 的一个线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 V 的一组基，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵。

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值，特征向量。

(3) 求 V 的一组基，使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为对角阵。

解. (1) 因为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

所以，σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

(2) 先求 A 的特征值和特征向量。因为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

所以，A 的特征值为 1（2 重），4（1 重）。

解线性方程组 $(A-I)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

解线性方程组 $(A-4I)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因此，A 的属于 1 的特征向量为：

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},l\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},k,l\in\mathbb{R},k,l\neq0.$$

A 的属于 4 的特征向量为：

$$m\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},m\in\mathbb{R},m\neq0.$$

故 σ 的特征值为 1(2 重)，4(1 重)。

σ 的属于 1 的特征向量为

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},l\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},k,l\in\mathbb{R},k,l\neq0.$$

σ 的属于 4 的特征向量为：

$$m\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},m\in\mathbb{R},m\neq0.$$

(3) 由 (2) 知，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 V 的一组基，且

$$\sigma(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 V 的满足条件的一组基。 □

三、 设 A 为 n 阶方阵 $(n > 1)$，求证：

(1) 若 $\mathrm{r}(A) = 1$，则存在 n 行 1 列矩阵 B 和 1 行 n 列矩阵 C 使 $A = BC$。

(2) 若 $\mathrm{r}(A) = 1$，且 $\operatorname{tr} A = 1$ 则 $A^n = A$。

证明. 设

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的列向量，$i = 1, 2, \ldots, n$。

因为 $\mathrm{r}(A) = 1$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 发的极大线性无关组中只有一个列向量，不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，则 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性组合。

故 $\boldsymbol{\alpha}_2 = k_2\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3 = k_3\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n = k_n\boldsymbol{\alpha}_1, (k_2, k_3, \ldots, k_n \in \mathbb{F})$。因此

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, k_n\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_1(1, k_2, \ldots, k_n).$$

取 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1, C = (1, k_2, \ldots, k_n)$ 即可。

(2) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{11} \\ \boldsymbol{\alpha}_{21} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_{k1} \in \mathbb{F}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

则

$$\operatorname{tr}(A) = \boldsymbol{\alpha}_{11} + k_2\boldsymbol{\alpha}_{21} + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_{n1} = (1, k_2, \ldots, n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{11} \\ \boldsymbol{\alpha}_{21} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n1} \end{pmatrix} = CB.$$

所以 $CB = 1$，故 $A^n = (BC)^n = B(CB)^{n-1}C = BC = A$。 □

四、 设 $V = \{A | \operatorname{tr} A = 0, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$。

(1) 求证：V 按通常的矩阵加法和数乘构成实数域上的线性空间。

(2) 求 $\dim V$，找出 V 的一组基，并用基的定义说明找出矩阵是 V 的基。

证明. (1) 证法一：任取 B，C，$D\in V$，k，$l\in\mathbb{R}$，

由矩阵的加法知，$B+C=C+B$(加法交换律)

由矩阵的加法知，$(B+C)+D=B+(C+D)$(加法结合律)

由矩阵的加法知，零矩阵是 V 的零元素

由矩阵的加法知，A 的负元素是 $-A$。

由矩阵的乘法知，$1A=A$，其中 1 是 $\mathbb{R}$ 的单位元。

由矩阵的乘法知，$(kl)A=k(lA)$。

由矩阵的加法和乘法知，$(k+l)A=kA+lA$。

由矩阵的加法和乘法知，$k(A+B)=kA+kB$。

因此 V 按通常的矩阵加法和数乘构成实数域上的线性空间。

证法二：易知 V 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子集。因为 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\in V$，所以 V 非空。又

$$
\begin{aligned}
&B,C\in V \quad \Longrightarrow \mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)=0 \Longrightarrow \mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)=0 \Longrightarrow \quad A+B\in V,\\
&A\in V,k\in\mathbb{R} \Longrightarrow \mathrm{tr}(A)=0 \Longrightarrow \mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}(A)=0 \quad \Longrightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in V.
\end{aligned}
$$

因此 V 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间，所以 V 按通常的矩阵加法和数乘构成实数域上的线性空间。

(2) 断言：

$$
K_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},K_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},K_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}
$$

是 V 的一个基。

证明：设

$$
k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0
$$

，则有

$$
\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&-k_1\end{pmatrix}=0.
$$

因此 $k_1=k_2=k_3=0$。所以 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 是线性无关的。

任取 $A\in V$，有

$$
A=\begin{pmatrix}l_1&l_2\\l_3&-l_1\end{pmatrix},
$$

其中 $l_1,l_2,l_3\in\mathbb{R}$。因此

$$
A=l_1K_1+l_2K_2+l_3K_3.
$$

所以 A 可以由 K_1，K_2，K_3 线性表出。

所以 K_1，K_2，K_3 是 V 的一个基。

因此，$\dim V=3$。 □

五、 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,a+4,2a+5,a+7),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,8,10),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,2a+3,5)$。当 a,b 如何取值时 $\boldsymbol{\beta}=(0,1,3,b)$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？

证明. 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4')$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}\text{ 不能由 }\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\text{ 线性表示} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}'\text{ 不能由 }\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4'\text{ 线性表示}\\ &\Leftrightarrow \text{线性方程组 } AX=\boldsymbol{\beta}'\text{ 无解}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)<\operatorname{rank}((A,\boldsymbol{\beta}')).\end{aligned}$$

对增广矩阵 $(A,\boldsymbol{\beta}')$ 作初等行变换，化其为行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2 & 0\\ 1 & a+4 & 6 & 3 & 1\\ 1 & 2a+5 & 8 & 2a+3 & 3\\ 2 & a+7 & 10 & 5 & b\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2 & 0\\ 0 & a+1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}=:A_1.$$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}.$$

故

$$\operatorname{rank}(A)=2,\operatorname{rank}((A,\boldsymbol{\beta}'))=3.$$

当 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，若 $b=1$，则

$$\operatorname{rank}(A)=3,\operatorname{rank}((A,\boldsymbol{\beta}'))=3.$$

若 $b\neq 1$，则

$$\operatorname{rank}(A)=3,\operatorname{rank}((A,\boldsymbol{\beta}'))=4.$$

因此，当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 且 $b\neq 1$ 时，$\operatorname{rank}(A)<\operatorname{rank}((A,\boldsymbol{\beta}'))$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示。 □

六、 设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间，V_1,V_2,V_3 是 V 的子空间。

(1) 判断命题“若 $V_1\cap V_2=\{0\},V_2\cap V_3=\{0\},V_3\cap V_1=\{0\}$ ，则 $V_1+V_2+V_3$ 为直和”是否正确，若正确给出证明，若不正确举出反例。

(2) 判断命题“若 $V_1\cap V_2=\{0\},V_3\cap(V_1+V_2)=\{0\}$，则 $V_1+V_2+V_3$ 为直和”是否正确，若正确给出证明，若不正确举出反例。

证明. (1) 错误。反例：$V_1=\{\boldsymbol{e}_1\}$，$V_2=\{\boldsymbol{e}_2\}$，$V_3=\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个线性无关的单位向量。

(2) 正确。设 Ω_1 是生成 V_1 的向量的集合，Ω_2 是生成 V_2 的向量的集合，Ω_3 是生成 V_1 的向量的集合。因为 $V_1\cap V_2=\{0\}$，所以 V_1+V_2 是直和，所以 $\Omega_1+\Omega_2$ 是生成 V_1+V_2 的向量的集合。因为 $V_3\cap(V_1+V_2)=\{0\}$，所以 $V_3+(V_1+V_2)$ 是直和，从而 $(\Omega_1\cup\Omega_2)\cup\Omega_3$ 是线性无关的，所以 $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3$ 是线性无关的，于是 $V_1+V_2+V_3$ 是直和。 □

注 11.2. 错解：因为

$$V_1\cap V_2=\{0\},V_1\cap V_3=\{0\}.$$

所以

$$V_1\cap(V_2+V_3)=\{0\}.$$

同理，有

$$V_2\cap(V_1+V_3)=\{0\},$$

$$V_3\cap(V_1+V_2)=\{0\}.$$

所以 $V_1+V_2+V_3$ 为直和。

错因：$V_1\cap(V_2+V_3)\supseteq(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3)$。

七、 设 n 阶实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 满足 $1<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n<2$，求证：对任意零实向量 X 总有

$$X^TX<X^TAX<2X^TX.$$

证明. 因为 A 是 n 阶实对称矩阵，A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，所以存在正交矩阵 U，使得

$$UAU^T=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}=:\Lambda_n.$$

任取非零实向量 X，令 $Y=UX$，则

$$X^TAX=X^TU^T\Lambda_nUX=Y^T\Lambda_nY=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

因为 $1<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n<2$，所以

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\ge\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)>y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=Y^TY=X^TX$$

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\le\lambda_n(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)<2(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=2Y^TY=2X^TX.$$

即 $X^TX<X^TAX<2X^TX$。由 X 的任意性知，命题成立。 □

八、 求证: 在 n 维欧式空间中，两两夹角成钝角的元素不多于 $n+1$ 个。

证明. (证明摘抄自 [4])

对维数 n 用数学归纳法。当 $n=1$ 时，任意向量都是单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的常数倍，考虑任意 3 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=c_i\boldsymbol{\varepsilon},(i=1,2,3)$。若 c_i 中有一个为 0（例如 $c_1=0$），则至多可能 $c_2c_3<0$，从而 $(\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=c_2c_3(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon})=c_2c_3<0$，因此至多可能有一对向量夹角是钝角。若 c_1,c_2,c_3 全不为 0，则 c_1,c_2,c_3 中至多有两对反号。因为 $(a_i,a_j)=c_ic_j(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon})=c_ic_j(i\ne j;i,j=1,2,3)$，因此至多有两对向量夹角是钝角。由此可知不存在 3 个或 3 个以上的向量，它们两两夹角都是钝角。这表明 $n=1$ 时命题成立。

设对于 $n-1$ 维欧氏空间，命题成立。考虑 n 维情形用反证法。假设存在 $n+2$ 个向量 $\boldsymbol{\gamma}_k\in\mathbb{R}^n(k=1,2,\ldots,n+2)$，其中任意两个夹角都是钝角。令 V_1 是 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 张成的（1 维）线性子空间，那么 $\mathbb{R}^n=V_1+V_1^\perp$，并且 $\mathrm{dim}V_1^\perp=n-1$。因为

$$\boldsymbol{\gamma}_k=f_k\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\eta}_k\quad(k=2,3,\ldots,n+2)$$

其中 $f_k \in \mathbb{R}, u_k \in V_i^{\perp}$（因而 $(\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_1) = 0$），并且对于 $k = 2, 3, \ldots, n+2$，$\boldsymbol{\gamma}_k$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 的夹角都是钝角，所以

$$(\boldsymbol{\gamma}_k, \boldsymbol{\gamma}_1) = f_k (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) + (\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_1) = f_k (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) < 0$$

从而 $f_k < 0 (k = 2, 3, \ldots, n+2)$。但由

$$\left(\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\gamma}_j\right) = \left(f_i \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\eta}_i, f_j \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\eta}_j\right) = f_i f_j (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) + \left(\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j\right)$$

可知当 $i, j = 2, 3, \ldots, n+2; i \neq j$(此时 $(v_i, v_j) < 0$)

$$\left(\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j\right) = \left(\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\gamma}_j\right) - f_i f_j (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) < 0$$

从而在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中存在 $n+1 = (n-1)+2$ 个向量 $\boldsymbol{\gamma}_k (k = 2, 3, \ldots, n+2)$，它们两两夹角都是钝角。这与归纳假设矛盾。于是归纳证明完成。 □

12 2015

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $\mathbb{P}$ 为包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{3}$ 的最小数域, 则 $\mathbb{P}$ 视为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间其维数是（ ）。

   解. 2。过程可参考 2005 年填空题第一题。 □

2. 若 $f(x)$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的不可约多项式, 则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的关系是（ ）。

   解. 互素。过程可参考 2006 年填空题第二题。 □

3. 若 A 为奇数阶反对称阵，则 $|A| =$（ ）。

   解. 0。过程可参考 2006 年填空题第三题。 □

4. 设 A 为方阵，且 $A^3 = 0$，则 $(E-A)^{-1} =$（ ）。

   解. $E + A + A^2$。过程可参考 2006 年填空题第四题。 □

5. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5 \in \mathbb{R}^5$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5, \boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性相关性是（ ）。

   解. 线性相关。过程可参考 2006 年填空题第五题。 □

6. 设 A ，B 为 n 阶方阵，且 $AB = 0$，则 $r(A) + r(B) \leq$（ ）。

   解. 由 Sylvester 不等式知
   $$r(A) + r(B) \leq n + r(AB) = n.$$
   □

7. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，$\mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = 0$，则 $\mathscr{A}$ 为（ ）线性变换

   解. 可逆。过程可参考 2006 年填空题第七题。 □

8. 设 A，B 为 n 阶方阵，且 A 可逆，则 AB 与 BA 的关系是（ ）。

   解. 相似，过程可参考 2006 年填空题第八题。 □

9. 若 A，B 为同阶正交阵，且 $|AB| = -1$，则 $|A + B| =$（ ）。

   解. 0。过程可参考 2006 年填空题第九题。 □

10. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，$r(A) = n$，则 n 元二次型 $X^T(A^TA)X$ 正定性为（ ）。

    解. 正定。 □

二、（15 分）设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的三维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 的一个线性变换，且 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 V 的另一个基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 使 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵 B 为对角阵。

(2) 求 A^k。

解. 重复。 □

三、（15 分）对齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

(1) 求其一个基础解系。

(2) 求其向量形式的通解。

证明. (1) 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

对矩阵 A 作初等行变换得

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得原线性方程组的一个基础解系

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)', \eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)', \eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)'.$$

(2) 通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

□

四、（15 分）设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2=\mathscr{A}+\mathscr{B},\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}.$$

求证：$\mathscr{A}\mathscr{B}=0$。

证明. 重复。 □

五、（15 分）设 $\mathscr{A}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$f_1(x),f_2(x)$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 中两个互素的多项式，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，求证:

$$\operatorname{Ker} f(\mathscr{A})=\operatorname{Ker} f_1(\mathscr{A})\oplus\operatorname{Ker} f_2(\mathscr{A}).$$

证明. 重复。 □

六、（15 分）设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换

$$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}.$$

求证：

(1) $V=\mathscr{A}(V)\oplus\operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

(2) 存在 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，在此基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $A=\operatorname{diag}\{1,\dots,1,0,\dots,0\}$ （对角线为 $1,\dots,1,0,\dots,0$ 的对角阵）。

证明. (1) 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}V$。由于

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=0,$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$。由于 $\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})$，因此

$$V=\mathscr{A}V+\operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

任取 $\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{A}V\cap\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，由于 $\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{A}V$，因此存在 $\boldsymbol{\gamma}\in V$，使得 $\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}$。由于 $\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，因此 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=0$。从而

$$0=\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}(\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma})=\mathscr{A}^2\boldsymbol{\gamma}=\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}.$$

于是

$$\mathscr{A}V\cap\operatorname{Ker}\sigma=0.$$

所以 $V=\mathscr{A}V\oplus\operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

(2) 在 $\mathscr{A}V$ 和 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 中分别取一个基，它们合起来是 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$，$\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r=\operatorname{rank}(A)$。 □

七、（15 分）设 A 为 n 阶方阵，λ_0 为 A 的特征值。此时我们称 $n-r\,(\lambda_0E-A)$ 为 λ_0 的几何重数，λ_0 作为 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|$ 之根的重数称为 λ_0 的代数重数。求证：λ_0 的几何重数不超过其代数重数。

证明. 重复。 □

八、（15 分）设 A, B 为 n 阶实对称阵，且 A 正定，求证：存在一个可逆矩阵 P 使得 P^TAP 和 P^TBP 同时为对角阵.

证明. 重复。 □

13 2016

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $(x-1)^2|Ax^4+Bx^2+1$，则 $A+B=(\quad)$。

解. 记 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$，则 1 是 $f(x)$ 的二重实根，因此，

$$f(1)=0.$$

故

$$A+B+1=0$$

因此 $A+B=-1$。 □

2. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&x^2&x^3\\1&-2&4&-8\\1&3&9&27\end{vmatrix}=0$$

的三个根为 x_1，x_2，x_3，则 $x_1+x_2+x_3=(\quad)$。

解.

$$\begin{aligned}f(x)&=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&x^2&x^3\\1&-2&4&-8\\1&3&9&27\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-1&x^2-1&x^3-1\\0&-3&3&-9\\0&2&8&26\end{vmatrix}\\&=6(x-1)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&x+1&x^2+x+1\\0&-1&1&-3\\0&1&4&13\end{vmatrix}=6(x-1)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&x+1&x^2+x+1\\0&0&x+2&(x+2)(x-1)\\0&0&-(x-3)&-(x-3)(x+4)\end{vmatrix}\\&=-6(x+2)(x-1)(x-3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&x+1&x^2+x+1\\0&0&1&(x-1)\\0&0&1&(x+4)\end{vmatrix}\\&=-30(x+2)(x-1)(x-3).\end{aligned}$$

所以，$f(x)$ 的三个根为 -2，1，3。因此，$x_1+x_2+x_3=2$。 □

3. 若方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\x_2-x_3=a_2,\\x_3-x_4=a_3,\\x_4-x_5=a_4,\\x_5-x_1=a_5.\end{cases}$$

有解，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(\quad)$。

解. 方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\-1&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

增广阵为

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A)=5$，所以方程组只有零解，所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$。 □

4. 若 3 阶可逆阵 A 交换 $1,3$ 行得 B，则 $AB-I=(\quad)$。

解. ??? □

5. 设 $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{smallmatrix}\right)$，$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-5)^5(x-6)^6+x+1$，则 $f(A)=(\quad)$。

解. 矩阵 A 的特征值分别为 $1,4,6$，由 Hamilton-Cayley 定理得

$$(A-I)(A-2I)^2(A-3I)^3(A-4I)^4(A-5I)^5(A-6I)^6=0.$$

所以

$$f(A)=A+I=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&5&5\\0&0&7\end{pmatrix}.$$

□

二、（15 分）设

$$D_n=\begin{vmatrix}x&y&y&\cdots&y&y\\z&x&y&\cdots&y&y\\z&z&x&\cdots&y&y\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&z&\cdots&x&y\\z&z&z&\cdots&z&x\end{vmatrix}.$$

(1) 当 $y=z$ 时，计算 D_n。

(2) 当 $y\neq z$ 时，计算 D_n。

证明. (1) 证法一：当 $x=z$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix} z & z & z & \cdots & z & z \\ z & z & z & \cdots & z & z \\ z & z & z & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z & z \\ z & z & z & \cdots & z & z \end{vmatrix}=0.$$

当 $x\neq z$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix} x & z & z & \cdots & z & z \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & z & z & \cdots & z & z \\ 0 & z & x & z & \cdots & z & z \\ 0 & z & z & x & \cdots & z & z \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & z & z & z & \cdots & x & z \\ 0 & z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & x-z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ -z & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & x-z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ -z & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+n\left(\frac{z}{x-z}\right) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$=\left[1+n\left(\frac{z}{x-z}\right)\right](x-z)^n=\left[x+(n-1)z\right](x-z)^{n-1}.$$

$x=z$ 时，上式仍然成立。因此，$D_n=[x+(n-1)z](x-z)^{n-1}$。

证法二：

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} x & z & z & \cdots & z & z \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+(n-1)z & x+(n-1)z & x+(n-1)z & \cdots & x+(n-1)z & x+(n-1)z \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= [x+(n-1)z] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ z & x & z & \cdots & z & z \\ z & z & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & z \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= [x+(n-1)z] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix} \\
&= [x+(n-1)z](x-z)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \tag{35}
$$

$$
= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{36}
$$

由对称性，

$$
D_n = |A'| = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{37}
$$

由 (35) 和 (37) 得，

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z} \quad (n \geq 2).$$

容易验证上式在 $n=1$ 时也成立。因此，

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}.$$

□

三、（15 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为一组 n 维向量，求证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件为：任意 n 维向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示。

证明. 必要性。设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。在 $\mathbb{K}^n$ 中任取一个向量 $\boldsymbol{\beta}$。由于 $\mathbb{K}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$ 必线性相关。从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。
充分性。设 $\mathbb{K}^n$ 中任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。因此

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\} < \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}.$$

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，因此 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\} = n$。从而 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\} = n$。于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。 □

四、（15 分）设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵，且 $|A| \neq 0, AC = CA$。求证：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证明.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

□

五、（15 分）设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求证：

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}n\,(n-1) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

证明. 因为

$$A = 2I + J, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$
\begin{aligned}
A^n &= (2I+J)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(2I)^{n-r}J^r = \binom{n}{0}(2I)^nJ^0 + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}J^1 + \binom{n}{2}(2I)^{n-2}J^2 \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

六、（15 分）设 A 为正交阵。

(1) 求证：对任意的 n 维向量 X，有 $\|AX\| = \|X\|$。

(2) 若 λ 为 A 的一个特征值，求证：$|\lambda| = 1$。

证明. (1) 对任意的 n 维向量 X，

$$\|AX\| = \sqrt{(AX, AX)} = \sqrt{X'A'AX} = \sqrt{X'X} = \sqrt{(X,X)} = \|X\|$$

(2) 取 A 对应于特征值 λ 的特征向量 X，由 (1) 得

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| = \|X\|.$$

因为 $X \neq 0$，所以 $|\lambda| = 1$。 □

七、（15 分）设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是空间 V 的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$。

(1) 求证：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也是空间 V 的基。

(2) 求基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵。

(3) 求 $\boldsymbol{\gamma} = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 4\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标。

证明. (1) 只需证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是线性无关的。

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = 0$，则

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1) = (k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = 0.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是空间 V 的一组基，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是线性无关的。所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是空间 V 的基。

(2) 因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

所以基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(4,-3,-1)'$。 □

八、（15 分）用正交线性替换化二次型为标准型，并判断

$$f(x_1,x_2,x_3)=1$$

为何种几何曲面？其中 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$。

证明. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9).$$

所以 A 的全部特征值为 0，4，9。

解线性方程组 $(0I-A)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,2)'.$$

解线性方程组 $(4I-A)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0)'.$$

解线性方程组 $(9I-A)X=0$，得一个基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_3=(7,-1,1)'.$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 分别单位化得:

$$\eta_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|}=\left(\frac{-\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)';$$
$$\eta_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)';$$
$$\eta_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\left(\frac{7\sqrt{51}}{51},\frac{-\sqrt{51}}{51},\frac{\sqrt{51}}{51}\right)'.$$

令

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{51}}{51}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{51}}{51}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{51}}{51}\end{pmatrix},$$

则 T 是正交阵，且 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}\{0,4,9\}$。

令

$$\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\\ x_3^*\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}. \tag{38}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=4{x_2^*}^2+9{x_3^*}^2.$$

下面判断曲面类型。作直角坐标变换 (38), 则原二次曲面 $5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3=1$ 在新的直角坐标系中的方程为:

$$4{x_2^*}^2+9{x_3^*}^2=1.$$

由此看出，这是椭圆柱面。 □

九、(15 分) 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，$f(0)$ 与 $f(1)$ 均为奇数，求证：$f(x)$ 没有整数根。

证明. 假如 $f(x)$ 有一个整数根 b，则 $x-b$ 是本原多项式，且 $x-b$ 是 $f(x)$ 的一个因式。又由于 $f(x)$ 也是本原多项式，因此存在整系数多项式 $h(x)$，使得

$$f(x)=(x-b)h(x).$$

x 分别用 0 和 1 代入，从上式得

$$f(0)=(-b)h(0),(1)=(1-b)h(1).$$

由于 $-b$ 和 $-b+1$ 必有一个是偶数，因此 $f(0)$ 和 $f(1)$ 必有一个是偶数。这与已知条件矛盾，所以 $f(x)$ 没有整数根。 □

十、(10 分) 设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 上的一个线性变换，$\mathrm{Im}\,(\mathscr{A})$ 与 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 分别为线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域和核空间，求证:

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\oplus\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=V$$

的充分必要条件为:

$$\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^2.$$

证明. 必要性。易知 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\subset\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$，下证 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2\subset\operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

任取向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$，有

$$\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}=0,$$

因此

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

又

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\mathscr{A},$$

且 $\operatorname{Im}\mathscr{A}+\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 是直和，所以

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=0,$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

故 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2\subset\operatorname{Ker}\mathscr{A}$。

充分性。只需证 $\operatorname{Im}\mathscr{A}+\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 是直和。

任取一个向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\mathscr{A}\bigcap\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，且存在一个向量 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$。因此 $\mathscr{A}^2\boldsymbol{\beta}=0$，即 $\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$。因为 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$，所以 $\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=0$。因此 $\boldsymbol{\alpha}=0$。故 $\operatorname{Im}\mathscr{A}+\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 是直和。

□

14 2017

一、 填空题

1.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (\quad).$$

解. 记原行列式为 D，按第一行展开:

$$D = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = x\,(1-4x) + x\,(4x-3) = -2x.$$

□

2. 设实系数多项式 $f(x), g(x)$ 的最大公因式为 $x+1$，最小公倍式为 $(x+1)^2(x+2)(x+3)$。则 $f(x)g(x) = (\quad)$。

证明. 先证明一个引理。

引理 14.1. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$，证明:

$$f(x)g(x) = [f(x), g(x)] \cdot (f(x), g(x)).$$

证明. 设 $d(x) = (f(x), g(x))$，则:

$$f(x) = h_1(x)d(x),$$
$$g(x) = h_2(x)d(x),$$

其中，$\deg h_1(x) \geq 0, \deg h_2(x) \geq 0, (h_1(x), h_2(x)) = 1$。因此，

$$f(x)g(x) = h_1(x)h_2(x)d^2(x),$$
$$[f(x), g(x)] = h_1(x)h_2(x)d(x).$$

所以，$f(x)g(x) = [f(x), g(x)] \cdot (f(x), g(x))$。 □

回到原题，$f(x)g(x) = (x+1)^3(x+2)(x+3)$。 □

3. 关于互素问题，忘记了。

4. 求逆矩阵的问题, 忘记了。

5. 复数域上特征值全为 1 的 4 阶方阵, 按相似分为（　）类。

解. 重题。 □

二、 求证 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \cos a & 1 & & & \\ 1 & 2\cos a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos a & 1 \\ & & & 1 & 2\cos a \end{vmatrix} = \cos na.$$

证明. 记原行列式为 D_n，按最后一行展开得

$$D_n = 2\cos a D_{n-1} - D_{n-2}. \tag{39}$$

由 (39) 得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-1}), \tag{40}$$

其中 α，β 是方程 $x^2 - 2\cos a + 1$ 的两个根：

$$\alpha = \cos a - \sqrt{\cos^2 a - 1}, \beta = \cos a + \sqrt{\cos^2 a + 1}.$$

从而

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) = \beta^{n-2}(2\cos^2 a - 1 - \alpha\cos a) = \beta^{n-2}(\cos 2a - \alpha \cos a). \tag{41}$$

由对称性，

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) = \alpha^{n-2}(2\cos^2 a - 1 - \beta\cos a) = \alpha^{n-2}(\cos 2a - \beta \cos a). \tag{42}$$

由 (41) 和 (42) 得

$$D_n = \frac{\beta^{n-1}(\cos a - \alpha\cos a) - \alpha^{n-1}(\cos a - \beta\cos a)}{\beta - \alpha}.$$

其中 $\alpha = \cos a - \sqrt{\cos^2 a - 1}, \beta = \cos a + \sqrt{\cos^2 a + 1}$。 □

三、 已知

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相同，且 $AB = BA$。证明：B 为对角矩阵。

证明. 设 $B = (b_{ij})_n$，由 $AB = BA$ 得

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}.$$

所以

$$(a_i - a_j)b_{ij} = 0,\ i,j = 1, 2, \ldots, n.$$

因为 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$，所以 $b_{ij} = 0$ $(i \neq j)$。所以 B 为对角矩阵。 □

四、 若方阵 A 交换 2,3 行得 B，B 交换 2,3 列得 C。求证：A 与 C 相似且合同。

证明. 由题意知

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = C.$$

而

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

所以 A 与 C 相似且合同。 □

五、 求证：二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

是正定的。

解. 二次型的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

因为 A 的 1 阶顺序主子式为 $2>0$，2 阶顺序主子式为 $3>0$，3 阶顺序主子式为 $4>0$，所以 A 是正定矩阵，所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的。 □

六、 证明：B 的列向量是方程组 $AX=0$ 的解的充要条件是 $AB=0$，这里 A,B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵。

证明. 设 B 的列向量为

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s.$$

则

$$\begin{aligned} B\text{的列向量是方程组}AX=0\text{的解} &\Leftrightarrow A\boldsymbol{\beta}_i = 0\,(i=1,2,\ldots,s) \\ &\Leftrightarrow AB = A\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s\right) = 0 \end{aligned}$$

命题成立。 □

七、（15 分）设 $V=\{B \text{ 为二阶矩阵} | AB=BA\}$，这里

$$A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

求 V 的基并将 A^{-1} 用 V 的一组基线性表示。

解. 设 $B=(b_{ij})_{2\times 2}$，由 $AB=BA$ 得

$$\begin{pmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}+b_{12} \\ b_{21} & b_{21}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{cases} b_{11}=b_{22} \\ b_{21}=0 \end{cases}$$

所以 B 是形如 $\left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{smallmatrix}\right)$ 的矩阵。因此 $I=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $J=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 是 V 的一个基。
$A^{-1}=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=I-J$。 □

八、 纯计算题，求向量组的秩，极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

九、 忘记了。

十、 已知 n 维线性空间中的线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 有 k 个线性无关的特征向量，求证：$\mathscr{A}$ 的特征值 λ_0 的重数至少为 k。

证明. 先证明一个引理。

引理 14.2. 设 λ_0 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 级矩阵 A 的一个特征值，则 λ_0 的几何重数不超过它的代数重数。

证明. 设 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 W 的维数为 r。在 W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$，把它扩充为 $\mathbb{K}^n$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$。令

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_{nr})$$

则 P 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 级可逆矩阵，并且有

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\left(A\boldsymbol{a}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,A\boldsymbol{\alpha}_r,A\boldsymbol{\beta}_1,\dots,A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right) \\ &= \left(\lambda_1P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_1P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\lambda_1P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r,P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_1,\dots,P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right). \end{aligned}$$

由于 $I=P^{-1}P=\left(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1,P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r,P^{-1}\boldsymbol{\beta}_1,\dots,P^{-1}\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right)$，因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2=P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_r=P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_r$。
从而

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left(\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_1,\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_r,P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_1,\dots,P^{-1}A\boldsymbol{\beta}_{n-r}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I, & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于相似的矩阵有相等的特征多项式，因此

$$\begin{aligned} |\lambda I-A| &= \begin{vmatrix} \lambda I_r-\lambda_1 I_r & -B \\ 0 & \lambda I_{n-r}-C \end{vmatrix} \\ &= |\lambda I_r-\lambda_1 I_r|\,|\lambda I_{n-r}-C| \\ &= (\lambda-\lambda_1)^r\,|\lambda I_{n-r}-C|. \end{aligned}$$

从而 λ_1 的代数重数大于或等于 r，即 λ_1 的代数重数大于或等于 λ_1 的几何重数。 □

由引理立即得到：$\mathscr{A}$ 的特征值 λ_0 的重数至少为 k。 □

15 2019

一、 填空题

1. x^2+x+1 除 $x^{1999}+x^{2009}+x^{2019}$ 所得余式为（ ）。

解. 注意到

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1,\\
&(x-1)(x^{1999}+x^{2009}+x^{2019})=(x-1)x^{1999}(1+x^{10}+x^{20})=x^{1999}(x^{30}-1).
\end{aligned}
$$

而 x^3-1 的每个根都是 $x^{30}-1$ 的根，所以

$$x^3-1|x^{30}-1.$$

所以余式为 0。 □

2. 已知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3,\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=2,$$

则

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 & 0\\ b_{51} & b_{52} & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(\quad).$$

解. 由 Laplace 定理得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 & 0\\ b_{51} & b_{52} & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3\times 2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=6.$$

□

3. 设

$$AP=PB,B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},P=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right),$$

则 $A^{2019}=$（ ）。

解. 注意到 P 是可逆矩阵，由定义我们可以计算得出

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

所以，

$$
\begin{aligned}
A^{2019} &= (PBP^{-1})^{2019} = PB^{2019}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

4. 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，向量组 $\alpha_1 = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，$\alpha_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，$\alpha_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，$\alpha_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ 的秩为（　）。

解. 设存在 k_1、k_2、k_3 和 $k_4 \in \mathbb{R}$，使得

$$
k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0,
$$

则有

$$
\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = 0.
$$

因此，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩就是矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ 的秩，即 3。 □

参考文献

[1] 丘维声. 近世代数. 北京大学出版社, 2015 (cit. on pp. 2, 8, 24, 31).

[2] 丘维声. 高等代数: 上册. 清华大学出版社, 2010.

[3] 丘维声. 高等代数: 下册. 清华大学出版社, 2010 (cit. on p. 66).

[4] 朱尧辰. 高等代数例选通过范例学技巧. 哈尔滨工业大学出版社, 2015 (cit. on p. 88).