1. 证明

设三个通道的函数分别为$R(x,y),G(x,y),B(x,y)$

定义

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{u} = \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial x}\mathbf{b} \\
\frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{v} = \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial y}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

由方向导数可知，在$\theta(x,y)$方向有

$$
\begin{aligned}
F_\theta = ||\partial f_\theta|| &= ||\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta|| \\
&= ||\mathbf{u}\cos\theta + \mathbf{v}\sin\theta|| \\
&= [(\mathbf{u}\cos\theta + \mathbf{v}\sin\theta)^T(\mathbf{u}\cos\theta + \mathbf{v}\sin\theta)]^{\frac{1}{2}} \\
&= [g_{xx}\cos^2\theta + 2g_{xy}\sin\theta\cos\theta + g_{yy}\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}} \\
&= \{[\frac{1}{2}[(g_{xx}+g_{yy}) + (g_{xx}-g_{yy})\cos 2\theta + 2g_{xy}\sin 2\theta]\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

则，最大变换率的方向为

$$
\theta = \arg\max_\theta F_\theta
$$

即，求解

$$
\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = 0
$$

此时的θ为

$$
\theta(x,y) = \frac{1}{2}\tan^{-1}[\frac{2g_{xy}}{g_{xx}-g_{yy}}]
$$

2. 由Z变换定义可知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

(1)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-z)^{-n}=X(-z)$$

(2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n}\overset{k=-n}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)(\frac{1}{z})^{-k}=X(\frac{1}{z})$$

(3)

令$y(n')=x(2n)$，有

$$\begin{aligned}Y(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)z^{-n}\\&\overset{n=\frac{k}{2}}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-\frac{k}{2}}\\&=\frac{1}{2}(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-\frac{k}{2}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(-k)z^{-\frac{k}{2}})\\&=\frac{1}{2}(X(z^{\frac{1}{2}})+X(z^{-\frac{1}{2}}))\end{aligned}$$

3. **高斯金字塔建立步骤：**
   1. **初始化**：将原始图像赋给金字塔的底层。
   2. **高斯滤波**：对当前层的图像应用高斯滤波以平滑图像。
   3. **下采样**：对平滑后的图像进行下采样，将图像的大小减半，得到下一级的图像。

   重复步骤2和步骤3，直到达到金字塔的顶层。

   拉普拉斯金字塔建立步骤：

   1. **初始化**：将高斯金字塔的顶层赋给拉普拉斯金字塔的底层。
   2. **上采样**：对当前层的图像进行上采样，将图像的大小放大为上一级。
   3. **图像差分**：将上一级高斯金字塔图像与上采样后的图像相减，得到当前级的拉普拉斯金字塔图像。

   重复步骤2和步骤3，直到达到金字塔的顶层。

   总体而言，高斯金字塔用于降低图像分辨率，而拉普拉斯金字塔用于存储每个级别的细节信息。这些金字塔在图像金字塔的构建和图像尺度空间分析中非常有用。

4. 答

在数学上，这指的是分解滤波器组和重构滤波器组之间的内积（内积是两个向量相乘再相加的操作）等于0或者$\delta(n)$，即

$$< h_i(2n-k), g_i(k) >= \delta(i-j)\delta(n), i, j = \{0,1\}$$

其中h_0, h_1为分解滤波器，g_0和g_1为重构滤波器；

对于公式(2)

$$< h_1(2n-k), g_1(k) >= \delta(n)$$

证明：

已知$H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = 2$

由

$$H_0(z)G_0(z) = \frac{2}{\det(\mathbf{H}_m(z))} H_0(z)H_1(-z)$$

相应有

$$H_1(z)G_1(z) = \frac{-2}{\det(\mathbf{H}_m(z))} H_0(-z)H_1(z)$$

反变换有

$$\sum_k g_1(k)h_1(n-k) + (-1)^n \sum_k g_1(k)h_1(n-k) = 2\delta(n)$$

因此，其偶数项为

$$\sum_k g_0(k)h_0(n-k) =< h_1(2n-k), g_1(k) >= \delta(n)$$

相应有

$$< h_0(2n-k), g_1(k) >= 0$$

5. 证

$$g_0(2k-1-n) \iff z^{-(2K-1)}G_0(z^{-1})$$

另外，根据Z域翻转性有

$$(-1)^n g_0(2k-1-n) \iff (-z)^{-(2K-1)}G_0(-z^{-1}) = G_1(z)$$

6. 解

已知

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^{n} h_0(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} g_0(2K-1-n)$$

将式一和二代入式三，有

$$h_0(n) = (-1)^{n+1} h_0(2K-1-n)$$

此外，当

$$g_0(n) = (-1)^{n} h_1(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

时，仍然有

$$h_0(n) = (-1)^{n+1} h_0(2K-1-n)$$

因此，最终关系为

$$h_0(n) = (-1)^{n+1} h_0(2K-1-n)$$

7. 解

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
q	0	1	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8

$$\mathrm{Harr}(N=16)=\frac{1}{4}\times\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\
2&2&-2&-2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&2&-2&-2&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&-2&-2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&-2&-2\\
2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\sqrt{2}&-2\sqrt{2}
\end{bmatrix}$$