第一章 随机过程及其分类

1、设随机变量 X 服从参数为 **1** 的指数分布，随机变量 $Y \sim N(0,1)$，且 X 与 Y 独立，试求随机变量 $Z=\sqrt{2X}\,|Y|$ 的分布密度函数。

2、设随机变量 X_1, X_2 独立同分布，服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，试证明随机变量 $\dfrac{X_1}{X_1+X_2} \sim U[0,1]$。

3、设随机向量 (X,Y) 的两个分量相互独立，且均服从标准正态分布 $N(0,1)$。

（a）　分别写出随机变量 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的分布密度

（b）　试问：$X+Y$ 与 $X-Y$ 是否独立？说明理由。

4、设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} 24(1-x)y, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求：

（a）　边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，以及条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；

（b）　当 $0<y<1$ 时，确定 $E\{X \mid Y=y\}$，以及 $E\{X \mid Y\}$ 的分布密度函数。

5、设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4}{7}(1+y+xy), & 0<x<1,\, 0<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求随机变量 $Y(1+X)$ 的密度函数。

6、设 X_1、X_2、X_3 为独立同分布的随机变量，且服从标准正态分布。令：

$$Y=\frac{X_1+X_2X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}$$

（**a**）　试求随机变量 Y 的分布密度函数；

（b）　试问有限个独立正态分布随机变量经过非线性变换是否可以服从正态分布？

7、设 $\{\xi_n, n\ge 1\}$ 为独立同分布连续型随机变量序列，令：

$$\tau=\min\{n: n\ge 2,\, \xi_n>\xi_1\},\quad \sigma=\min\{n: n>m,\, \xi_n>\max_{1\le k\le m}\{\xi_k\}\}$$

试回答以下问题：

（**a**）　求随机变量 τ 的分布函数，并确定随机变量 τ 的数学期望是否存在；

（b）　求概率 $P\{\sigma>n\}$（$n\ge m+1$）。

8、设$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$与η为随机变量，$\eta\sim U[0,1]$，而$\xi_i\ (i=1,2,\cdots n)$均以下述条件概率取 1 和 0 两个，即：$P\{\xi_i=1|\eta=p\}=p$，$P\{\xi_i=0|\eta=p\}=1-p$；并且条件独立，即对于$i=1,2,\cdots,n$，均有$x_i=0,1$时，有

$$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n|\eta\}=P\{\xi_1=x_1|\eta\}\cdots P\{\xi_n=x_n|\eta\}$$

试回答以下问题：

（a）　试求$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$；

（b）　试求随机变量$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$的分布；

（c）　试求条件分布$P\{\eta\le p|S_n=x\}$，并求出密度函数，其中：$x=x_1+\cdots x_n$；

（d）　试问分布$P\{\eta\le p|S_n=x_1+\cdots x_n\}$与$P\{\eta\le p|\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$是否相同，其中：$p\in(0,1)$。

9、设$X\sim N(0,\sigma^2)$，对于$\forall b>0$，试证明正态分布尾概率估计不等式：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sigma}{b}-\left(\frac{\sigma}{b}\right)^3\right]\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}\le P\{X\ge b\}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sigma}{b}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}$$

10、设随机向量$X=(X_1,X_2)^\tau\sim N(\mu,\Sigma)$，其中：$\mu=(\mu_1,\mu_2)^\tau=(1,2)^\tau$，$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 4/5\\ 4/5 & 1\end{pmatrix}$，令随机向量$Y=(Y_1,Y_2)^\tau=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X$。

（a）　试求随机向量Y的协方差矩阵、$E\{Y_2|\ Y_1\}$及$E\{Y_1+Y_2\}$；

（b）　试问$X_2-E\{X_2|\ X_1\}$与X_1是否独立？证明你的结论。

11、设$\{X(t),t\ge0\}$是一个实的均值为零，二阶矩存在的随机过程，其相关函数为$E\{X(s)X(t)\}=B(t-s),s\le t$，且是一个周期为$T$的函数，即$B(\tau+T)=B(\tau),\tau\ge0$，试求方差函数$D[X(t)-X(t+T)]$。

12、考察两个谐波随机信号$X(t)$和$Y(t)$，其中：

$$X(t)=A\cos(\omega_c t+\phi),\quad Y(t)=B\cos(\omega_c t)$$

式中A和ω_c为正的常数；ϕ是$[-\pi,\pi]$内均匀分布的随机变量，B是标准正态分布的随机变量。

（a）　求$X(t)$的均值、方差和相关函数；

（b）　若ϕ与B独立，求$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数。

13、设$\xi(t)=X\sin(Yt);t\ge0$，而随机变量X、Y是相互独立且都服从$[0,1]$上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。

14、设 $\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布随机变量序列，且 $P\{\xi_n=-1\}=1-p$，$P\{\xi_n=1\}=p$，令：$X_0=0$，$X_n=(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)/\sqrt{n}$，$n=1,2,\cdots$。求随机序列 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 的均值函数、协方差函数和相关函数。

15、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y 满足参数为 p 的几何分布，即 $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$，其中：$0<p<1, k=1,2,\cdots$，X 与 Y 独立。令 $X(t)=X+e^{-t}Y$，试求：

（1）$X(t)$ 在 $t>0$ 的一维概率密度函数；

（2）$E\{X(t)\}$，$Cov(X(s),X(t))$（$0\le s\le t$）；

16、设 $X(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$，$t\in R$，其中 A 和 B 是独立同分布的均值为零方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

（1）　$X(t)$ 的均值函数和相关函数；

（2）　$X(t)$ 的一维概率密度函数；

（3）　$X(t)$ 的二维概率密度函数。

17、设随机过程 $\xi(t)=X\cos 2t+Y\sin 2t$，$-\infty<t<+\infty$，其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。

（1）　如果 $X\sim U(0,1)$，试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数；

（2）　如果 $X\sim N(0,1)$，试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数；

18、设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为 T_0 的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差 u 为均匀分布在 $(0,T_0)$ 内的随机变量。试给出随机过程 $X(t)$ 的状态空间，画出样本函数及求出其均值函数和相关函数。

19、设有一质点在 X 轴上作随机游动，即在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为 p 和 $q=1-p$，且各次游动是相互独立的。经过 n 次游动，质点所处的位置为 X_n，试求 X_n 的均值函数、自相关函数及自协方差函数。

20、设随机变量 X 与随机变量 Θ 独立，且都服从均匀分布，即 $X\sim U[2,4]$，$\Theta\sim U[1,3]$。令：$Z=Xe^{\Theta\ln 2}$，试求随机变量 Z 的分布密度函数。思考：若给定随机过程：$Z(t)=Xe^{\Theta\ln t}$（$t>0$），则其一维分布如何确定？