

第六章 高斯过程（维纳过程） 习题

1、设有随机过程 $Y(t) = t^2 X - 1, 0 < t < \infty$, X 是正态随机变量, 期望为 0, 方差为 σ_X^2 。

(1) 过程 $Y(t)$ 是否正态过程? 是否平稳过程? 均需说明理由;

(2) 过程 $Z(t) = \int_0^t Y(s) ds, t > 0$, 在均方可积意义下是否存在? 存在的话, 试求其相关函数。

2、设 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动, 令 $\xi(t) = (1-t)B[t/(1-t)], 0 \leq t < 1$,

$\eta(t) = e^{-at} B(e^{2at} - 1), t \geq 0, a > 0$ 的常数, 试求随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的均值函数和相关函数, 并说明 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是否是正态过程。

3、设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准的布朗运动, 试求 $B(t)$ 与 $\int_0^1 B(u) du$ 的相关系数, 其中:

$0 \leq t \leq 1$ 。

4、已知 $B(t), t > 0$ 是初值为 0 的标准布朗运动, 求在 $B(1) = 0$ 时 $B(t) (0 < t < 1)$ 的条件概率分布密度函数。

5、已知 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动, 令 $\xi(t) = \sqrt{a}B(t) + b, \eta(t) = B(at) + b$, 其中常数 $a > 0, b > 0, t \geq 0$ 。试分析此两随机过程的前二阶矩是否相同? 此两过程是否同分布? 说明理由。

6、设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为零初值的标准布朗运动, 试求:

(1) 在 $B(t_1) = x_0$ 的条件下, $B(t_2)$ 的条件概率密度函数, 其中 $t_2 > t_1$;

(2) 布朗运动的对称性, 即证明: 当 $t_0 > 0, t > 0$ 时, 有

$$P\{B(t_0 + t) > x_0 \mid B(t_0) = x_0\} = P\{B(t_0 + t) \leq x_0 \mid B(t_0) = x_0\} = 1/2;$$

(3) 令: $T_a = \inf\{t : t > 0, B(t) = a\}$, T_a 表示布朗运动首次到达 a 的时刻, 当 $a > 0$ 时, 试求 T_a 的分布函数。

7、设 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动, 令:

$$X(t) = B(t) - tB(1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

称 $\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为布朗桥过程。

(1) 试问布朗桥过程是否为正态过程, 为什么?

(2) 试求布朗桥过程的均值函数和相关函数;

(3) 试求布朗桥过程的一维分布密度函数。