序号：56

姓名：相贤泰

学号：202328019427026

---

1. 解

   (1)

   随机过程$Y(t)$是正态过程，不是平稳过程；

   任取$0 < t_1 < t_2, \ldots, < t_n < \infty$，则有

$$(Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(t_n))^T = \begin{vmatrix} t_1 & -1 \\ t_2 & -1 \\ \cdots & \cdots \\ t_n & -1 \end{vmatrix} (X, 1)^T$$

   因为X是高斯分布，且高斯分布的线性变换后依然会高斯分布。又考虑到$t_1, t_2, \ldots, t_n$的任意性，可知$Y(t)$为高斯过程；

$$\begin{aligned} R_Y(s,t) &= \mathbb{E}\left[(tX-1)(sX-1)\right] \\ &= ts\mathbb{E}(X^2) - (t+s)\mathbb{E}(X) + 1 \\ &= \sigma_X^2 st + 1 \end{aligned}$$

   因此$Y(t)$不是平稳过程

   (2)

   该积分存在

$$\begin{aligned} R_Z(s,t) &= \int_0^t \int_0^s (\sigma_X^2 uv + 1) du dv \\ &= \frac{(\sigma st)^2}{2} + st \end{aligned}$$

---

2. 解

$$\mathbb{E}(\xi(t)) = 0$$

$$\begin{aligned} R_\xi(s,t) &= \mathbb{E}\left[(1-t)(1-s)B(\frac{t}{1-t})B(\frac{s}{1-s})\right] \\ &= (1-t)(1-s)\mathbb{E}(B^2(\frac{t}{1-t})) \\ &= (1-t)(1-s)\min(s,t) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\eta(t)) = 0$$

$$\begin{aligned} R_\eta(s,t) &= \mathbb{E}[e^{-\alpha(t+s)}B^2(e^{2\alpha\min(t,s)} - 1)] \\ &= e^{-\alpha(t+s)}(e^{2\alpha\min(t,s)} - 1) \end{aligned}$$

   因为正态过程经过线性变换仍然是正态过程；

因此$\xi(t), \eta(t)$都是正态过程。