

2022-2023 秋季学期《随机过程(电子与通信类)》 期末考试 试题

1. (15分) $X(t)$ 是一均值为零的实平稳正态过程, 随机过程

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}, \quad X(t) \text{ 的相关函数 } R_X(\tau) = e^{-\tau^2}$$

- (1) 求出 $Y(t)$ 的均值函数, 相关函数;
- (2) $Y(t)$ 是否是正态过程? 证明你的结论;
- (3) 求出 $Y(t)$ 的二维分布。

2. (20分) 给定状态空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的齐次马氏链,
其一步转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试回答以下问题:

- (1) 确定该马氏链各状态的性质, 并对各状态进行分类;
- (2) 计算该链从非常返态出发进入各常返类的概率;
- (3) 该链的平稳分布是否存在? 是否唯一?
- (4) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$

3. (15分) 长文字应用题。由网上流传的2019年题目改编而成,
设问方式不变。

4. (15分) $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度为 λ 的泊松过程, S_i 是到达时间.

Y_i 是损伤量, 服从均值为 $\frac{1}{\mu}$ 的指数分布, 损伤量到 A 就达到了顶点, 之后不能再使用, 撞击寿命为 T

(1) 给出 S_i 的分布密度函数;

(2) 证明: $E\{T\} = \int_0^{+\infty} P\{T > t\} dt$;

(3) 根据上一问证明的结论求平均期望寿命 $E\{T\}$.

5. (20分)

$N(t), t \geq 0$ 服从参数为 λ 的泊松过程, 随机序列 $X_n, n=0, 1, 2, \dots$ 相互独立且都服从正态分布, $N(t)$ 与 X_n 相互独立, 系统的冲激

响应 $h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 随机过程 $Y(t) = X_{N(t)}$

(1) 画出 $Y(t)$ 的一条样本函数;

(2) 计算 $Y(t)$ 的一维分布和自相关函数;

(3) 计算 $Y(t)$ 作为 RC 电路的输入信号的情况下, 系统输出信号的平均功率谱密度。

6. (15分)

随机变量 U 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布, 随机变量 X 的概率

密度函数 $f_X(x) = |x|^3 e^{-\frac{x^4}{4}}$, 随机变量 $Y = X^2 \cos(U + \omega t)$,

(1) 随机变量 $Z = X^2$, 求 Z 的概率密度函数;

(2) 假设 $Y = B \cos \omega t + C \sin \omega t$, 其中 $B = Z \cos U$, $C = -Z \sin U$, 求 B, C 的分布密度函数, 它们是否相互独立?

(3) Y 是正态过程吗? 请说明理由。

国科大社区

gkderucas.ac.cn

@侧耳倾听

2023.3.5