序号：56

姓名：相贤泰

学号：202328019427026

---

9. 解

(a)

$$
\begin{aligned}
P(C_k|i)-\sum_{j\in D}p_{ij}P(C_k|j) &= \sum_{j\in C_k}p_{ij} \\
\text{即 } P(C_0|1)-p_{11}P(C_0|1) &= p_{10} \\
\text{解得 } P(C_0|1) &= \frac{p}{1-q}
\end{aligned}
$$

同理，有

$$P(C_2|1)=\frac{r}{1-q}$$

(b)

$$\mathbb{E}(T|i)-\sum_{j\in D}p_{ij}\mathbb{E}(T|i)=1$$

解得

$$\mathbb{E}(T|1)=\frac{1}{1-q}$$

---

10. 解

(1)

C-K方程为

$$P_{ij}^{(n_1+n_2)}=\sum_{k=1}^{4}P_{ik}^{(n_1)}+P_{kj}^{(n_2)}$$

(2)

$$\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^{n}=\begin{cases}\boldsymbol{P} & n=\text{奇数}\\ \boldsymbol{P}^2 & n=\text{偶数}\end{cases}$$

(3)

不是平稳序列；该链是周期为2，为非遍历链。

---

11. 解

(1)

由题意知，该马氏链转移概率与当前时刻无关，因此是齐次的；

一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{vmatrix} (1-b)^2 & b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{vmatrix}$$

(2)

因为该链不可约且遍历，因此存在极限分布；

$$\pi = \pi P$$

解得

$$\pi = (\frac{a^2}{(a+b)^2}, \frac{2ab}{(a+b)^2}, \frac{b^2}{(a+b)^2})$$

(3)

由题意可知，该平稳分布服从二项分布，因此有

对于$k = 0, 1, 2, \ldots, m$

$$\pi_k = C_m^k (\frac{b}{a+b})^k (\frac{a}{a+b})^{m-k}$$

---

12. 解

(a)

当$k = 0$时，有

$$g_0 = P\{X_0 = 0\} = \alpha_0$$

当$k = 1$时，有

$$g_1 = \sum_{i \in S} P\{X_1 = 0, X_0 = i\} = \vec{\alpha} P_0$$

假设当$k = n$时，有

$$g_n = \vec{\alpha} P^{n-1} P_0$$

当$k = n + 1$时

假设第一步转移后到达了状态j，则有

$$g_{n+1} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \alpha_i p_{ij} p_{j0}^{(n)} = \vec{\alpha} P^n P_0$$

因此，对$\forall k$，有

$$g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0$$

得证

(b)

$$
\begin{aligned}
G(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \lambda^k \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 \lambda^k \\
&= \alpha_0 + \vec{\alpha}\lambda (\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda P)^{k-1}) P_0
\end{aligned}
$$

因为S为瞬时态集合，因此有

$$
\lim_{n\to\infty} P^n = 0
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\lambda P)^{k-1} = \lim_{n\to\infty} (I-\lambda P)^{-1}(I-(\lambda P)^{n-1}) = (I-\lambda P)^{-1}
$$

代入上式，得到

$$
G(\lambda) = \alpha_0 + \vec{\alpha}\lambda (I-\lambda P)^{-1} P_0 = \alpha_0 + \vec{\alpha}\lambda (I-\lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}
$$