序号：56

姓名：相贤泰

学号：202328019427026

---

1. 解

   根题意有

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_2=i_2)=P(X_{n+1}=j|X_n=i）$$

   且其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & q & 0 & p \end{vmatrix}$$

   $\{Y_n, n\geq 2\}$不是马氏链。

   因为有

$$\begin{aligned} P(Y_4=0|Y_3=1,Y_2=1) &= \frac{P(Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1)}{P(Y_3=1,Y_2=1)} \\ &= \frac{pq^2+p^2q}{pq+3p^2+q^2} \end{aligned}$$

   同时，有

$$\begin{aligned} P(Y_4=0|Y_3=1,Y_2=0) &= \frac{P(Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0)}{P(Y_3=1,Y_2=0)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   因此

$$P(Y_4=0|Y_3=1,Y_2=1)\neq P(Y_4=0|Y_3=1,Y_2=0)$$

---

2. 解

   设连续三天的天气为一次观察，以0表示天晴，1为下雨，则状态空间为

$$S=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$

   转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0.4&0.6&0&0&0&0\\0&0&0&0&0.6&0.4&0&0\\0&0&0&0&0&0&0.4&0.6\\0.6&0.4&0&0&0&0&0&0\\0&0&0.4&0.6&0&0&0&0\\0&0&0&0&0.6&0.4&0&0\\0&0&0&0&0&0&0.2&0.8\end{bmatrix}$$

---

3. 解

(1)

$$\begin{aligned}P(X_0=0,X_1=1,X_2=1)&=P(X_2=1|X_1=1)P(X_1=1|X_0=0)P(X_0=0)\\&=\frac{1}{16}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}p_{01}^{(2)}&=(P^2)_{01}\\&=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{12}^{(3)}&=(P^3)_{12}\\&=\frac{181}{432}\end{aligned}$$

---

4. 解

根据题意有

$$P(X_k=i_k|X_{k-1}=i_{k-1},\dots,X_0=i_0)=P(X_k=i_k|X_{k-1}=i_{k-1})$$

因此是马尔可夫过程

并且有

$$\begin{aligned}P(X_0=1|X_n=1)&=\frac{P(X_0=1)P(X_n=1|X_0=1)}{P(X_0=1)P(X_n=1|X_0=1)+P(X_0=0)P(X_n=1|X_0=0)}\\&=\frac{\alpha\frac{1+(p-q)^n}{2}}{\alpha\frac{1+(p-q)^n}{2}+(1-\alpha)\frac{1-(p-q)^n}{2}}\\&=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}\end{aligned}$$

该条件概率表明第n个中继站收到信号1时，发送信号与之相同的概率。