

Coniques

LAZARUS Ségolène, MOULAT Mattéo

Question : Pourquoi peut-on résoudre ce système avec uniquement 5 points ?

Les coefficients sont définis à un facteur multiplicatif près, en effet si l'on prend $\mathcal{C} = (a \ b \ c \ d \ e \ f)^\top$, une ellipse et $\alpha \neq 0$ un réel, alors $\mathcal{C}' = \alpha\mathcal{C} = (\alpha a \ \alpha b \ \alpha c \ \alpha d \ \alpha e \ \alpha f)^\top$ désigne en réalité la même ellipse. On a donc 5 degrés de liberté, ce qui nécessite 5 contraintes.

Question : Montrez pourquoi la tangente l d'une conique C passant par le point $x \in C$ peut s'exprimer sous la forme : $l = Cx$.

Soit C la matrice 3×3 associée à une conique. et x un point appartenant à cette même conique. On pose $l = Cx$. On a donc $l^\top = (Cx)^\top = x^\top C^\top = x^\top C$.

On en déduit que $l^\top Cl = (x^\top C)C^{-1}(Cx) = x^\top Cx = 0$ car $x \in C$. Donc l est bien tangente à la conique.

De plus, $l^\top x = x^\top Cx = 0$ donc $x \in l$.

On en déduit que l est bien la tangente à C au point x .

Question : Que se passe-t-il si certains des points sont à l'infini ?

Puisque les calculs sont fait dans le cadre de la géométrie projective, cela ne pose pas de problème du point de vue des calculs. Simplement, comme certains points sont à l'infini, la conique devra passer par l'infini et donc être une parabole ou une hyperbole.