

# General Relativity and Cosmology 1

EPFL 2025-2026 学年第一学期课程笔记

X. D. H.

2025 年 12 月 27 日

## 摘要

这些是 EPFL 2025-2026 学年第一学期的 General Relativity and Cosmology 课程笔记。内容覆盖了基本的微分几何，GR 的基本形式理论，线性引力，引力波，Schwarzschild 解。

## 目录

<b>1 Lecture 1: Motivation and Fundamental Geometry</b>	<b>5</b>
1.1 General Relativity 的 Motivation . . . . .	5
1.2 Manifold and Vectors . . . . .	5
1.3 Questions and thoughts . . . . .	7
<b>2 Lecture 2: Tensors Fields and Metric</b>	<b>10</b>
2.1 Tensor Field . . . . .	10
2.1.1 Tangent Field . . . . .	10
2.1.2 Tensors and Tensor Fields . . . . .	12
2.1.3 Metric Tensor Field . . . . .	15
2.2 Questions and thoughts . . . . .	16
<b>3 Lecture 3: Covariant Derivative and Curvature</b>	<b>17</b>
3.1 Covariant Derivative . . . . .	17
3.1.1 Covariant Derivative 的定义和性质 . . . . .	17
3.1.2 parallel transport . . . . .	20
3.1.3 Physical Covariant Derivative . . . . .	21
3.2 Curvature of Manifolds . . . . .	22
3.2.1 Riemann Curvature Tensor . . . . .	22
3.2.2 Properties of Riemann Curvature Tensor . . . . .	24
3.2.3 Riemann Curvature Tensor 相关的张量 . . . . .	25
3.3 Geodesic I . . . . .	26
3.3.1 Geodesic Equation definition . . . . .	26
3.3.2 Geodesic as Extremal of Length . . . . .	26
3.4 Questions and Thoughts . . . . .	27

<b>4 Lecture 4: Geodesics and Curvature</b>	<b>31</b>
4.1 Geodesic II . . . . .	31
4.1.1 Geodesic as extremal of Length . . . . .	31
4.1.2 Riemann Normal Coordinates . . . . .	32
4.2 Geodesic Deviation . . . . .	34
4.3 General Covariance and Invariance . . . . .	36
4.4 Special Relativity . . . . .	37
4.5 Questions and Thoughts . . . . .	39
<b>5 SUP1: More on Geometries</b>	<b>41</b>
5.1 微分形式以及流形上积分 . . . . .	41
5.2 Lie Derivative and Killing Vector Fields . . . . .	41
5.2.1 Lie Derivative of a Vector Field . . . . .	41
5.3 超曲面 . . . . .	41
5.4 标架体系以及曲率 . . . . .	41
5.5 Maximal Symmetry and Constant Curvature . . . . .	41
<b>6 Lecture 5: Einstein Field Equation 以及 Lagrangian Formalism</b>	<b>42</b>
6.1 Einstein Field Equation . . . . .	42
6.1.1 构造 Einstein Field Equation 的思路 . . . . .	42
6.1.2 Einstein Field Equation 以及求解 . . . . .	42
6.2 Lagrangian Formulation of GR . . . . .	44
6.2.1 Einstein-Hilbert Action . . . . .	44
6.3 引入物质场 . . . . .	46
6.3.1 EoM 和能动量张量直接推广 . . . . .	46
6.3.2 Lagrangian 的推广 . . . . .	49
6.4 GR 的唯一性 . . . . .	51
6.5 Questions and thoughts . . . . .	51
<b>7 Lecture 6: Weak Gravitational Field</b>	<b>52</b>
7.1 Formulation of Linearized Gravity . . . . .	52
7.1.1 基础理论框架 . . . . .	52
7.1.2 线性引力在 Hilbert Gauge 下框架 . . . . .	54
7.2 Nearly Newtonian Field . . . . .	55
7.3 Lense-Thirring Effect . . . . .	58
7.4 Questions and thoughts . . . . .	60
<b>8 Lecture 7: Gravitational Field Solution</b>	<b>61</b>
8.1 引力波 . . . . .	61
8.1.1 TT Gauge 下的 Einstein Field Equation . . . . .	61
8.1.2 引力波的解 . . . . .	62
8.1.3 TT Gauge 一些性质 . . . . .	63

8.2	Questiona and thoughts . . . . .	64
<b>9</b>	<b>Lecture 8: Matter reacts to Gravitational Field</b>	<b>65</b>
9.1	物质对引力波响应 . . . . .	65
9.1.1	TT Gauge 下的物质响应 . . . . .	65
9.1.2	Local Inertial Frame 下的物质响应 . . . . .	67
9.2	引力波的探测 . . . . .	70
9.2.1	Interferometer 的工作原理 . . . . .	70
9.2.2	引力波对 Interferometer 的影响 . . . . .	71
9.3	Questions and thoughts . . . . .	72
<b>10</b>	<b>SUP 3: Fermi Normal Coordinate</b>	<b>73</b>
<b>11</b>	<b>Lecture 9:</b>	<b>74</b>
<b>12</b>	<b>Lecture 10</b>	<b>75</b>
<b>13</b>	<b>Lecture 11: Isometries and Killing Vector Fields</b>	<b>76</b>
13.1	Diffeomorphism 以及 Lie Derivative . . . . .	76
13.1.1	Diffeomorphism 以及 Isometry . . . . .	76
13.1.2	Lie Derivative . . . . .	78
13.2	Killing Vector Field . . . . .	80
13.2.1	Killing Vector Field 的定义 . . . . .	80
13.2.2	Minkowski 的 Killing Vector Field . . . . .	81
13.3	Schwarzschild Metric . . . . .	82
13.3.1	Schwarzschild metric 的 ansatz . . . . .	82
13.4	Questions and Thoughts . . . . .	83
<b>14</b>	<b>Lecture 12: Schwarzschild Metric and Geodesics</b>	<b>84</b>
14.1	Schwarzschild Metric . . . . .	84
14.1.1	Schwarzschild Metric Solution . . . . .	84
14.1.2	Schwarzschild Metric 的性质 . . . . .	84
14.2	Schwarzschild Metric 上的 Geodesics . . . . .	85
14.2.1	Killing Vector 求解 Geodesic . . . . .	85
14.3	GR 验证 I: 行星近日点进动解 . . . . .	88
<b>15</b>	<b>Lecture 13: Schwarzschild Black Hole</b>	<b>89</b>
15.1	GR 验证 II: 引力红移解 . . . . .	89
15.2	Star Interior Spacetime and Collapse . . . . .	90
15.2.1	EFE for a Star Interior . . . . .	90
15.2.2	Solving EFE for Star Interior . . . . .	91
15.2.3	Stellar Collapse to a Black Hole . . . . .	93
15.3	Kruskal Extension I . . . . .	93

15.3.1 Schwarzschild Coordinate Singularity . . . . .	93
15.3.2 Eddington-Finkelstein Coordinates . . . . .	94
<b>16 Lecture 14: Black Hole Solution and More</b>	<b>97</b>
16.1 Kruskal Coordinates 与最大延拓 . . . . .	97
16.2 潮汐力与 Speghetification . . . . .	99
16.3 Penrose Diagram . . . . .	101
16.3.1 Minkowski 时空的 Penrose Diagram . . . . .	101
16.3.2 Schwarzschild-Kruskal 时空的 Penrose Diagram . . . . .	102
16.4 Charged and Rotating Black Holes . . . . .	103
16.4.1 Reissner-Nordström Black Hole . . . . .	103
16.4.2 Kerr Black Hole . . . . .	105

# 1 Lecture 1: Motivation and Fundamental Geometry

{sec:1}

## 1.1 General Relativity 的 Motivation

EEP的定义以及EEP的验证——引力红移现象

说明了为了 SR 之中存在引力需要，我们可以有 EEP 等效原理。

In an arbitrary gravitational field no local non-gravitational experiment can distinguish a freely falling non-rotating system (local inertial system) from a uniformly moving system in the absence of a gravitational field.

但是，这意味着我们存在引力红移现象【并且实际上也是存在的，说明 EEP 是对的!!】。然后我们证明狭义相对论框架下，如果把引力视作一个和时空无关的场，我们永远不可能存在这样的引力红移。所以 GR 应该是一个关于时空的理论，而不仅仅是在 SR 的框架下加上一个引力场。

## 1.2 Manifold and Vectors

Manifold 以及怎么 intrinsically 定义

我们希望描述一个弯曲的时空并且可以不依赖于 Embedding 进行描述，我们可以使用 manifold 的概念：

**Definition 1.** *n-dimentional  $C^\infty$  Real Manifold* 需要满足：

- $\mathcal{M}$  需要被  $O_a$  完整覆盖，每一个点  $p \in \mathcal{M}$  至少在一个  $O_a$  中
- 对于每一个  $O_a$  存在一个【一一映射】 $\psi_a : O_a \rightarrow U_a \in \mathbb{R}^n$  也就是 coordinate system
- 对于重叠的  $O_a, O_b$  需要满足  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  是  $C^\infty$  的。

流形之间的映射 Diffeomorphism

首先考虑一般的两个流形之间的映射，考虑  $\mathcal{M}$  以及  $\mathcal{M}'$  之间存在  $f$  映射，我们可以讨论这个映射的一些性质：

- $C^\infty$  光滑性：如果这个映射保证了  $\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个  $C^\infty$  的映射。那么我们认为  $f$  是一个  $C^\infty$  的映射
- Diffeomorphism：如果  $f$  是一个双射，并且  $f$  以及  $f^{-1}$  都是  $C^\infty$  的映射，那么我们认为  $f$  是一个 Diffeomorphism

Vectors on Manifold

我们希望用 vector 进行描述物理。我们希望找一个推广 vector 的媒介，我们找到了「方向导数」(Directional Derivative)。对于平直时空所有向量可以给出一个方向导数的定义为： $\sum_\mu v^\mu \partial/\partial x^\mu$ 。

我们希望能够一般时空找到一个「方向导数」，并且反过来用它定义一个 vector。我们知道方向导数需要满足：1. 线性性 2. Leibniz 法则所以我们也希望赋予 vector 这个结构。

为了定义导数我们需要先定义函数 (也就是导数作用空间)：

- $\mathcal{F}$  是所有流形上  $C^\infty$  函数「其实是说  $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是  $C^\infty$  的」的集合， $\{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}\}$

### Definition 2. 流形上某一点的切向量

我们定义流形上一点  $p \in \mathcal{M}$  的 *vector* 是一个映射： $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  满足下面两个规则：

1. 线性： $\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g)$  其中  $a, b \in \mathbb{R}$
2. Leibniz 法则： $\mathbf{v}(fg) = g[p]\mathbf{v}(f) + f[p]\mathbf{v}(g)$

### 从切向量构造切空间

我们考虑所有这样的向量的集合，并且在这个集合上赋予两个运算关系：

- 加法： $(\mathbf{v} + \mathbf{w})(f) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)$
- 数乘： $(a\mathbf{v})(f) = a\mathbf{v}(f)$

所以流形上所有切向量在这两个运算之下构成了一个线性空间，我们称之为 Tangent Space，记为  $T_p\mathcal{M}$ 。

### 切空间的基

对于一个线性空间我们可以找到一组互相独立的基。我们会发现，我们不需要随意设置一个基。**流形的 coordinate system 会自然的给出流形上任意一个点的 tangent space 的一组基！**

我们下面逐步构建，考虑切空间  $T_p\mathcal{M}$  考虑  $p$  所在的 chart  $O$ ，存在一个 coordinate system  $\psi : O \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  我们可以定义  $n$  个  $X_\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  满足对于任意  $f \in \mathcal{F}$  我们有：

$$\mathbf{X}_\mu(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \circ \psi^{-1} \right|_{\psi(p)}. \quad (1)$$

我们需要验证这一组基础是【线性独立的】并且是【一组完备的】基：

- 独立性：我们假设  $a^\mu X_\mu = 0$ ，可以通过构造一个特殊的  $f$  推导出来  $a^\nu = 0$
- 完备性：回头证明

结论是  $\dim(T_p\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{M}) = n$ 。并且这一组基  $\{X_\mu\}$  或者写作  $\partial_\mu$  我们称为 **coordinate basis**。

### 切空间 coordinate transformation

如果我们换一个 manifold 上面的 coordinate system 那么我们可以 induce 出来切空间一组新的基！具体证明特别形式化，我就直接写一个图像化的结论是：

$$\mathbf{X}_\mu = \sum_{\nu=1}^n \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{\psi(p)} \mathbf{X}'_\nu, \quad (2)$$

这里我们的  $\partial x'/\partial x$  的意思是指  $\psi' \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  这个的 Jacobian 矩阵。我们可以直接考虑变换一个基的分量的变换是「我们的分量用上标写！」：

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right. . \quad (3)$$

**Remark:**

需要注意这个  $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$  是一个 concrete 的数值，不是一个抽象的符号

**Remark:**

根据 coordinate system 的概念我们知道坐标变换的 Jacobian 必然是非退化的，所以切空间的基变换也是非退化的。所以这些变换矩阵必须是可逆矩阵!!

所有 curve 穿过 p 构成的空间同构于切空间

我们考虑另一种切空间构造的视角。我们可以通过一个流形上曲线的参数化进行构造，我们先理解一些概念：

- Smooth curve: 我们认为是一个  $C^\infty$  映射  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$
- 考虑这个曲线上的一点  $p \in Im(C)$ , 这个曲线给出了  $p$  上的一个 tangent vector
- 对于任意  $f \in \mathcal{F}$  我们构造一个映射  $f \circ C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

在这些基础上我们定义这个曲线在  $p$  处的切向量为：

$$\mathbf{T}(f) = d(f \circ C)/dt. \quad (4)$$

曲线构造切向量的分量

我们计算这个切向量在某一个 coordinate basis 下面的分量：

$$\mathbf{T}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C) = \frac{d}{dt} [(f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ C)] = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (f \circ \psi^{-1}) \frac{dx^{\mu}}{dt} = \sum_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \mathbf{X}_{\mu}(f). \quad (5)$$

这里我们写的  $x^{\mu}(t)$  其实是说的这个映射  $\psi \circ C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。在 coordinate basis 下面这个切向量的分量是： $T^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{dt}$ 。一个有趣的事就是对于  $\psi \circ C_{\nu}(t) = t\delta_{\nu}^{\mu}$  正好给出了 coordinate basis 的一个基向量  $X_{\nu}$  捏。

### 1.3 Questions and thoughts

**Important: 对于不变量**

对于相对论，我们需要确定一些不同参考系之间永远不变的量才能够讨论什么变化了。对于一般伽利略参考系，我们可以认为时间是所有参考系不变的；对于狭义相对论我们知道其实不变的是  $d\tau$  或者  $ds$  这样的时空间隔。

对于 GR 来说我们需要继续选择这样的不变量进行讨论!!! 我们依旧选择这样的时空间隔是不变的。我们后来会发现这样的构造让其是  $ds^2 = h_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$  这样的张量，保证了我们时空间隔的参考系无关的感觉。

**Question 1.0** 我们需要知道狭义相对论里面某一个参考系下各种点时间和坐标是怎么定义的?? 以及我们两个物理的参考系变换是怎么联系上的??

要回答【为什么两个 inertial 参考系之间通过 Lorentz Transformation 连接】我们需要定义两个点：

1. 我们怎么知道一个参考系是 inertial 的？什么实验能够让一个观察者知道自己是在一个 inertial 参考系下？
2. 在一个参考系下面我们怎么测量一个事件的时空坐标？我们怎么在一个参考系下计算一个时间  $x^\mu$
3. 我们怎么把两个参考系联系起来？

对于第一个问题很简单，我们发现我们需要狭义相对论纯因为电磁学有问题。但是力学是完全没 bug 的。不妨做一个力学实验，如果力学实验下物体满足牛顿定律的描述，比如放一个球看看会不会自己动。如果并不动那么我们显然可以知道这个参考系是 inertial 的。

这个问题是，我们一个观察者知道自己的位置是 0，并且不妨设自己的时间从 0 开始不停的流逝。这是完全没问题的，但是我们如果前面发生了一个爆炸那么我们怎么定义这个事件的位置和发生时间呢？

### Definition 3. 某一个参考系下事件的时空坐标

**时间坐标确定：**我们把一个参考系下某个事件的时空坐标的数值定义为那个事件位置的一个【对好的钟】在事件发生的时候显示的数值。核心问题是**我们怎么对好钟**，我们参考者可以有一个时空每一个位置的时钟表，我们记录为  $t_{event} = t_{x=0} + \frac{t_{light \ comes \ back} - t_{light \ emit}}{2}$

**空间坐标确定：**很显然也就是光传播的时间乘上光速。

### Remark:

在牛顿力学，我们可以随便的方法进行对钟；但是对于相对论，我们能且仅能用光来对齐。因为我们不能相信其他物质的运动情况，因为我们不能理解这些东西如果按照光速传播会发生什么，但是我们的假设让我们知道光速是永远不变的。

最后一个问題，我们怎么联系两个参考系？那么就是我们的几个假设，然后一波推导就可以知道了！！

□

一个特别特别特别重要的问题！

### Question 1.1 怎么理解电场存在“另一个参考系下某一个观察者测量的结果”

首先对比测量结果我们必须 locally 进行对比！否则没有意义。

研究“另一个参考系下某一个观察者的结果”的意义在于：我们定义测量的物理量并不一定是张量，「对于一个物理量只要我们给出一个合理的测量方法就好了」。对于电场我们可以用相对于某个参考系静止的电子受到的力进行定义，这经过研究显然不是一个协变的量。

电场存在合理的测量定义但是，并不按照 lorentz transformation 进行变换。这样的物理量就会存在一个概念：对于某一个点某参考系下的【注意是同一个参考系，不涉及运动观察者静止的参考系】… 一个运动观察者测量的电场并不等于某个参考系下静止观察者测量的电场。【正是因为电场不是 tensor 所以有这个不同】

一个解决方法是：根据定义，讨论电场作用一个观察者就只讨论静止参考系的。但是我们显然很难研究运动粒子在电场中受力。

于是现在就有另一个解决方案：电场其实和加速度是关联的，然后加速度是 lorentz tensor。所以我们必然可以把电场写作一个形式让其是 lorentz tensor!! 然后我们定义这个是协变的电场。于是就有了  $E^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$  这是一个很好的定义，可以定义电场在非静止参考系下面的样子力!!!

□

## 2 Lecture 2: Tensors Fields and Metric

{sec:1}

### 2.1 Tensor Field

#### 2.1.1 Tangent Field

##### Tangent Field

我们之前定义了某一个点上面的切空间以及切向量。下面我们希望对于 manifold 上面每一个点都做同样的定义。

##### Definition 4. Tangent Field

对于 manifold  $\mathcal{M}$  上面每一个点  $p$ , 对于其切空间  $T_p\mathcal{M}$  赋予一个切向量  $\mathbf{v}(p) \in T_p\mathcal{M}$ , 那么我们称这个映射  $p \rightarrow \mathbf{v}(p)$  为一个 Tangent Field。

tangent field 我们可以定义一些特质:

1. Smooth Tangent Field: 如果对于任意  $f \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{v}(f) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个 smooth function, 那么我们称这个 tangent field 是 smooth 的。

对于这一点我们可以证明

**Lemma 1.** 对于一个 coordinate system  $(O, \psi)$ , 如果一个 tangent field 在这个 chart 下面的分量  $v^\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个 smooth function, 那么这个 tangent field 是一个 smooth tangent field。

**Lemma 2.** 定义上一个 coordinate system 的基矢量,  $\partial_\mu$ , 都是 smooth tangent field。因为坐标系的定义上给出了  $f$  的导数, 并且  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$

##### 单参数微分同胚群

我们发现 manifold 上面的 tangent field 和 manifold 之间的 diffeomorphism 存在天然的联系。首先我们定义一个群描述一组 diffeo;

##### Definition 5. One-parameter group of diffeomorphisms

我们定义一个映射  $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  满足:

1. 对于任意  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  是一个 diffeomorphism
2. 对于任意  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_{\lambda+\mu} = \phi_\lambda \circ \phi_\mu$
3.  $\phi_0 = id$

那么我们称这个映射为一个 one-parameter group of diffeomorphisms。

### 单参数微分同胚群诱导的切向量场

我们下面考虑这样的一个群，每一个  $t$  给出的  $\phi_t$  把 manifold 上面的一个确定的点  $p$  映射到另一个点  $\phi_t(p)$ 。

- 如果我们固定点  $p$ ，并且允许选择不同的  $t$ ，那么我们就得到了一个 curve  $C(t) = \phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ 。
- 显然这个 curve 是经过点  $p$  的，根据群的定义  $\phi_0 = id$ ，所以  $C(0) = p$ 。
- 我们可以定义这个 curve 在点  $p$  处的切向量

$$v_p(f) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \phi_t(p)) \right|_{t=0}, \text{ for any } f \in \mathcal{F}. \quad (6)$$

我们对于 manifold 上面每一个点重复同样的过程，我们就得到了一个 tangent field。我们说这个 tangent field 是这个群的一个 infinitesimal generator。

并且根据 curve induce 的向量场的定义，我们可以把这个向量场作用在一个 function 上面写作：

$$\mathbf{v}(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[\phi_t(p)] - f[p]}{t}, \quad (7)$$

### 切向量场 generate 单参数微分同胚群

我们想问 【一个 smooth tangent field 能不能生成一个 one parameter diffeo group】，答案是肯定的。我们选择一个 manifold 上面的 coordinate system 进行讨论：

- 对于任何 smooth tangent field  $\mathbf{v}$ ，我们可以在这个 chart 下面写作  $\mathbf{v} = v^\mu \partial_\mu$ ，其中  $v^\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是一个 smooth function。
- 在这个坐标系下，我们可以考虑下面这个 ODE：

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu(x^1, \dots, x^n). \quad (8)$$

- 我们给定流形上面某一个点  $p$ ,  $x_0^\mu = \psi(p)$ 。选择这个 ODE 的初始条件是  $x^\mu(0) = x_0^\mu$ ，可以得到一个解（积分曲线）。
- 我们根据这个积分曲线定义一个 one parameter diffeo group，作用在这个点  $p$  的结果  $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ :

$$\phi_t(p) = \psi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad (9)$$

在 manifold 所有的点重复这个过程，我们就得到了一个 one parameter diffeo group。

### Commutation Relation of Vector Fields

我们考虑两个 smooth tangent field  $u, v$ ，我们可以定义一个新的映射，把一个 function 映射到一个 function：

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}](f) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(f)) - \mathbf{v}(\mathbf{u}(f)), \quad (10)$$

我们可以证明这个新的映射满足：1. 线性；2. Leibniz rule。所以这个新的映射是一个 tangent field，我们称之为  $u, v$  的 Lie bracket，记为  $[u, v]$ 。

下面给出一些性质：

- 反对称性： $[u, v] = -[v, u]$
- Jacobi identity:  $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

单纯这两点，我们会意识到所有的 tangent field 构成了一个 Lie algebra。

1. 根据反对称性，我们显然有对于基矢量： $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ 。
2. 在一个 coordinate system 下面写出这个 Lie bracket 的具体形式：

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \left[ \sum_\mu u^\mu \partial_\mu, \sum_\nu v^\nu \partial_\nu \right] = \sum_{\mu, \nu} (u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu) \partial_\nu. \quad (11)$$

### 2.1.2 Tensors and Tensor Fields

#### 一般线性空间的Dual Space

为了构建张量，我们需要给出一个线性空间的对偶空间的概念。

#### Definition 6. Dual Space

对于一个线性空间  $V$ ，我们定义所有从  $V$  到  $\mathbb{R}$  的线性映射  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  的集合，记为  $V^*$ ，这个集合也是一个线性空间，我们称之为  $V$  的对偶空间。

Dual Space 的 basis 有一个特别方便的构造方法。我们选择  $V$  线性空间的一组基  $\{e_\mu\}$ ，那么我们可以定义  $V^*$  的一组基  $\{e^\mu\}$  满足：

$$e^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (12)$$

在上面的构造基础上，我们给出一个线性空间的 dual space 的一些性质

1. Dual Space 自身构成了一个线性空间，其维度是  $\dim(V^*) = \dim(V)$
2. 存在一个 natural isomorphism  $V \cong V^{**}$ ，也就是  $V$  和其 double dual 是自然同构的。

我们发现，选定一个 basis dual space 和原来空间存在一个模糊的对应，并且是 basis dependent 的。但是后面我们知道，如果给出了一些额外结构，我们可以完整的构造 dual space 和原来空间的【唯一】一一映射。

#### Tangent Space的Dual Space: Cotangent Space

我们考虑 manifold 上面某一点  $p$  的切空间  $T_p \mathcal{M}$ ，我们定义这个切空间的 dual space，记为  $T_p^* \mathcal{M}$ ，称之为这个点的 cotangent space。

显然我们可以选择一组基进行 cotangent space 的构造。我们选择：

$$dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (13)$$

显然这个会给出很多的性质：

1. 线性空间:  $T_p^*\mathcal{M}$  是一个线性空间, 维度是  $\dim(T_p^*\mathcal{M}) = \dim(T_p\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{M}) = n$
2. Basis Transformation: 如果我们换一个 coordinate system, 那么这个 basis 的变换是:

$$dx'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}. \quad (14)$$

这个变换和 tangent space 的基变换是完全不同的! 【注意!!】并且这个变换是一个 covariant 的变换。

### 切空间以及余切空间的第二种视角

其实根据上面的构造, 我们的 Tangent Vector 可以从两个角度定义:

1. 可以作为一个从  $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  的映射
2. 可以作为一个从  $T_p^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  的映射

这两个视角是等价的。同时在不同的情况下有不同的优势。下面我们考虑第二种视角的理解。

我们现在在 manifold 上面的一个点  $p$  构造出来了两个线性空间:  $T_p\mathcal{M}$  以及  $T_p^*\mathcal{M}$ 。并且这两个线性空间的元素, 其实把另一个线性空间的元素映射到了  $\mathbb{R}$ 。

1. Tangent Vector  $v \in T_p\mathcal{M}$  把  $T_p^*\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$
2. Cotangent Vector  $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$  把  $T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

这个视角下面我们如果按照 delta 函数的方式构造这两个空间的基, 我们可以发现, 对于某个基下面的分量有两种写法:

$$v^{\mu} = v(dx^{\mu}) \quad v = v^{\mu} \partial_{\mu}, \quad (15)$$

之后我们就经常混乱的使用其中的一种理解形式。

### Tensors on a point

上面的视角下面, 我们可以构造出一个更广义的 geometric object: Tensor:

#### Definition 7. Tensor

对于一个点  $p$ , 我们定义一个  $(k, l)$ -type tensor 是一个多线性映射, 我们选择  $V = T_p\mathcal{M}, V^* = T_p^*\mathcal{M}$ :

$$\mathbf{T} : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (16)$$

下面给出一些 tensor 的性质:

1. 线性空间: 所有的  $(k, l)$ -type tensor 构成了一个线性空间, 记为  $T_p(k, l)$ 。并且这个空间的维度是  $\dim(T_p(k, l)) = n^{k+l}$ , 其中  $n = \dim(\mathcal{M})$ 。
2. Tensor Product 运算: 我们对于任意 rank 的 tensor 都可以互相定义一个 non-commute 的运算:  $T \otimes S$  我们称之为 tensor product。结果是其 rank 进行一波相加。

3. Basis of Tensor Space: 有了 tensor product 的概念之后我们可以很自然的定义一组  $(j, k)$ rank tensor 的 basis from Tangent and Cotangent Space basis:

$$\mathbf{T} = T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_j} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_j} \otimes \mathbf{e}^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{*\nu_k} \quad (17)$$

### Remark:

和 vector 以及 covector 的分量一样, tensor 的分量我们也是有第二种写法的, 我们经常随意使用任意一种理解书写方法:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_j} = \mathbf{T}(\mathbf{e}^{*\mu_1}, \dots, \mathbf{e}^{*\mu_j}, \mathbf{e}_{\nu_1}, \dots, \mathbf{e}_{\nu_k}), \quad (18)$$

### Tensor Properties

下面我们给出更多很重要的 Tenor 的性质。显然我们知道如果 manifold 上面每一个点都给出了一个 tensor, 那么我们就得到了一个 tensor field。我们下面有的时候会使用 tensor field 的概念。

- Basis Transformation of Tensor: 根据 tensor 的构造方式我们可以证明所有 index 是按照坐标变换的矩阵进行变换的。
- Contraction of Tensor: 我们可以把一个  $(k, l)$ -type tensor 的一个上指标和一个下指标 contract 掉, 得到一个  $(k - 1, l - 1)$ -type tensor。【注意!! 只有上下指标能够进行 contraction!】
- Smooth Tensor Field: 对于 smooth 的 tangent field 以及 cotangent field, 我们可以定义一个 smooth tensor field 是对于任意的  $k$  个 smooth cotangent field 以及  $l$  个 smooth tangent field, 我们定义下面的映射  $T(\omega_1, \dots, \omega_j; v^i, \dots, v^k) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  映射到  $\mathbb{R}$  的映射是一个 smooth function。那么我们说这个是一个 smooth tensor field。
  - 同样的, 我们可以在一个 chart 下面给出一个 sufficient condition: 如果一个 tensor field 在一个 chart 下面的分量是一个 smooth function, 那么这个 tensor field 是一个 smooth tensor field。

### Symmetric and Antisymmetric Tensor

对于一个 tensor 我们可以定义 symmetric 或者 antisymmetric tensor。我们定义一个 tensor 是 symmetric 的如果对于任意两个上指标或者任意两个下指标交换位置 tensor 不变。我们定义一个 tensor 是 antisymmetric 的如果对于任意两个上指标或者任意两个下指标交换位置 tensor 变号。

同时我们可以对称化和反对称化所有的  $(0, k)$  或者  $(k, 0)$  的 tensor。或者对称化 or 反对称化部分 (上下一致) 的指标:

$$\begin{aligned} T_{(\mu_1 \dots \mu_k)} &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi} T_{\pi(\mu_1) \dots \pi(\mu_k)}, \\ T_{[\mu_1 \dots \mu_k]} &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi} \sigma_{\pi} T_{\pi(\mu_1) \dots \pi(\mu_k)}, \end{aligned} \quad (19)$$

### 2.1.3 Metric Tensor Field

#### Metric Tensor Field

我们可以赋予一个流形一个额外的结构：Metric Tensor Field。这个结构会给出很多更加重要的距离相关的性质：

#### Definition 8. Metric Tensor Field

我们定义一个 *symmetric, non-degenerate* 的  $(0,2)$ -type tensor field  $g$ , 我们称之为这个 manifold 的 metric tensor field。

1. *Symmetric*:  $g(X, Y) = g(Y, X)$
2. *Non-degenerate*:  $g(X, Y) = 0$  for any  $Y \rightarrow X = 0$

同时，我们可以定义一个  $(2,0)$ -type tensor field  $g^{-1}$ 。在任意基下面我们有：

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (20)$$

这个张量场我们一般还会有一些特殊的记号：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (21)$$

#### Metric Tensor Field的性质

给定这样一个 metric tensor field, 我们可以定义很多重要的概念：

1. 确定 metric 会给出一套特殊的 coordinate system: orthonormal coordinate system 满足：

$$g(e_\mu, e_\nu) = \pm \delta_{\mu\nu}. \quad (22)$$

2. Metric 可以给出一个 natural isomorphism between tangent space and cotangent space。我们定义：

$$g_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p^* \mathcal{M}, \quad g_p(v)(w) = g_p(v, w), \text{ for any } v, w \in T_p \mathcal{M}. \quad (23)$$

这个映射是一个 isomorphism, 因为 metric 是 non-degenerate 的。并且这个映射是 natural 的, 因为这个映射不依赖于任何 basis 的选择。

- 这个映射可以让我们把一个 tangent vector 变成一个 cotangent vector, 我们称之为 lowering the index。
- 这个映射的逆映射可以让我们把一个 cotangent vector 变成一个 tangent vector, 我们称之为 raising the index。
- 这个映射可以让我们把一个  $(k, l)$ -type tensor 变成一个  $(k - 1, l + 1)$ -type tensor, 或者  $(k + 1, l - 1)$ -type tensor。

### Important: Raising and Lowering Index 的坐标表示

关于为什么这个操作叫 **Lowering and Raising Index**, 这是因为我们对偶出来的 tangent vector 或者 cotangent vector 我们一般使用一样的符号  $u$  进行标记分量, 只是让指标位置改变。然后我们发现下面的关系:

$$v_\mu^* = g_{\mu\nu} v^\nu. \quad \omega^{*\mu} = g^{\mu\nu} \omega_\nu. \quad (24)$$

也就是通过 metric tensor isomorphism 过去的 vector 的分量等于原来的 vector 的分量乘以 metric 的分量。所以我们称之为 lowering and raising the index。

## 2.2 Questions and thoughts

### Important: 计算不同坐标系下的 metric

显然 metric 是一个  $(0,2)$ -type tensor, 我们可以根据 tensor 的坐标变换规则计算不同坐标系下的 metric。也就是找到两个坐标系的变换矩阵, 然后计算:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu} g_{\mu\nu}. \quad (25)$$

但有的时候这样的计算会非常复杂, 而且矩阵乘法很容易搞错指标。所以考虑有没有更加简单的方法。于是我们介绍下面形式化的书写。

我们可以把 metric 形式化的写作:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (26)$$

然后我们形式化的考虑一个坐标变换, 我们不认为分量发生变换而是基矢量发生了变换。对于 co-vector 的基矢量变换我们存在一个特别自然的形式化规则:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (27)$$

然后我们把变换矩阵带进去然后乘起来就好!!

### 3 Lecture 3: Covariant Derivative and Curvature

{sec:1}

#### 3.1 Covariant Derivative

##### 3.1.1 Covariant Derivative 的定义和性质

Tangent Bundle 上导数算符的视角

我们现在有一个问题就是：怎么计算 tangent bundle 上面的导数。回顾平直时空我们 naively 的 tangent bundle 上面的导数（也就是方向导数），我们会发现这个算符满足下面两个视角：

1. 方向导数视角：确定一个向量场作为输入，然后把一个标量场映射成另一个标量场：

$$v^i \partial_i f = V(f) \in \mathcal{F} \quad (28)$$

2. 张量视角：把一个  $(1,0)$  张量映射成一个  $(1,1)$  张量。也就是：

$$\partial_i v^j \in \mathcal{T}(1,1) \quad (29)$$

相当于一个  $(1,1)$  张量。

我们希望延续这两个视角，并且推广到一般的 manifold 上面。

我们定义一个算符，叫做**协变导数** (Covariant Derivative)，记作  $\nabla$ ，这个算符满足下面两个视角：

1. 方向导数视角：确定一个向量场作为输入，然后把一个  $(k,l)$  张量映射成另一个  $(k,l)$  张量：

$$\nabla_V T \in \mathcal{T}(k,l) \quad (30)$$

其中  $V \in \mathcal{T}(1,0)$  是一个向量场， $T \in \mathcal{T}(k,l)$  是一个  $(k,l)$  张量场。

2. 张量视角：把一个  $(k,l)$  张量场映射成一个  $(k,l+1)$  张量场。也就是：

$$\nabla T \in \mathcal{T}(k,l+1) \quad (31)$$

相当于一个  $(k,l+1)$  张量场。

**Remark:**

很自然可以发现两个视角是等价的：

1. 方向导数视角如果选择是一个基矢量方向，那么可以把这个基矢量指标当作一个张量指标，给出张量视角
2. 张量视角下，如果把第一个指标和一个向量场进行 contraction，那么可以给出方向导数视角

一般严格的书之中我们是使用第二个视角的。但是第一个视角方便我们进行推广，也方便我们进行理解（更好类比平直时空）。

## Covariant Derivative的定义

为了推广的方便我们使用第一种视角进行理解。我们认为协变导数是这样的一个算符：

$$\nabla : \mathcal{T}(1, 0) \times \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k, l) \quad (32)$$

也就是说我们输入一个向量场和一个  $(k, l)$  张量场，输出一个  $(k, l)$  张量场。

我们不会直接给出定义而是一步步进行构造，我们思考如果推广导数算符需要满足哪些性质。下面两个是最最最基本的导数的性质：

- **Linearity:** 对于任意的  $T, S \in \mathcal{T}(k, l)$ , 以及任意的  $a, b \in \mathbb{R}$ , 我们有:

$$\nabla_V(aT + bS) = a\nabla_V T + b\nabla_V S \quad (33)$$

- **Leibniz Rule:** 对于任意的  $T \in \mathcal{T}(k, l)$ ,  $S \in \mathcal{T}(m, n)$ , 我们有:

$$\nabla_V(T \otimes S) = (\nabla_V T) \otimes S + T \otimes (\nabla_V S) \quad (34)$$

接下来我们考虑如果要和一般的导数算符很像我们还需要满足什么性质。我们会发现和平直时空的方向导数类似还需要满足：

- **Action on functions:** 对于任意的标量场  $f \in \mathcal{F}$ , 我们有:

$$\nabla_V f = V(f) \quad (35)$$

- **Linearity in the vector field:** 对于任意的  $V, W \in \mathcal{T}(1, 0)$ , 以及任意的  $a, b \in \mathbb{R}$ , 我们有:

$$\nabla_{aV+bW} T = a\nabla_V T + b\nabla_W T \quad (36)$$

### Remark:

这里我们已经可以意识到, Linearity in Vector Field 已经意味着如果我们使用基矢量  $\partial_\mu$  作为这个 vector field 的话。

那么协变导数算符在不同坐标系下形式其实就是矢量变换的形式, 也就是说协变导数算符作用之后相当于多了一个 covariant 的指标。这就很自然的有第二种视角了。

并且 Action on functions 可以很自然的写作:

$$\nabla_V f = V^\mu \nabla_\mu f. \quad (37)$$

最终还有一个最最最重要的性质:

- **Commutation with contraction:** 对于任意的  $T \in \mathcal{T}(k, l)$ , 以及任意的 contraction 操作  $C$ , 我们有:

$$\nabla_V(C(T)) = C(\nabla_V T) \quad (38)$$

**Remark:**

最后这个性质特别重要。因为一般张量我们都可以写作（比如 vector）：

$$v = v^\mu \partial_\mu \quad (39)$$

那么作用上一个协变导数算符（比如  $\nabla_\mu$ ）的结果其实可以先把  $v^\mu$  当作一个 scalar field 和  $\partial_\mu$  进行 tensor product，分别用 lebniz rule 作用，然后再进行 contraction。也就是这样：

$$\nabla_u(fv) = u(f)v + f\nabla_u v. \quad (40)$$

同样的对于一般的张量我们也可以进行这样的操作。

### 协变导数作用在contravariant vector上的形式

上面的五条性质已经 define 了一个导数算符（虽然并不是唯一的）。我们现在不妨就计算一下这样的性质下的导数算符有什么更多的性质。

1. 作用在基矢量上面的形式：我们考虑协变导数作用在基矢量上面的形式。我们有：

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \quad (41)$$

其中  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  是一个新的张量，叫做 **Connection**。这个张量不是一个真正的张量，因为它的变换形式并不满足张量的变换形式。

**Remark:**

为了记号方便我们会写  $\nabla_\mu$  意思是  $\nabla_{\partial_\mu}$ 。更细致的讨论我们放在 question 部分。

**Remark:**

其实从定义就很容易看出来 Connection 并不是一个张量，因为给出其指标的并不是张量指标，而是【选定一个坐标系】之后的基矢量的指标。这是坐标系 dependent 的。我们可以计算出其变换法则是：

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}. \quad (42)$$

2. 作用在一般向量场：

我们前面已经计算了作用在基矢量上面的形式，那么可以使用第二个 remark 的结果计算作用在一般向量场的形式：

$$\nabla_{\partial_\mu} V = \nabla_{\partial_\mu}(V^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu V^\nu) \partial_\nu + V^\nu (\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu) = (\partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda) \partial_\nu \quad (43)$$

**Remark:**

为了记号方便我们会写  $\nabla_\mu V^\nu \equiv (\nabla_{\partial_\mu} V)^\nu$ 。也就是  $\nabla_\mu V$  在  $\partial_\mu$  所在的坐标系下面的分量。

协变导数作用在 covariant co-vector 上的形式

类似的我们研究协变导数是怎么用作用在 covariant co-vector 上的。

1. 作用在基协变矢量上面的形式：我们考虑协变导数作用在基协变矢量上面的形式。我们有：

$$\nabla_{\partial_\mu} dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda \quad (44)$$

其中  $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  和前面定义的 connection 是一样的这个证明见讲义

2. 作用在一般协变向量场：

我们前面已经计算了作用在基协变矢量上面的形式，那么可以使用第二个 remark 的结果计算作用在一般协变向量场的形式：

$$\nabla_{\partial_\mu} \omega = \nabla_{\partial_\mu} (\omega_\nu dx^\nu) = (\partial_\mu \omega_\nu) dx^\nu + \omega_\nu (\nabla_{\partial_\mu} dx^\nu) = (\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda) dx^\nu \quad (45)$$

**Remark:**

为了记号方便我们会写  $\nabla_\mu \omega_\nu \equiv (\nabla_{\partial_\mu} \omega)_\nu$ 。也就是  $\nabla_\mu \omega$  在  $\partial_\mu$  所在的坐标系下面的分量。

协变导数作用在一般张量上的形式

类似上面的情况我不想多说了，直接写出  $\nabla_\mu$  作用之后在对应坐标系下的分量形式

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} &= \partial_\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \\ &\quad + \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\rho \mu_2 \dots \mu_k} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu_2} T_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \rho \dots \mu_k} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\nu_1}^\rho T_{\rho \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} - \Gamma_{\lambda\nu_2}^\rho T_{\nu_1 \rho \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} - \dots . \end{aligned} \quad (46)$$

### 3.1.2 parallel transport

有了协变导数的定义之后，我们可以定义怎么把一个张量沿着流形上面的一个曲线进行平行移动（parallel transport）。我们定义：

**Definition 9. Parallel Transport**

给定一个流形上面的曲线  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, C(t) \in \mathcal{M}$  选择一个 coordinate system 之后我们可以给出一个切向量： $t^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{d(\psi \circ C(t))^\mu}{dt}$ 。于是我们可以定义，如果一个张量场  $T$  满足：

$$\nabla_t T = 0 \quad (47)$$

那么我们说这个张量场  $T$  沿着曲线  $C$  是平行移动的。

我们使用分量的语言写下来平行移动也就是在某个坐标系下面满足：

$$t^\mu \partial_\mu v^\nu + t^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu v^\alpha = \frac{dv^\nu}{dt} + t^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu v^\alpha = 0. \quad (48)$$

### 3.1.3 Physical Covariant Derivative

满足上面的性质的协变导数并不是唯一的。但是物理世界我们用来描述世界的导数必然是唯一的。我们会发现上面的要求缺失了对于【距离】的要求。

真是的物理世界为了描述时空我们需要引入 metric tensor 作为距离的概念。所以我们需要 metric 对于协变导数有一个兼容性要求。

下面我们给出两个物理上的要求，确定协变导数的具体形式

#### Torsion Free协变导数

物理上我们一般要求协变导数满足下面的限制条件：

- **Torsion Free:** 对于任意的标量场  $f \in \mathcal{F}$ , 我们有:

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad (49)$$

#### Remark:

注意, torsion free 的要求仅仅针对于光滑的标量场。对于一般的张量, torsion 是不会为 0 的, 我们后面知道这个会包含时空本身的 curvature 信息。

这个要求给出了一个很重要的结论。

1. connection 是对称的:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (50)$$

2. 对易子的另一种形式:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]^\nu = (v^\mu \nabla_\mu w^\nu - w^\mu \nabla_\mu v^\nu). \quad (51)$$

这是因为我们的 connection 是对称的, 所以对于一个反对称的对易子加入 connection 这种东西只会产出 0。所以我们可以把对易子定义的导数直接写作协变导数, 这样对易子的形式就更加协变了。

#### Metric Compatible协变导数

物理上我们不仅仅需要平行移动的时候向量的方向不变, 我们还需要距离是不变的。所以如果一个流形上我们赋予一个 metric tensor  $g_{ab}$ , 我们还需要协变导数满足下面的限制条件:

$$t^\alpha \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu) = 0. \quad (52)$$

也就是如果两个向量场沿着一个曲线平行移动, 那么它们的内积也是不变的。这个条件等价于:

$$t^\alpha v^\mu w^\nu \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (53)$$

所以我们为了保证这个需求还需要协变导数满足:

- **Metric Compatible:** 对于任意的 metric tensor  $g_{ab}$ , 我们有:

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad (54)$$

当然这个条件还可以推出一些重要的结论：

1. Metic 不论是上指标还是下指标的协变导数都是 0 (见 question 部分的证明)
2. 协变导数可以和升降指标操作交换顺序!! 我们可以随意的【升降协变导数内部的指标  $\nabla_\mu V^\nu \rightarrow \nabla_\mu V_\nu$ 】也可以【升降协变导数本身的指标  $\nabla^\mu$ 】

### Levi-Civita Connection

给出了上面的两个物理要求之后，我们可以唯一的确定协变导数的 connection 的形式，这个 connection 叫做 Levi-Civita Connection，形式如下：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (55)$$

## 3.2 Curvature of Manifolds

### 3.2.1 Riemann Curvature Tensor

#### 无限小平行移动的差距

一个自然的观察就是，如果我们在一个有曲率的流形上面沿着一个闭合曲线进行平行移动一个向量的话，最终得到的向量和原来的向量并不一样。这并非我们的「平行移动」非良定，而是流形本身的曲率导致的。

因此我们考虑一个无限小的 loop 进行平行移动，那么我们只用考虑两个方向的导数算符的对易子：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\rho \quad (56)$$

一通计算之后我们给出结论：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) v^\sigma. \quad (57)$$

#### Remark:

其中计算我们需要选择一个坐标系（不妨选择  $\partial_\mu, \partial_\nu$  对应的那个坐标系）。然后从外到内的计算分量。【特别值得注意的是，我们外面的导数算符的 Connection 作用里面的  $\nabla_\nu v^\rho$  是一个  $(1,1)$  张量需要作用两下】就像这样：

$$\partial_\mu (\nabla_\nu v^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda v^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu v^\sigma \quad (58)$$

#### Riemann Curvature Tensor的定义

在上面计算讨论之后我们定义 Riemann Curvature Tensor 如下：

### Definition 10. Riemann Curvature Tensor 坐标定义

给定一个流形上面的一个 *coordinate system*。并且给出这个 *coordinate system* 上面的 *Levi-Civita Connection*  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ ，我们定义 *Riemann Curvature Tensor* 为：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}v^\sigma. \quad (59)$$

其中我们可以直接计算出来：

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (60)$$

如果我们希望协变的定义 *Riemann Curvature Tensor* 的话，我们可以使用下面的视角：

### Definition 11. Riemann Curvature Tensor 协变定义

给定一个流形上面的协变导数  $\nabla$ ，我们定义 *Riemann Curvature Tensor* 为下面的映射：

$$R(*, *): TM \times TM \times TM \rightarrow TM \quad (61)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (62)$$

可以看到 *Riemann Curvature Tensor* 是一个  $(1, 3)$  张量。如果上面的  $X, Y$  正好是基矢量  $\partial_\mu, \partial_\nu$ 。我们知道基矢量是 *commute* 的（毕竟一眼看上去导数算符是 *commute* 的）所以可以得到之前坐标依赖的定义。

#### Remark:

为什么会有最后一项  $\nabla_{[X, Y]} Z$  呢？这是因为计算  $\nabla_X \nabla_Y Z$  的时候会出现  $\partial_a \nabla_Y Z^\nu$  这样的项。这样  $\partial_a$  需要对于  $Y^\mu$  有一个导数，这个我们需要通过对易子进行消除。

如果把这个定义用坐标的形式写出来我们可以得到：

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} X^\mu Y^\nu Z^\sigma = X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu \nabla_\nu Z^\rho) - Y^\mu \nabla_\mu (X^\nu \nabla_\nu Z^\rho) - (X^\mu \nabla_\mu Y^\nu - Y^\mu \nabla_\mu X^\nu) \nabla_\nu Z^\rho, \quad (63)$$

#### Remark:

对于 *Riemann Curvature Tensor* 的计算我们一定要注意，如果出现  $\partial_a \nabla_\mu X^\nu$  这样的东西我们务必先把  $\nabla$  作用完再进行导数算符的作用。

#### 协变导数的对易子作用在一般张量

我们使用协变导数的对易子作用在矢量上面给出了 *Riemann Curvature Tensor* 的定义。那么我们可以推广到一般的张量上面。我们给出下面的结论：

- 作用在 vector 上：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}v^\sigma. \quad (64)$$

- 作用在 covector 上：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega_\rho = -R^\sigma_{\rho\mu\nu}\omega_\sigma. \quad (65)$$

- 作用在一般张量上：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^{\sigma_1 \dots \sigma_k}{}_{\rho_1 \dots \rho_l} = \sum_{i=1}^k R^{\sigma_i}{}_{\lambda \mu \nu} T^{\sigma_1 \dots \lambda \dots \sigma_k}{}_{\rho_1 \dots \rho_l} - \sum_{j=1}^l R^\lambda{}_{\rho_j \mu \nu} T^{\sigma_1 \dots \sigma_k}{}_{\rho_1 \dots \lambda \dots \rho_l}. \quad (66)$$

因此我们会发现 Riemann Curvature Tensor 本身就仿佛完全决定了所有这样的流形上的曲率的信息。而不是一个仅仅对于 vector 有用的量。

### 3.2.2 Properties of Riemann Curvature Tensor

Riemann Curvature Tensor 标 main 上有着很多指标也有海量的分量。但是其实有着很多很好的对称性保证其独立的分量其实没有多少。我们下面结果这些对称性结果：

1. **反对称性 1:** Riemann Curvature Tensor 在最后两个指标上是反对称的：

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\sigma\nu\mu} \quad (67)$$

如果是使用协变的定义我们也可以写作：

$$R(X, Y) = -R(Y, X) \quad (68)$$

2. **反对称性 2:** Riemann Curvature Tensor 在前两个指标是反对称的（如果把指标降下来）【本性质仅仅适用于「Levi-Civita Connection」】

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (69)$$

3. **三指标全反对称:** 对于后三个指标其实是全反对称的：【本性质仅仅适用于「Levi-Civita Connection」】

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0 \quad (70)$$

也就是：

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (71)$$

4. **交换对称性:** Riemann Curvature Tensor 交换前两个指标和后两个指标是对称的：【本性质仅仅适用于「Levi-Civita Connection」】

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (72)$$

5. **Bianchi Identity:** Riemann Curvature Tensor 满足 Bianchi Identity：

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (73)$$

对于 Bianchi Identity 我们展开的写出来意味着下面的等式成立：

$$[[\nabla_\lambda, \nabla_\rho], \nabla_\sigma] + [[\nabla_\rho, \nabla_\sigma], \nabla_\lambda] + [[\nabla_\sigma, \nabla_\lambda], \nabla_\rho] = 0, \quad (74)$$

这很像是一个导数算子的 Jacobi Identity。

### 3.2.3 Riemann Curvature Tensor 相关的张量

#### Ricci Tensor and Ricci Scalar

我们考虑从 Riemann Curvature Tensor 中 contract 出一些新的张量。我们发现很多的 contraction 会给出 0 因为对称性。所以最终发阿蒙合法的 contraction 只有下面一个：

#### Definition 12. Ricci Tensor and Ricci Scalar

我们定义 Ricci Tensor 为 Riemann Curvature Tensor 的 contraction:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (75)$$

我们定义 Ricci Scalar 为 Ricci Tensor 的 contraction:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (76)$$

我们可以显然的知道 Ricci Tensor 是一个【对称的】(0, 2) 张量， Ricci Scalar 是一个标量场。

#### Einstein Tensor

根据 Bianchi Identity 我们其实还可以知道另一个很好玩的张量。我们把 Bianchi Identity 进行一个 contraction 可以得到：

$$\nabla_\alpha R_\mu^\alpha + \nabla_\beta R_\mu^\beta - \nabla_\mu R = 0 \quad (77)$$

为此我们可以自然定义一个协变导数为 0 的张量：

#### Definition 13. Einstein Tensor

我们定义 Einstein Tensor 为：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (78)$$

自然满足：

$$\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0, \quad G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R. \quad (79)$$

#### Riemann Tensor的Decomposition

Riemann tensor 作为一个巨大的张量，显然可以 decompose 成为一些其他张量的组合。一个组合就是：

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = C_{\mu\nu\sigma\rho} + \frac{2}{n-2} (g_{\mu[\sigma} R_{\rho]\nu} - g_{\nu[\sigma} R_{\rho]\mu}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\mu[\sigma} g_{\rho]\nu}. \quad (80)$$

具体的讨论请参考各种教材。这里并不作详细展开了。

### 3.3 Geodesic I

#### 3.3.1 Geodesic Equation definition

我们试图推广「直线」的概念。我们会发现，一个很自然的定义就是，如果一个曲线的切向量场沿着这个曲线是平行移动的，那么我们就说这个曲线是一个「测地线（geodesic）」。

##### Definition 14. Geodesic

给定一个流形上面的曲线  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, C(t) \in \mathcal{M}$  选择一个 *coordinate system* 之后我们可以给出一个切向量： $t^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{d(\psi \circ C(t))^\mu}{dt}$ 。于是我们可以定义，如果这个切向量场满足：

$$\nabla_t t = 0 \quad (81)$$

那么我们说这个曲线  $C$  是一个测地线。

对于这个定义我们使用分量形式写出来就是：

$$T^\alpha \nabla_\alpha T^\beta = 0. \quad (82)$$

然后我们再展开协变导数写出来就是：

$$\frac{dT^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^\beta T^\gamma = 0, \quad (83)$$

在带入切向量的定义之后我们可以得到测地线方程的最终形式：

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \quad (84)$$

##### Remark:

注意，虽然一般我们对于任意的参数化都可以定义这样的方程。但是！！【只有用 affine Parameter 定义的 Geodesic Equation 是有物理意义的】!!!

#### 3.3.2 Geodesic as Extremal of Length

下面我们就体现【Levi-Civita Connection 的物理意义】的部分。因为我们发现这样的协变导数给出的 geodesic 其实就是极值距离曲线。

##### 流形上曲线长度

我们可以通过 metric 和切向量的定义赋予流形上的一个曲线【长度】的概念。我们定义：

##### Definition 15. Curve Length on Manifold

给定一个流形上面的曲线  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, C(t) \in \mathcal{M}$  我们可以把可以定义下面的长度：

$$l = \int \sqrt{g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu} dt. \quad (85)$$

我们会发现这个曲线长度的定义很合理并且满足下面的要求：

- Parameterization Invariance:** 如果我们对曲线进行一个 reparameterization  $t \rightarrow t'(t)$ , 那么曲线的长度是不变的。
- Coordinate Invariance:** 如果我们对流形进行一个 coordinate transformation  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ , 那么曲线的长度是不变的。
- Norm Preserve along curve:** 【如果研究的 curve 是一个 geodesic】那么根据定义模长:  $\nabla_T(g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu) = 0$ . 在曲线方向守恒的。

**Remark:**

这个模长守恒其实根据 Blau 的说法, 体现了参数化平移不变性的对称性!!

Lorentz Signature下的曲线

在 Lorentz Signature 下我们需要区分三种不同的曲线:

- **Timelike Curve:** 如果一个曲线的切向量满足  $g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu < 0$ , 那么我们说这个曲线是一个 timelike curve。
- **Spacelike Curve:** 如果一个曲线的切向量满足  $g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu > 0$ , 那么我们说这个曲线是一个 spacelike curve。
- **Null Curve:** 如果一个曲线的切向量满足  $g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu = 0$ , 那么我们说这个曲线是一个 null curve。

狭义相对论已经告诉我们, timelike curve 对应的物体是有质量的粒子的世界线, 所以如果要描述 time like curve 的长度我们一般定义另一个也就是 proper time:

$$\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu} dt. \quad (86)$$

### 3.4 Questions and Thoughts

**Question 3.2** 我们要求协变导数是 metric compatible 的, 能不能同时说明对于 metric 两个上和两个下指标都是 0?

我们一般只证明了  $\nabla_a g_{bc} = 0$  我们应该怎么证明  $\nabla_a g^{bc} = 0$ 。这个涉及一点点计算技巧:

首先我们证明 delta 函数的协变导数是 0。我们有:

$$\nabla_a (\delta^b_c V^c) = \nabla_a V^b. \quad (87)$$

所以可以根据 lebniz rule 推导出来:

$$(\nabla_a \delta^b_c) V^c + \delta^b_c (\nabla_a V^c) = \nabla_a V^b. \quad (88)$$

对比两边的式子, delta 张量的协变导数就是 0。

下一步我们知道张量的逆矩阵  $g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c$  所以我们可以给出:

$$(\nabla_a g^{bd}) g_{dc} + g^{bd} (\nabla_a g_{dc}) = 0. \quad (89)$$

由于我们已经知道  $\nabla_a g_{bc} = 0$  所以我们有：

$$(\nabla_a g^{bd}) g_{dc} = 0. \quad (90)$$

由于  $g_{ab}$  是非退化的，所以我们可以乘上  $g^{ce}$  得到：

$$\nabla_a g^{be} = 0. \quad (91)$$

所以我们证明了 metric 的两个上指标的协变导数也是 0。

### Remark:

在这样的证明之后，我们知道协变导数的规则之中。我们可以【随意在协变导数内进行升降指标】也可以【升降协变导数的指标】！随意的写各种  $\nabla^\mu$  之类的东西。

**Question 3.3 为什么我们的 Covariant derivative 形式上确实从  $(k,l)$  张量变成了  $(k,l+1)$  张量，但是我们怎么形式化的写出基变多了一个呢？**

**协变导数观点 1：**确定一个向量场作为输入，然后把一个  $(k,l)$  张量映射成一个  $(k,l)$  张量。

这种观点下面我们已经确定了一个向量场  $V$ ，然后对于这个向量场的协变导数被定义为： $\nabla : V \times F_M(k, l) \rightarrow F_M(k, l)$ ，其中  $V$  是确定的。

在这种观点下，表面上我们可以多一个下标记（当然更一般的这个下标应该写作一个张量， $\nabla_\mu$  的意思其实是  $\nabla_{\partial_\mu}$  也就是  $x^\mu$  坐标系的一个基矢量）。但是其实我们并没有真正多出一个基。因为我们写  $\nabla_\mu$  的意思其实是在说  $\nabla(\partial_\mu, *)$  所以，其实相当于放了一个协变的向量进去。

但是根据我们的规则： $\nabla(V, *) = v^\mu \nabla(\partial_\mu, *)$  所以其实这个协变导数的形式在不同基下面是不一样的，可以形式化的书写这个观点下的协变导数在不同基下面的变换：

$$\nabla_a = \nabla(\partial_a, *) = \nabla\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \partial_\mu, *\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \nabla_\mu \quad (92)$$

这样的观点下面我们有的时候仿佛多了一个指标但实际上没有。给出的张量还是一个  $(k,l)$  张量。

### Remark:

这个观点下我们也经常写作基矢量分量形式展开，这是因为我们基矢量的 covariant derivative 是可以计算的。我们可以给出  $\partial + \Gamma$  的形式。

**协变导数观点 2：**把一个  $(k,l)$  张量映射成一个  $(k,l+1)$  张量。

这种观点下面我们协变导数被定义为： $\nabla : F_M(k, l) \rightarrow F_M(k, l+1)$ 。在这样的观点下面。我们可以形式化的写出被一个对应于  $\partial_\mu$  基矢量，的协变导数的分量：

$$(\nabla_\mu T)^{a_1, \dots, a_k}_{b_1, \dots, b_l} \quad (93)$$

有的时候我们会有下面的这个记号，并且这个分量数值可以很直接的被计算：

$$\nabla_\mu V^\nu \equiv (\nabla_\mu V)^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (94)$$

我们根据之前的讨论，协变导数的指标会在不同基下面展开满足张量的变换。所以这个分量其实完全可以理解为一个  $(k,l+1)$  张量的分量。所以我们说协变导数形式上确实是一个  $(k,l+1)$  张量。

### Remark:

由于协变导数是【会作用在基上的】，所以我们单独写协变导数的时候数学形式上很不好像张量这样的，写出来这个东西  $\nabla_\mu dx^\mu$  这个太让人误解了。虽然我们协变导数本身很难写出这样的东西，但是【作用在张量之后的协变导数】就是一个合法的  $(k,l+1)$  张量，所以我们可以这样写：

$$(\nabla_\mu v^\nu) dx^\mu \otimes \partial_\nu \quad (95)$$

这样再来进行运算就很舒服了！并且这个分量的数值是根据第一种观点讨论我们已经知道的，可以计算的！！

### Question 3.4 协变导数的计算怎么用纯粹分量形式进行，而且不出错??

首先我们讨论一个记号混淆的问题。特别是我们简化写作分量形式之后。

#### Important: 协变导数记号混淆

我们常常会碰上这样的记号  $\nabla_\nu v^\mu$  这个记号似乎有两种理解：

1. 把  $v^\mu$  作为一个标量场来看待，然后协变导数作用在这个标量场上面，得到一个标量场。  
其实就是  $\partial_\nu v^\mu$
2. 把  $v^\mu$  作为一个向量场来看待，然后协变导数作用在这个向量场上面，得到一个  $(1,1)$  张量。其实就是  $\partial_\nu v^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu v^\lambda$

注意【第一种理解仅仅在把基和分量张量积起来的视角下考虑】。如果我们没有 explicitly 写出来基矢量。也就是【分量计算】我们永远使用第二种理解

这个讨论也就涉及一个很重要的问题，我们在计算协变导数的时候，协变导数是需要作用在基矢量上面的！！但是我们写作分量形式进行计算的话其实我们没有 explicitly 写出基矢量。我们应该怎么办：

#### Important: 分量形式的协变导数计算

使用我们的  $\nabla_\mu v^\nu$  的记号，然后形式化书写

- 使用 lebniz rule 形式化的每一个部分（务必加入 Chris Symbol! !）的协变导数分量  $\nabla_\mu v^\nu$
- 最后进行 contraction

下面就是一个使用分量形式化书写的例子：

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\omega_\lambda v^\lambda) &= (\nabla_\mu \omega_\lambda) v^\lambda + \omega_\lambda (\nabla_\mu v^\lambda) \\ &= (\partial_\mu \omega_\lambda) v^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \omega_\sigma v^\lambda + \omega_\lambda (\partial_\mu v^\lambda) + \omega_\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\lambda v^\rho \end{aligned} \quad (96)$$

这样分量计算的结果一定是对的。但是是形式化的，我们真正在干的事情是补回来基矢量，然后先作用张量积的协变导数 lebniz rule 再进行 contraction!!

**Question 3.5 对于 metric 的计算物理上怎么通过  $ds^2$  形式化的进行计算?**

这个源自于习题之中的计算。我们已经知道一个 metric 写作：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (97)$$

然后我们希望形式化的做一个坐标变换： $x^\mu(y^a)$ 。我们怎么快速的得到这样的变换的 metric 呢？所以我们需要形式化的写： $dx^{\mu 2}$  和  $dy^{a 2}$  的关系我们使用下面的式子：

$$dy^2 = (adx + dz)^2 = a^2 dx^2 + 2adxdz + dz^2 \quad (98)$$

这个其实就是把两个基矢量变换放在了一起【务必这么数学上理解】但是形式上真的很超然。我把这个结果整理写到上一章的 question and Thoughts 里面了，请看 section 2.2里面的讨论 □

# 4 Lecture 4: Geodesics and Curvature

{sec:1}

## 4.1 Geodesic II

### 4.1.1 Geodesic as extremal of Length

#### 测地线是极值曲线

我们继续展开证明使用 Levi-Civita Connection 定义的测地线是 physical 的，一个原因是其有一个特别良好的解释就是「极值长度曲线」。

#### Theorem 1. 测地线是极值长度曲线

在一个 Riemann 流形上我们使用 Levi-Civita 联络，同时我们使用 【Alfine Parameter 作为参数化】那么：连接两个点的曲线中长度的极值曲线必然是测地线。Lagrange Equation 也是测地线方程。

#### Remark:

注意这是一个必要条件，不是充分条件。

- 连接两个固定点的曲线之中长度极值的曲线一定是测地线
- 但是连接两个固定点的测地线不一定是长度极值曲线 【最简单的例子就是球上面连接两点大圆那个更长的那个弧，它是测地线，但是和极值曲线没有半毛钱关系】

下面我们来证明：我们考虑一个曲线始末是两个固定的流形上的点，使用一个 coordinate system 写出来就是： $x_i^\mu, x_f^\mu$ 。我们考虑对于所有连接这两个点的曲线方程进行变分，来找到一条极值曲线。复习之前定义的曲线长度：

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt , \quad (99)$$

我们对于这个长度对于  $x^\mu(t)$  作为变量进行变分给到变分结果是：

$$\delta l = \int_a^b \left[ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{-1/2} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d\delta x^\beta}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right\} dt . \quad (100)$$

我们选择一个特殊的参数化使得  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 1$ ，那么上面的变分结果就简化为：

$$0 = \int_a^b \left\{ -\frac{d}{dt} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right\} \delta x^\beta dt . \quad (101)$$

#### Remark:

注意：这里我们使用了一个参数化，这是一个 affine parameter 所以我们使用这个条件给出了标准的测地线方程。

但是一般参数化下面我们并不会得到标准的测地线方程。而是 non-Alfine Geodesic Equation。对于一个曲线，我们一般认为满足严格的测地线方程的曲线才是测地线，而满足 non-affine geodesic equation 的曲线是 non-affine 测地线。

我们计算这个变分给出的 Euler-Lagrange 方程：

$$-g_{\alpha\beta} \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \quad (102)$$

结果会严格的给出测地线方程。

### Remark:

最后通过变分得到的方程其实和测地线方程有一点点区别，需要一些绕路的推导进行恒等式一波（大抵是 Levi-civita connection 我们需要中间对称化一波才能得到前两个部分的 metric 导数）。但是结果是一样的。

### 通过Lagrangian Equation计算测地线方程

所以与其硬磕 Levi-Civita Connection 的表达式，我们不妨用 Lagrangian Equation 来计算测地线方程。我们定义 Lagrangian 为：

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} . \quad (103)$$

那么测地线方程就是其对应的 Euler-Lagrange 方程。

### Remark:

注意，我们这里写出这个 lagrangian 我们已经固定参数化了哦!!

同时这个方法也可以帮助我们更快的看出来非 0 的 Christoffel Symbol 的数值。

### 关于Alfine Parameterization的comment

一个 comment 也就是 Blau 里面说的。考慮原始 lagrangian:

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} , \quad (104)$$

我们使用这个 Lagrangian 并不一定永远得到标准的测地线方程。我们发现，如果使用 non-alfine parameter 的话我们得不到标准方程。会得到 【non-Alfine Geodesic Equation】

之前我们变分的时候使用了一个特殊的参数化使得  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 1$ ，这个参数化其实就是一个 alfine parameterization。

但是如果我们将另一个 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} , \quad (105)$$

我们就不需要使用 alfine parameterization 也可以得到标准的测地线方程。只是 【这个方程只有在使用 Alfine Parameter 的时候是有意义的!!】

## 4.1.2 Riemann Normal Coordinates

### Exponential Map

我们之前定义切向量是生活在 Manifold 上面的切空间的。类似与李群李代数里面我们经常讨论的两者关系的 exponential map。我们也可以定义一个 exponential map 把切空间的向量映射到流形上面去。

我们首先观察如果我们确定 Manifold 上面的一个点  $p$ , 以及其上的一个切向量  $v \in T_p M$ , 我们可以定义一个测地线  $\gamma(t)$  满足:

$$\gamma(0) = p, \quad \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} = v. \quad (106)$$

测地线很自然的帮我们把一个切向量映射到了流形上面的曲线。下面我们定义 exponential map:

### Definition 16. Exponential Map

对于一个 Riemann 流形  $(M, g)$ , 我们定义 exponential map  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  如下:

$$\exp_p(v) = \gamma(1), \quad (107)$$

其中  $\gamma(t)$  是满足  $\gamma(0) = p$ ,  $\left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} = v$  的测地线。

### Riemann Normal Coordinates 基本定义

于是我们会发现给定一个 Manifold 上面的点, 我们可以通过 exponential map 给出一个在这个点附近的 coordinate system, 并且这个 coordinate system 在这个点附近看上去是「平直的」。

我们下面一步步进行构造这个坐标系。我们考虑一个流形  $(\mathcal{M}, g)$  上面的一点  $p$ :

1. 我们选择  $T_p \mathcal{M}$  上的一个正交归一基底  $\{e_\mu\}$ , 满足  $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ 。注意这里的  $\eta_{\mu\nu}$  是 Minkowski 度规或者 Euclidean 度规, 取决于流形的类型。

#### Remark:

我们之前都是先选择一个 coordinate system 然后定义任何一个点上面的切空间上和 coordinate system 适配的 coordinate basis。这里我们反过来, 先选择一个切空间上的正交归一基底, 然后使用 exponential map 把这个基底映射到流形上面去。

2. 对于 Manifold 上面距离  $p$  很近的一个点  $q$ , 我们发现可以找到一个唯一的 geodesic 满足下面的两点:

- $\gamma(0) = p$
- $\gamma(1) = q$

3. 我们给出这个 Geodesic 对应的切向量  $T \in T_p \mathcal{M}$ , 并且把它展开在最初定义的正交归一基上面:

$$T = T^\mu e_\mu. \quad (108)$$

4. 我们定义点  $q$  的 Riemann Normal Coordinate 为:

$$x^\mu(q) = T^\mu. \quad (109)$$

### Remark:

注意，最后一步我们把一个切向量的分量作为流形上面的 coordinate system 的坐标。虽然两个的含义完全没有半毛钱关系，但是毕竟是两个数字，我们就这么定义了。

### Riemann Normal Coordinates 的性质

我们定义这么一个 coordinate system 有什么好处呢？

- 在 Riemann Normal Coordinates 下面，所有通过点  $p$  的测地线都是直线！！

我们可以证明这个结论，我们计算测地线上的点对应的坐标都是  $\lambda T^\mu$ ，这个坐标对于参数  $\lambda$  是线性的，所以对于这个参数自动满足：

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0. \quad (110)$$

也就是说存在一个参数化让测地线是直线的。同时我们也可以证明这个  $\lambda$  的参数化是一个很好的参数化，和原来用的参数化是正比的。所以这个  $x^\mu(\lambda)$  确确实实就是原先的测地线，而不是一个像点一样但是不是测地线的曲线。 □[这里其实需要很细节的验证参数化，但我懒了]

- 在 Riemann Normal Coordinates 下面， $p$  点的 Christoffel Symbol 全为 0!!

显然如果测地线方程都是直线，测地线方程就写作，那么自然 Christoffel Symbol 全为 0。

- 在 Riemann Normal Coordinates 下面， $p$  点的度规张量是不变的  $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ .

这是因为我们要求 Levi-Civita Connection 满足 metric compatibility。在 Christoffel Symbol 为 0 的点上面，metric compatibility 就简化为  $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ 。

### Important: EEP 以及坐标系

我们发现这样的坐标系给了一个很好的方法 generate 一个 local inertial frame。在这个坐标系下面，流形在点  $p$  附近看上去就是平直的。这个就是等效原理的一种数学的表达。

## 4.2 Geodesic Deviation

我们上面研究了曲率以及测地线。下面我们将其结合，我们想研究曲率是怎么影响测地线的形状的。

### Tip: 曲率怎样影响物理

我们为什么要研究这个问题，是因为测地线是流形上的「直线」。我们不妨认为粒子在一般的流形上面沿着直线运动，Geodesic Deviation 研究的就是「曲率怎样影响粒子的运动」。

### One Parameter Family of Geodesic

我们定义 one parameter family of Geodesic:

### Definition 17. One Parameter Family of Geodesic

在一个 Riemann 流形  $(\mathcal{M}, g)$  上面，我们定义一个 one parameter family of Geodesic 为一组测地线  $\gamma_s(\lambda)$ :

$$\gamma_s(\lambda) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \quad (111)$$

满足：

- 对于每一个固定的  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_s(\lambda)$  是一个测地线。并且  $\lambda$  是 affine parameter。
- 对于每一个固定的  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_s(\lambda)$  是一个曲线。

这组测地线对于两个参数的输入都是 smooth; 一一映射；并且有一个 smooth 的你映射。

这个映射表示这一系列的测地线。

- 我们会意识到这个映射给出了一个流形上的 2 dimensional submanifold  $\Sigma$  并且自然的赋予其一个 coordinate system  $(\lambda, s)$ 。

### Deviation Vector

我们在 submanifold 上面的点可以定义两个切向量。这两个切向量就是通过 one parameter family of geodesic 定义出来的：

1. **Tangent Vector to the Geodesic:**  $T^\mu = (\partial/\partial\lambda)^\mu$  也就是固定  $s$  变化  $\lambda$  得到的切向量
2. **Deviation Vector:**  $X^\mu = (\partial/\partial s)^\mu$  也就是固定  $\lambda$  变化  $s$  得到的切向量

我们很自然的发现如果我们考虑 2 dimensional submanifold  $\Sigma$  上面这两个切向量正好就是 coordinate system  $(s, \lambda)$  对应的 coordinate basis。我们根据任意 coordinate system 的切向量的 Lie Bracket 为 0 的性质，我们发现：

$$[T, X] = 0 \implies T^\nu \nabla_\nu X^\mu = X^\nu \nabla_\nu T^\mu. \quad (112)$$

如果我们 focus on deviation 的情况，我们可以建立两个 tangent field 来描述随着测地线按照 affine parameter 往前延伸 deviation 的速度和加速度：

- **deviation velocity:**  $V^\mu = T^\nu \nabla_\nu X^\mu$
- **deviation acceleration:**  $A^\mu = T^\nu \nabla_\nu V^\mu = T^\mu \nabla_\mu (T^\lambda \nabla_\lambda X^\nu)$

这相当于协变导数的一阶和二阶导数。

### Geodesic Deviation Equation

下面我们会计算发现 deviation 的加速度其实是和流形上面的曲率张量有关系的。我们进行计算：

$$\begin{aligned}
A^\nu &= T^\mu \nabla_\mu (T^\lambda \nabla_\lambda X^\nu) = T^\mu \nabla_\mu (X^\lambda \nabla_\lambda T^\nu) \\
&= (T^\mu \nabla_\mu X^\lambda) (\nabla_\lambda T^\nu) + X^\lambda T^\mu \nabla_\mu \nabla_\lambda T^\nu \\
&= (X^\mu \nabla_\mu T^\lambda) (\nabla_\lambda T^\nu) + X^\lambda T^\mu \nabla_\lambda \nabla_\mu T^\nu - R_{\mu\lambda\sigma}^\nu X^\lambda T^\mu T^\sigma \\
&= X^\mu \nabla_\mu (T^\lambda \nabla_\lambda T^\nu) - R_{\mu\lambda\sigma}^\nu X^\lambda T^\mu T^\sigma \\
&= -R_{\mu\lambda\sigma}^\nu X^\lambda T^\mu T^\sigma.
\end{aligned} \tag{113}$$

我选择把这一段推导完完整整放上去，是因为这个是一个完整的包含 covariant derivative 以及 commutator 的纯分量推导。虽然几何上似乎不是特别良定，但是这样的 naive 推导其实和几何上的推导是完全等价的。

### Theorem 2. Geodesic Deviation Equation

在一个 Riemann 流形  $(M, g)$  上面，考虑一个 one parameter family of geodesic  $\gamma_s(\lambda)$ ，那么其 deviation vector  $X^\mu$  满足下面的方程：

$$A^\mu = -R_{\mu\lambda\sigma}^\nu X^\lambda T^\mu T^\sigma. \tag{114}$$

其中  $A^\mu = T^\nu \nabla_\nu (T^\lambda \nabla_\lambda X^\mu)$  是 deviation 的加速度。

## 4.3 General Covariance and Invariance

### General Covariance是什么

如果我们希望给出一个包含时空结构的理论，那么我们务必给出一个数学上的量来描述时空。因此 general covariance 的思想就是在说什么样子的数学对象可以用来描述时空结构。

### Axiom 1. General Covariance Axiom

只有 Metric Tensor 是唯一用来描述时空结构的数学对象。

当然显然的，我们所有从 metric tensor 出发构造出来的数学对象都可以用来描述时空结构，比如说 Covariant Derivative, Riemann Curvature Tensor, Ricci Tensor, Ricci Scalar 等等。

### Invariance in Physics

Invariance 和 Covariance 是完全不同的概念。Invariance 是说下面两个步骤：

1. 我们首先假定一个 absolute Invariant Quantity，比如 Minkowski Metric
2. 我们假定存在一个 Transformation Group 作用在这个 Quantity 上面，使得这个 Quantity 在 Transformation Group 作用下不变。我们说这个是 xxx invariant 的。比如：Poincare Invariant

下面给出几个例子：

1. 对于 Poincare Invriance 说的是，我们存在一个 absolute quantity 是  $g = Diag(-1, 1, 1, 1)$ 。

2. 对于 GR 来说，我们永远不存在这样的一个 absolute invariant quantity。我们只能说 metric tensor 是描述时空结构的数学对象。所以我们的 group 是  $\text{Diff}(M)$ ，我们说这个是  $\text{Diff}(M)$  Invariant 的。

## 4.4 Special Relativity

我们需要先复习一下 Special Relativity 的内容。因为我们希望从狭义推广到广义。对于狭义相对论我们会发现我们研究的是 manifold 是一个很特殊的流形：Minkowski Spacetime。满足：

$$g \rightarrow \eta \quad R \rightarrow 0 \quad \nabla \rightarrow \partial. \quad (115)$$

所以一个自然的思路就是把 metric 和 covariant derivative explicitly 写在狭义相对论的公式里面进行推广。但是问题是我们的  $R$  曲率是 0，这完全不好推广。

### SR 的 metric 和基础

对于 SR 我们考虑的是 Minkowski manifold  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ ，并且我们使用 Minkowski 度规  $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(-1, 1, 1, 1)$ 。我们使用全局的 Cartesian Coordinate System  $x^\mu = (t, x, y, z)$ 。

物理定律告诉我们下面的内容：

1. **惯性参考系**：所有的 inertial observer 按照 time like geodesic 进行运动
2. **运动物体测量的时间**：对于 time like curve，曲线长度的物理意义是沿着曲线运动的 observer 身上的钟测量的时间：

$$\tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} T^\mu T^\nu} dt \quad (116)$$

显然沿着两个 timelike curve 但是起点和重点一样的 observer，测量的时间是不一样的。所以就有 twin paradox。这些 observer 之中测量时间极值的是 geodesic 也就是 inertial observer。

3. **运动物体的速度**：一个 time like curve，如果用 propertime 进行 parametrize 那么其切向量定义为 4-velocity，用于描述物体的运动速度，并且满足约束：

$$u^\mu u_\mu = -1. \quad (117)$$

4. **Inertial Observer 的运动方程**：对于 Inertial Observer 其按照 geodesic 运动，所以其 4-velocity 满足：

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0. \quad (118)$$

也就是 geodesic equation 在 Minkowski 空间的形式。

5. **4-动量**：对于有质量的物体我们定义 4-momentum 是：

$$p^\mu = m u^\mu. \quad (119)$$

其中  $m$  是物体的 rest mass。4-momentum

6. 某 observer 测量到的运动物体的能量：对于某个 inertial observer 其 4-velocity 为  $v^\mu$ , 那么这个 observer 测量到的物体的能量为：

$$E = -p_\mu v^\nu. \quad (120)$$

### 能动量张量

如果我们在狭义相对论的语境下研究流体的动力学我们需要引入一个张量来描述流体的动力学特质，也就是能动量张量。

#### Definition 18. 能动量张量

在狭义相对论的语境下，我们定义能动量张量  $T_{\mu\nu}$  为一个对称的二阶张量。可以给出流体动力学性质。

这个张量可以给出很多关于流体的客观测量的结果，我们考虑一个 observer 其 4-velocity 为  $v^\mu$ , 那么这个 observer 测量的结果是：

- **能量密度**:  $\rho = T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$
- **动量密度**:  $p = -T_{\mu\nu}v^\nu x^\mu$  是  $x^\mu$  是正交于  $v^\mu$  的单位空间向量，给出的计算结果是这个方向的动量密度。
- **应力张量**:  $\sigma = -T_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$  其中  $x^\alpha, y^\beta$  是正交于  $v^\mu$  的两个单位空间向量，给出的计算结果是这个方向的应力张量分量。

由于我们的能动量张量是对称的，所以我们知道我们默认不存在 torque on volume element

### Perfect Fluid的能动量张量

一种特殊的流体是 perfect fluid。perfect fluid 的能动量张量有一个特别简单的形式：

#### Definition 19. Perfect Fluid

在狭义相对论的语境下，我们定义 perfect fluid 的能动量张量为：

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P (\eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (121)$$

其中  $\rho(x)$  是能量密度， $P(x)$  是流体的压强【都是相对静止参考系下的，但并非常数可以和时空有关】， $u_\mu$  是一个 timelike unit tangent field 表征着流体的 4-velocity。

对于 Perfect fluid 的动力学方程 EoM 我们有：

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (122)$$

我们会发现这个方程进行两个方向的 projection 会给出：

$$\begin{aligned} u^\mu \partial_\mu \rho + (\rho + P) \partial^\mu u_\mu &= 0, \\ (\rho + P) u^\mu \partial_\mu u_\nu + (\eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \partial^\mu P &= 0. \end{aligned} \quad (123)$$

这是两个分别关于能量密度与压强的方程在经典极限下面对应着质量守恒方程 + 运动方程。所以我们知道这个简洁的 EoM 是合理的。

### Mass-Energy Current 以及 守恒量

在狭义相对论的语境下，我们定义 mass-energy current 为：

#### Definition 20. Mass-Energy Current

在狭义相对论的语境下，我们定义一个 *observer* 观察到的 mass-energy current 为：

$$J_\mu = -T_{\mu\nu}v^\nu, \quad (124)$$

其中  $v_\nu$  是某个 *inertial observer* 的 4-velocity。

我们会发现根据运动方程所有的 Observer 观察到的 mass-energy current 都是守恒的：

$$\partial^\mu J_\mu = 0. \quad (125)$$

根据 gauss 定理我们知道这意味着：

$$\int_{\partial V} J_\mu n^\mu dS = 0 \quad (126)$$

物理上面这说的是：在一个封闭的空间区域里面，流体的 mass-energy 不会凭空产生或者消失，而是从外面流入或者流出。或者我们把时空分开看就是：

- 一个空间区域在一段时间内的能量变化等于其他空间流入流出的能量差值

所以如果我们希望所有 local 的 observer 看到能量守恒的现象我们核心就是要求一个 covariant 的方程  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$

## 4.5 Questions and Thoughts

**Question 4.6 为什么最小曲线和 levi-civita connection 给出的 geodesic 是等价的，给出更仔细的推导！【主要是前两项的对称】**

[我懒了... 但是可以参考 Blau 之中的计算]

**Question 4.7 Riemann Normal Coordinates 能不能给一个更加数学的清晰的定义？**

[回头再讨论]

**Question 4.8 Riemann Normal Coordinate 下面的 Geodesic，为什么我们的参数化可以是新的  $\lambda$ ，难道不还是应该原来的  $t$  吗？**

这是一个 bug。我们完全不可以随便搞参数化说满足一种测地线方程。我们需要证明说这个  $\lambda$  参数化和原来的  $t$  参数化是正比的。这样子才行。但是是可以得证的，我就懒得讨论了。□

### Question 4.9 对于输入是基矢量的 tensor 计算我们怎么使用纯粹的分量方法进行计算？

有的时候我们进行计算会需要 tensor 作用在基矢量上面，就会有 bug，因为如果我们还会涉及导数，那么有的  $\partial_\mu$  表示的就是 coordinate basis 的导数，有的  $\partial_\mu$  表示的是基矢量本身。所以特别容易进行混淆的。

一个解决的办法是，基矢量我们也用分量的形式写出来：

$$\partial_\mu = \delta_\mu^\nu \partial_\nu. \quad (127)$$

这样子我们就可以使用  $\delta_\mu^\nu$  作为基矢量的分量进行表示。就不把 covariant 的基矢量放进去了！！

#### Remark:

注意！我们用  $\delta_a^\mu$  表示基矢量的时候， $a$  是一个表示这个张量的指标。不是坐标的指标，坐标的指标只有一个也就是  $\mu$ 。

### Question 4.10 计算比较复杂的全饭对称张量，我们有什么简化的方法吗？

下面有一个公式可以对于全饭对称张量进行降阶：

$$T_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_n]} = \frac{1}{n} (T_{\mu_1[\mu_2\dots\mu_n]} - T_{\mu_2[\mu_1\dots\mu_n]} - \dots - T_{\mu_n[\mu_2\dots\mu_1]}). \quad (128)$$

## 5 SUP1: More on Geometries

{sec:5}

由于本课程对于几何很多概念讲解都比较简陋。所以我准备在这里补充很多基础的几何内容。主要 follow LCB 的教材前 5 章节以及 Blau 的讲义 B 部分的内容。对于几何进行更深入讲解。

### 5.1 微分形式以及流形上积分

这里 fol LCB 的部分

### 5.2 Lie Derivative and Killing Vector Fields

这里 fol Blau 的部分 【三个部分!】

#### 5.2.1 Lie Derivative of a Vector Field

### 5.3 超曲面

这里 fol Blau 的部分

### 5.4 标架体系以及曲率

这里 fol LCB 的部分

### 5.5 Maximal Symmetry and Constant Curvature

fol Blau 的部分

# 6 Lecture 5: Einstein Field Equation 以及 Lagrangian Formalism

{sec:1}

## 6.1 Einstein Field Equation

### 6.1.1 构造 Einstein Field Equation 的思路

#### 经典引力的Geodesic Deviation

在牛顿引力之中，我们知道如果存在引力场那么两个相邻的例子会因为引力势能轨道逐渐偏移。在 GR 之中，我们也知道两个自由运动的粒子会因为时空曲率的存在而逐渐偏移。

经典引力之中我们考虑两个相邻的 test particle:

$$\ddot{x}^i(t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\Big|_{\mathbf{x}(t)} \quad (129)$$

$$\ddot{x}^i(t) + \ddot{d}^i(t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\Big|_{\mathbf{x}(t)+\mathbf{d}(t)} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\Big|_{\mathbf{x}(t)} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}\Big|_{\mathbf{x}(t)} d^j(t) \quad (130)$$

我们计算这两个 trajectory 的 deviation 得到下面的结论:

$$\ddot{d}^i(t) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} d^j(t). \quad (131)$$

我们对比这个和 Geodesic Deviation Equation:

$$A^\nu = -R_{\mu\lambda\sigma}^\nu X^\lambda T^\mu T^\sigma. \quad (132)$$

我们会发现曲率和引力势能的二阶导数是有对应关系的。

#### Newton引力理论联系质量和曲率

但是我们希望新的理论是不存在引力势能这个东西的。我们又发现，根据牛顿引力定律，引力势能和质量存在关系：

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho. \quad (133)$$

同时在相对论框架下面，对于质量密度我们理解为：

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \leftrightarrow \rho. \quad (134)$$

所以自然的给出了能动量张量和曲率 (Ricci Tensor) 的对应：

$$R_{\mu\nu\sigma}^\nu u^\mu u^\sigma \sim \nabla^2 \phi \sim \rho \sim T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (135)$$

### 6.1.2 Einstein Field Equation 以及求解

#### Einstein Field Equation

直观的猜测是能动量张量和 Ricci Tensor 成正比，但是我们希望能动量张量的守恒是自然成立的。所以我们考虑真正和能动量张量正比的是一个根据几何上的恒等式 Bianchi Identity 决定协变导数一定为 0 的 Einstein Tensor。所以其实真正的猜测也就是我们的结论，Einstein Field Equation:

### Theorem 3. Einstein Field Equation

对于一个时空来说，时空的曲率由时空中分布的能动量张量进行决定。数学表达为：

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (136)$$

#### Remark:

这里的常数  $8\pi$  是通过让这个方程在弱引力极限下退化到牛顿引力方程得到的！

#### 求解问题建立

我们 set up 一下我们求解 Einstein Field Equation 这个问题，以及讨论一下方程是否足够我们求解 metric？

对于引力来说，虽然这是一个关于时空的理论，我们可以“强行给出一个时间维度”。对于初始状态，我们用下面的“初始条件子流形 (initial condition hypersurface)”来描述：

- 已知时空中嵌入了一个三维子流形  $\Sigma$ ，其上的 metric 确定为  $\gamma$
- 同时已知这个子流形在四维时空中的 embedding 的一些形式： $\gamma_{0\mu}$  and  $\partial_0\gamma_{\mu\nu}$

我们希望知道，知道这些初始条件以及 Einstein Field Equation。我们能不能给出一个时空  $(\mathcal{M}, g)$  以及一个 embedding  $i : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$  使得  $i(\Sigma)$  是和 initial condition hypersurface 一致的？

#### 分析方程和变量

由于我们希望找到一个四维的 metric  $g_{\mu\nu}$ ，所以我们有 10 个未知量。同时 Einstein Field Equation 给出了 10 个方程。表面上看似方程和未知量是匹配的。

但是其实 Einstein Field Euqation 并不是完全独立的 10 个方程。因为根据 Bianchi Identity 我们知道 Einstein Tensor 的协变导数一定为 0，所以我们有 4 个约束条件：

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (137)$$

我们写开来分析一下 Bianchi Identity 意味着什么：

$$\partial_0 G^{\mu 0} = -\partial_i G^{\mu i} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu G^{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\nu G^{\mu\lambda}. \quad (138)$$

等式右边最多包含 metric 对于选定的“时间”的二阶导数！所以我们知道等式左边也顶多是 metric 对于时间的二阶导数。因此：

$$\partial_0 G^{\mu 0} \quad (139)$$

最多包含 metric 对于时间的一阶导数！所以我们发现 Einstein Field Equation 之中的 4 个方程  $G^{\mu 0} = 8\pi GT^{\mu 0}$  其实是一阶微分方程。

通过数学结构的分析，我们给出了下面的结论：

- Einstein Field Equation 之中四个方程：

$$G^{\mu 0} = 8\pi GT^{\mu 0} \quad (140)$$

被称为 **Constraint Equations**，它们描述了初始条件应该满足的约束关系。并不提供动力学演化的信息。

- 另外六个方程：

$$G^{ij} = 8\pi G T^{ij} \quad (141)$$

提供了 metric 的动力学演化信息。并且它们是二阶微分方程。被称为 **Evolution Equations**。那么我们怎么求解 Einstein Field Equation 呢？我们需要取一个 Gauge。有的时候我们会选择 **Harmonic Gauge**：

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0 \quad (142)$$

## 6.2 Lagrangian Formulation of GR

下面我们讨论一下 GR 的 Lagrangian Formulation。我们的一个期望是我们有理论的一个作用量可以写作：

$$S = \int \mathcal{L}_g + \int \mathcal{L}_m \quad (143)$$

第一部分是引力部分，其对于 metric 的变分给出了 Einstein Tensor；第二部分是广义相对论推广到物质场部分，其对于 metric 的变分给出了能动量张量。

这样思路构造的理论被称为 Minimal Coupling Theory。因为我们没有引入任何额外的耦合项。只有自身本征的互相耦合！！

### 如何在流形上积分

由于物理理论全部是定义在一个 Manifold 上面的。那么给出一个作用量需要面临的数学问题是：**如何在流形上进行积分？**

我们发现我们可以使用 differential form 来进行积分。但是这里我们不进行讨论。由于 Lagrangian 是一个标量场，所以我们不妨研究一下**流形上标量积分**的问题。

#### Definition 21. 流形上标量积分

设  $(\mathcal{M}, g)$  是一个带有度规的流形， $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个标量场。那么我们定义  $f$  在  $\mathcal{M}$  上的积分为：

$$\int_{\mathcal{M}} f d\mu_g \equiv \int_U f(x) \sqrt{|g(x)|} d^4x \quad (144)$$

这个定义下我们就把流形上的积分问题转化成了在  $\mathbb{R}^4$  上的积分问题。也就是我们熟悉的积分问题。特别的，对于  $g$  是 Lorentzian Metric 的情况， $\sqrt{|g|} = \sqrt{-g}$ ，我们之后默认都是这个情况。

### 6.2.1 Einstein-Hilbert Action

#### Einstein-Hilbert Action的构造

我们希望构造一个引力的作用量  $S_g$ ，使得对于 metric 的变分给出 Einstein Tensor。一个最最简单的猜测是作用量和 ricci scalar 成正比，this turns out to be correct!

## Definition 22. Einstein-Hilbert Action

设  $(\mathcal{M}, g)$  是一个四维时空流形。那么 Einstein-Hilbert Action 定义为：

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} R d\mu_g \quad (145)$$

前面的系数是为了和 Einstein Field Equation 匹配，同时我们不希望在经典常用的物质场作用量前面再有一个系数，所以我们加在引力作用量前面了。

### 变分原理计算

我们计算 Einstein-Hilbert Action 对于 metric 的变分，我们发现这个 metric 有三个部分需要变分，我们在一个坐标系下计算：

$$\int_U \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^4x \quad (146)$$

这里需要对三个东西变分：

- $\delta\sqrt{-g}$  对于其变分有下面的结论：

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (147)$$

- $\delta g^{\mu\nu}$  这个直接写出来就行了。
- $\delta R_{\mu\nu}$  这个比较复杂。我们使用 Palatini Identity:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda). \quad (148)$$

### Remark:

我们注意一个事实，Christoffel Symbol 并不是一个 tensor。但是我们回粉惊人的发现，其变分  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho$  是一个 tensor！所以我们可以对其进行协变导数。

我们可以从 Christoffel Symbol 的变换法则出发验证，其变换法则是 tensorial 的变换加上一个坐标变换 dependent 的项。后面加入的项是和 metric 没有任何关系的，所以在变分的时候会被消掉。所以剩下的部分是 tensorial 的变换法则。

对于第三部分我们计算会发现它是一个 total derivative，所以我们可以把它变成一个 boundary term 丢掉。

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho W^\rho, \quad W^\rho = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\rho\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\mu. \quad (149)$$

丢掉 Boundary Term 之后我们得到：

$$\delta S_{EH} = \int_U \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (150)$$

也就是说我们的 EoM 正好是  $G_{\mu\nu} = 0$ ，也就是没有外源的 Einstein Field Equation!

## 6.3 引入物质场

### 加入物质场

如果希望给出有物质的 Einstein Field Equation, 我们需要给定物质场在有 Explicit 的 metric couple 时候的作用量。

我们现在通过自由标量场以及电磁场的例子来进行推广, 我们知道这个推广需要满足一些条件:

- 作用量在没有曲率的时候退化到平直时空的形式, 并且:
  1. 对动力学场的变分给出 EoM
  2. 对 metric  $g_{\mu\nu}$  的变分  $\times 2$  给出能动量张量的推广:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (151)$$

或者换一下上下指标:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (152)$$

- 运动方程在没有曲率的时候退化到平直时空的形式, 也就几乎是  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  然后加入一些曲率相关的项。
- 对于 metric 的变分给出一个量, 这个量需要在平直时空下退化到能动量张量的形式。【或者说就是给出弯曲时空推广的能动量张量】

#### Remark:

需要注意一下  $\delta g^{\mu\nu}$  和  $\delta g_{\mu\nu}$  并不是简单的上升下降指标关系。我们可以推出较之普通的上升和下降指标多了一个负号:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (153)$$

#### Remark:

上面我们使用能动量张量的定义是因为只有这样定义, 我们自然推广的能动量张量才能和狭义相对论下的能动量张量对应上。所以我们有那个  $1/2$  的系数。

我们发现可以很自然的找到这样的推广。这里我们先对于标量场的 EoM 和 EM Tensor 进行一个直接的推广保证后面两条条件成立。然后我们再给出合适的作用量保证第一条条件成立。

### 6.3.1 EoM 和能动量张量直接推广

本章之中蓝色的部分介绍广义相对论的推广!!

首先考虑标量场的情况!

### 狭义相对论下标量场

对于狭义相对论, 我们标量场是酱紫的:

- 标量场的作用量为：

$$S_\phi = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_\phi. \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2), \quad (154)$$

- 标量场的 EoM 为，Klein-Gordon 方程：

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (155)$$

- 标量场的能动量张量为：

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + m^2 \phi^2). \quad (156)$$

弯曲时空下标量场EoM和能动量张量的推广

对于弯曲时空我们直接推广为：

- 标量场的 EoM 为：

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (157)$$

- 标量场的能动量张量为：

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + m^2 \phi^2) \quad (158)$$

我们其实注意，由于标量场是一个标量。所以协变导数和普通导数是一样的。所以实际上 EoM 和能动量张量和狭义相对论下是一样的形式，只不过把  $\eta_{\mu\nu}$  换成了  $g_{\mu\nu}$ 。

当然我们也可以这样推广 EoM：

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m^2 \phi - \xi R \phi = 0, \quad (159)$$

但是，我们会发现如果希望 Action 是对应的话。那么会违反我们的 minimal coupling 的 ansatz。所以暂时不予考虑。

下面考虑电磁场的情况！

狭义相对论下电磁场

狭义相对论下电磁场可以通过电磁 Tensor 进行描述， $F_{\mu\nu}$ 。其运动方程，也就是 Maxwell Equation 是：

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -4\pi j_\nu, \quad (160)$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \quad (161)$$

其性质下面列出

- 对于一个 4-vector  $v^\mu$  的观察者来说测量到的电磁场分别是：

1. 电场：

$$E_\mu = F_{\mu\nu} v^\nu \quad (162)$$

2. 磁场:

$$B_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}v^\nu \quad (163)$$

- 电磁场中带电粒子的运动方程是:

$$u^\mu\partial_\mu u^\nu = \frac{q}{m}F_\lambda^\nu u^\lambda. \quad (164)$$

在此基础上, 电动力学的研究之中我们也知道其 Physical 的能动量张量是:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\lambda}F_\nu^\lambda - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} \right). \quad (165)$$

### 矢量势作为动力学场

对于电动力学我们使用矢量势  $A_\mu$  作为动力学场。电磁 Tensor 和矢量势的关系为:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (166)$$

对于最一般的情况下 Maxwell Equation 可以写作:

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -4\pi j_\nu. \quad (167)$$

矢量势是一个规范场, 也就是说我们只有在选择一个合理的规范之后才能讨论场的动力学演化。我们一般选择 Lorenz Gauge:

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \quad (168)$$

所以 Maxwell Equation 变成了:

$$\partial^\mu\partial_\mu A_\nu = -4\pi j_\nu. \quad (169)$$

### Remark:

注意, 我们这里使用了两个导数算符的顺序交换。平直时空无所谓, 但是如果在弯曲时空下, 我们推广到协变导数就需要特别额外注意!!

### 电磁场的Lagrangian

如果我们使用  $A_\mu$  作为动力学场, 那么电磁场的 Lagrangian 可以写作:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\partial_{[\mu}A_{\nu]}\partial^{[\mu}A^{\nu]}, \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = A^\mu j_\mu, \quad (170)$$

前一部分是电磁场的自由部分, 后一部分是电磁场和电流的相互作用部分。

### 弯曲时空下电磁场EoM和能动量张量的推广

同样的我们考虑弯曲时空下的推广。对于动力学方程的推广我们需要小心。因为我们知道动力学场是一个 Gauge Field。所以我们需要同时推广 Gauge Condition 和 EoM。我们使用 lorenz Gauge 的推广:

- 对于一般的 EoM 我们直接使用协变导数进行推广：

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -4\pi j_\nu, \quad (171)$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \quad (172)$$

其中我们使用推广的电磁 Tensor：

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (173)$$

- 对于 Gauge Condition 我们也使用协变导数进行推广：

$$\nabla^\mu A_\mu = 0. \quad (174)$$

这样我们可以得到推广的 EoM：

$$\nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - R_\nu^\lambda A_\lambda = -4\pi j_\nu. \quad (175)$$

### Remark:

注意这里我们使用了协变导数的交换关系：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}^\rho A_\rho. \quad (176)$$

这就是为什么我们会多出一个曲率耦合项！

对于能动量张量的推广我们直接把  $\eta_{\mu\nu}$  换成  $g_{\mu\nu}$ ：

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \right). \quad (177)$$

以及我们也可以推广 GR 之中，受“引力”和电磁场共同作用的带电粒子的运动方程：

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \frac{q}{m} F_\rho^\nu u^\rho, \quad (178)$$

### 6.3.2 Lagrangian 的推广

为了推广 Lagrangian，我们需要知道一个一般的 GR 中物质场 Lagrangian 是怎么样子对于物质场和 metric 进行变分的。这样子我们更能掌控推广的过程保证正好变分后给出我们想要的 EoM 和能动量张量。

#### Lagrangian的对于物质场变分

我们考虑一个最一般的物质场和 metric 耦合的 Lagrangian：

$$S_m = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m(\psi, g) d\mu_g. \quad \mathcal{L}_m = \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, g) \quad (179)$$

首先我们考虑对于物质场本身的变分，我们得到：

$$\delta \int_D \mathcal{L} d\mu = \int_D (\delta \mathcal{L}) d\mu = \int_D \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\psi)} \delta (\nabla\psi) \right) d\mu. \quad (180)$$

我们对于协变导数依旧可以使用分部积分 (这本身就是 Leibniz Rule)，并且可以证明变分和协变导数是可以交换的。所以：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\delta(\nabla\psi) = \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\delta\psi\right) - \left(\nabla\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\right)\delta\psi. \quad (181)$$

所以我们知道，GR 之中 Lagrangian Equation 是：

#### Theorem 4. Lagrangian Equation in GR

物质场对于一般动力学场的变分给出 Lagrangian Equation:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi_a} - \nabla_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\psi_a)} = 0, \quad (182)$$

Lagrangian的对于metric变分

我们希望计算 Lagrangian 对于 metric 的变分。我们有：

$$\delta \int_D \mathcal{L} d\mu = \int_D \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\lambda\psi)} \delta(\nabla_\lambda\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \right) d\mu + \mathcal{L} \delta d\mu \right]. \quad (183)$$

第一项对于  $\delta_g \nabla\psi_a$  一般是非 0 的，但是不幸的是这个项非常难以计算。但是对于电磁场和标量场都可以不考虑，因为其为 0!! 这是因为：

- 对于标量场来说，GR 的 Lagrangian 根本不包含协变导数，因为标量场的协变导数和普通导数是一样的!!
- 对于电磁场来说，GR 的 Lagrangian  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ，那么 GR 的 Lagrangian 也不包含协变导数!!

对于这两种情况我们可以直接丢掉这个项。然后后面的计算就分情况进行。得到：

$$\delta \int_D \mathcal{L} d\mu = \frac{1}{2} \int_D T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d\mu \quad (184)$$

其中我们需要保证  $T^{\mu\nu}$  正好就是前面推广的能动量张量!!

标量场Lagrangian的推广

标量场的推广十分直接：

$$S_\phi = \int_D \mathcal{L}_\phi d\mu = \int_D -\frac{1}{2} (\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + m^2\phi^2) \sqrt{-g} d^4x. \quad (185)$$

我们可以证明 EoM 和能动量张量正好是前面推广的形式!!

- EoM:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (186)$$

- 能动量张量:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi + m^2\phi^2). \quad (187)$$

## 电磁场Lagrangian的推广

我们 Lagrangian 的推广极其简单，我们完全不需要动!!

$$S_{EM} = \int_D \mathcal{L}_{EM} d\mu = \int_D -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (188)$$

我们下面验证 EoM 和能动量张量正好是前面推广的形式!!

- EoM:

$$\delta \int_D \mathcal{L}_{EM} d\mu = \frac{1}{8\pi} \int_D F^{\mu\nu} \delta(\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu) d\mu = \frac{1}{4\pi} \int_D F^{\mu\nu} \delta \nabla_\nu A_\mu d\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_D \nabla_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu d\mu. \quad (189)$$

[凑合看吧，我懒得改这个鬼畜记号了]

- 能动量张量:

$$\delta \int_D \mathcal{L} d\mu = \int_D \left( \delta \mathcal{L} + \frac{1}{2} \mathcal{L} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right) d\mu = \int_D \left( -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} g^{\mu\sigma} \delta g^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \mathcal{L} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right) d\mu \quad (190)$$

我们注意对于上指标 metric 和下指标 metric 是不一样的，我们带入关系:

$$\delta g^{\nu\rho} = -g^{\nu\beta} g^{\alpha\rho} \delta g_{\alpha\beta}, \quad (191)$$

最终可以读出:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\sigma\beta} F_\sigma^\alpha - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \quad (192)$$

## 6.4 GR 的唯一性

Lovelock Theorem 告诉我们，是几乎唯一的，除了一个宇宙学常数。

## 6.5 Questions and thoughts

**Question 6.11** 电磁场进行对于 metric 变分的时候，为什么我们可以认为  $F_{\mu\nu}$  和 metric 没有关系？

因为我们会意识到其实我们写作:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (193)$$

这个是一样的，因为我们的反对称特性会自然的把 Christoffel Symbol 抵消掉。所以  $F_{\mu\nu}$  其实和 metric 没有关系!!  $\square$

# 7 Lecture 6: Weak Gravitational Field

{sec:1}

## 7.1 Formulation of Linearized Gravity

### 7.1.1 基础理论框架

为了研究弱引力场我们使用一套线性引力的近似方法。仅仅考虑 GR 在一个特定参考系下的一阶扰动近似。我们下面逐步讨论：

#### 线性引力架构

##### Definition 23. 线性引力架构

假设对于引力很弱的情况下，我们选择一个特定的参考系，其中 metric 可以呈现如下形式：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (194)$$

下面我们讨论这个特定参考系下线性引力理论的方方面面。我们研究 Chris Symbol, Ricci Tensor 等等，但是都只保留到  $h_{\mu\nu}$  的一阶项。

- **升降算符**: 我们在升降指标的时候使用  $\eta_{\mu\nu}$  来进行升降，但是一个特例除外!! 也就是 metric 自己，我们使用：

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (195)$$

作为 metric 的逆的线性近似，其中  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ 。

- **Christoffel Symbol**

我们知道 metric 的导数只包含  $h_{\mu\nu}$  的导数，因此 Christoffel Symbol 可以写成

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\nu h_{\mu\beta} + \partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}). \quad (196)$$

注意第一项本身是  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ ，但是  $h^{\mu\nu}$  乘以  $\partial h$  是二阶小量，因此被忽略掉了。

- **Riemann Tensor**

根据定义 Riemann Tensor 可以写作：

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}). \quad (197) \quad \text{eq:r}$$

**Invariant of Riemann Tensor:** 在线性引力近似框架下 Riemann Tensor 在保持线性的坐标变换下 【是一个标量】!! 可以证明对于任意坐标变换，保持线性近似满足：

$$R'_{\mu\nu\rho\sigma}(x') = R_{\mu\nu\rho\sigma}(x). \quad (198)$$

- **Ricci Tensor**

我们知道 Ricci Tensor 的定义是：

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma\Gamma_{\sigma\nu}^\rho. \quad (199)$$

但是最后两项是二阶小量，因此被忽略掉了。因此我们有：

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho. \quad (200)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_\lambda^\lambda + \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda), \quad (201)$$

其中  $\square = \partial_\lambda \partial^\lambda$ .

### Remark:

本章之中，我们所有使用到的  $\square = \partial_\lambda \partial^\lambda$ . 全部都是 Minkowski 空间下的 d'Alembert 算符。

- Ricci Scalar

我们对于 Ricci Tensor 进行 contraction 最终可以得到：

$$R = \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} - \square h \quad (202)$$

其中  $h = h_\lambda^\lambda = \eta^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma}$ 。也就是用  $\eta^{\mu\nu}$  进行升降指标的 tr.

- Einstein Tensor

最终这个是 Ricci Tensor 和 Ricci Scalar 的线性组合，因此我们有：

$$2G_{\mu\nu} = -\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda + \eta_{\mu\nu} \square h - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma}. \quad (203)$$

- Einstein Field Equation

最终我们可以将上面的 Einstein Tensor 代入 Einstein Field Equation 中，得到线性引力下的 EFE：

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda - \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \eta_{\mu\nu} \square h + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (204)$$

### Remark:

我们意识到我们一直使用正常的导数，是因为 covariant derivative 包含  $h_{\mu\nu}$  一阶的 Christoffel Symbol，因此会产生二阶小量，我们忽略掉了。就变成了普通的偏导数。

### Bianchi Identity的讨论

我们知道 Bianchi Identity 是：

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \Rightarrow \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (205)$$

左边的式子是几何的式子右边的则是根据 EFE 得到的。对于线性引力来说：

$$\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0. \Rightarrow \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (206)$$

这说明运动方程在线性引力的情况下不受引力场的影响，和平直时一样。所以我们的线性引力不存在能动量张量变化对于引力场的反馈。

比如对于 dust，能动量张量是  $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ ，因此我们有：

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0. \quad (207)$$

这说明 dust 的质点沿着直线运动，不受引力场的影响。

### 7.1.2 线性引力在 Hilbert Gauge 下框架

我们知道 metric 是一个规范场。

- 对于 Linearized Gravity，我们也发现对于任何满足线性条件的坐标变换来说，我们的理论都是不变的，也就是说这是一个 Gauge Symmetry。
- 在求解之前我们需要 fix 这个 gauge freedom。希望选择一个 gauge 来简化 Einstein Field Equation。

本章就讨论这个 gauge fixing 的过程。

#### gamma metric 简化

我们可以 redefine 一个新的变量：

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma, \quad (208)$$

其中  $\gamma = \gamma^\lambda_\lambda = -h$ 。对于这个变量，我们可以将 Einstein Field Equation 写成：

$$-\square\gamma_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\gamma^{\alpha\beta} + \partial_\nu\partial_\alpha\gamma_\mu^\alpha + \partial_\mu\partial_\alpha\gamma_\nu^\alpha = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (209)$$

我们自然发现后面三项都是依赖于  $\partial_\alpha\gamma_\mu^\alpha$  的，因此我们可以选择一个 gauge 来简化这个方程。

#### Lorentz Transformation

我们先研究 Lorentz 坐标变换下面 metric 的行为。得到结论：

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}, \quad h'_{\mu\nu} = h_{\alpha\beta}\Lambda_\mu^\alpha\Lambda_\nu^\beta. \quad (210)$$

也就相当于我们的  $h_{\mu\nu}$  作为一个 tensor 进行变换。并且，我们要求 linearize 条件，也就是  $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$ 。

#### 一般坐标变换下的gauge变换

我们考虑一般坐标变换下 metric 的变化。我们考虑一个 infinitesimal 的坐标变换：

$$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x), \quad (211)$$

我们对于 metric 一般的协变进行无限小变换以及线性近似，得到：

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu. \quad (212)$$

也就是说  $h_{\mu\nu}$  发生了一个类似于电磁场规范变换的变化。【这里类比电磁场就特别好理解】。

#### Hilbert Gauge

我们特别希望选取下面这个 Gauge 来简化 Einstein Field Equation：

#### Definition 24. Hilbert Gauge

我们选择一个 gauge 使得：

$$\partial^\mu\gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (213)$$

也就是 Hilbert Gauge。

我们证明其是可以选取的。我们考虑一个一般的坐标变换下  $\gamma_{\mu\nu}$  的变化：

$$\begin{aligned}\gamma'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \\ &= (h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h + 2\partial_\lambda\xi^\lambda) \\ &= h_{\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h}_{\gamma_{\mu\nu}} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda.\end{aligned}\tag{214}$$

因此如果坐标变换后满足：

$$\partial^\mu\gamma'_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial^\nu\gamma_{\mu\nu} + \square\xi_\mu = 0.\tag{215}$$

那么就可以变换到 Hilbert Gauge。

Einstein Field Equation在Hilbert Gauge下

**Theorem 5.** Linearized Einstein Field Equation 在 Hilbert Gauge 下的形式

在 Hilbert Gauge 下, Einstein Field Equation 大大简化为：

$$\square\gamma_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}.\tag{216}$$

Gauge condition 为：

$$\partial^\mu\gamma_{\mu\nu} = 0.\tag{217}$$

我们在 Hilbert Gauge 下面进行求解。得知解必然是特解 + 通解。通解我们在引力波部分讨论，下面讨论特解：

$$\gamma_{\mu\nu} = 16\pi G \times D_R * T_{\mu\nu}\tag{218}$$

其中  $D_R$  是 Minkowski 空间下的 retarded Green function。然后  $*$  表示卷积。 $D_R$  具体形式为：

$$D_R(x) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\delta(x^0 - |\mathbf{x}|).\tag{219}$$

我们把卷积写开，然后仅仅考虑推迟的解就是：

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = 4G \int \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(y) d^4y = 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y\tag{220}$$

这就很像是经典电动力学我们的源给出场的解。但是场在这里是  $\gamma_{\mu\nu}$ , 源是  $T_{\mu\nu}$ 。

## 7.2 Nearly Newtonian Field

Nearly Newtonian Field

下面我们在线性引力的框架上给出更多的近似。考虑最类似牛顿引力近似的情况。我们知道对于牛顿引力要说有下面条件：

- Static and Stationary: stationary 说的是存在类时 Killing Vector, 可以理解为 metric 不显含一个「时间坐标」; static 说的是不存在 cross term  $g_{0i}$ ;
- Non-relativistic source: 能动量张量的主要成分是  $T_{00}$ , 其他成分都很小。

$$T_{00} \gg |T_{0j}|, |T_{ij}| \quad (221)$$

### Theorem 6. Nearly Newtonian Einstein Field Equation

在 *Nearly Newtonian Field* 下, *Einstein Field Equation* 的解满足:

$$\square \gamma_{00} = -16\pi G T_{00}, \quad \square \gamma_{0j} = 0, \quad \square \gamma_{ij} = 0. \quad (222)$$

所以我们的 EFE 的解就是:

$$\gamma_{00} = -4\phi, \quad \gamma_{0j} = \gamma_{ij} = 0 \quad \phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{T_{00}(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y. \quad (223)$$

这里  $\phi(\mathbf{x})$  就是经典的牛顿引力势。我们可以将 metric 写成:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)d\mathbf{x}^2. \quad (224)$$

对于一个点源来说,  $T_{00} = M\delta(\mathbf{x})$ , 因此我们有:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 + 2\frac{GM}{r}\right)d\mathbf{x}^2. \quad (225) \quad \text{eq:ne}$$

### Test Particle的运动方程

我们考虑一个 test particle 在这个 metric 下面的运动方程 (也就是 geodesic equation)。我们使用下面两个非相对论近似:

$$dx^\mu/dt = (1, 0, 0, 0) \quad \tau \approx x^0 = t. \quad (226)$$

因此 geodesic equation 变成:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{00}^\mu \quad (227)$$

对于空间维度的运动方程来说, 我们有:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\partial^i h_{00} = \partial^i \phi \Rightarrow \ddot{x}^i = -\partial^i \phi \quad (228)$$

这就是经典牛顿引力的运动方程!!

### 一般引力下电磁波运动

我们试图研究引力下电磁波的运动。我们知道电磁场在引力下 (lorenz Gauge) 的运动方程是:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - R^\nu_\mu A^\mu = 0. \quad (229)$$

我们考虑下面的 ansatz 来描述电磁场：

$$A_\mu = C_\mu e^{iS}. \quad (230)$$

其中  $C_\mu$  是慢变的振幅， $S$  是快速变化的相位是时空的函数。我们带入 EoM 之中得到：

$$\nabla^\mu [C_\nu i e^{iS} \nabla_\mu S] = -C_\nu e^{2iS} (\nabla_\mu S) (\nabla^\mu S) + C_\nu i e^{iS} \nabla^\mu \nabla_\mu S. \quad (231)$$

其中我们忽略掉了  $\nabla_\mu C_\nu$  的项，因为  $C_\nu$  是慢变的。我们也忽略掉了  $R^\nu_\mu A^\mu$  的项，因为引力场很弱。我们发现上面的方程可以分为实部和虚部两部分：

$$\nabla_\mu S \nabla^\mu S = 0, \quad \nabla^\mu \nabla_\mu S = 0. \quad (232)$$

定义电磁波的波矢为：

$$k_\mu \equiv \nabla_\mu S. \quad (233)$$

第一个运动方程我们知道  $k_\mu k^\mu = 0$ ，也就是说电磁波是沿着 null geodesic 传播的。第二个方程进行一个协变导数结果为：

$$0 = \nabla_\mu (k^\nu k_\nu) = 2k^\nu \nabla_\mu k_\nu. \Rightarrow k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0 = \nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{k}. \quad (234)$$

中间的推导之中我们使用了  $\nabla_\mu \nabla_\nu S = \nabla_\nu \nabla_\mu S$  的 torsion free 条件。这证明了，Maxwell Equation 可以推出电磁波的波矢是类光测地线的切矢量，也符合电磁波以光速传播的事实。

### Gauge condition

上面的求解并不是完整的，我们还有很多对于  $C_\mu$  的冗余自由度。我们使用 Lorenz Gauge 来 fix 这个 gauge freedom：

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \quad (235)$$

我们带入 ansatz 得到：

$$k_\mu C^\mu = 0. \quad (236)$$

这说明，在 Lorenz Gauge 下面，电磁波的振幅和波矢是正交的，符合电磁波横波的性质。

### 波矢和可观测量

我们类比经典的电动力学，定义弯曲时空下面一个观测者以  $u^\mu$  运动，那么观测者测量到的电磁波频率为：

$$\omega = -k_\mu u^\mu = -u^\mu \nabla_\mu S. \quad (237)$$

### 光在Nearly Newtonian Field下的运动

下面我们考虑光在 Nearly Newtonian Field 下的运动。我们 focus 一阶的线性的运动方程也就是：

$$\nabla_\mu S \nabla^\mu S = 0. \quad (238)$$

选择 eq. (225) 的 metric, 我们有:

$$-(1 - 2\phi)(\partial_t S)^2 + (1 + 2\phi)(\nabla S)^2 = 0. \quad (239)$$

考虑一个「静止」观察者  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , 其观察到的频率为  $\omega = -k_0 = -\partial_t S$ , 所以我们给出下面的 ansatz:

$$S(\mathbf{x}, t) = -\omega t + u(\mathbf{x}). \quad (240)$$

带入上面的 EoM 得到:

$$(\nabla u)^2 = n^2 \omega^2, \quad n = 1 - 2\phi. \quad (241)$$

注意: 原本  $n = \sqrt{1 - 4\phi}$  这里我们保留到了一阶的展开。这个方程给出了光在 Nearly Newtonian Field 下的运动方程。我们发现光在引力场下的运动就像是在一个折射率为  $n = 1 - 2\phi$  的介质中传播一样。

### 7.3 Lense-Thirring Effect

#### Lense-Thirring Field

我们考虑 linearized Gravity 的语境下面, 放松 Nearly Newtonian Field 的 static 条件, 考虑 stationary 但是并非 static 的情况:

- Stationary: 存在类时 Killing Vector, 可以理解为 metric 不包含一个「时间坐标」;
- Non-relativistic non-static source: 能动量张量的主要成分是  $T_{00}, T_{0i}$ , 其他成分都很小。

#### Theorem 7. Lense-Thirring Field

对于 stationary 但并非 static 的 linearized Gravity 的类 Newtonian Field, 我们有:

$$\square \gamma_{ij} = 0, \quad \square \gamma_{0\mu} = -16\pi G T_{0\mu}. \quad (242)$$

#### 等效电动力学

我们发现这个时候我们可以将引力场和电动力学进行类比。我们定义, 等效矢量势与等效电流:

$$A_\mu \equiv \frac{1}{4} \gamma_{0\mu} \quad j_\mu = G T_{0\mu} \quad (243)$$

所以我们得到 Einstein Field Equation 变成:

$$\square A_\mu = -4\pi j_\mu{}_{ij} = 0 \quad (244)$$

正是电动力学在弱引力的情况下  $R = 0$  有源运动方程。解得:

$$A_0 = -\phi, \quad A_i(\mathbf{x}) = G \int \frac{T_{0i}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y. \quad \gamma_{ij} = 0 \quad (245)$$

最后一个是因为我们认为 metric stationary 所以没有时间导数，对于空间导数为 0 一个平凡的解就是 0。变换回 metric 得到：

$$g_{00} = -1 + 2A_0, \quad g_{0i} = 4A_i, \quad g_{ij} = (1 + 2A_0)\delta_{ij}. \quad (246)$$

### Test Particle 的运动方程

考虑一个 test particle 在这个 metric 下面的运动方程（也就是 geodesic equation）。我们使用 Lagrangian formalism 描述：

$$S = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt \quad (247)$$

我们考虑非相对论近似，所以给出 ansatz：

$$\frac{dx^\mu}{dt} = u^\mu = (1, v^i), \quad |v^i| \ll 1. \quad (248)$$

并且我们忽略所有  $v^2$  项进行讨论，在这个近似下带入 ansatz：

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = -1 + \mathbf{v}^2 + 2A_0 + 8\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (249)$$

因此 Lagrangian 变成：

$$-\frac{1}{m}\mathcal{L} = \sqrt{-g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - A_0 - 4\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (250)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \phi - 4\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (251)$$

我们写出 lagrangian 的形式就是：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\phi + 4m\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (252)$$

### 类比电动力学

#### Remark:

补充信息，电动力学之中自由粒子的 lagrangian 以及运动方程：

- 电磁场中粒子的 lagrangian:  $\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi$

对比电动力学和引力的情况我们发现：

- $e \sim m$  也就是电荷相当于质量，并永远是正数；
- 对于磁场作用多了一个正数 4 的系数，因此引力场中的「磁场」效应更强。

类比电动力学我们定义对于引力的「电场」和「磁场」：

$$\mathbf{E}_g = -\nabla\phi, \quad \mathbf{B}_g = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (253)$$

我们可以给出运动方程为：

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_g + 4\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}_g. \quad (254)$$

相当于牛顿引力加上一个类似于洛伦兹力的修正项。

### Spin Precession

类似洛伦兹里，如果我们有一个转动的物质，那么就会有进动的效应。

[回头仔细补充捏]

## 7.4 Questions and thoughts

**Question 7.12 线性引力我们升降指标的时候什么时候使用  $\eta$  什么时候使用  $\eta \pm h$ ??**

我们对于线性引力的研究有下面的规定只有在升降 metric 的时候才使用  $h$  相关的，其他时候都使用  $\eta$  进行升降指标。  $\square$

# 8 Lecture 7: Gravitational Field Solution

{sec:1}

## 8.1 引力波

### 8.1.1 TT Gauge 下的 Einstein Field Equation

前面我们研究了有源的 Einstein Field Equation 在 Hilbert Gauge 下面的求解。下面我们希望求解无源的 Einstein Field Equation 在 Hilbert Gauge 下面的解，也就是引力波的解。

homogenous EFE in Hilbert Gauge

我们考虑之前讨论的 EFE 在 Hilbert Gauge 下面的形式：

$$\square \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\nu \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (255)$$

我们计算变量和方程的数目。

- 变量  $\gamma_{\mu\nu}$ , 作为对称张量一共是 10 个变量
- Gauge Condition: Hilbert Gauge 提供了 4 个约束条件

所以我们总共有  $10-4=6$  个自由度。但是这其实并没有完全固定我们的 gauge condition。因为对于 free field 来说，我们还可以要求更多的条件。

Tranceless-Transverse Gauge

我们可以在 Hilbert Gauge 的基础上再要求更多的条件，我们给出下面这个 gauge condition:

**Definition 25.** Transverse-Tranceless Gauge

对于无源的 Einstein Field Equation, 我们可以对于 metric 要求满足:

$$h_{\mu 0} = 0, \quad \sum_k h_{kk} = 0, \quad \partial_j h_{kj} = 0. \quad (256)$$

我们可以证明永远可以找到一个 coordinate transformation 对于无源的 metric 满足这个条件。

TT Gauge 选择证明

首先复习一般坐标变换前后在线性近似成立的基础上满足 eq. (214) 的关系，并且 Hilbert Gauge 左手边的项满足 eq. (215) 的要求。我们会发现，如果选择一个坐标变换满足：

$$\square \xi_\mu = 0, \quad (257)$$

那么 Hilbert Gauge 条件依然成立。说明有一些自由度并没有被固定，我们没有完整的选择一个坐标系，也就是一个 gauge。我们发现对于一个  $\square \xi^\mu = 0$  可以根据求道和  $\square$  算符对易知道：

$$\square \delta \gamma_{\mu\nu} = \square \xi_{\mu\nu} = \square (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho) = 0. \quad (258)$$

对于无源系统，我们总能够选择一个坐标保证变量部分是 0。

### Remark:

对于有源系统，我们不能够这样选择。因为比如选择  $\gamma_{0i} = 0$  但是  $T_{0i} \neq 0$ ，那么我们就不能够满足 EFE 了。

我们可以进一步在 Hilbert Gauge 的基础上选择一个坐标变换满足上面的方程，然后选择合适的  $\xi_\mu$  保证：

- $\xi_0$  的选择保证  $\gamma = 0$
- $\xi_i$  的选择保证  $\gamma_{0i} = 0$

根据 hilbert gauge 条件，我们有  $\partial_0 h^{00} = 0$  我们不妨选择  $h_{00} = 0$  就得到了 TT gauge 的条件。这里我们比 Hilbert Gauge 多选择了 4 个约束条件，所以自由度为：

$$10 - 4 - 4 = 2 . \quad (259)$$

### 8.1.2 引力波的解

#### EFE在TT Gauge下的解

#### Theorem 8. EFE in TT Gauge

对于无源的 EFE 在 TT Gauge 下面，我们有：

$$\square h_{ij}^{TT} = 0 , \quad (260)$$

对于这个方程我们有一个自然的 ansatz：

$$h_{ij}^{TT}(x) = e_{ij}(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu} \quad (261)$$

我们选择  $k^\mu = (\omega, k^i)$ 。并且  $e_{ij}(\mathbf{k})$  是极化张量，我们把这个 ansatz 带入 EFE 以及 TT Gauge 条件，我们有：

- EFE 条件： $k^\mu k_\mu = 0$  也就是说引力波是以光速传播的。
- TT Gauge 条件
  - Hilbert Gauge 条件： $\partial^j h_{ij} = 0 \Rightarrow n^i h_{ij} = 0$ . 其中  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$
  - Tranceless 条件： $h_i^i = 0$

如果在一个坐标系之中我们的引力波沿着  $z$  方向传播，那么我们可以写出极化张量的形式：

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} e^{i(kz - \omega t)} , \quad (262)$$

其中  $h_+$  和  $h_\times$  是两个独立的极化态，也就是之前讨论的两个独立自由度。最后添加上平直时空的项给出完整的 metric perturbation：

**Theorem 9.** *TT Gauge* 下面  $z$  方向传播的引力波解

对于一个沿着  $z$  方向传播的引力波，在 *TT Gauge* 下面我们有 metric:

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 \quad (263)$$

$$+ \{1 + h_+ \exp[i(kz - \omega)t]\} dx^2 + \{1 - h_+ \exp[i(kz - \omega)t]\} dy^2 + 2h_\times \exp[i(kz - \omega)t] dxdy. \quad (264)$$

### 8.1.3 TT Gauge 一些性质

#### 投影到 TT Gauge 之中

对于一个 Hilbert Gauge 下面的解，我们可以使用一个系统方法投影到 TT Gauge 之中。我们定义一个投影算符：

**Definition 26.** *pre TT Projection Operator*

考虑 Hilbert Gauge 下面的波动解沿着  $\mathbf{n}$  方向进行传播，我们定义投影算符：

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j . \quad (265)$$

我们发现这个投影算符满足：对称的；Transverse 的（也就是  $n^i P_{ij} = 0$ ）；Trance 2 的。并且满足投影算符的定义：

$$P_{ik} P_{kj} = P_{ij} . \quad (266)$$

我们可以使用这个投影算符定义 TT 投影算符：

**Definition 27.** *TT Projection Operator*

对于一个 Hilbert Gauge 下面的波动解  $h_{ij}$ ，我们定义 TT 投影算符：

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik}(\hat{\mathbf{n}}) P_{jl}(\hat{\mathbf{n}}) - \frac{1}{2} P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) P_{kl}(\hat{\mathbf{n}}) . \quad (267)$$

对于这个投影算符我们很明显发现有下面的性质：

- 这依旧是一个投影算符： $\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} .$
- 对于所有 index 都是 transverse 的： $n^i \Lambda_{ij,kl} = 0 .$
- Tranceless 性质： $\Lambda_{ii,kl} = 0 = \Lambda_{ij,kk} .$
- 对于同时变换前后两个指标是对称的： $(i, j) \leftrightarrow (k, l).$

- 具体用  $n$  写出来形式是：

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \quad (268)$$

$$+ \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l . \quad (269)$$

### Theorem 10. 投影到 TT Gauge

对于一个 Hilbert Gauge 下面的波动解  $h_{\mu\nu}$ , 我们选择其空间部分  $h_{ij}$ , 那么其在 TT Gauge 下面的形式为：

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} . \quad (270)$$

当然根据定义我们有  $h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0$ .

spin-2性质

[并不是特别重要, 有需要补充]

## 8.2 Questiona and thoughts

Question 8.13 为什么有源系统我们不能选择 TT gauge??有源系统为什么不需要进一步 gauge fixing

[目前没有完全理解捏]

# 9 Lecture 8: Matter reacts to Gravitational Field

{sec:1}

## 9.1 物质对引力波响应

### 使用Geodesic Deviation进行研究

我们如何研究引力波对于物质的影响呢？我们可以研究很多沿着 Geodesic 运动的粒子，引力波的出现会导致这些粒子之间的距离发生变换，我们可以通过 Geodesics Deviation 来研究引力波如何影响这些粒子之间的距离，进一步知道引力波如何影响物质。

我们复习，对于 Geodesics Deviation，我们有：

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\nu\rho\sigma}\xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (271)$$

其中  $\xi^\mu$  是两个 Geodesics 之间的偏移量。可以回顾之前讨论的数学定义。

### 9.1.1 TT Gauge 下的物质响应

#### TT Gauge下面的几何量

我们 Naively 使用 TT Gauge 进行研究讨论。对于引力波存在的 TT Gauge 下面我们有 metric:

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = \delta_{ij} + h^{TT}_{ij}, \quad (272)$$

根据线性引力的公式可以计算出 Christoffel 符号：

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}^{TT} \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}^{TT} \quad \Gamma_{j\mu}^i = \frac{1}{2}(\partial_j h^{TTi}_\mu + \partial_\mu h^{TTi}_j - \partial^i h_{j\mu}^{TT}) \quad (273)$$

我们进一步计算 Riemann Tensor，我们使用公式 eq. (197) 进行带入。下面的讨论仅仅会用到  $R^i_{0j0}$  这个分量，我们计算：

$$R^i_{0j0} = -\frac{1}{2}\partial_0^2 h^{iT}{}_j \quad (274)$$

#### Remark:

注意!! 由于 Riemann Tensor 在线性引力的意义下是一个标量!! 上方的结果在任意线性近似成立的参考系下都是成立的!! 这是一个很震撼的结果!!

#### Set up以及初始条件

我们考虑测量 set up，假设一组粒子在这个参考系下初始是精致的，然后思考引力波通过后其 geodesic deviation 的情况。

- **初始条件：** 粒子初始静止，所以  $\frac{dx^i}{d\tau} = 0$ ，并且  $\frac{dx^0}{d\tau} = 1$ 。

根据 Geodesic Deviation 方程，在 0 时刻的时候，我们带入这个初始条件所以我们有：

$$\nabla_0(\nabla_0\xi^i)|_{\tau=0} = -R^i_{0j0} \xi^j|_{\tau=0} \quad (275)$$

#### TT Gauge下面Geodesic Deviation的计算

我们把上方的 Riemann Tensor 带入，我们先计算等式左边。注意左边我们的协变导数都是已经固定方向的，所以  $\nabla_0 \xi^i$  是一个 vector 并非一个  $(1, 1)$  Tensor。我们这样可以由里到外计算：

$$\nabla_0(\nabla_0 \xi^i) = \partial_0(\nabla_0 \xi^i) + \Gamma_{0\mu}^i(\nabla_0 \xi^\mu) \quad (276)$$

$$= \partial_0(\partial_0 \xi^i + \Gamma_{0\nu}^i \xi^\nu) + \Gamma_{0\mu}^i(\partial_0 \xi^\mu + \Gamma_{0\nu}^\mu \xi^\nu) \quad (277)$$

$$= \partial_0^2 \xi^i + \partial_0 \Gamma_{0\nu}^i \xi^\nu + \Gamma_{0\nu}^i \partial_0 \xi^\nu + \Gamma_{0\mu}^i \partial_0 \xi^\mu + \Gamma_{0\mu}^i \Gamma_{0\nu}^\mu \xi^\nu \quad (278)$$

最后一项我们认为是二阶小量所以忽略掉。我们把 Christoffel 符号带入，我们有：

$$\nabla_0(\nabla_0 \xi^i) = \partial_0^2 \xi^i + \frac{1}{2} \partial_0^2 h^{TTi}{}_\nu \xi^\nu + \frac{1}{2} \partial_0 h^{TTi}{}_\nu \partial_0 \xi^\nu + \frac{1}{2} \partial_0 h^{TTi}{}_\mu \partial_0 \xi^\mu \quad (279)$$

$$= \partial_0^2 \xi^i + \frac{1}{2} \partial_0^2 h^{TTi}{}_j \xi^j + \partial_0 h^{TTi}{}_j \partial_0 \xi^j \quad (280)$$

下面我们研究等式右边，带入 Riemann Tensor 的计算结果我们有：

$$-R^i{}_{0j0} \xi^j|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h^{iTT}{}_j \xi^j|_{\tau=0} \quad (281)$$

所以 Geodesic Deviation Equation 最终变成了：

$$\partial_0^2 \xi^i + \partial_0 h^{TTi}{}_j \partial_0 \xi^j = 0 \quad (282)$$

- 我们意识到初始时刻  $\partial_0 \xi^j = 0$ ，所以我们有：

$$\partial_0^2 \xi^i = 0 \quad (283)$$

一个简单的解就是： $\xi^i(\tau) = \xi^i(0)$ ，也就是说粒子之间的距离并不会因为引力波的通过而变化！！

### Remark:

我们会发现在 TT Gauge 下面，粒子的 Deviation 并不会因为引力波通过而变换。这是因为这个参考系下恰好坐标是随着粒子一起震荡的!!!

### 震荡的Proper Distance

我们知道两个粒子之间的 coordinate distance 并因为引力波而震荡。但这并不说明粒子没有运动，只是 coordinate system 随着粒子一起运动了。我们可以考虑描述两个粒子之间的距离的一个 coordinate 无关的量：proper distance。给出 set up 如下：

- TT Gauge 下面两个粒子的坐标为：

$$m_1 : x_1^\mu = (t_1, x_1, 0, 0) \quad m_2 : x_2^\mu = (t_2, x_2, 0, 0) \quad (284)$$

- 我们定义两个粒子之间的 coordinate distance 为  $\xi = x_2 - x_1$ 。我们定义两个粒子的 Proper Distance 为：

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{g_{xx} dx^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + h_{xx}^{TT}} dx \quad (285)$$

我们计算无限小的  $\xi^i$  的情况以及带入  $h_{xx}^{TT}$  的形式 theorem 9，给出结论是：

$$S = \sqrt{1 + h_+ \cos(\omega(t - z))} \xi \quad (286)$$

也就是说 Proper Distance 会随着引力波的通过而震荡！！

### 9.1.2 Local Inertial Frame 下的物质响应

由于我们测量都是需要基于参考系的。所以我们希望找到一个参考系，这个参考系下的 coordinate distance 和 proper distance 是相等的，因此可以直接使用 coordinate diatance 进行测量。于是我们需要 **Local Inertial Frame**。

#### Local Inertial Frame的选择

我们假设，对于引力波存在的一个时空，我们可以找到一个 Local Inertial Frame 满足：

- 在这个参考系下，metric 在某一个点  $p$  处满足 Minkowski 形式，并且一阶导数为 0：

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} \quad \partial_\rho g_{\mu\nu}(p) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\rho(p) = 0 \quad (287)$$

#### Remark:

我们假设在线性引力的一一下我们可以找到这个坐标系。Generally，我们很难说找到这个参考系的过程是否违背了线性引力的假设

一个显然的结果就是这个参考系下，coordinate distance 和 proper distance 是相等的！因为我们的 metric 就是 Minkowski 形式，coordinate distance 可以写作：

$$l = \sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j} = S \quad (288)$$

#### Fermi Normal Coordinate System

作业8的内容极其重要！！其中数学的定义了Fermi Normal Coordinate System，以及具体的求出了这个坐标系下Metric和Riemann Tensor的关系！！都是极其重要的

Generally，这样的 Local Inertial Frame 有很多构造方式，比如之前讨论的 Riemann Normal Coordinate。这里我们选择一个很重要的构造方式，也就是 Fermi Normal Coordinate System。在这个坐标系下，Metric 和 Riemann Tensor 有一个很漂亮的关系：

#### Theorem 11. Fermi Normal Coordinate System 下的 Metric 展开

在 Fermi Normal Coordinate System 下，metric 在点  $p$  附近可以展开为：

$$ds^2 = -(1 + R_{\tau a\tau b} X^a X^b) d\tau^2 - \frac{4}{3} R_{\tau bac} X^b X^c d\tau dX^a + \left[ \delta_{ab} - \frac{1}{3} R_{acbd} X^c X^d \right] dX^a dX^b \quad (289)$$

其中  $\{X^a\}$  是空间坐标， $\tau$  是时间坐标。

这个结论是可以通过 Fermi Normal Coordinate 的构造给出的。其构造过程比较复杂，可以后面补充讨论。

#### Remark:

这个坐标系最大的好处就是，我们可以直接通过 Riemann Tensor 给出 metric。而 Riemann Tensor 在线性引力的意义下是一个标量场，所以我们可以直接通过 TT Gauge 下的 Riemann Tensor 给出 Fermi Normal Coordinate 下的 Metric!!

## Earth Coordinate 作为参考系测量

理论上我们可以使用任何坐标系进行计算。但是为了和现实联系，我们需要 argue，Fermi Normal Coordinate 的结果能够在地球上被测量到。

也就是我们要 Argue，我们在地球上面测量的 coordinate 可以近似的认为是一个 Local Inertial Frame。或者说，我们在 Earth 上怎么构建装置能让装置近似的认为是在一个 Local Inertial Frame 下工作。

对于地球表面，其实是一个一直在向上进行加速并且还有旋转的参考系。我们通过参考系变换可以给出下面的 Metric 来描述地球表面的参考系：

### Theorem 12. Earth Coordinate 下的 Metric

在地球表面的参考系下，我们有 Metric:

$$\begin{aligned} ds^2 \simeq & -c^2 dt^2 \left[ 1 + \frac{2}{c^2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{c^4} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2 - \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + R_{0i0j} x^i x^j \right] \\ & + 2cdt dx^i \left[ \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \Omega^j x^k - \frac{2}{3} R_{0jik} x^j x^k \right] \\ & + dx^i dx^j \left[ \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl} x^k x^l \right], \end{aligned} \quad (290)$$

其中  $\mathbf{a}$  是地球表面的重力加速度  $\times -1$ ， $\boldsymbol{\Omega}$  是地球的自转角速度矢量。

我们如何通过操作让这个参考系更接近一个 Local Inertial Frame 呢？

- 通过 **suspension mechanism** 让装置悬挂在地球表面，这样可以抵消掉地球转动的影响从而消除转动项。我们知道这样系统至少在  $x - y$  平面内的行为和 Local Inertial Frame 是等价的。

### Remark:

对于  $x - y$  平面内，我们有  $a \cdot x = 0$  因为加速度在  $z$  方向上！而这个平面内  $z = 0$ 。

- Frequency Window**：在地球表面进行测量的时候，我们还需要考虑其他各种噪声的干扰。所以我们需要选择一个合适的频率窗口让引力波信号能够被测量到。一般来说，我们需要满足：

$$f \in [0.1\text{Hz}, 10^3\text{Hz}] \quad (291)$$

## Fermi Normal Coordinate 下 Geodesic Deviation 方程

下面我们在 Fermi Normal Coordinate 下面计算 Geodesic Deviation Equation。我们考虑这个参考系之下同样的初始条件：

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0 \quad \frac{dx^0}{d\tau} = 1. \quad (292)$$

根据 Geodesic Deviation 方程，在 0 时刻的时候，我们带入这个初始条件所以我们有：

$$\nabla_0 (\nabla_0 \xi^i)|_{\tau=0} = -R^i_{0j0} \xi^j|_{\tau=0} \quad (293)$$

这里我们注意!!! 因为 Riemann Tensor 在线性引力的意义下是一个标量场!! 所以我们可以直接使用 TT Gauge 下的 Riemann Tensor 结果:

$$R^i_{0j0} = -\frac{1}{2}\partial_0^2 h^{iTT}_j \quad (294)$$

由于这个坐标系下 Christoffel 符号在点  $p$  处为 0, 所以我们可以直接把协变导数项写作:

$$\nabla_0(\nabla_0\xi^i) = \partial_0^2\xi^i + \partial_0\Gamma_{0\nu}^i\xi^\nu \quad (295)$$

但是由于我们知道引力波的 metric 和时间是无关的, 所以 Christoffel 符号的时间导数为 0。所以只剩下了 deviation vector 的二阶时间导数项。最终我们有:

$$\partial_0^2\xi^i = \frac{1}{2}\partial_0^2 h^{iTT}_j \xi^j|_{\tau=0} \quad (296)$$

### Remark:

这个式子其实很 subtle, 因为式子左边是在 Fermi Normal Coordinate 下的时间导数, 右边是 TT Gauge 下的时间导数。但是由于 Riemann Tensor 在线性引力的意义下是一个标量场, 所以我们分量又可以理解为是一样的方向, 并且  $\partial_0 h^{iTT}_j(x)$  函数依赖的坐标  $x$  也是 Fermi Normal Coordinate 的坐标!! 这个特别 subtle!

### Fermi Normal Coordinate下的物质响应结果

下面我们给出 ansatz, 假设我们考虑在 Riemann Normal Coordinate x-y 平面内的偏移量:

$$\xi^i(t) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t), 0) \quad (297)$$

同时我们认为 TT Gauge 下的引力波沿着 z 方向传播, 并且仅仅考虑  $h_+$  极化态。所以空间坐标的 dependence 是:

$$h_{ab}^{\text{TT}} = h_+ \sin \omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (298)$$

带入 ansatz, 最终 geodesic deviation 方程, 我们有:

$$\delta \ddot{x} = -\frac{h_+}{2}(x_0 + \delta x)\omega^2 \sin \omega t, \quad \delta \ddot{y} = +\frac{h_+}{2}(y_0 + \delta y)\omega^2 \sin \omega t. \quad (299)$$

我们忽略掉高阶小量, 最终结果是:

$$\delta x(t) = \frac{h_+}{2}x_0 \sin \omega t, \quad \delta y(t) = -\frac{h_+}{2}y_0 \sin \omega t. \quad (300)$$

同样的对于  $h_\times$  极化态我们有:

$$\delta x(t) = \frac{h_\times}{2}y_0 \sin \omega t, \quad \delta y(t) = \frac{h_\times}{2}x_0 \sin \omega t. \quad (301)$$

这个解用一圈粒子的图像化方式表达就是:

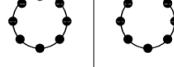
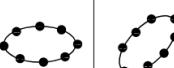
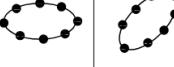
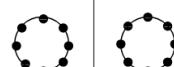
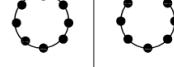
$\omega t$	$h_+$	$h_x$
0		
$\pi/2$		
$\pi$		
$3\pi/2$		

图 1: 引力波通过时, 粒子的位置变化示意图。左图是  $h_+$  极化态, 右图是  $h_x$  极化态。

## 9.2 引力波的探测

### 9.2.1 Interferometer 的工作原理

现实中探测引力波使用的是 Interferometer 装置。我们简单介绍一下其工作原理。

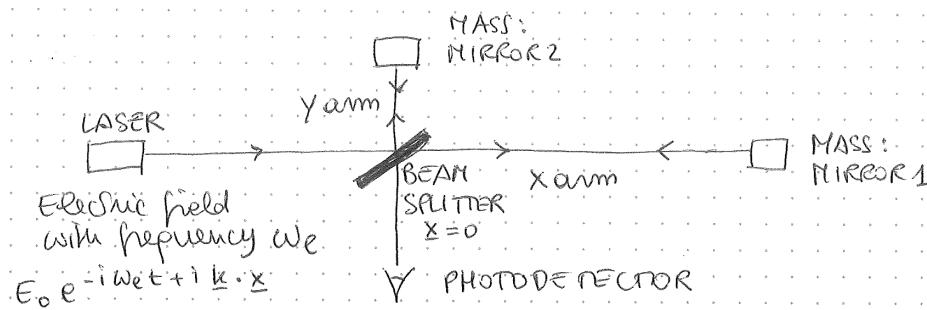


图 2: Interferometer 的结构示意图

我们考虑如图的 Interferometer 装置。考虑时间  $t$  两束光最终发生了干涉, 那么我们研究不同路径的光到底是什么时候发出来的:

$$t_0^{(x)} = t - 2L_x, \quad t_0^{(y)} = t - 2L_y. \quad (302)$$

因此我们得到干涉的时候两者除去共同相位差的电场强度为:

$$E_1 = -\frac{1}{2}E_0 e^{-i(\omega_L t - 2L_x)}, \quad E_2 = +\frac{1}{2}E_0 e^{-i(\omega_L t - 2L_y)}. \quad (303)$$

注意我们这里有一个  $1/2$  和  $-1/2$  的相位是由于 beam splitter 的反射和透射引起的。最终我们有总的电场强度为:

$$|E_{\text{out}}|^2 = |E_1 + E_2|^2 = E_0^2 \sin^2[\omega_L(L_y - L_x)]. \quad (304)$$

所以我们可以测量输出的光强度来测量两个路径的长度差。

## 9.2.2 引力波对 Interferometer 的影响

### 不同坐标系下的分析

我们思考不同坐标系下引力波对 Interferometer 的影响。首先，干涉现象是一个物理现象，我们在不同的参考系下都必然看到同样的干涉现象。但是，在不同的参考系下，我们的 interpretation 或许有不同。我们考虑两种坐标系：

- **Lab Frame (Local Inertial Frame):** 在这个参考系下，物质的位置会随着引力波通过而震荡，所以我们通过臂长的变换我们可以给出干涉条纹的变化。
- **TT Gauge:** 在这个参考系下，物质的位置并不会随着引力波通过而震荡，但是引力波的存在会影响光的传播，所以我们通过光程的变化来解释干涉条纹的变化。

### TT Gauge下光波传播分析

由于 TT Gauge 下面的 metric 更加简单，我们先在 TT Gauge 下面进行分析。考虑一个 z 方向传播的引力波通过 Interferometer 装置，我们考虑  $h_+$  极化态的引力波通过。我们仅仅考虑  $h_+$  极化态，因此 metric 的形式为：

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+(t)]dx^2 + [1 - h_+(t)]dy^2 + dz^2. \quad (305)$$

其中我们使用函数方便书写：

$$h_+(t) = h_0 \cos \omega_{\text{gw}} t, \quad (306)$$

#### Remark:

注意我们区分引力波的频率  $\omega_{\text{gw}}$  和激光的频率  $\omega_L$

我们知道  $L_x, L_y$  的长度是固定的，但是我们考虑光在这个时空下的传播时间。由于光沿着 null geodesic 传播，所以我们「在一阶近似意义上」有：

$$dx = \pm dt \left[ 1 - \frac{1}{2}h_+(t) \right], \quad (307)$$

因而可以计算出光在 x 臂的传播时间：

$$\int_0^{L_x} dx - \int_{L_x}^0 dx = \int_{t_0^{(x)}}^{t_1} dt \left[ 1 - \frac{1}{2}h_+(t) \right] + \int_{t_1}^t dt \left[ 1 - \frac{1}{2}h_+(t) \right] \quad (308)$$

$$\Rightarrow 2L_x = t - t_0^{(x)} - \frac{1}{2} \int_{t_0^{(x)}}^t h_+(t) dt \quad (309)$$

$$(310)$$

于是我们得到：

**Theorem 13.** *TT Gauge* 下光在引力波中传播时间

在 *TT Gauge* 下，光在  $x$  臂的传播时间满足：

$$t - t_0^{(x)} = 2L_x + L_x h_+ (t_0^{(x)} + L_x) \frac{\sin(\omega_{\text{gw}} L_x)}{(\omega_{\text{gw}} L_x)}. \quad (311)$$

在  $y$  臂同理，我们直接把所有  $x$  替换成  $y$ ; 所有  $h_+$  替换成  $-h_+$ ，我们有：

$$t - t_0^{(y)} = 2L_y + L_y - h_+ (t_0^{(y)} + L_y) \frac{\sin(\omega_{\text{gw}} L_y)}{(\omega_{\text{gw}} L_y)}. \quad (312)$$

- 我们会发现只有在  $\omega_{\text{gw}} L \sim 0$  的时候，才有明显的效果！！也就是说引力波的波长需要和 Interferometer 的臂长在同一个量级上才能够被测量到!!

### 干涉情况分析

我们最终反解出光波的发射时间：

$$t_0^{(x)} = t - 2L_x - L_x h_+ (t - L_x) \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} L_x). \quad (313)$$

$$t_0^{(y)} = t - 2L_y + L_y h_+ (t - L_y) \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} L_y). \quad (314)$$

带入干涉的电场强度表达式，然后进行一波计算之后，我们最终得到：

$$E_{\text{tot}}(t) = E^{(x)}(t) + E^{(y)}(t) \quad (315)$$

$$= -i E_0 e^{-i\omega_L(t-2L)} \sin[\phi_0 + \Delta\phi_x(t)]. \quad (316)$$

其中相位是：

$$\Delta\phi_x(t) = h_+ (t - L) \omega_L L \text{sinc}(\omega_{\text{gw}} L) \quad L = (L_x + L_y)/2 \quad (317)$$

并且  $\phi_0$  是一个无关紧要的相位。

### 真实情况分析

[感觉不是特别重要捏！一些实验讨论细节]

## 9.3 Questions and thoughts

**Question 9.14** 怎么理解线性引力下，坐标变换前后 Riemann Tensor 的【数值】直接不变??

就是说在线性近似的的意义下，Riemann Tensor 是一个标量场并非张量场!!  $\square$

**Question 9.15** 为什么 Local Inertial Frame 下面，我们可以使用 Riemann Tensor 进行表达 Metric??

具体见 Fermi Normal Coordinate 的定义和展开!!  $\square$

**Question 9.16** 为什么 local inertial frame 下面，proper distance 和 coordinate distance 相等??

正文有讨论，因为 metric 在这个点处是 Minkowski 形式，并且一阶导数为 0，所以在这个点附近的距离计算和 Minkowski 形式下的距离计算是一样的!!  $\square$

## 10 SUP 3: Fermi Normal Coordinate

{sec:}

Fermi Normal Coordinate

## 11 Lecture 9:

{sec:1}

This is lecture

## 12 Lecture 10

{sec:1}

# 13 Lecture 11: Isometries and Killing Vector Fields

{sec:13}

## 13.1 Diffeomorphism 以及 Lie Derivative

### 13.1.1 Diffeomorphism 以及 Isometry

之前我们定义过 Diffeomorphism 是一个光滑的双射映射  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , 并且它的逆映射也是光滑的。如果我们存在两个 Manifold 上面的 Diffeo, 我们其实可以把一个 Manifold 上面的张量场映射到另一个 manifold 上面去。

#### Tangent Vector的Push-forward

对于一个 Diffeomorphism  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , 我们可以定义矢量场的 Push-forward:

#### Definition 28. Push-forward of Vector Field

映射  $\phi_*: T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)} \mathcal{N}$ , 定义为对于标量场  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , 有:

$$(\phi_* v)(f) = v(f \circ \phi) \quad (318)$$

如果给定一个  $\mathcal{M}$  上面的坐标系  $\{x^\mu\}$ , 以及  $\mathcal{N}$  上面的坐标系  $\{y^\alpha\}$ , 那么我们可以计算 Push-forward 的坐标表示:

$$(\phi_* v)^\alpha \partial_\alpha^{(y)} f = v^\mu \partial_\mu^{(x)} (f \circ \phi) \Rightarrow (\phi_* v)^\alpha = v^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (319)$$

这里我们省略了坐标系的映射  $\psi_x$  以及  $\psi_y$ 。其中  $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$  是 Diffeomorphism 在坐标系下的 Jacobi 矩阵,  $y(x)$  其实是映射  $\psi_y \circ \phi \circ \psi_x^{-1}$ 。形式化的我们可以使用一个矩阵来书写 push-forward 的坐标变换关系:

$$(\phi_*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (320)$$

#### Cotangent Vector的Pull-back

类似的我们可以定义 Cotangent Vector 的 Pull-back:

#### Definition 29. Pull-back of Cotangent Vector Field

映射  $\phi^*: T_{\phi(p)}^* \mathcal{N} \rightarrow T_p^* \mathcal{M}$ , 定义为对于矢量场  $v \in T_p \mathcal{M}$ , 有:

$$(\phi^* \omega)(v) = \omega(\phi_* v) \quad (321)$$

类似的我们可以用一个具体的坐标系来表示 Pull-back 的坐标变换关系, 给定  $\mathcal{M}$  上面的坐标系  $\{x^\mu\}$ , 以及  $\mathcal{N}$  上面的坐标系  $\{y^\alpha\}$ , 我们有:

$$(\phi^* \omega)_\nu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\nu} \quad (322)$$

其中我们使用了  $y(x)$  其实是映射  $\psi_y \circ \phi \circ \psi_x^{-1}$ 。 $\psi_x$  是  $\mathcal{M}$  上的坐标系,  $\psi_y$  是  $\mathcal{N}$  上的坐标系。我们可以看出来一个结论:

- 对于  $C^\infty$  的 Diffeo 来说, Cotangent Vector 在 Diffeo 下的 Pull-back 和 Tangent Vector 在 Diffeo 下的 Push-forward 的坐标变换矩阵是互为逆矩阵的。

我们其实可以严格定义对于 tangent vector 的 pull-back 以及 cotangent vector 的 push-forward, 但是我们一般不这么做, 因为没有什么物理意义。

### 一般张量场的Push-forward

我们如此定义是为了推广到一般的张量场。我们可以定义一个  $(r, s)$  型张量场在 Diffeo 下的 Push-forward:

#### **Definition 30.** Push-forward of General Tensor Field

映射  $\phi_* : T_{p,s}^r \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p),s}^r \mathcal{N}$ , 定义为对于任意的  $r$  个 cotangent vector 以及  $s$  个 tangent vector, 有:

$$(\phi_* T)(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_l) = T(\phi^* \omega_1, \dots, \phi^* \omega_k, (\phi^{-1})_* v_1, \dots, (\phi^{-1})_* v_l) \quad (323)$$

同样的我们考虑一个具体的坐标系来表示 Push-forward 的坐标变换关系, 给定  $\mathcal{M}$  上面的坐标系  $\{x^\mu\}$ , 以及  $\mathcal{N}$  上面的坐标系  $\{y^\alpha\}$ , 我们有:

$$(\phi_* T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}|_{\phi(p)} = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}|_p \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial y^{\beta_s}} \quad (324)$$

其中我们使用了  $y(x)$  其实是映射  $\psi_y \circ \phi \circ \psi_x^{-1}$ , 而  $x(y)$  其实是映射  $\psi_x \circ \phi^{-1} \circ \psi_y^{-1}$ 。 $\psi_x$  是  $\mathcal{M}$  上的坐标系,  $\psi_y$  是  $\mathcal{N}$  上的坐标系。

### Push-forward和坐标变换的等价性

上面的讨论之中我们纯粹的考虑一个 Diffeomorphism  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , 并且定义了张量场在 Diffeo 下的 Push-forward。我们发现如果我们使用坐标系来表示 Push-forward 之后张量场的分量变化关系, 我们发现这个关系和一般的坐标变换关系完全一样! 因此我们可以得到一个结论:

#### **Theorem 14.** 对于张量场的分量来说下面两者完全等价:

- 在 Diffeomorphism 下的 Push-forward 之后坐标系之中的分量
- 在某个坐标变换下的坐标变换关系

因此可以说 Diffeo 和坐标变换可以认为是同一种变换的两种不同的 interpretation。一般我们认为 Diffeo 是主动观点, 坐标变换是被动观点。

### Remark:

我们之后会称呼  $y(x)$  这个映射为 diffeo 对应的 coordinate transformation。

### Isometry

我们定义一个特殊的 Diffeomorphism, 称为 Isometry, 我们认为这些变换描述着时空的一种对称性:

### Definition 31. Isometry

对于一个自己到自己的 Diffeomorphism  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , 如果满足对于任意的  $v, w \in T\mathcal{M}$  有:

$$\phi_* g(v, w) = g(v, w) \Leftrightarrow g((\phi^{-1})_* v, (\phi^{-1})_* w) = g(v, w) \quad (325)$$

那么我们称  $\phi$  是一个 Isometry。

使用坐标的语言表示, 给出一个 coordinate system  $\{x^\mu\}, \psi_x$  对于任意的点  $p \in \mathcal{M}$  满足:

$$(\phi_* g)_{\mu\nu}|_p \equiv g_{\alpha\beta}|_{\phi^{-1}(p)} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = g_{\mu\nu}|_p \quad (326)$$

其中  $x'(x)$  其实是映射  $\psi_x \circ \phi^{-1} \circ \psi_x^{-1}$ 。我们注意这个 diffeo 需要:

- 是一个流形自己到自己的映射, 因此对于映射前后的点都已知存在一个 metric  $g$
- 所有的比大小都是【同一个点的】如果是映射前后点的大小必然相同这是 push-forward 的定义!

#### 13.1.2 Lie Derivative

##### Lie Derivative的定义

在上面讨论之中我们已经发现如果一个 Diffeo 把流形映射到自己, 我们可以对于同一个点前后的张量场使用同样的 coordinate system 进行比较。这样的比较可以定义一个张量场的变化率, 我们称之为 Lie Derivative。

### Definition 32. Lie Derivative

对于一个 one parameter family of Diffeomorphism  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , 我们可以给出一个 tangent field  $v$  来描述这个 Diffeo, 反之亦然。我们定义 manifold 上任意张量场  $T$  对于 tangent field  $v$  的 Lie Derivative 为:

$$\mathcal{L}_v T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((\phi_{-t})_* T - T)}{t} \quad (327)$$

注意我们右边的张量场是同点进行比较, 因此存在在同一个空间里面可以有 well defined 的减法。

##### Lie Derivative的基本性质

从定义我们已经可以发现一些性质:

- 作为良好的导数算符: 其显然是一个同型张量场之间的线性映射并满足 Leibniz 法则:

$$\mathcal{L}_v(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_v T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_v T_2) \quad (328)$$

- 对于标量场  $f$ , Lie Derivative 简化为:

$$\mathcal{L}_v f = v(f) \quad (329)$$

### Adapted Coordinate System下的李导数

使用一般的坐标系来计算 Lie Derivative 会比较复杂，我们考虑使用一个特殊的坐标系来计算。我们选择一个 coordinate system  $\{x^\mu\}$  满足：

$$v = \frac{\partial}{\partial x^1} \Leftrightarrow v^\mu = \delta_1^\mu \quad (330)$$

这样的坐标系称为 Adapted Coordinate System。这个矢量场对应的 one parameter family of diffeo 的元素  $\phi_{-t}$  对应的 coordinate transformation  $x'(x)$  为：

$$x'^1 = x^1 + t, \quad x'^i = x^i \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (331)$$

因此我们可以计算出这个 Diffeo  $\phi_{-t}$  push forward 之后张量场的分量。由于  $x'(x)$  的 Jacobi 全部都是 delta 函数，因此我们有：

$$((\phi_{-t})_* T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}|_p = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}|_{\phi_t(p)} \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x'^{\nu_s}}{\partial x'^{\beta_s}} \quad (332)$$

$$= T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}|_{\phi_t(p)} \quad (333)$$

注意，我们这里是用了 one parameter family of diffeo 的定义，因此  $\phi_t(p) = \phi_{-t}^{-1}(p)$ 。因此我们可以计算 Lie Derivative 的分量：

$$(\mathcal{L}_v T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}|_{\phi_t(p)} - T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}|_p}{t} \quad (334)$$

我们不难发现右边就是对于第一个分量的偏导数的定义，因此我们有：

$$(\mathcal{L}_v T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}(x^1, \dots, x^n) = \partial_1 T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}(x^1, \dots, x^n) \quad (335)$$

### Tangent field Lie Derivative与Bracket

我们考虑两个 tangent field  $u, v \in T\mathcal{M}$ ，我们希望计算  $\mathcal{L}_u v$ 。我们使用 Adapted Coordinate System  $\{x^\mu\}$  发现：

$$(\mathcal{L}_u v)^\mu = \partial_1 v^\mu = [u, v]^\mu \quad (336)$$

由于两者都是协变的张量场与坐标无关，因此我们有：

**Theorem 15.** 对于任意的 tangent field  $u, v \in T\mathcal{M}$ ，都有：

$$\mathcal{L}_u v = [u, v] \quad (337)$$

使用分量的语言表示，我们有：

$$(\mathcal{L}_u v)^\mu = u^\nu \nabla_\nu v^\mu - v^\nu \nabla_\nu u^\mu \quad (338)$$

我们意识到 Lie Derivative 其实对于一个有 metric 的流形来说可以使用协变导数来书写（虽然其本身的定义并不需要 metric）。

### Cotangent Field Lie Derivative

我们可以使用一个 trick 给出 Cotangent field 的 Lie Derivative 以及协变导数的关系。我们考虑一个标量场的 Lie Derivative，如果使用 Lebniz 法则，我们有：

$$\mathcal{L}_v(\omega_\mu \omega^\mu) = \omega(\mathcal{L}_v \omega) + (\mathcal{L}_v \omega)(\omega) \quad (339)$$

同时根据标量场的 Lie Derivative 的性质我们有：

$$\mathcal{L}_v(\omega_\mu \omega^\mu) = v^\nu \partial_\nu(\omega_\mu \omega^\mu) \quad (340)$$

因此我们有：

$$(\mathcal{L}_v \omega)_\mu = v^\nu \nabla_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \nabla_\mu v^\nu \quad (341)$$

### General Tensor Field Lie Derivative

下面我们可以把这个结论推广到一般的张量场。我们考虑一个  $(r, s)$  型张量场  $T$ ，我们使用 Lebniz 法则以及之前的结论，我们有：

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} &= v^\mu \nabla_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \\ &- \sum_{i=1}^r T^{\alpha_1 \dots \mu \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \nabla_\mu v^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^s T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \mu \dots \beta_s} \nabla_{\beta_j} v^\mu \end{aligned} \quad (342)$$

特别的对于 metric 张量场  $g_{\mu\nu}$ ，我们有：

$$(\mathcal{L}_v g)_{\mu\nu} = v^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \nabla_\mu v^\rho + g_{\mu\rho} \nabla_\nu v^\rho \quad (343)$$

$$= \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu \quad (344)$$

## 13.2 Killing Vector Field

### 13.2.1 Killing Vector Field 的定义

#### Killing Vector Field 的定义

我们之前给出了 Isometry 的定义，知道 Isometry 是「保持 metric 不变」的 Diffeomorphism。现在如果一个流形存在一个 one parameter family of Isometry  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ，我们可以定义这个 Isometry 对应的 tangent field  $\xi$ 。根据 Isometry 的定义，我们有：

$$(\phi_{-t})_* g = g \Leftrightarrow \mathcal{L}_\xi g = 0 \quad (345)$$

因此给出定理：

#### Theorem 16. Killing Vector Field

以下条件完全等价：

- 存在一个 one parameter family of Isometry  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  由  $\xi$  生成。
- 存在一个 tangent field  $\xi \in T\mathcal{M}$  满足 Killing Equation:

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (346)$$

### Isometry与metric的坐标无关

我们可以发现如果一个 metric 存在一个 one parameter family of Isometry  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , 我们使用其 Adapted Coordinate System  $\{x^\mu\}$ , 我们知道:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \partial_1 g_{\mu\nu} = 0 \quad (347)$$

也就是说:

- 如果 metric 存在一个 Killing Vector Field, 那么我们可以找到一个 coordinate system 使得 metric 不依赖于某个坐标, 并且这个坐标方向的切矢量场就是这个 Killing Vector Field。
- 反过来如果我们找到一个 coordinate system 使得 metric 不依赖于某个坐标, 那么这个坐标方向的切矢量场就是一个 Killing Vector Field, 并且存在一个 one parameter family of Isometry 的映射是这个坐标方向的变换。

### Killing Vector Field的与守恒量

如果时空之中存在一些 geodesic  $\gamma(t)$ , 对应的 tangent field 为  $u = \frac{d}{dt}$ , 并且时空之中存在一个 Killing Vector Field  $\xi$ , 我们有:

#### Theorem 17. Killing Vector Field 与守恒量

对于时空之中任意的 geodesic  $\gamma(t)$ , 都有:

$$\xi_\mu u^\mu = \text{constant along } \gamma(t) \quad (348)$$

这是一个强大的结论, 其意义在于:

- **物理意义:** Killing Vector Field 给出时空之中的自由粒子 on shell 运动的一个守恒量。
- **Geodesics 求解:** 如果时空之中存在足够多的 Killing Vector Field, 我们可以使用这些守恒量来简化 Geodesics 方程的求解。

#### 13.2.2 Minkowski 的 Killing Vector Field

### 寻找Killing Vector

对于 Minkowski 时空我们的 Killing Equation 退化为  $\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0$ 。我们寻找可能的解:

- Adapted Coordinate 观察 I: 最一般的 Minkowski Metric 会发现, 四个坐标都无关, 因此全部都是 Killing Vector:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_i = \partial_{x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (349)$$

我们知道对于一个 on shell 的自由粒子来说, 四动量为  $p^\mu = mu^\mu$ , 因此我们发现四个守恒量:

$$P_{0\mu} u^\mu, \quad P_{i\mu} u^\mu, \quad i = 1, 2, 3 \quad (350)$$

分别物理 interpretation 就是自由粒子的能量与动量是守恒的! 这个数学上的概念与物理定律完全符合!

- Adapted Coordinate 观察 II: 我们选择另一个 coordinate 也就是球坐标:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (351)$$

这个坐标系下我们会发现 metric 与角度  $\varphi$  无关, 类似的我们可以找到三个 Killing Vector Field:

$$J_1 = -z\partial_y + y\partial_z, \quad J_2 = -x\partial_z + z\partial_x, \quad J_3 = -y\partial_x + x\partial_y. \quad (352)$$

其对应的守恒量是经典力学之中粒子相对于原点的角动量守恒!

最后还有一些混合的 Killing Vector Field:

- 剩余满足 Killing Equation 的解还有独立的三个 boost:

$$K_1 = t\partial_x + x\partial_t, \quad K_2 = t\partial_y + y\partial_t, \quad K_3 = t\partial_z + z\partial_t. \quad (353)$$

这里我们会发现其并无经典的「守恒量」因为我们经典力学之中把 coordinate time 和固有时间等同起来了, 我们经典力学之中的守恒说的是对于 coordinate time 的守恒。这里 boost 不再对于 coordinate time 不变, 但是其对于固有时间依旧是守恒的!

### Maximally Symmetric Space

我们发现 Minkowski 时空之中一共有 10 个线性独立的 Killing Vector Field。而我们其实可以证明:

- 对于一个  $n$  维的流形, 其最多存在  $\frac{n(n+1)}{2}$  个线性独立的 Killing Vector Field。

因此我们称 Minkowski 时空为一个 Maximally Symmetric Space。

## 13.3 Schwarzschild Metric

### 13.3.1 Schwarzschild metric 的 ansatz

我们希望找出 Einstein Field Equation 的一个特殊真空解并要求满足以下条件:

1. Stationary 【metric 不随时间演化】: 存在一个 time-like Killing Vector Field  $\xi$
2. Static【空间和时间分离; 并不互相纠缠】: 在 Stationary 的基础上, 要求存在一个 hypersurface 正交于上面提到的 orbit。
3. Spherically Symmetric 【球对称】: 存在一组空间 Killing Vector Field  $\eta_i (i = 1, 2, 3)$  满足  $so(3)$  的代数, 并且这个群的 orbit 是 2-sphere。

### Stationary and Static Metric的形式

这两个要求告诉我们 metric 要 behave 的足够 【时空分离】, 时间和空间尽量不干扰。我们试图找到一个坐标系写出的 metric 满足这些要求:

1. 首先我们选择一个 time like killing vector field  $\xi$ 。

2. 然后对于  $\Sigma$  hypersurface 我们可以选择一个坐标系  $\{x^i\}(i = 1, 2, 3)$ , 并且选择时间坐标  $t$  是  $T$  的 Adapted Coordinate。因此我们知道 metric 在这个坐标系下必然不依赖于  $t$
3. 最后根据 Static 的条件这个坐标系下 metric 不能有 cross term  $g_{ti} = 0$ , 因此我们可以写出 metric 的形式为:

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \sum_{i,j=1}^3 h_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j, \quad (354)$$

其中  $V^2$  是 Timelike Killing Vector 的负模长平方  $V^2 = -T^\mu T_\mu$  从而保证 Adapted Coordinate 的定义条件。而  $h_{ij}$  是  $\Sigma$  超曲面的 induced metric。

### Spherically Symmetric Metric的形式

下面我们考虑球对称的条件。由于我们知道其上必然存在一个 2-sphere 的 orbit, 也就是说我们的 metric 可以理解为一个 2-sphere 被「堆叠起来」, 对于 2-sphere 我们知道如果定义一个参数  $A = 4\pi r^2$ , 那么 2-sphere 的 metric 可以使用球坐标进行书写:

$$ds_2^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = r^2 d\Omega^2. \quad (355)$$

而剩余的一个坐标可以通过  $r$  进行描述, 因此我们得到一个满足上面三个条件的 ansatz:

### Theorem 18. Schwarzschild metric ansatz

对于一个 Stationary Static Spherical Symmetric 的 metric 必然存在一个 coordinate system 满足

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (356)$$

注意这个形式之中:

- 我们系数选择了指数形式这样可以固定正负, 并且确定我们是 lorentz signature!
- 这个 metric 本身不一定能很好的覆盖时空, 比如南北极会出现问题

## 13.4 Questions and Thoughts

**Question 13.17** 为什么我们要求 Geodesics 有一个特别的参数化才能描述 physical 的粒子运动? 有质量和无质量的捏?

几何上我们完全可以选择任意的参数化来描述 Geodesics 曲线。但是如果我们希望这个曲线切矢量描述的是粒子的四速度, 曲线本身描述的是粒子的世界线。物理告诉我们需要要求:

- 有质量粒子: 曲线参数化为 Proper Time  $\tau$ , 满足  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$ ;
- 无质量粒子: 曲线参数化为 Affine Parameter  $\lambda$ , 满足  $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , 光子物理的四动量为  $p^\mu = \hbar k^\mu, k^0$  必须是光子物理的频率!

# 14 Lecture 12: Schwarzschild Metric and Geodesics

{sec:1}

## 14.1 Schwarzschild Metric

### 14.1.1 Schwarzschild Metric Solution

#### On shell求解

我们使用上面讨论的 ansatz 带入真空的 Einstein Field Equation 进行求解:

$$R_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta) = 0, \quad \partial_r(re^{2\alpha}) = 1, \quad (357)$$

最后得到的解为:

$$e^{2\alpha} = e^{-2\beta} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad (358)$$

于是我们给出 Schwarzschild Metric:

#### Definition 33. Schwarzschild Metric

对于真空 Einstein Field Equation 存在一系列使用  $R_s$  标定的解:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (359)$$

对于这个解, 我们会发现其很像是描述这 0 点有一个质量为  $M$  的球对称物体引发的引力场【虽然这个解是一个 Vacum Solution】。我们可以通过在  $r \rightarrow \infty$  处的 Newtonian Limit 来确定  $R_s$  和  $M$  的关系:

$$R_s = 2GM. \quad (360)$$

### 14.1.2 Schwarzschild Metric 的性质

#### Schwarzschild Metric 行为

我们研究这个 metric 的行为, 比较 trivial 的会发现:

- $r \gg R_s$  的时候, metric 的行为很像是中心有一个质量为  $M$  的物体引发的 Newtonian 引力场;
- $r \rightarrow \infty$  的时候, metric 的行为很像是 flat Minkowski space-time;
- $M \rightarrow 0$  的时候, metric 的行为也很像是 flat Minkowski space-time;

#### Singularity

下面我们进一步观察会发现:

- $r = R_s$  以及  $r = 0$  的时候这个 metric 都存在分量会发生发散!

但是我们会发现不一定发散就意味着我们的时空存在奇异性。因为有的时候仅仅是因为我们选择了一个并不太好的 coordinate 导致某一些点不能覆盖到。需要有很多手段来验证一个点是不是 intrinsically singular。总之：

- $r = R_s$  的时候仅仅是一个 coordinate singularity，可以通过更换坐标系来消除这个奇异性；
- $r = 0$  的时候是真正的 intrinsic singularity；而  $r = 0$  处则是时空真正的奇异点。

### Brihoff's Theorem

实际上我们可以给出一个定理：

- Brihoff's Theorem: 任何 stationary + spherically symmetric 的 vacuum solution 都是 static 的，并且是 Schwarzschild Metric。

## 14.2 Schwarzschild Metric 上的 Geodesics

下面我们研究一个自由例子是怎么在一个 Schwarzschild 时空之中运动的。由于我们在这个常用的 coordinate system 下面考虑，所以我们不研究  $r < R_s$  的行为，因为这个 metric 会发生奇异。

### 物理粒子的Normalization条件

我们知道 Geodesic 是满足 Geodesic Equation 的解。但是这个解在任何 Affine Parameter 下面都是成立的，但这不意味着所有的 parameter 的解都有合理的物理意义。真正能被理解为自由粒子运动轨迹的参数化  $\lambda$  对应的切矢量  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  需要存在如下归一化：

- 对于有质量粒子，我们需要保证 normalization 保证： $u^\mu u_\mu = -1$  等价的，我们可以选择粒子的 proper time 作为 affine parameter；
- 对于无质量粒子，我们需要选择 normalization 保证： $u^\mu u_\mu = 0$ 。但是这还不足以确定一个粒子，我们还需要  $p^\mu = u^\mu$ 。其中  $p^\mu$  是粒子的物理动量。

对于两者的 normalization 条件我们可以统一写作：

$$-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \epsilon \quad \text{其中} \quad \kappa = \begin{cases} 1 & \text{有质量粒子} \\ 0 & \text{无质量粒子} \end{cases} \quad (361) \quad \text{eq:norm}$$

### Remark:

注意!! 这个 normalization 条件判断的是 4 vector 有没有物理意义！不论是自由粒子还是有外力作用的粒子都需要满足这个条件！

### 14.2.1 Killing Vector 求解 Geodesic

一般的我们可以列出 Geodesic Equation 进行求解。但问题是这个方程组过于复杂。于是我们回忆之前知道 Geodesic 在 Killing Vector 方向的分量必然守恒的事实，我们会发现，我们可以寻找 Killing Vector，然后利用守恒量来简化方程组。我们操作的方式为：

- 寻找粒子的守恒量，给出守恒方程

- 将守恒方程带入 Normalization 的条件，给出不同坐标对于  $\lambda$  参数的运动方程

### Killing Vector Field与守恒量

根据对称性我们可以认为粒子在某一个通过原点的平面上进行运动，我们不妨选择  $\theta = \pi/2$  的平面。

- 我们仅仅研究限制在  $\theta = \pi/2$  的平面上运动的粒子。

带入 Geodesic Equation 我么也可以证明在这个平面内进行运动是满足方程的。为了研究这样的粒子运动，我们可以找到两个 Killing Vector Field：

- 时间平移对称性对应的 Killing Vector Field:  $K^\mu = (1, 0, 0, 0), K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0\right)$
- 转动对应的 Killing Vector Field:  $R^\mu = (0, 0, 0, 1), R_\mu = \left(0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta\right)$  由于我们选择了  $\theta = \pi/2$  所以  $R_\mu = (0, 0, 0, r^2)$

这两个 Killing Vector Field 分别对应两个守恒量：

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (362) \quad \text{eq:c}$$

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (363) \quad \text{eq:c}$$

### Normalization条件

我们把 Normalization 条件 eq. (361) 带入 Schwarzschild Metric 得到：

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon. \quad (364)$$

### 带入Normalization条件给出径向方程

我们固定一个粒子拥有守恒的能量  $E$  和角动量  $L$ ，我们把上面的两个守恒量带入 Normalization 条件得到：

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \mathcal{E} \quad (365) \quad \text{eq:r}$$

其中等效势能  $V(r)$  和等效能量  $\mathcal{E}$  为：

$$V(r) = \frac{1}{2} \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}, \quad \mathcal{E} = \frac{E^2}{2}. \quad (366)$$

### 对比在一个质量为M的Newtonian引力场中的运动

我们对比这个方程和一个质量为 1，能量为  $E$  的粒子在一个质量为  $M$  的 Newtonian 引力场中的运动方程。会发现：引力势能的前两项和 Newtonian 引力场中的势能完全一样：

$$V_{\text{Newton}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}. \quad (367)$$

但是，最后一项  $-\frac{GML^2}{r^3}$  是一个完全新的项，这个项会导致一些完全不同的物理现象。首先其会作用在无质量粒子的运动上，其次也会导致有质量粒子的轨道进动现象。

- 对于  $r \rightarrow \infty$  的时候，这个项会变得非常小，所以在远距离上我们会发现和 Newtonian 引力场的行为非常类似；
- 对于  $r \rightarrow 0$  的时候，这个项会变得非常大。我们会发现势能永远在  $r = 2GM$  的时候变为 0。但是我们暂时不研究其中行为。我们知道 newton 引力除非直接冲着中心运动是永远不会落入中心的。但是由于这个项的存在，我们会发现如果粒子能量足够大跨越了势能的最大值，粒子就会落入中心。

### 势能与轨道分析

我们分析这个势能能够给出什么样子的轨道行为。下图展示了不同角动量  $L$  下的势能曲线：

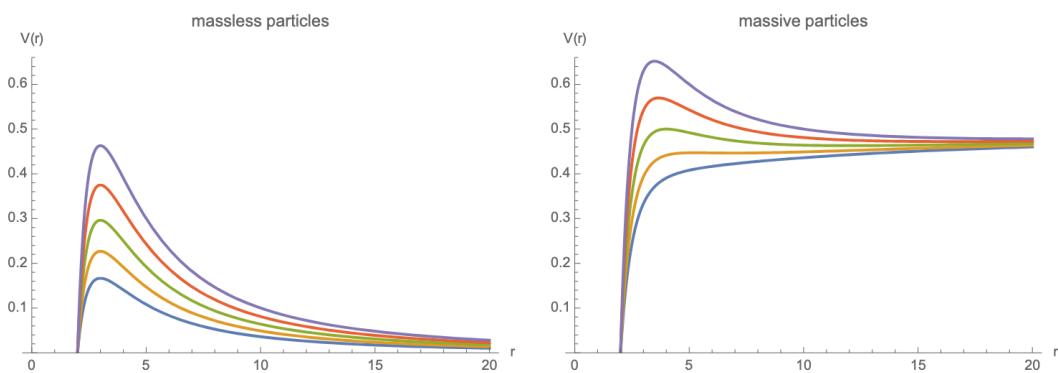


图 3: 不同角动量下的势能曲线

{fig:

我们可以知道和牛顿力学一样，存在束缚的轨道以及非束缚的轨道。我们首先分析束缚轨道。我们研究可能存在的圆形轨道，也就是势能的极值点，对于势能求导为 0：

$$\epsilon GMr_c^2 - L^2r_c + 3GML^2 = 0, \quad (368)$$

其中  $r_c$  是圆形轨道的半径。我们发现：

- 无质量粒子：**对于无质量粒子不存在 stable 的圆形轨道但是存在一个 unstable 的圆形轨道，轨道半径为  $r_c = 3GM$ ；
- 有质量粒子：**对于有质量粒子存在 stable 以及 unstable 的圆形轨道。unstable 轨道的半径为：

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM}. \quad (369)$$

对于很大的  $L$  我们会意识到两个轨道的半径分别趋近于  $r_c = \frac{L^2}{GM}$  这个是 stable 的轨道以及  $r_c = 3GM$  这个是 unstable 的轨道。我们总结如下：

- 随着角动量增大，stable 轨道的半径会越来越大；
- 当  $L < 2\sqrt{3}GM$  的时候，不存在任何圆形轨道。
- 当  $L = 2\sqrt{3}GM$  的时候，存在唯一的 unstable 圆形轨道，轨道半径为  $r_c = 6GM$ 。这个轨道是最小可能的 stable 圆形轨道。

### Remark:

注意，我们上面讨论的都是 geodesic 也就是自由粒子的轨道。如果存在非引力的外力作用在粒子上，粒子是从  $r_c = 3GM$  以内逃离的。

## 14.3 GR 验证 I: 行星近日点进动解

### 守恒量给出轨道方程

我们现在希望求解一个有质量的粒子在 Schwarzschild 时空之中运动轨道，径向长度和角度的关系  $r(\phi)$  也就是轨道方程。我们依旧从 Normalization Condition 以及守恒量出发。我们使用：

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \Rightarrow \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}. \quad (370)$$

然后乘入径向的运动方程 eq. (365) 得到：

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{L^2} r^4 - \frac{2GM}{L^2} r^3 + r^2 - 2GMr = \frac{2\mathcal{E}}{L^2} r^4. \quad (371)$$

### 轨道方程的变量替换与微扰解法

我们使用一个经典的中心力场的变量替换  $x = \frac{L^2}{GMr}$ . 带入上面运动方程并两边对  $\phi$  求导，消去常数项以及  $\frac{dx}{d\phi}$  一阶导数，得到：

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} - 1 + x = \frac{3G^2M^2}{L^2} x^2. \quad (372)$$

可以发现这个方程相当于经典牛顿力学的情况多处了右边的一个非线性项。我们使用微扰的方法来求解这个方程，设  $x = x_0 + x_1$ ，其中  $x_0$  是经典力学的解， $x_1$  是由于广义相对论修正引入的小量。

**经典力学解：**我们先求解经典力学的解  $x_0$ ，其满足方程：

$$\frac{d^2x_0}{d\phi^2} - 1 + x_0 = 0, \Rightarrow x_0 = 1 + e \cos \phi, \quad (373)$$

**广义相对论修正：**我们把经典力学解带入右边的非线性项，得到广义相对论修正的方程的一阶方程：

$$\frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 = \frac{3G^2M^2}{L^2} x_0^2. \Rightarrow x_1 = \frac{3G^2M^2}{L^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2}e^2 \right) + e\phi \sin \phi - \frac{1}{6}e^2 \cos 2\phi \right] \quad (374)$$

观察这个解会发现只有  $e\phi \sin \phi$  这一项是随着  $\phi$  增大而增大的。这个项会导致可以累积的可观测影响。所以我们现在仅仅考虑存在这个修正项带来的影响。得到 GR 的修正轨道解为：

$$x = 1 + e \cos \phi + e \frac{3G^2M^2}{L^2} \phi \sin \phi \simeq 1 + e \cos [(1 - \alpha)\phi] \quad \text{其中 } \alpha = \frac{3G^2M^2}{L^2}. \quad (375)$$

### 轨道解的进动interpretation

这个解我们会发现，对于经典力学我们一个椭圆是  $\phi$  转动  $2\pi$  得到的。但是现在加入修正会发现我们转动  $\phi$  转动  $2\pi$  之后径向并没有回到原来的位置而是还需要再转动  $2\pi\alpha$  才能回到原来的位置。还需要再转的角度为：

$$\Delta\phi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi G^2 M^2}{L^2}. \Rightarrow \Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a}. \quad (376)$$

也就是进动角。一个方便观测的计算就是把物理的  $L$  用经典轨道半长轴  $a$  以及离心率  $e$  表示出来。

# 15 Lecture 13: Schwarzschild Black Hole

{sec:1}

## 15.1 GR 验证 II: 引力红移解

这里我们考虑一个有质量的粒子在 schwarzschild metric 之中观测到光的频率变化。

### 观测到的光波频率

我们首先需要推广狭义相对论之中对于光的频率的定义，这个定义需要最终被 check 满足物理观测。我们给出下面的满足物理观测的定义：

#### Definition 34. 弯曲时空观测到的光波频率

对于一个弯曲时空中的观察者，其四速度为  $u^\mu$ 。作为物理粒子需要满足  $-1 = u^\mu u_\mu$  归一化条件，作为物理的光也需要满足  $k^\mu = p^\mu$  的条件。在此基础上，观测到的光波频率定义为：

$$\omega = -k_\mu u^\mu, \quad (377)$$

### 引力红移计算

对于一个「静止」在 schwarzschild 坐标系下的观察者，其四速度为： $u^0 = (1 - \frac{R_s}{r})^{-\frac{1}{2}}$ ，其他分量为 0。我们计算其观测到的光波频率与坐标系之中的位置的关系：

$$\omega = -k_\mu u^\mu = -k_0 u^0 = -g_{00} k^0 u^0 \quad (378)$$

$$= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} k^0 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} k^0. \quad (379)$$

同时我们知道光应该沿着 null geodesics 上运动，对于同一束光子，其 Killing Vector 方向的  $k^\mu$  分量是守恒的，考虑类时方向的 Killing Vector eq. (362) 我们有：

$$E = -K_\mu k^\mu = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) k^0 = \text{const.} \quad (380)$$

于是我们可以得到：

$$\omega = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} k^0 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} E. \quad (381)$$

### 计算不同点测量的频率比值

我们计算同一束光被两个不同点的观察者测量到的频率比值。假设两个观察者分别位于  $r_1$  和  $r_2$ ，则我们有：

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left( \frac{1 - \frac{2GM}{r_1}}{1 - \frac{2GM}{r_2}} \right)^{1/2} \quad (382)$$

对于  $r \gg 2GM$  的情况下，我们可以近似得到：

$$z \equiv \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \simeq \frac{GM}{r_1} - \frac{GM}{r_2} = \phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \quad (383)$$

## 15.2 Star Interior Spacetime and Collapse

之前我们研究的都是  $r > 2GM$  的情况，毕竟 Schwarzschild Metric 仅仅在这个区域的行为是良好的。如果我们希望穿过  $r = 2GM$  研究下去我们有两种思路：

- 1. 认为世界其实不是真空的，在  $r$  比较小的时候其实有一个球状物质分布，也就是 star interior solution。我们可以得到一个有物质分布的 metric 然后外面刚好就是 Schwarzschild Metric。正好用来描述完整的恒星结构。
- 2. 认为世界存在奇点，真的是纯真空，这样的天体也就是黑洞。但是我们不可以再用 Schwarzschild 坐标系描述这个黑洞内部的结构了，我们需要引入新的坐标系来描述这个区域的结构。

本小节我们先讨论第一种情况。并且这个讨论也可以 motivate 黑洞可能的形成过程，也就说明黑洞解可能物理上是存在的。

### 15.2.1 EFE for a Star Interior

#### EFE与Metric Ansatz

我们现在希望研究一个 stationary static spherically symmetric 的【有质量的 EFE Solution】。根据之前讨论我们的 metric ansatz 为：

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (384)$$

其中  $\alpha(r), \beta(r)$  是两个待定函数。我们需求解的 EFE 为：

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (385)$$

下面我们进行天体的假设：

- 假设天体是一个 perfect fluid 并且其质心的四速度为  $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ ，也就是仅有 time like Killing Vector 方向的分量。
- 并且作为一个物理上存在的流体，我们需要满足归一化条件  $-1 = u^\mu u_\mu$  也就是说  $u^0 = e^{-\alpha(r)}$ ,  $u_0 = -e^{\alpha(r)}$

根据上方假设我们给出其能量动量张量为：

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu} \Rightarrow T_{\mu\nu} = \text{diag}(e^{2\alpha}\rho, e^{2\beta}P, r^2P, r^2\sin^2\theta P) . \quad (386)$$

于是在上方 ansatz 的基础上我们可以列出 EFE 方程组，一共是四个方程对应着  $tt, rr, \theta\theta$  和  $\phi\phi$  分量。但由于我们会发现  $\theta\theta$  和  $\phi\phi$  分量是一样的，所以我们实际上只有三个方程：

$$\frac{1}{r^2}e^{-2\beta}(2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta}) = 8\pi G\rho, \quad (387)$$

$$\frac{1}{r^2}e^{-2\beta}(2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}) = 8\pi GP, \quad (388)$$

$$e^{-2\beta}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)\right] = 8\pi GP, \quad (389)$$

### 15.2.2 Solving EFE for Star Interior

#### EFE的求解 I: tt方程求解

我们希望这个解能够和 Schwarzschild Metric 在  $r = R$  处连续匹配上去，这样获得一个完整描述天体内部和外部的 metric。我们选择下面的 ansatz：

$$e^{2\beta(r)} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (390)$$

其中  $m(r)$  是一个待定函数。我们将这个 ansatz 带入第一个 EFE 方程中，得到：

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \Rightarrow m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (391)$$

#### Schwarzschild M与Gravitational Binding

如果我们认为天体的质量分布是有限的，比如天体只有  $r = R$  的半径。那么我们希望给出一个解，保证在  $r > R$  的时候 metric 是 Schwarzschild Metric。并且和上面的解在  $r = R$  处连续匹配。我们发现这个条件要求：

$$m(R) = M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr. \quad (392)$$

这也印证了，Schwarzschild Metric 中的  $M$  确实物理上可以 interpret 作为天体的【Newtonian】的总质量。**注意！其实并不是总质量！** 因为我们  $\rho(r)$  是定义在弯曲时空之中的能量密度，对于弯曲时空的积分要使用弯曲时空的体元  $d^3 \sqrt{g^3}$  其中  $g^3$  是三维的面上面 induce 的 metric。为此真正的弯曲时空的总质量应该是：

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 e^{\beta(r)} dr = 4\pi \int_0^R \rho(r) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1/2} r^2 dr. \quad (393)$$

对于两个能量之差我们 interpret 为 gravitational binding energy:

$$E_B = \tilde{M} - M > 0, \quad (394)$$

也就是说有一部分能量用来对抗引力让物质不形成天体而是分散在空间。

#### EFE的求解 II: rr方程求解

我们将上方的  $e^{2\beta(r)}$  的 ansatz 带入第二个 EFE 方程中，得到：

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi Gr^3 P}{r[r - 2Gm(r)]}. \quad (395)$$

对于牛顿引力极限  $r^3 P \ll m$  以及  $Gm(r) \ll r$  的情况，我们可以近似得到：

$$\frac{d\alpha}{dr} \simeq \frac{Gm(r)}{r^2} \Rightarrow \alpha(r) \simeq \int_{\infty}^r \frac{Gm(r')}{r'^2} dr' = -\phi(r), \quad (396)$$

我们认为  $\alpha(r)$  是引力势能的一个推广！严格的求解这个方程需要使用第三个 EFE 方程但是比较麻烦。我们使用下面的 trick 来简化问题。

### EFE的求解 III: 能动量张量守恒

对于 EFE, 由于根据几何的 Bianchi Identity, EM Tensor 必然是守恒的。也就是说我们的 EFE 其实隐含了下面的方程:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{d\alpha}{dr}. \quad (397)$$

上面的推导是  $r$  方向分量的结果! 我们将上方的  $\frac{d\alpha}{dr}$  的表达式带入上方的方程中, 得到著名的 Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Equation:

### TOV Equation与constant density star

#### Theorem 19. TOV Equation

对于一个静止球对称天体的质量分布, 其满足下面的 TOV 方程:

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{Gm(r) + 4\pi Gr^3 P}{r[r - 2Gm(r)]}. \quad (398)$$

我们对这个方程进行求解发现:

- 这个方程独立不能求解, 我们还需要知道构成天体的物质的一些状态方程信息, 比如  $P(\rho)$  才能够完全确定一个天体的内部时空结构。

一个最简单的例子是考虑一个 constant density star, 我们认为  $\rho(r) = \rho_0$  是一个常数, 并且在  $r = R$  处突然变为 0。我们可以得到:

$$m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3, \quad r < R. \quad (399)$$

带入 TOV 方程我们可以严格求解出  $P(r)$ :

$$P(r) = \rho_0 \frac{\left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2}}, \quad r < R. \quad (400)$$

进一步给出  $\alpha(r)$  的表达式:

$$e^{2\alpha(r)} = \left[ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2} \right]^2, \quad r < R. \quad (401)$$

这个时候我们就得到了一个完整的描述恒星内部和外部时空结构的 metric:

$$ds^2 = \begin{cases} - \left[ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2} \right]^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, & r < R \\ - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, & r > R \end{cases} \quad (402)$$

### 15.2.3 Stellar Collapse to a Black Hole

#### Stellar Collapse

对于上面给出的 constant density star 的解，我们会发现一个现象对于  $P(r = 0)$  来说当：

$$M \rightarrow \frac{4R}{9G}, \quad (403)$$

这个极限下， $P(0) \rightarrow \infty$ 。也就是说如果一个恒星的质量足够大，并且半径足够小，那么其中心的压力会变得无限大。

- 说明当恒星的质量足够大并且半径足够小的时候，引力过大会导致物质无法通过压力来对抗引力塌缩。

## 15.3 Kruskal Extension I

下面我们开始研究第二种情况，也就是时空纯粹是真空，但是 0 点存在奇点的特性。为此我们首先讨论关于 Schwarzschild Metric 的坐标奇异性问题，并进一步选择更好的坐标系来描述时空结构。

### 15.3.1 Schwarzschild Coordinate Singularity

#### Schwarzschild Metric 下类光运动

**坐标系时间描述光：**我们不妨考虑这个坐标系下光的运动，求解 null geodesics  $ds^2 = 0$  可以给出：

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}. \quad (404)$$

我们会发现当  $r \rightarrow 2GM$  的时候， $\frac{dt}{dr} \rightarrow \infty$ ，也就是说光在这个坐标系下观察在  $t \rightarrow \infty$  也无法到达  $r = 2GM$ 。

**固有时间描述光：**下面我们再考虑之前研究的 schwarzschild 的类光 geodesics，我们回顾类光的径向方程给出了：

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} + E^2 - 1. \quad (405)$$

注意我们使用  $\dot{r}$  表示对于固有时间的导数。我们假设初始条件是  $\tau = 0, r = R$  并且  $\dot{r} = 0$ ，也就是说光从  $r = R$  开始自由落体。我们可以得到  $E^2 - 1 = -\frac{2GM}{R}$ ，于是我们有：

$$d\tau = \left( \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{R} \right)^{-1/2} dr, \quad (406)$$

这个方程可以存在一个参数化的解：

$$r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta) \quad \tau = \sqrt{\frac{R^3}{8GM}}(\eta + \sin \eta). \quad (407)$$

也就是说对于  $r = 0$  只需要  $\tau = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8GM}} < \infty$  的有限固有时间就可以到达。

#### 坐标奇异性讨论

对比两个描述的结果我们会发现，类光粒子必然可以在有限的固有时间内到达  $r = 2GM$ ，但是在 Schwarzschild 坐标系下这个过程需要无限的 coordinate 时间，是因为这个 coordinate 不能够很好地描述这个区域的时空结构。我们认为 schwarzschild coordinate 描述的是无穷远处的观察者测量到的时空结构。也就是说：

- 对于无限远的观察者，会看到光永远不能达到  $r = 2GM$ ，停留在其表面；
- 但是对于自由落体的观察者，其实可以在有限的固有时间内穿过  $r = 2GM$ ，到达奇点  $r = 0$ 。

### 15.3.2 Eddington-Finkelstein Coordinates

为此我们需要选择新的坐标系来描述这个区域的时空结构。首先我们引入一个 tortoise coordinate。

#### Tortoise Coordinate

我们希望引入一个新的径向坐标  $r_*$ ，使得光锥永远是 45 度，这样的话我们的 causal structure 就很清楚，但代价就是时空本身会变形。为此考虑  $r > 2GM$  类光曲线的解：

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \Rightarrow t = \pm \left(r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)\right) + \text{const.} \quad r > 2GM \quad (408)$$

我们形式化的定义一个新的径向坐标：

#### Definition 35. Tortoise Coordinate

定义 tortoise coordinate  $r_*$  为：

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right). \quad (409)$$

注意这个坐标系下面我们只能覆盖  $r > 2GM$  的区域，并且当  $r \rightarrow 2GM$  的时候， $r^* \rightarrow -\infty$ 。在这个坐标系下我们的光的运动轨迹 exactly 是 45 度的：

$$t = \pm r^* + \text{const.} \quad (410)$$

并且 Schwarzschild Metric 变为：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2. \quad (411)$$

#### Light Cone Coordinates

在这个操作之下我们进一步引入 Light Cone Coordinates：

#### Definition 36. Light Cone Coordinates

定义 light cone coordinates 为：

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^*. \quad (412)$$

这个坐标系的两个坐标描述着光沿着光锥的两个方向传播的「轨迹长度」。这两个坐标系之中任意一个都可以很好的替代时间坐标成为新的时间坐标，从而避免光在  $r = 2GM$  处需要无穷的时间的问题，因为我们  $v$  是直接 follow 光自己运动的轨迹的！

### Ingoing Eddington-Finkelstein Coordinates:

我们选择  $v$  作为新的时间坐标，定义新的坐标系：

**Definition 37.** Ingoing Eddington-Finkelstein Coordinates

$$v = t + r^*, \quad r = r, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \phi. \quad (413)$$

在这个坐标系下 Schwarzschild Metric 变为：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2d\Omega^2. \quad (414)$$

对于这个坐标系下的类光曲线我们有：

$$\frac{dr}{dv} = \begin{cases} 0, & \text{ingoing} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, & \text{outgoing} \end{cases} \quad (415)$$

我们可以使用  $(v, r)$  图中画出 Light Cone 会发现：

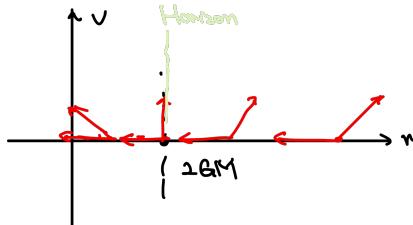


图 4: Ingoing Eddington-Finkelstein Light Cone Diagram

我们考虑  $v = \text{const}$  的曲线会发现这个坐标系光锥一直在收缩。但是在  $r = 2GM$  的面变成了一个类光的面，进入了这个区域之后光锥就完全向内收缩了。也就是说一旦进入了  $r < 2GM$  的区域，任何物质都无法逃脱这个区域。

#### Remark:

注意！这个坐标系的选择其实已经意味着我们做了一个延拓。因为之前对于  $r < 2GM$  的区域  $r^*$  是没有定义的，所以  $v = t + r^*$  这个坐标系其实并不能覆盖整个时空结构。但现在我们可以证明这个坐标系下  $r = 2GM$  是没有奇异的，我们不妨直接延拓到  $r < 2GM$  的区域。

#### Remark:

我们注意，Horizon 是一个 global 的概念，Local 的 observer 是看不见 Horizon 的存在的。

### Outgoing Eddington-Finkelstein Coordinates:

类似的我们也可以选择  $u$  作为新的时间坐标，定义新的坐标系：

**Definition 38. Outgoing Eddington-Finkelstein Coordinates**

$$u = t - r^*, \quad r = r, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \phi. \quad (416)$$

在这个坐标系下 Schwarzschild Metric 变为：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)du^2 - (dudr + drdu) + r^2d\Omega^2. \quad (417)$$

这个坐标系下的类光曲线和之前正好相反

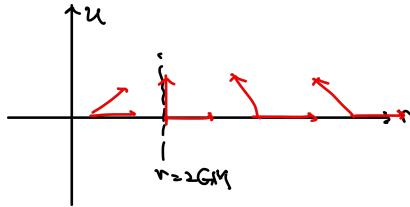


图 5: Outgoing Eddington-Finkelstein Light Cone Diagram

{fig:

也就是说光只能向外逃逸，无法进入  $r < 2GM$  的区域。这个解给出了一个 white hole 的解。

**物理说明**

我们观察这两个 coordinate system 对于 Schwarzschild Metric 的 extension：

- Ingoing Eddington-Finkelstein Coordinates 其实 extend 的是时间在接近  $r = 2GM$  处的正无穷远的行为，因为  $v = t + r^*$ ，当  $r \rightarrow 2GM$  的时候， $r^* \rightarrow -\infty$ ，所以  $v$  取值有限对应着  $t \rightarrow +\infty$ 。也就是说这个坐标系 extend 的是未来的无穷远。
- Outgoing Eddington-Finkelstein Coordinates 其实 extend 的是时间在接近  $r = 2GM$  处的  $t$  发散到负无穷远的行为，因为  $u = t - r^*$ ，当  $r \rightarrow 2GM$  的时候， $r^* \rightarrow -\infty$ ，所以  $u$  取值有限对应着  $t \rightarrow -\infty$ 。也就是说这个坐标系 extend 的是过去的无穷远。

对于物理上的黑洞研究来说，我们认为黑洞在过去就是天体，不存在 Schwarzschild Solution。的过去无穷远延拓，所以我们更关心 Ingoing Eddington-Finkelstein Coordinates 的 extension，也就是黑洞的未来无穷远延拓。

# 16 Lecture 14: Black Hole Solution and More

{sec:1}

## 16.1 Kruskal Coordinates 与最大延拓

我们之前通过 Eddington-Finkelstein 坐标系延拓了 Schwarzschild 时空的解。成功的描述了在  $r \rightarrow 2GM$  以及内部，时间坐标发散到  $+\infty$  以及  $-\infty$  的情况。但，我们其实可以更完整的延拓 Schwarzschild 时空，得到一个更大的时空结构。这个过程可以通过引入 Kruskal 坐标来实现。

### Lightcone coordinate的发散问题

我们发现可以使用  $(u, v)$  Lightcone coordinate 进行延拓。由于我们知道在  $r \rightarrow 2GM$  的时候， $(u, v)$  坐标又会存在发散，因为  $r^*$  存在发散  $r^* \rightarrow -\infty$ ，因而：

$$\frac{1}{2}(v - u) = r^* \Rightarrow u \rightarrow \infty \text{ or } v \rightarrow -\infty \text{ when } r \rightarrow 2GM \quad (418)$$

我们之前 Eddington-Finkelstein 坐标系的延拓为了保证坐标都不发散只能用  $(u, v)$  之中的一一个，否则一个有限那么另一个必然在  $r \rightarrow 2GM$  的时候发散。但是这样的结果就是我们不可以进行最大延拓，只能延拓  $t \rightarrow \infty$  或者  $t \rightarrow -\infty$  的情况。

### 消除Lightcone coordinate发散准备延拓

为了解决上面这个问题，我们引入一个新的坐标保证  $v \rightarrow -\infty$  的时候以及  $u \rightarrow \infty$  的时候都不会发散而是变为 0，即：

$$v' \equiv e^{v/4GM}, \quad u' \equiv -e^{-u/4GM} \Rightarrow v' = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{(r+t)/4GM}, \quad u' = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{(r-t)/4GM}, \quad (419)$$

在这个坐标系里我们会发现，当  $r \rightarrow 2GM$  的时候，要么  $u' \rightarrow 0$ ，要么  $v' \rightarrow 0$ ，而不会发散。我们把之前 Schwarzschild 的 coordinate cover 的部分使用  $(u', v')$  坐标系画出来：

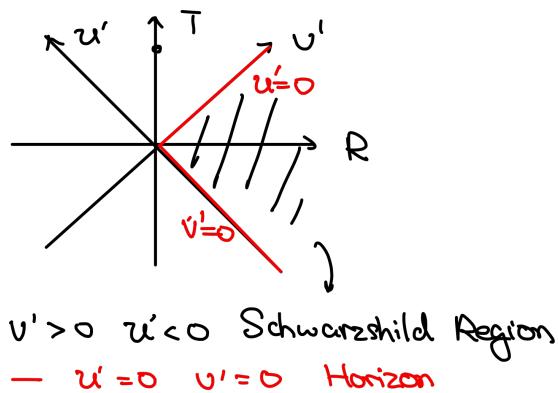


图 6: Kruskal 坐标系下的时空结构图

{fig:1}

这下我们可以清晰看到原先的 Schwarzschild coordinate 仅仅 cover 其中阴影部分。我们可以很自然的解析延拓整个  $(u', v')$  平面，从而得到更大的时空结构。btw 使用  $(v', u')$  的坐标系我们可以把 Schwarzschild metric 写成：

$$ds^2 = -\frac{16G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (dv' du' + du' dv') + r^2 d\Omega^2. \quad (420)$$

### 最大延拓的Kruskal时空结构

但一般分析的时候我们不喜欢用 Light cone coordinate, 而是一个 Lightcone 在 45 度斜向的 coordinate 方便研究 causal 结构。因此我们定义：

**Definition 39.** Kruskal Coordinate

$$T \equiv \frac{1}{2}(v' + u') = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (421)$$

$$R \equiv \frac{1}{2}(v' - u') = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (422)$$

此外  $\theta, \phi$  坐标不变。

使用这个坐标系我们可以把 Schwarzschild metric 写成：

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (423) \quad \text{[eq:krs]}$$

其中  $r$  是  $(T, R)$  的隐函数, 由于反解很困难就不解了 ((不过可以通过下面的关系隐含地定义  $r$ )):

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM}. \quad (424) \quad \text{[eq:krs]}$$

### Conformally Minkowski

我们会发现这个 metric 完全和 Minkowski metric 成比例关系, 因此我们说 Kruskal 时空是 conformally Minkowski 的。这样的关系其实可以告诉我们这个 metric 的 Lightcone 是完全：

$$T = \pm R + \text{const.}, \quad (425)$$

45 度斜向的。并且我们可以很自然的看出来 Horizon 是  $T = \pm R$ , 即 45 度斜向的线。也就是：

- 不论过去还是未来 Horizon 其实都是 Lightlike 的曲线!

**等距离  $r$  面：** 特别的我们还可以根据 eq. (424) 式子看出来, 对于  $r$  恒定的曲线为:

$$T^2 - R^2 = \text{const.}, \quad (426)$$

也就是全部双曲线。注意对于  $r < 2GM$  的情况,  $T^2 - R^2 > 0$ , 因此这些曲线在 causal structure 意义上是 spacelike 的曲线, 而对于  $r > 2GM$  的情况,  $T^2 - R^2 < 0$ , 因此这些曲线在 causal structure 意义上是 timelike 的曲线。

**等时间  $t$  面：** 我们还可以根据定义式看出来,  $t$  恒定的曲线为:

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4GM}\right) = \text{const} \quad (427)$$

也就是全部直线通过原点的直线!

### Schwarzschild-Kruskal manifold

我们把从 Schwarzschild metric 通过 Kruskal 坐标延拓得到的时空称为 Schwarzschild-Kruskal manifold。我们可以画出这个 manifold 在 Kruskal 坐标系下的 causal 结构图:

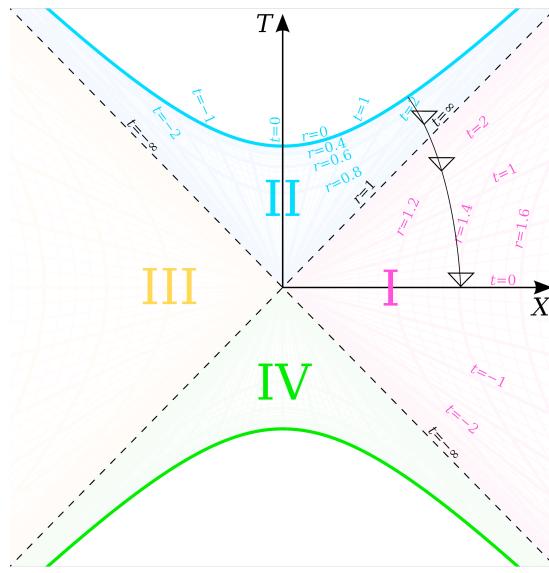


图 7: Kruskal 时空的 causal 结构图

{fig:1}

对于四个区域我们有以下解释:

- 区域 I: 这是我们原先 Schwarzschild 坐标系 cover 的区域, 包含了外部  $r > 2GM$  时空。
- 区域 II: 这是黑洞内部区域, 包含了  $r < 2GM$  的时空。在这个区域中,  $r$  变成了时间坐标, 因此所有物体不可避免的会在有限的 proper time 内坠入奇点  $r = 0$ 。
- 区域 III: 这是一个和区域 I 对称的区域, 包含了另一个外部  $r > 2GM$  时空。这个区域可以被解释为一个白洞 (white hole), 即物质只能从这里出来而不能进入这里。
- 区域 IV: 一个和我们的时空一样的对称时空捏!

## 16.2 潮汐力与 Spaghettification

我们考虑一个有一定体积的物理自由落入黑洞的情况。由于有一定体积的存在其实不同部位的运动「加速度」是不同的, 我们可以经典的 interpret 作为「惯性力」, 不同的惯性力会导致有体积的物体被撕扯开, 这个现象我们称为 spaghettification。

### 下落物体参考系

为了研究下落物体的行为, 我们选择下落物体自身的参考系进行分析。假设存在一个参考系保证下落的物体是「静止的」也就是说其四速度为:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (428)$$

并且我们保证这个参考系的 1 方向是径向下落方向, 2, 3 方向是角向的切线方向。这个参考系的构建可以通过标架进行实现, 我们不在这里赘述。参考系示意图如下:

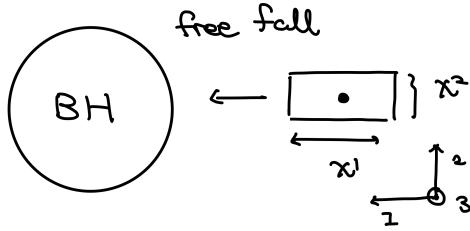


图 8: 下落参考系示意图

{fig::}

通过参考系变换我们可以得到一个特殊的结论，也就是这样的参考系下，Riemann Tensor 的分量和 Schwarzschild 坐标系下的 Riemann Tensor 的分量是一样，写出下面讨论需要的 Riemann Tensor 分量：

$$R^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}} = -\frac{2GM}{r^3}, \quad R^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}} = R^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}} = \frac{GM}{r^3}. \quad (429)$$

### Geodesic Deviation Equation

我们希望研究这个参考系下下落的有体积的物体两点的相对距离的加速度。为此我们假设：

- 下落物体的不同部位是两个相邻的自由落体者都是沿着各自的 geodesic 下落的。但是由于曲率的存在，两者之间的距离会以一定加速度进行便宜。

几何上这个通过 geodesic deviation equation 来描述，我们考虑在下落参考系之中 1, 2, 3 三个方向的 Geodesic Deviation Equation:

$$\ddot{X}^i = R^i_{00j} X^j \quad (430)$$

#### Remark:

这里我们没有标准 Geodesic Deviation 的负号是因为我们把后面两个指标交换了使用了 Riemann Tensor 的对称性质。

这个方程结合之前的 Riemann Tensor 分量我们可以得到：

$$\ddot{X}^1 = \frac{2GM}{r^3} X^1, \quad \ddot{X}^2 = -\frac{GM}{r^3} X^2, \quad \ddot{X}^3 = -\frac{GM}{r^3} X^3. \quad (431)$$

这也就描述了两个相邻自由落体者在下落参考系下的相对加速度。

### 等效潮汐力的分析

相对加速度的存在可以被 interpret 成为一种「潮汐力」，我们可以等效的动过牛顿第二定律给出力的表达式：

$$dF = ad\mu \quad (432)$$

其中  $d\mu$  是物体的微小质量元， $a$  是相对加速度。假设物体的整体质量为  $\mu$  并且均匀分布，物体是一个长方体，下落方向  $X^1$  方向长度为  $l$ ，角向方向  $X^2, X^3$  方向长度为  $w$ ，我们可以计算出物体在不同方向上受到的潮汐力：

- 径向潮汐力：对于下落方向长为  $h$  的地方相对于参考点「假设是物体中心」的加速度为  $a = (2GM/r^3)h$ ，因此受到的潮汐力为：

$$F = \int_0^{l/2} \frac{2GMh}{r^3} \frac{\mu}{lw^2} w^2 dh = \frac{1}{4} \frac{\mu GM l}{r^3}. \Rightarrow T^l = -\frac{1}{4} \frac{\mu GM l}{r^3 w^2} \quad (433)$$

这里  $T^l = -F/w^2$  是物体在下落方向上单位面积受到的拉伸力，也就是压强！

- 角向潮汐力：对于角向方向长为  $w$  的地方相对于参考点的加速度为  $a = -(GM/r^3)w$ ，因此受到的潮汐力为：

$$T_\perp = \frac{1}{8} \frac{\mu GM}{lr^3} \quad (434)$$

这里  $r$  是物体在 Schwarzschild 坐标系下的径向位置。我们可以看到物体在下落过程中会受到径向拉伸力以及角向压缩力，这就是潮汐力的表现。我们会发现分母和  $r^3$  成正比，也就是说：

- 黑洞质量越大，在  $r = r_s = 2GM$  的位置处的潮汐力越小！

## 16.3 Penrose Diagram

Penrose 发明了一种方式可以在至上很好的画出时空的结构，保证无穷远点都是在纸上有限的画出来的，并且保证 Causal Structure 是 45 度斜向的。这个图我们称为 Penrose Diagram。我们的目标是，进行一个 conformal mapping！把整个时空映射到一个有限区域的时空并且保证这个有限区域的时空的 Lightcone 结构和原先时空的 Lightcone 结构一致。

### 16.3.1 Minkowski 时空的 Penrose Diagram

#### Minkowski 时空的 Conformal Mapping

对于 Minkowski 时空我们使用下面的方法。考虑球坐标系下的 metric：

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (435)$$

在此基础上我们引入 Lightcone coordinate： $u = t - r, v = t + r$ ，metric 变为：

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega^2. \quad (436)$$

这个时候我们知道 Light cone 是无限延伸的，我们希望把无穷远点映射到有限距离。为此我们引入新的坐标：

$$u = \tan U, \quad v = \tan V \quad (437)$$

这个时候原本的 Lightcone coordinate 的无穷远点就被映射到了  $U, V = \pm\pi/2$  并且仅仅能覆盖  $U - V \geq 0$ 。我们给出这个坐标系  $(U, V, \theta, \phi)$  下的 metric：

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} d\tilde{s}^2, \quad d\tilde{s}^2 = -4dUdV + \sin^2(U-V)d\Omega^2. \quad (438)$$

我们视觉上不是很喜欢 lightcone coordinate，因此我们定义： $\tilde{t} = U + V, \tilde{r} = V - U$ ，在  $(\tilde{t}, \tilde{r}, \theta, \phi)$  坐标系下 metric 为：

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2. \quad (439)$$

### Conformally Compactified Minkowski Spacetime

我们定义一个新的时空作为 conformally map 之后的 Minkowski 时空：

#### Definition 40. Conformally Compactified Minkowski Spacetime

对于一个时空有  $(U, V, \theta, \phi)$  坐标系，并且  $U, V \in (-\pi/2, \pi/2), U - V \geq 0$ ，metric 为：

$$d\tilde{s}^2 = -4dUdV + \sin^2(U - V)d\Omega^2, \quad (440)$$

或者使用  $(\tilde{t}, \tilde{r}, \theta, \phi)$  坐标系， $\tilde{t} \in (-\pi, \pi), -(\pi - \tilde{r}) \leq \tilde{t} \leq (\pi - \tilde{r})$ ，metric 为：

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r} d\Omega^2. \quad (441)$$

我们发现这个时空的 Lightcone 和原先 Minkowski 时空的 Lightcone 方程是一致的，毕竟仅仅相差了一个 conformal factor。因此这个时空可以在纸上画出来结果是：

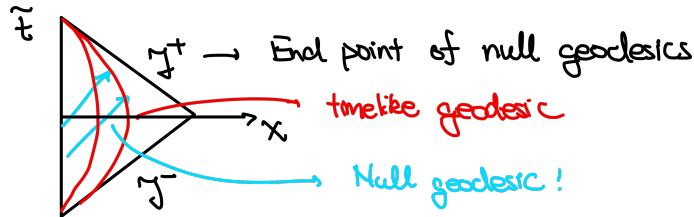


图 9: Minkowski 时空的 Penrose Diagram

{fig:}

### Penrose Diagram 的标记

我们使用  $\mathcal{I}^+$  表示未来的 null infinity， $\mathcal{I}^-$  表示过去的 null infinity， $i^+$  表示未来的 timelike infinity， $i^-$  表示过去的 timelike infinity， $i^0$  表示 spacelike infinity。

null infinity 表示光线可以到达的无穷远点，timelike infinity 表示物体可以到达的无穷远点，spacelike infinity 表示空间方向的无穷远点。

#### 16.3.2 Schwarzschild-Kruskal 时空的 Penrose Diagram

我们考虑最大延拓之后的 Schwarzschild-Kruskal 时空。我们知道其 metric 为 eq. (423)。我们依旧使用上面的操作：

- 换到 Lightcone coordinate(在这个 coordinate 下放缩可以给出 conformal map 不改变 causal 结构) → 进行一个坐标变换把无穷远点映射到有限距离 → 把 metric 进行 conformal rescaling 给出 conformally compactified 时空 → 画出 Penrose Diagram。

我们可以对于 Schwarzschild-Kruskal 时空进行类似的操作, Lightcone rescaling 的操作为:

$$\frac{u'}{\sqrt{2GM}} = \tan U, \quad \frac{v'}{\sqrt{2GM}} = \tan V, \quad (442)$$

得到其 Penrose Diagram。

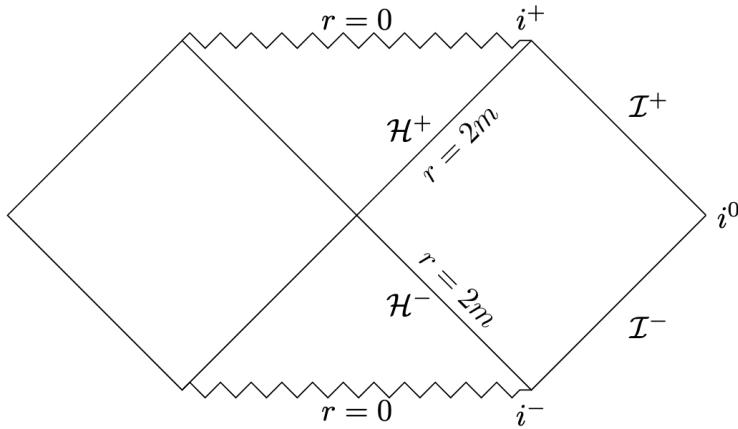


图 10: Schwarzschild-Kruskal 时空的 Penrose Diagram

{fig:p1}

## 16.4 Charged and Rotating Black Holes

到目前为止我们讨论的黑洞都是无电荷且不旋转的 Schwarzschild 黑洞。但实际上天体在坍缩过程中一般都会携带一定的电荷和角动量。因此更一般的黑洞解应该是带电荷和角动量的黑洞解。首先我们需要说明天下黑洞只有这样的。

### No-hair Theorem

对于黑洞存在一个极其强的定理, 称为 No-hair Theorem。这个定理告诉我们:

#### Theorem 20. No-hair Theorem

*Stationary, asymptotically flat black hole solutions of GR coupled to electromagnetism that are non-singular outside of the event horizon are fully characterised by the following parameters: mass, electric (and possibly magnetic) charge, and angular momentum.*

也就是说黑洞解仅仅会有我们下面讨论的带电荷和角动量的黑洞解。

### 16.4.1 Reissner-Nordström Black Hole

#### Reissner-Nordström Metric

对于一个带电荷的非旋转黑洞, 我们有 Reissner-Nordström 解, 其 metric 为:

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2}. \quad (443)$$

其相比于 Schwarzschild metric 的区别在于多了一个电荷项  $\frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2}$ , 这里  $Q$  是电荷,  $P$  是磁荷。如果我们认为世界上没有磁单极子, 那么  $P = 0$ 。我们可以发现当  $Q, P \rightarrow 0$  的时候, Reissner-Nordström metric 退化为 Schwarzschild metric。

## Horizons of Reissner-Nordström Black Hole

我们考虑这个坐标正常的范围会发现这个 metric 相比于 Schwarzschild metric 在  $r = 2GM$  的发散会在更多的位置发散。我们考虑  $\Delta = 0$  的发散情况：

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - G(Q^2 + P^2)}. \quad (444)$$

我们发现：

- $Q^2 > GM^2$  的时候，也就是黑洞的电荷极其大， $\Delta = 0$  没有实数解，这个时候黑洞没有 Horizon 而是一个裸奇点 (naked singularity)。我们认为这种情况不物理存在。
- $Q^2 = GM^2$  的时候， $\Delta = 0$  有一个重根，这个时候黑洞称为 extremal black hole，只有一个 Horizon，位于  $r = GM$ 。
- $Q^2 < GM^2$  的时候， $\Delta = 0$  有两个不同实数根，这个时候黑洞有两个 Horizon，分别位于  $r = r_+$  以及  $r = r_-$ 。

## 最大延拓的Reissner-Nordström时空结构

对于这个时空我们也可以进行最大延拓给出 Penrose Diagram。但是我们会发现时空结构由于多个 Horizon 的存在变得更加复杂。我们给出 Reissner-Nordström 时空的 Penrose Diagram：

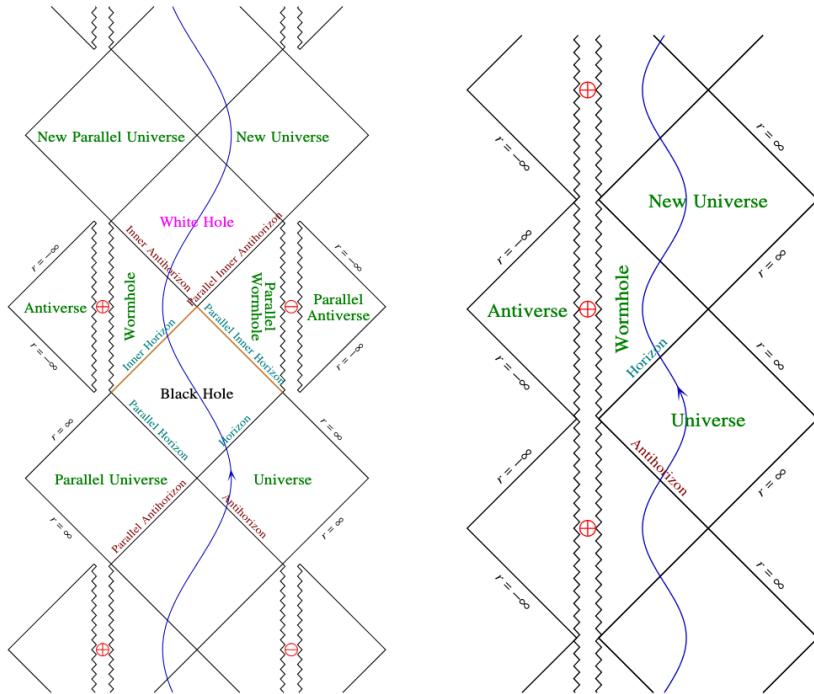


图 11: Reissner-Nordström 时空的 Penrose Diagram, 左边是正常的电荷小的时候, 右边是 extremal black hole 情况

{fig:11}

会发现我们或许可以通过多个 Horizon 进入到另一个时空区域。

## 16.4.2 Kerr Black Hole

### Kerr Metric

对于一个不带电荷但是有角动量的黑洞，我们有 Kerr 解，其 metric 为：

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMar \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \quad (445)$$

$$+ \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2, \quad (446)$$

$$\text{where } \Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2, \quad \rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (447)$$

这里  $a = J/M$  是黑洞的角动量  $J$  与质量  $M$  的比值。如果我们认为黑洞不旋转，那么  $a \rightarrow 0$ ，Kerr metric 退化为 Schwarzschild metric。显然这个黑洞是 non-static 的！如果我们考虑  $2GMr \rightarrow 2GMr - G(Q^2 + P^2)$ ，那么 Kerr metric 变为 Kerr-Newman metric，描述了带电荷且旋转的黑洞。

### Horizons of Kerr Black Hole

考虑这个坐标系下 metric 的发散情况，我们考虑  $\Delta = 0$  的情况：

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - a^2}. \quad (448)$$

所以同样的这个黑洞也存在两个 Horizon 的情况。与 Reissner-Nordström 黑洞类似。

### ergosphere

我们发现这个黑洞已经不再是 static 的了！也就是说我们虽然存在 time like Killing Vector，对于上面的坐标系是  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ，但是我们找不到一个空间  $\Sigma$  使得 Killing Vector 在  $\Sigma$  上垂直。这个现象导致了一个有趣的区域，称为 ergosphere。我们考虑 Killing Vector 的模：

$$K^\mu K_\mu = g_{tt} \quad (449)$$

我们会发现对于这个黑洞存在一个球面使得  $g_{tt} = 0$  也就是说存在一个面我们的 time like Killing Vector 变成了 null vector。我们计算这个面的位置：

$$(r - GM)^2 = G^2 M^2 - a^2 \cos^2 \theta, \quad (450)$$

也就是满足这个方程的  $r(\theta)$  面，我们会发现其在 horizon 之外。我们定义：

- Outer Horizon 和 Killing vector 变为 null 的面之间的区域称为 ergosphere。

这个区域内任何物体都不可能「静止」！而是会被拖拽着旋转，这个现象称为 frame-dragging effect。