

动态规划入门讲解 2

动态规划的优化技巧
By 张惜今



动态规划的复杂度优化

- 多项式级时间复杂度
- 规模较大的问题 ($10^5, 10^6$)
- 降低一个阶



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



动态规划的复杂度计算

- 通用的计算方法:
- 时间复杂度 = 状态总数 * 决策数 * 每次决策的时间复杂度
- 空间复杂度 = 状态总数 + 辅助空间



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



优化方法

- 三个因素不可得兼
- 减少状态总数
- 改变决策方式
- 优化决策效率



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



动态规划的空间复杂度优化

- 当今程序设计竞赛对空间要求不高
- 32MB-256MB
- 仍然可能有优化需要
- 1. 使用滚动数组
- 2. 避免不必要的状态维



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



使用滚动数组

- 线性连接的问题
- $f[i][\]$ 只会从 $f[i-1][\]$ 更新
- 不必保存之前的
- $F[0..1][\]$
- $i=1-i$



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



避免不必要的状态维

- 状态只要保存之前决策影响造成的全部信息
- 有多种保存方式
- 尽量利用信息
- 一个例题：灵梦的双重灵力



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



灵梦的双重灵力

- 这次，灵梦的灵符是一个正方形， $N \times N$ 的矩阵中每个格子仍然表示灵力经过获得的修复值，从左上角出发，每次只能往右或者下走，最终到右下角，为灵力寻找两条不交叉的路径（除了起点终点），使路径上的修复值和最大。



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



改变状态表示

- 阶段点是不同的两点
- 不交叉的方式转移
- $f[x][y][i][j]$ 第一个点为 x, y 第二个为 i, j 时的最优值
- 每次只能走一步，阶段可以用步数表示
- 一个坐标 + 步数 \rightarrow 另一个坐标



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice

动态规划的时间复杂度优化

- 时间复杂度优化是重点
- 从思维复杂实现简单的改变状态
- 到非常麻烦的搞基数据结构



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



蕾米的出门方案 (HDU3905)

- 大小姐蕾米利亚是个 500 岁的老 Lolli，更重要的是，她是个吸血鬼，吸血鬼是不能见到阳光的，为了自己的出行方便，她还曾经引起过幻想乡的异变。话说在一段时间内，总共有 N ($N < 1000$) 分钟，在第 i 分钟出门她会获得 a_i 的办事方便值，出门一次，就要连续在外面待 L 分钟，但是她至少要保证有 M 分钟是待在室内的，问她总共能获得多少办事方便值？



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



改变状态表示

- 容易想到的方程：
- $f[i][j][0] = \max(f[k][j-1][0], f[k][j-1][1])$
- $f[i][j][1] = \max(f[k][j][0] + \text{sum}(k, j), f[k][j][1])$
- 改变状态表示
- 从而改变转移方式



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



新的状态

- $f[i][j][0] = \max(f[i-1][j-1][0], f[i-1][j-1][1])$
- $f[i][j][1] = \max(f[i-L][j][1] + \text{sum}(i-L, i), f[i-L][j][0] + \text{sum}(i-L, i))$



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



咲夜の家务 (CD0J1506)

- 十六夜咲夜是红魔馆的女仆长，据说原来是猎杀吸血鬼的猎人，被吸血鬼打败后因为吸血鬼改变命运的能力而做了红魔馆的女仆长在为吸血鬼服务。一天，咲夜准备收拾红魔馆的家务，于是有好多乱七八糟的杂物要搬运，红魔馆可以简化为一个平面，咲夜的出发点在 $0,0$ 点，她每次最多搬重量为 M 的物品，从起点出发，依次搬运每个物品（不能跳过和改变顺序），送完后回起点取，她的运动走两点间的曼哈顿距离，她想知道送完所有物品最少要走多少距离。最多有 100000 个物品



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



利用单调性：单调队列

- 方程： $f[i] = \min(f[j] + d[j+1] + s[i] - s[j+1] + d[i])$ 时间复杂度 $O(n^2)$
- 单调队列：每个元素是一个二元组：值 位置
- 保证值和位置都是单调的
- $f[j] + d[j+1] - s[j+1]$ 作为值与 i 无关，选一个最小的，位置就是 i
- 计算 $f[i]$ 时：在队头删除，直到队头元素位置和 i 的之间的物品重量满足单次承重，那么队头元素就是最好的选择
- 计算完 $f[i]$ ：在队尾，看队尾元素的值是否小于 i 处的值，小于则删除，然后 i 处的二元组入队
- 条件：范围单调 转移只用到一个根据位置在常数时间算出的值



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



文的报纸印刷 (CD0J1505)

- 射命丸文是掌握风的能力的天狗，她也是幻想乡的记者（狗仔队老大），文文晚报就是她出版的，专门发表幻想乡中的各种花边新闻。她有一台旧印刷机，这台印刷机太老了所以在不断损耗，她有 N 个字要印刷，每个字有一个印刷的损耗值，必须按顺序印刷出来，当把 i 到 j 这些字印刷在一行的时候，打印机会损耗这些字损耗值和的平方 + 常数 M ，请问印完所有字，最少损耗多少？ ($N < 100000$)



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



数形结合：斜率优化

- $f[i]$ 表示最后划分的一段以 i 结束的最小代价, $f[i] = \min(f[j] + (s[i] - s[j])^2 + M)$
- 这题划分的范围是随意的而不是单调的，所以不能用上面的方法优化
- 数形结合：这一段黑板写吧



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



更复杂的例子：单调队列 + 高级数据结构

- CD0J1501 平衡树优化 (STL set)
- HDU3872 线段树优化



～上海アリス幻楽団～
Team Shanghai Alice



谢谢

- 张惜今 (mfs6174)
- mfs6174@gmail.com

