

《随机过程》课程需要掌握的内容及考试要求

第一章：随机过程及其分类

- (1) 掌握随机过程和随机过程的有限维分布函数族的概念，掌握随机过程的 n 维分布函数、分布密度的概念。理解随机过程的两种描述方式。
- (2) 理解随机过程的均值函数、协方差函数和相关函数的概念，掌握它们的主要性质，并会对给定的简单过程和常用的重要过程计算这些数字特征。
- (3) 了解随机过程的分类方式及分类。
- (4) 了解两个随机过程的联合分布的概念。会计算联合随机过程的互协方差函数和互相关函数。了解两个随机过程之间独立的概念。

第二章：Markov 过程

- (1) 掌握马氏链及其转移概率的定义和性质；对实际问题利用马氏链建模处理；理解齐次性的概念；了解独立增量过程与马氏过程的关系。
- (2) 掌握 C-K 方程，并能利用 C-K 方程计算转移概率。
- (3) 了解状态的常返性、遍历性的概念。掌握遍历性的主要定理的条件和结论。能对简单齐次马氏链的状态进行分类；特别注意有限状态马氏链的一些特殊性质。
- (4) 掌握非常返状态的性质；会计算从非常返状态出发被常返类吸收的概率；会计算非常返态进入常返态类所需的平均时间。

$$P\{C_k | i\} - \sum_{j \in D} p_{ij} P\{C_k | j\} = \sum_{j \in C_k} p_{ij}, \quad i \in D$$

$$E\{T|i\} - \sum_{j \in D} E\{T|j\} p_{ij} = 1, \quad i \in D$$

- (5) 掌握马氏链的极限性质，掌握平稳分布的概念，能对简单的齐次马氏链找平稳分布。
- (6) 掌握纯不连续马氏过程转移概率的概念，掌握转移率矩阵（ Q 矩阵）的定义和求法。
- (7) 掌握前进方程、后退方程及福克—普朗克方程，会利用此方程求过程的均值函数。

(8) 理解生灭过程的定义, 并能写出生灭过程的 Q 矩阵。

第三章: Poisson 过程

- (1) 掌握独立增量过程、正交过程及计数过程的定义和性质。
- (2) 掌握 Poisson 过程的定义及一维分布, 会求此过程的数字特征。
- (3) 掌握 Poisson 过程与指数分布之间的关系。掌握到达时间和条件到达时间的分布性质; 了解更新过程的定义和基本性质。
- (4) 一些主要结果:

一维分布: $P\{N(s+t) - N(s) = k\} = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \in N;$

均值函数: $m_N(t) = E\{N(t)\} = \lambda t \Rightarrow \lambda = \frac{E\{N(t)\}}{t};$

均方函数: $E\{N^2(t)\} = (\lambda t)^2 + \lambda t;$

方差函数: $D_N(t) = \lambda t;$

相关函数: $R_N(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min\{t_1, t_2\};$

协方差函数: $C_N(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\};$

到达时间的分布: S_n 表示第 n 个事件发生的时刻 ($n \geq 1$), 则有:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0;$$

到达时间间隔的分布: $X_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$) 表示第 $n-1$ 个事件与第 n 事件发生的时间间隔, 则有:

$$f_{X_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, 1 \leq k \leq n;$$

转移概率函数: $p(s, t, i, j) = P\{N_t = j | N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad j \geq i;$

到达时间的条件分布: 在已知条件 $N(t) = n$ 下, 事件相继发生的时间 S_1, S_2, \dots, S_n 的条件概率密度为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在 $[0, t)$ 内发生了 n 个事件的条件下, 第 r ($r < n$) 个事件发生时刻的概率密度:

$$f_{S_r}(x | N(t) = n) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \left(\frac{x}{t}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-r} \cdot \frac{1}{t}, \quad 0 < x < t$$

更新过程的基本概念, 更新强度 $m(t) = E\{N(t)\}$;

更新方程: $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u) dF(u)$;

更新强度函数的拉普拉斯变换与时间间隔时间的分布密度拉普拉斯变换之间的关系;

Q 矩阵:
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & & \\ & & & -\lambda & \lambda & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix};$$

第四章: 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

- (1) 掌握二阶矩过程、严平稳过程及宽平稳过程的定义及关系。
- (2) 了解均方极限、均方连续、均方导数和均方积分的概念, 会判断一个随机过程的均方连续性及其均方可导性。掌握均方导数过程的相关函数于原过程的相关函数之间的关系。
- (3) 掌握平稳过程各态历经性的概念。了解判断均值、相关函数具有各态历经性的定理。
- (4) 掌握正交增量过程的定义及基本性质。

第五章: 平稳过程的谱分析

- (1) 掌握平稳过程功率谱的定义及性质, 会对简单的随机过程求其功率谱。
- (2) 掌握功率谱与相关函数之间的关系。
- (3) 掌握随机信号通过线性系统后输入信号与输出信号的功率谱之间的关系。
- (4) 了解平稳过程的谱分解定理和采样定理。
- (5) 掌握窄带平稳随机信号的表示方式。

第六章：高斯（Gauss）过程

- (1) 掌握 n 维正态随机变量的分布密度、特征函数及基本性质。
- (2) 掌握正态过程（高斯信号）的定义，掌握正态过程的判定方法。
- (3) 掌握正态随机过程输入线性系统后输出的性质，以及输入输出之间的关系。
- (4) 了解窄带平稳实正态过程的表示法。