序号: 56

姓名: 相贤泰

学号: 202328019427026

9.解

(a)

$$egin{aligned} P(C_k|i) - \sum_{j \in D} p_{ij} P(C_k|j) &= \sum_{j \in C_k} p_{ij} \ \mathbb{P}(C_0|1) - p_{11} P(C_0|1) &= p_{10} \ \mathbb{P}(C_0|1) &= rac{p}{1-q} \end{aligned}$$

同理,有

$$P(C_2|1) = \frac{r}{1-q}$$

(b)

$$\mathbb{E}(T|i) - \sum_{j \in D} p_{ij} \mathbb{E}(T|i) = 1$$

解得

$$\mathbb{E}(T|1) = \frac{1}{1-q}$$

10. 解

(1)

C-K方程为

$$P_{ij}^{(n_1+n_2)} = \sum_{k=1}^4 P_{ik}^{(n_1)} P_{kj}^{(n_2)}$$

(2)

$$oldsymbol{P}^{(n)} = oldsymbol{P}^n = egin{cases} oldsymbol{P} & n = eta oldsymbol{\Phi} \ oldsymbol{P}^2 & n = oldsymbol{A} oldsymbol{\Phi} \end{cases}$$

(3)

不是平稳序列;该链是周期为2,为非遍历链。

11. 解

(1)

由题意知,该马氏链转移概率与当前时刻无关,因此是齐次的;

一步转移概率矩阵为

$$P = \left| egin{array}{ccc} (1-b)^2 & b(1-b) & b^2 \ a(1-b) & ab + (1-b)(1-a) & b(1-a) \ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{array} 
ight|$$

(2)

因为该链不可约且遍历,因此存在极限分布;

$$\pi = \pi P$$

解得

$$\pi = (rac{a^2}{(a+b)^2}, rac{2ab}{(a+b)^2}, rac{b^2}{(a+b)^2})$$

(3)

由题意可知,该平稳分布服从二项分布,因此有

对于 $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ 

$$\pi_k = C_m^k (\frac{b}{a+b})^k (\frac{a}{a+b})^{m-k}$$

12. 解

(a)

当k=0时,有

$$g_0 = P\{X_0 = 0\} = \alpha_0$$

当k=1时,有

$$g_1 = \sum_{i \in S} P\{X_1 = 0, X_0 = i\} = \vec{lpha} P_0$$

假设当k = n时,有

$$g_n = \vec{lpha} P^{n-1} P_0$$

当k=n+1时

假设第一步转移后到达了状态j,则有

$$g_{n+1} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} lpha_i p_{ij} p_{j0}^{(n)} = ec{lpha} P^n P_0$$

因此,对 $\forall k$ ,有

$$g_k = \vec{lpha} P^{k-1} P_0$$

得证

(b)

$$egin{aligned} G(\lambda) &= \sum_{k=0}^\infty g_k \lambda^k \ &= lpha_0 + \sum_{k=0}^\infty ec{lpha} P^{k-1} P_0 \lambda^k \ &= lpha_0 + ec{lpha} \lambda (\sum_{k=0}^\infty (\lambda P)^{k-1}) P_0 \end{aligned}$$

因为S为瞬时态集合,因此有

$$\lim_{n\to\infty}P^n=0$$

所以

$$\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n (\lambda P)^{k-1} = \lim_{n o\infty} (I-\lambda P)^{-1}(I-(\lambda P)^{n-1}) = (I-\lambda P)^{-1}$$

代入上式,得到

$$G(\lambda) = lpha_0 + ec{lpha}\lambda(I - \lambda P)^{-1}P_0 = lpha_0 + ec{lpha}\lambda(I - \lambda P)^{-1}(I - P)ec{e}$$