第一题：

设 $X[0:n-1]$和 $Y[0:n-1]$为两个数组，每个数组中含有 n 个已排好序的数。试设计一个 $O(\log n)$时间的分治算法，找出 X 和 Y 的 $2n$ 个数的中位数，并证明算法的时间复杂性为 $O(\log n)$

个数为奇数,则处于最中间位置的数

个数为偶数,则中间两个数据的平均数

算法分析：

两个数组，X 和 Y。设 X 数组的第一个、中间、最后一个元素分别为 lx，mx，rx；设 X 数组的第一个、中间、最后一个元素分别为 ly，my，ry。

先分别求两个数组的中位数 mx,my 进行比较，如果 mx < my，比如 X 的中间数是 3，Y 的是 5，那么推测两个数组的中间数约等于 4，则该中间数对于 X 来说一定在 3 的右边，即在 mx 到 rx 范围的子数组里面，对于 Y 来说，中间数一定在 5 的左边，即在 ly 到 my 的子数组里面。比较如下：

```
if mx < my:
    新 mx 属于[mx, rx]
    新 my 属于[ly, my]
else:
    新 mx 属于[lx, mx]
    新 my 属于[my, ry]
```

之后再对新的两个子数组进行求中位数比较，一直到子数组元素为 1 时，进行比较，即可找到原数组 X 和 Y 的中位数。

新的 mx 和 my 将原来的数组 X 和 Y 分别分成了两个子数组，但是在四个子数组中只需使用上式指定的两个子数组即可，所以一次分解之后为原问题规模更小的实例 T(n/2)，计算复杂度仍为计算两个数组的中位数（和原问题一样），为 T(n/2)。求中间数和中间数比较需要的时间复杂度为 O(1)，故总的递归式为：

$T(n) = T(n/2) + O(1)$

由 Master 定理计算可得时间复杂度为 T(n) = O(logn)

第二题：

有一实数序列$a_1, a_2, \dots, a_N$，若$i < j$ 且 $a_i > a_j$，则(a_i, a_j)构成了一个逆序对，请使用分治方法求整个序列中逆序对个数，并分析算法的时间复杂性。

例如：序列(4,3,2)逆序对有(4,3)，(4,2)，(3,2)共 3 个

算法分析如下：

参考归并排序，将数组分成两个子数组，再对两个数组进行递归分解，之后合并两个排好序的数组。合并过程中进行求逆序数操作。

设 l，mid，r 分别为数组的第一个，中间，以及最右边元素。则 A[l, mid]为左数组，A[mid+1, r]为右数组，设 i 和 j 分别为做右数组的元素，逆序对数为 s：

```
if A[i] < B[j]:
    不产生逆序对
else:
    s = s + mid-i+1
```

时间复杂度如下：

分解为两个子数组，规模为n/2，要对两个数组分别求解，故时间复杂度为2T(n/2)，分解时只需找到中位数，故 D(n)为 O(1)。合并时要遍历两个子数组，故 C(n)为 O(n)，所以递归方程为 T(n) = 2T(n/2) + O(n)

利用 Master 定理求解，T(n) = O(nlogn)

第三题：

POJ3714：

算法分析：

类似于最近点对，只不过要求两个点要在不同的集合里面。

采用分治法，分为两个集合，求两个集合的最近点对，以及求两个点分别在两个集合的点对。所求的点的位置，一定在于 mid-d,mid+d 之间。然后，就在这个区间开始找点，并不断更新 d 值，最后就可以得到 d 了。根据题意，返回长度的时候判断是否属于同一集合，若属于同一个集合，就返回一个很大的数

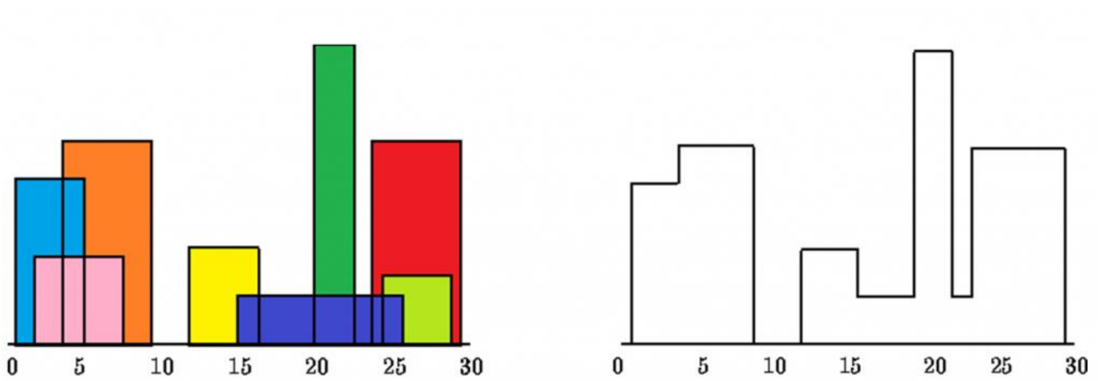
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <algorithm>
using namespace std;
// 不光有点，还要有集合类别标志
struct Point
{
	double x,y;
	int flag;
}p[1000001];
int arr[1000001];
double Min(double a,double b)
{
	return a<b?a:b;
}
// 求两点之间的距离
double dis(Point a,Point b)
{
	return sqrt((a.x-b.x)*(a.x-b.x)+(a.y-b.y)*(a.y-b.y));
}
// 根据点横坐标 or 纵坐标排序
bool cmp_y( int a,int b)
{
	return p[a].y<p[b].y;
}
bool cmp_x( Point a,Point b)
{
	return a.x<b.x;
}
// 求最近点对
double close_pair( int l,int r )
{
```

```
    // 如果只剩下两个点，判断是否属于同一集合
    if( r==l+1 )
    {
        if( p[l].flag!=p[r].flag )
            return dis( p[l],p[r] );
        else    return 999999;
    }
    // 剩下三个点，判断集合类别
    else if( r==l+2 )
    {
        if( p[l].flag==p[l+1].flag )
        {
            if( p[l].flag==p[l+2].flag )    return 999999;
            else    return Min( dis(p[l],p[l+2]),dis(p[l+1],p[l+2]) );
        }
        else
        {
            if( p[l].flag==p[l+2].flag )    return Min( dis(p[l],p[l+1]),dis(p[l+2],p[l+1]) );
            else    return   Min( dis(p[l],p[l+1]),dis(p[l],p[l+2]) );
        }
        return Min( dis(p[l],p[r]),Min( dis(p[l],p[l+1]),dis(p[l+1],p[r]) ) );
    }
    int mid=(l+r)>>1;
    double ans=Min(close_pair(l,mid),close_pair(mid+1,r));

    int i,j,cnt=0;
    for(i=l; i<=r; ++i)
        if( p[i].x>=p[mid].x-ans && p[i].x<=p[mid].x+ans )
            arr[cnt++]=i;

    sort(arr,arr+cnt,cmp_y);
    for( i=0; i<cnt ; i++ )
        for(j=i+1; j<cnt; j++)
        {
            if( p[arr[j]].flag != p[arr[i]].flag )
            {
                if(p[arr[j]].y-p[arr[i]].y>=ans) break;
                ans=Min(ans,dis(p[arr[i]],p[arr[j]]));
            }
        }

    return ans;
}
```

```
int main()
{
	int i,n,t;
	scanf("%d",&t);
	while( t-- )
	{
		scanf("%d",&n);
		for(i=0;i<n;++i)
		{
			scanf("%lf%lf",&p[i].x,&p[i].y);
			p[i].flag=1;
		}
		for(;i<n+n;++i)
		{
			scanf("%lf%lf",&p[i].x,&p[i].y);
			p[i].flag=2;
		}
		sort(p,p+n+n,cmp_x);
		printf("%.3lf\n",close_pair(0,n+n-1));
	}
	return 0;
}
```

第四题：

给定n座建筑物 $B[1, 2, \dots, n]$，每个建筑物 $B[i]$表示为一个矩形，用三元组$B[i] = (a_i, b_i, \mathrm{h}_i)$表示，其中$a_i$表示建筑左下顶点，$b_i$表示建筑的右下顶点，$\mathrm{h}_i$表示建筑的高，请设计一个 $O(n\mathrm{log}n)$的算法求出这n座建筑物的天际轮廓。例如，左下图所示中 8 座建筑的表示分别为(1,5,11)，(2,7,6)，(3,9,13)，(12,16,7)，(14,25,3)，(19,22,18)，(23,29,13)和(24,28,4)，其天际轮廓如右下图所示可用 9 个高度的变化(1, 11)，(3, 13)，(9, 0)，(12, 7)，(16, 3)，(19, 18)，(22, 3)，(23, 13)和(29,0)表示。另举一个例子，假定只有一个建筑物(1, 5, 11)，其天际轮廓输出为 2 个高度的变化(1, 11)，(5, 0)。



算法分析：

使用分治方法，如果只有一个建筑，那么输出的点一定是建筑的左上顶点和右下顶点，每次将 buildings 一分为二做递归，当 buildings 的数量为 1 时，返回 2 个点。之后将分开的结果合并，要记录当前 left 和 right 的位置，每次选择横坐标较小的点插入结果中，保证结果有序，结果点的横坐标等于原横坐标，至于结果点的纵坐标，应该是取 right 和 left 中的较大值，而这个高度的值也应有 2 个变量实时记录，代表的含义是 left 和 right 当前的高度。合并时候点的高度一定不能和上一个点相同，如果多个连续的点纵坐标相同，则结果中只能有第一个点

时间复杂度类似于归并排序，为 O(nlogn)