

1、 r, g, b 是 RGB 彩色空间沿 R,G,B 轴的单位向量，定义向量 $u = \frac{\partial R}{\partial x} r + \frac{\partial G}{\partial x} g + \frac{\partial B}{\partial x} b$ 和 $v = \frac{\partial R}{\partial y} r + \frac{\partial G}{\partial y} g + \frac{\partial B}{\partial y} b$, g_{xx}, g_{yy}, g_{xy} 定义为这些向量的点乘：

$$g_{xx} = u \cdot u = u^T u = \left| \frac{\partial R}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right|^2$$

$$g_{yy} = v \cdot v = v^T v = \left| \frac{\partial R}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial B}{\partial y} \right|^2$$

$$g_{xy} = u \cdot v = u^T v = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y}$$

推导出最大变换率方向 θ 和 (x, y) 点在 θ 方向上变化率的值 $F(\theta)$

2、请根据课本中 Z 变换的定义，证明如下结论。

(1) 若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$ ，则 $(-1)^n x(n)$ 的 Z 变换为 $X(-z)$

(2) 若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$ ， $x(-n)$ 的 Z 变换为 $X(\frac{1}{z})$

(3) 若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$ ，课本 280 页公式 7.1.2

3、对于一幅给定的大小为 $N \times N, N = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+$ 的图像 $f(x, y)$ ，请描述如何建立该图像的高斯金字塔与拉普拉斯金字塔。

4、完美重建滤波器的双正交性的数学定义是什么？请证明其中的第二个式子与课本中第四个式子。

5、若 $G_1(z) = -z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})$ 成立，请证明

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(2K - 1 - n)$$

6. 假设课本中给出完美重建滤波器的正交族对应的三个滤波器间的关系式是正确的，并以此为基础，推导 h_0, h_1 的关系。

7. 哈尔变换可以用矩阵的形式表示为：

$$T = HFH^T$$

其中， F 是一个 $N \times N$ 的图像矩阵， H 是 $N \times N$ 变换矩阵， T 是 $N \times N$ 变换结果。对于哈尔变换，

变换矩阵 H 包含基函数 $h_k(z)$ ，它们定义在连续闭区间 $z \in [0, 1], k = 0, 1, 2 \dots N - 1$ ，其中 $N =$

2^n 。为了生成矩阵，定义整数 k ，即 $k = 2^p + q - 1$ （这里 $0 \leq p \leq n - 1$ ，当 $p=0$ 时 $q=0$ ，或

1; 当 $p \neq 0$ 时, $1 \leq q \leq 2^p$)。可得哈尔基函数为:

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$\text{且 } h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{\frac{p}{2}}, (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{\frac{p}{2}}, (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, \text{其它}, z \in [0,1] \end{cases}$$

$N \times N$ 哈尔变换矩阵的第 i 行包含了元素 $h_i(z)$, 其中 $z = \frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \dots, (N-1)/N$ 。计算当 $N = 16$ 时的 H_{16} 矩阵。