序号：56

姓名：相贤泰

学号：202328019427026

---

7. 解

(1)

设男女顾客到达人数分别为$N_1(t)$和$N_2(t)$

则总人数$X(t)$为

$$X(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

其矩母函数为

$$G_{X(t)}(z) = G_{N_1(t)}(z)G_{N_2(t)}(z) = \exp((\lambda+\mu)t(z-1))$$

因此$X(t)$分布为参数为$\lambda+\mu$的泊松分布，即

$$P(X(t)=k) = \frac{((\lambda+\mu)t)^k}{k!}\exp(-(\lambda+\mu)t)$$

(2)

$$\begin{aligned} P(N_2(t)=k|X(t)=n) &= \frac{P(N_2(t)=k, X(t)=n)}{P(X(t)=n)} \\ &= \frac{P(N_1(t)=n-k, N_2(t)=k)}{P(X(t)=n)} \\ &= \frac{P(N_1(t)=n-k)P(N_2(t)=k)}{P(X(t)=n)} \\ &= C_n^k\frac{\mu^k\lambda^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(P(N_2(t)|X(t)=n)) = \frac{n\mu}{(\lambda+\mu)}$$

---

8. 解

设随机变量$\{X_k, k\in\mathbb{N}\}\sim(1,p)$，且独立同分布

那么有

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$$

由复合泊松可知，其特征函数为

$$G_{X(t)}(z) = \exp(\lambda t(G_{X_1}(z)-1))$$

又因为

$$G_{X_1}(z) = \mathbb{E}(z^{X_1}) = zP(X_1=1)+q = pz+q$$

所以有

$$G_{X(t)}(z) = \exp(\lambda t(pz + q - 1)) = \exp(\lambda pt(z-1))$$

因此$X(t)$服从参数为λp的泊松分布，即

$$P(X(t)=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\exp(-\lambda pt)$$

同理

$$P(Y(t)=k) = \frac{(\lambda q)^k}{k!}\exp(-\lambda qt)$$

且

$$P(X(t)=m, Y(t)=n) = P(X(t)=m)P(Y(t)=n)$$

因此相互独立

根据泊松分布，有

$$\mathbb{E}(X(t)) = \lambda pt$$

$$\mathbb{E}(Y(t)) = \lambda qt$$

$$R_{X(t)}(s,t) = (\lambda p)^2 st + \lambda p \min(s,t)$$

$$R_{Y(t)}(s,t) = (\lambda q)^2 st + \lambda q \min(s,t)$$

---

9. 解

(1)

设第k个乘客到达的时刻为S_k

根据过滤泊松，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S(t)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} t - S_i\right) \\ &= \lambda_1 \int_0^t (t-S)\mathrm{d}S \\ &= \frac{\lambda_1 t^2}{2}\end{aligned}$$

(2)

设甲第n个乘客到达的时刻为S_n，乙第m个乘客到达的时刻为T_m

且$f_{S_n}(t_1)$和$f_{T_m}(t_2)$为相应的概率密度，两者相互独立且为Γ分布

因此，有

$$\begin{aligned}P(S_n < T_m) &= \iint_{t_1<t_2} f_{S_n}(t_1) f_{T_m}(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\ &= \int_0^{+\infty} dt_2 \int_0^{t_2} \frac{(\lambda_1 t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \cdot \frac{(\lambda_2 t_2)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_1\end{aligned}$$