

2. 由 Z 变换定义可知

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

(1)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-z)^{-n} = X(-z)$$

(2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} \stackrel{k=-n}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

(3)

令 $y(n') = x(2n)$, 有

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \\ &\stackrel{n=\frac{k}{2}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-\frac{k}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-\frac{k}{2}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)z^{-\frac{k}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (X(z^{\frac{1}{2}}) + X(z^{-\frac{1}{2}})) \end{aligned}$$