序号：56

姓名：相贤泰

学号：202328019427026

---

9. 解

   (a)

$$
\begin{gathered}
P(C_k|i) - \sum_{j\in D} p_{ij} P(C_k|j) = \sum_{j\in C_k} p_{ij} \\
\text{即 } P(C_0|1) - p_{11} P(C_0|1) = p_{10} \\
\text{解得 } P(C_0|1) = \frac{p}{1-q}
\end{gathered}
$$

   同理，有

$$
P(C_2|1) = \frac{r}{1-q}
$$

   (b)

$$
\mathbb{E}(T|i) - \sum_{j\in D} p_{ij} \mathbb{E}(T|i) = 1
$$

   解得

$$
\mathbb{E}(T|1) = \frac{1}{1-q}
$$

---

10. 解

   (1)

   C-K方程为

$$
P_{ij}^{(n_1+n_2)} = \sum_{k=1}^{4} P_{ik}^{(n_1)} P_{kj}^{(n_2)}
$$

   (2)

$$
\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n = \begin{cases} \boldsymbol{P} & n = \text{奇数} \\ \boldsymbol{P}^2 & n = \text{偶数} \end{cases}
$$

   (3)

   不是平稳序列；该链是周期为2，为非遍历链。

---

11. 解

   (1)

   由题意知，该马氏链转移概率与当前时刻无关，因此是齐次的；

   一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{vmatrix} (1-b)^2 & b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{vmatrix}$$

(2)

因为该链不可约且遍历，因此存在极限分布；

$$\pi=\pi P$$

解得

$$\pi=(\frac{a^2}{(a+b)^2},\frac{2ab}{(a+b)^2},\frac{b^2}{(a+b)^2})$$

(3)

由题意可知，该平稳分布服从二项分布，因此有

对于$k=0,1,2,\ldots,m$

$$\pi_k=C_m^k(\frac{b}{a+b})^k(\frac{a}{a+b})^{m-k}$$

---

12. 解

(a)

当$k=0$时，有

$$g_0=P\{X_0=0\}=\alpha_0$$

当$k=1$时，有

$$g_1=\sum_{i\in S}P\{X_1=0,X_0=i\}=\vec{\alpha}P_0$$

假设当$k=n$时，有

$$g_n=\vec{\alpha}P^{n-1}P_0$$

当$k=n+1$时

假设第一步转移后到达了状态j，则有

$$g_{n+1}=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\alpha_i p_{ij}p_{j0}^{(n)}=\vec{\alpha}P^nP_0$$

因此，对$\forall k$，有

$$g_k=\vec{\alpha}P^{k-1}P_0$$

得证

(b)

$$
\begin{aligned}
G(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \lambda^k \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 \lambda^k \\
&= \alpha_0 + \vec{\alpha}\lambda(\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda P)^{k-1}) P_0
\end{aligned}
$$

因为S为瞬时态集合，因此有

$$
\lim_{n\to\infty} P^n = 0
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\lambda P)^{k-1} = \lim_{n\to\infty} (I-\lambda P)^{-1}(I-(\lambda P)^{n-1}) = (I-\lambda P)^{-1}
$$

代入上式，得到

$$
G(\lambda) = \alpha_0 + \vec{\alpha}\lambda(I-\lambda P)^{-1} P_0 = \alpha_0 + \vec{\alpha}\lambda(I-\lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}
$$