第五章 平稳过程的谱分析 习题

1、 设有一线性系统，其输入为零均值白高斯噪声 $n(t)$，其功率谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$，系统的冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0 \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

此线性系统的输出为 $\xi(t)$。令：$\eta(t)=\xi(t)-\xi(t-T)$，其中 $T>0$ 为一常数，试求过程 $\eta(t)$ 的一维概率密度函数。

2、 设 $s(t)$ 为一确定性信号，在 $(0,T)$ 内具有能量 $E_s=\int_0^T s^2(t)dt$，$n(t)$ 为一零均值的白高斯过程，其相关函数为：$R_n(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$。令：$\eta_1=\int_0^T s(t)[s(t)+n(t)]dt$，$\eta_2=\int_0^T s(t)n(t)dt$。试求：

（1）给定一常数 γ，求概率 $P\{\eta_1>\gamma\}$；

（2）给定一常数 γ，求概率 $P\{\eta_2>\gamma\}$。

3、 设有一非线性系统，其输入为零均值平稳实高斯过程，其协方差函数为：

$$C_\xi(\tau)=Pe^{-\alpha|\tau|}$$

其中 $P>0$ 为一常数。系统的输出为：

$$\zeta=\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt$$

试求：

（1）输出均值：$E\{\zeta\}$；

（2）输出方差：$D\{\zeta\}$；

（3）设 $y=\dfrac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}$，$x=\alpha T$，画出 y 对 x 的关系简图。

4、 设有一线性系统，输入输出分别为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，其中输入过程 $\xi(t)$ 为零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为：$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\ \ (\alpha>0)$。系统的单位冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}\ , & t\ge 0,\ \beta>0,\ \beta\ne\alpha \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

若 $\xi(t)$ 在 $t=-\infty$ 时接入系统，试求：

（1）在$t=0$时输出$\eta(0)$大于y的概率$P\{\eta(0)>y\}$；

（2）求条件概率$P\{\eta(0)>y \,|\, \xi(-T)=0\}$，其中$T>0$；

（3）求条件概率$P\{\eta(0)>y \,|\, \xi(T)=0\}$，其中$T>0$。

5、设实平稳过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$的自相关函数和功率谱密度分别为$R_X(\tau)$和$S_X(\omega)$，令随机过程$Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$的相关函数和功率谱密度分别为$R_Y(\tau)$和$S_Y(\omega)$，其中$a$是常数。

（1）试证明：$R_Y(\tau)=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)$；

（2）试证明：$S_Y(\omega)=4S_X(\omega)\sin^2(a\omega)$。