Quantum Field Theory 1

EPFL 2025-2026 学年第一学期课程笔记

X. D. H.

2026 年 1 月 2 日

摘要

这个是 EPFL 的 QFT1 课程笔记，笔记主要内容包含基础准备知识，李群李代数在场论应用，自由标量场量子化，自由旋量场量子化，Poincare 代数在场论之中表示的应用。这几个部分内容。

目录

1 Lecture 1: Basic Introduction and Units **5**

1.1 Motivation for QFT 5

1.2 Unit System 5

1.3 Questions and Thoughts 6

2 Lecture 2: Classical Mechanics and Field Theory **8**

2.1 经典力学基础 8

2.2 Questions and Thoughts 12

3 Lecture 3: Fundamentals on Symmetries and Group I **15**

3.1 对称性与群 15

3.2 Questions and Thoughts 17

4 Lecture 4: Lie Algebra **20**

4.1 李代数理论基础 20

4.2 Questions and Thoughts 23

5 Lecture 5: Lie Group and Poincare Group **24**

5.1 Lie Group Representations 24

5.1.1 一般李代数，李群表示的构造 24

5.1.2 Adjoint Representation 25

5.2 Lorentz and Poincare Group 27

5.3 Questions and thoughts 28

6 Lecture 6: Poincare Lie Alebra and Representation on Fields **30**
6.1 Lie Algebra of SO(3,1) . . . 30
6.2 Representation of so(3,1) Algebra . . . 32
6.3 标量场构型空间作为表示空间 . . . 34
6.3.1 标量场构型空间作为一般 Diifeomorphism 群的表示空间 . . . 35
6.3.2 标量场构型空间作为 Poincare 群的表示空间 . . . 36
6.3.3 Adjoint Representation of Poincare Lie Algebra . . . 37
6.4 一般场构型空间作为 Poincare 群的表示空间 . . . 39
6.5 Questions and Thoughts . . . 40

7 Lecture 7: Symmetry and Conservation Law **41**
7.1 Symmetry 变换的定义 . . . 41
7.1.1 Symmetry Transformation for Lagrangian Formalism . . . 41
7.1.2 无限小坐标变换以及场构型空间变分 . . . 43
7.2 Noether's Theorem . . . 44
7.2.1 Noether's Theorem 的陈述与证明 . . . 44
7.2.2 Noether Current 的计算方法 . . . 46
7.3 Noether Current 变分计算技巧 . . . 47
7.4 Symmetry and Conservation of Poincare . . . 48
7.4.1 时空平移对称性 . . . 48
7.4.2 Lorentz 对称性 . . . 49
7.5 补充：对称性和守恒流的另一种定义 . . . 51
7.5.1 Symmetry and Conserved Current . . . 51
7.5.2 Energy-Momentum Tensor . . . 54
7.6 补充：Noether Charge 在 Hamiltonian 力学的意义 . . . 55
7.7 Questions and thoughts . . . 57

8 Sup 4: Generalized Noether's theorem **59**

9 Lecture 8: Quantization of Scalar Field **60**
9.1 自由标量场量子化 . . . 60
9.1.1 经典自由标量场 motivation . . . 60
9.1.2 自由标量场量子化 . . . 61
9.1.3 自由标量场 Spectrum 分析 . . . 63
9.1.4 自由标量场的连续极限下 Spectrum 分析 . . . 65
9.2 Questions and thoughts . . . 67

10 Lecture 9-10: Spectrum and Lorentz Covariant of Quantum Scalar Field **68**
10.1 自由标量场 Hilbert Space . . . 68
10.1.1 Fock Space 构造 Hilbert Space . . . 68
10.1.2 Lorentz 不变形式的 Measure 和 Delta 函数 . . . 69

10.1.3 动量与位置表象 . . . 71
10.2 Heisenberg Picture 构造全时空的场算符 . . . 71
10.3 角动量和 Boost 守恒量 . . . 72
10.4 量子理论的 Poincare Covariance . . . 73
10.4.1 时空平移变换下量子态的变换 . . . 74
10.4.2 Lorentz 变换下量子态的变换 . . . 75
10.5 补充讨论：Lorentz Group 的表示总结 . . . 76
10.6 Complex Scalar Field . . . 77
10.7 Question and Thoughts . . . 77

11 Lecture 10: Classical Spinor Field **78**
11.1 Weyl Spinor Field . . . 78
11.2 Parity and Dirac Field . . . 79
11.2.1 Parity 变换的表示 . . . 80
11.2.2 Dirac Spinor Field . . . 82
11.3 Complex Conjugate and Majorana Spinor . . . 83
11.3.1 2D Levi-Civita 符号 . . . 83
11.3.2 Complex Conjugate Representation . . . 84
11.3.3 Majorana Spinor Field . . . 85
11.4 Questions and Thoughts . . . 86

12 Lecture 11: Classical Spinor Fields and Lagrangians **87**
12.1 Spinor 的指标记号 . . . 87
12.2 (1/2,1/2) 表示 . . . 89
12.2.1 表示空间基本构造 . . . 89
12.2.2 Defining Representation 等价于 (1/2,1/2) 表示 . . . 90
12.3 Covariant 运动方程 . . . 92
12.3.1 Weyl Spinor 的运动方程 . . . 92
12.3.2 Majorana Spinor 的运动方程 . . . 94
12.3.3 Dirac Spinor 的运动方程 . . . 95
12.4 Lagrangian Formulation of Spinor Fields . . . 96
12.4.1 Weyl Spinor 的 Lagrangian . . . 97
12.4.2 Dirac Spinor 的 Lagrangian . . . 97
12.4.3 Majorana Spinor 的 Lagrangian . . . 98
12.5 补充讨论: Internal Symmetry 以及场论构造 . . . 98
12.6 补充：Gamma Matrix in Weyl Representation . . . 99
12.7 Questions and Thoughts . . . 100

13 Lecture 12: On Shell Mode Expansion of Dirac Spinor Field **101**
13.1 Classical Dirac Spinor Field 的 On Shell Solution . . . 101
13.1.1 On shell Mode Expansion . . . 101

13.1.2 展开旋量 mode $u(p)$ . . . 102
13.1.3 展开旋量 mode $v(p)$ . . . 104
13.1.4 On Shell Mode Expansion 总结 . . . 104
13.2 Spinor Basis 性质 . . . 105
13.3 Chirality, Helicity 性质 . . . 105
13.3.1 Chirality . . . 105
13.3.2 Helicity . . . 106
13.3.3 Massless Limit 下 Chirality 和 Helicity 的关系 . . . 107

14 Lecture 13: Quantization of Dirac Field 109
14.1 Quantization 的思路与准备 . . . 109
14.1.1 Quantization 的思路 . . . 109
14.1.2 Quantization 准备工作 . . . 109
14.2 Quantization of Dirac Field . . . 111
14.2.1 Fermionic Quantization . . . 111
14.2.2 Hamiltonian 的对角化 . . . 112
14.3 Dirac Field 的 Hilbert Space . . . 112
14.4 Heisenberg Picture 构造全时空的场算符 . . . 114
14.5 U(1) 对称性与电荷守恒 . . . 114
14.6 角动量和 Boost 守恒荷 . . . 115
14.7 Questions and Thoughts . . . 115

15 Lecture 14: Representation of Poincare Algebra 116
15.1 Poincare 群在 Hilbert Space 上一般表示 . . . 116
15.1.1 Poincare 群的表示一般研究 . . . 116
15.1.2 Poincare 代数不可约表示 Casimir 算符分类 . . . 117
15.2 固定 m^2, w^2 不可约表示 . . . 119
15.2.1 不可约表示基本讨论 . . . 119
15.2.2 Wigner Little Group 方法构建不可约表示 . . . 120
15.3 有质量粒子表示 . . . 122

1 Lecture 1: Basic Introduction and Units

{sec:Lect

1.1 Motivation for QFT

为什么QFT是唯一能够reconcile GR和QM的理论?

1. 我们可以把 Schrodinger 方程写作一个平移不变的 Clein-Gordon 方程。但是问题是这个方程有负能解。我们可以手动消去负能量:

$$(i\hbar\partial_t - \sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2})\psi(t,x) = 0\ . \tag{1}$$

{eq:noneg

但是会有问题，相对论告诉我们光锥内外是不会相互影响的。但是我们可以计算上面方程的传播子:

$$A(x \to y, t) = e^{-\frac{mc}{\hbar}\sqrt{(x-y)^2 - c^2t^2}} f(x-y, t) \tag{2}$$

{eq:prope

所以粒子有一定概率可以超过光速，这是违背相对论的。

2. 根据不确定性原理，我们的粒子数应该是不守恒的。因为我们的距离很小的时候很可能能量不确定性很大从而产生新的粒子对！所以我们或许不能用粒子来描述粒子!!

1.2 Unit System

自然单位制的使用

也就是我们发现我们如果选择某两个常数是 1 的话，我们可以用能量进行几乎所有物理量的计算:

$$c = 1 = \hbar \tag{3}$$

但是注意，遇到电磁学相关的物理量，我们还是需要选择一个单位制来确定电荷量以及相关量的单位的!!

但是这些单位制我个人觉得原则应该是：**真正做数值计算的时候把我们省略的认为是 1 的所有物理量补充回来！再做计算!!** 推导的时候使用自然单位制进行推导就好了!!

Unit	QFT system to CGS
Length	$GeV^{-1} = 1.97 \times 10^{-14}\ cm$
Time	$GeV^{-1} = 6.58 \times 10^{-25}\ s$
Mass	$GeV = 1.78 \times 10^{-24}\ g$
Action	$GeV^0 \quad (\hbar = 1)$
Velocity	$GeV^0 \quad (c = 1)$

图 1: 自然单位制以及 GSC 换算

{fig:unit

1.3 Questions and Thoughts

Question 1.0 流形上面的函数是怎么定义协变的方法的?

再次复习，流形上的标量和张量场【也就是协变的场】协变关系是自己自由定义的【取决于场是按照哪个表示协变的】:

Question 1.1 自然单位制下，我们到底是什么意思? 特别是电磁学相关的物理量我们怎么理解呢?

我们自然单位制下面，我们一般把所有物理量使用能量的单位进行写作。这样只是一个记号，真实用来描述世界的时候，我们还是需要通过合理的补充 $\hbar, c$，把这个数变成我们一般的单位的。

Eg 当我们说粒子的质量是 1GeV 的时候，我们实际上是说这个粒子的静止能量是 1GeV。也就是 $E = mc^2 = 1GeV$。或者说粒子的质量是 $m = 1GeV/c^2$。

Important: 自然单位制的正确用法

对于自然单位制的使用，就是我们一切使用同样的能量单位进行描述。
最后换算成为真实单位的时候需要把 $\hbar, c$ 都补充回来，并且使用我们想要的单位制进行书写。
然后再进行任何的数值计算。

还有一种就是直接在这个单位制之下进行计算，算出来什么都是 eV 最后再将计算结果换算成为我们想要的单位就好了!!

当然另一个简单的方法就是查一下别人这么干之后的结果表。套用就好啦!!

Tip: 单位制的意义

我们需要理解，单位制把一些有量纲的物理量变成 1 是什么意思。我们不是在 rescale 这些量，而是在 rescale 这些量之外的所有量!!
对于电磁学相关的物理，我们是 rescale 的电荷量捏!!

下面我们讨论对于电磁学相关的量，对于电磁学相关的物理量我们一般有两个选择:

1. 一个是选择 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ 的单位制!
2. 另一个是选择 $\epsilon_0 = 1/4\pi$ 的 Gauss 单位制!

对于这两种单位制本质上都是对于 e 进行一个 rescale 捏，并且我们可以计算出来这两种单位制下面电子的电荷量计算方法是考虑 $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$。

我们上面两种理解方式是:

1. 一是对于 gaussian 单位制的方程我们用 e 实际上表示的是 $e/\sqrt{4\pi\epsilon}$ 我们需要补充回来一个 $1/\sqrt{4\pi\epsilon}$，用普通单位进行计算;

2. 另一种就是直接用 gaussian 单位制进行计算，但是这样的结果是，我们自动计算的就是已经有一个隐藏的 $1/\sqrt{4\pi\epsilon}$ 的结果捏（就像是我们使用质量自然单位制进行计算，我们其实计算的是 mc^2！特别是，我们用 gaussian 单位制计算得到一个力学量，这个力学量的单位对于什么单位制都是一样的，不许要进行单位换算。

我个人十分推荐，补回来这些被设置成 1 的物理量「对于电磁学也就是补回来电荷出现的时候的」，然后使用普通单位进行计算。这样不容易出错捏!!

□

Question 1.2　高斯单位制下面，电场强度是 x eV^2 我们怎么计算数值?

我也不知道，我建议不要这么做！但是理论上换算必然是可行的，但是我建议不要用正常单位制之外所有单位制进行数值运算!! □

2 Lecture 2: Classical Mechanics and Field Theory

{sec:Lect

2.1 经典力学基础

Action Principle 动力学描述

对于有限自由度的经典力学我们使用 Least action principle 来描述系统的动力学。

Theorem 1. *Least Action Principle*

假设已经知道 $q(t_i)=q_i$，$q(t_f)=t_f$【*Derichlet Boundary Condition*】粒子运动轨迹满足：

$$S\left[q\right]\equiv\int_{t_i}^{t_f}L\left(q,\dot{q}\right)dt,\quad \delta S[q]=0 \tag{4}$$

Remark: 注意几个需要用的变分学技巧

1. 变分的基本定义——functional 的线性主要部分：

$$\delta S[q]=\delta^{(1)}S[q]=S[q+\delta q]-S[q]|_{\text{linear part in }\delta q} \tag{5}$$

2. 变分计算的性质：
   - 「我们认为自由度和自由度的导数独立并分别变分」$\frac{\partial L}{\partial q_a}\delta q_a+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\delta\dot{q}_a$
   - 「变分和时间导数交换」$\delta\dot{q}=\dfrac{d}{dt}\delta q$ 这样才能进行分部积分
3. 我们最后给出 lagrangian 是因为 bulk 的 δq 是可以取任意无限小的函数形式变换。所以我们才能够需要 Euler-Lagrangian Equation $=0$；boundary 的 δq 是 0 所以不需要考虑。「这两点都是因为合理的边界条件导致的」

对于变分原理的一些特性有两个特别重要的讨论：

1. 为什么仅仅对一个 dt 进行积分为什么 Lagrangian 不会依赖于很多的时间点的函数?【需要保证 locality，不同时间点不会互相作用】
2. 为什么 Lagrangian 不会依赖于二阶导数?【需要保证 EoM 是二阶微分方程】同时，如果含有高阶导数某些情况可以写成更多变量的一阶导数形式。

Action 从更基础的物理「quantum mechanics」的视角出发其实是更 fundamental 的物理量；而非 Lagrangian

Hamiltonian 动力学描述

对于 Hamiltonian 我们需要定义一个时间方向「这是一个非协变的理论框架」。定义共轭动量和 Hamiltonian 并且动力学可以通过下面方程描述：

$$\dot{q}_a=\frac{\partial H}{\partial p_a},\quad \dot{p}_a=-\frac{\partial H}{\partial q_a} \tag{6}$$

Hailtonian的代数结构

Hamiltonian 动力学除了通常的使用动力学方程的视角进行描述也可以直接使用一套代数公理进行描述:

- 所有客观测量是相空间的函数 $A(p,q)$
- 客观测量空间「相空间的函数空间 f : phase space $\to \mathbb{R}$」存在李代数结构:

$$\{A,B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial p_a}\frac{\partial B}{\partial q_a} - \frac{\partial A}{\partial q_a}\frac{\partial B}{\partial p_a} \ . \tag{7}$$

- 李代数保证了所有客观测量都可以 generate 一个无穷小变换"canonical transformation":

$$q_a' \equiv q_a + \epsilon \{A, q_a\}_a' \equiv p_a + \epsilon \{A, p_a\} \tag{8}$$

  其中一些 canonical transformation 被称为是 Symmetry 如果 $A(p,q)$ 是一个守恒量。

- 所有客观测量的时间演化由 Hamiltonian 这个客观测量的 canonical transformation 生成:

$$\dot{q}_a = \{H, q_a\}, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}, \quad \dot{A} = \{H, A\} \tag{9}$$

这样的力学代数结构给出了一种代数量子化的手段"canonical quantization"

Action Principle of Field Theory

对于场论我们可以理解为有流形结构的无限自由度系统。我们认为场的 lagrangian 是一个等时面上面的函数:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}\left(\phi(\mathbf{x},t), \dot{\phi}(\mathbf{x},t), \vec{\nabla}\phi(\mathbf{x},t)\right) . \tag{10}$$

并且 Action 可以理解为下面的形式:

$$S[\phi] = \int dt L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^4x \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right) \tag{11}$$

Remark: 对于上下指标我们有这样的规定 $x^\mu = (t, x^i)$, $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_i)$

下面给出 least action principle:

Theorem 2. *Least Action Principle of Field Theory*

对于一个四维的时空流形之中的一个区域 Ω, 如果边界上面存在 *Dirichlet Boundary Condition*: $\delta\phi_a|_{\partial\Omega}$ 那么场在这个时空区域内的动力学构型满足:

$$\delta S_\Omega [\phi] = 0 \tag{12}$$

同样的利用【边界上 $\delta\phi_a = 0$】以及【*Bulk* 里面的 $\delta\phi_a$ 随便】我们得到等价的 *Euler-Lagrange Equation of Field Theory*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} = 0 \tag{13}$$

Remark: 注意，我们这里的边界条件不仅仅要求的是时间边界条件还需要每一个时间的空间边界条件！边界条件需要包裹整个讨论动力学的时空区域。

常用数学概念：functional derivative

对于场的变分以及之后和 action 相关的计算，我们常常使用 functional derivative 的数学操作进行计算，这个概念给出了对于 functional 合理的导数的意义，也就是当我们的场构型变一点点的时候我们的 functional 的变化行为是什么样子的。我们定义：

$$\frac{\delta S_\Omega}{\delta \phi(x)} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \tag{14}$$

更一般的数学上我们定义一个积分 functional 是：

$$F[\phi] = \int d^n x f(\phi, \partial_i \phi, x) \tag{15}$$

其 Functional derivative 定义为：

$$\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \equiv \frac{\partial f}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial f}{\partial(\partial_i \phi)} \tag{16}$$

一个特殊的 functional derivative 的例子是：

$$\frac{\delta \phi(y)}{\delta \phi(x)} = \delta^{(4)}(x-y) \tag{17}$$

所以我们之后写这个不是强行使用一个看似合理的符号，而是使用 functional derivative 严格的数学概念进行书写的!!

Important: 区分 functional derivative 和一般函数导数

我们通常会使用两个记号需要区分：

- functional derivative: $\dfrac{\delta F}{\delta \phi(x)}$ 这说的就是一个积分泛函对于其变量函数的 functional derivative 定义为：

$$\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \equiv \frac{\partial f}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial f}{\partial(\partial_i \phi)} \tag{18}$$

- 对于某一个函数的导数比如：$\dfrac{\partial G(f(x))}{\partial f(x)}$ 是把一个函数 $f(x)$ 当成自变量进行的导数

这两者的意义完全不一样需要进行区分捏!!!

Hamiltonian Formalism基本概念

需要着重强调对于 Hamiltonian Formalism 的定义!! 我们需要下满几个步骤进行理论构建：

1. 确定一个”时间方向”划定等时面！【注意，我们 lagrangian 的讨论是几乎把时间和空间等价讨论的，但是 Hamiltonian 我们第一步是打破这种等价性】
2. 定义共轭动量场：$\pi(x) \equiv \dfrac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$
   - 注意，我们定义 canonical momentum field 为 lagrangian 对于动力学场的 functional derivative
   - 但是由于 lagrangian 并不包含 $\nabla_i\dot{\phi}_a$ 这样的项我们的共轭动量场才正好是 Lagrangian density 对于 $\dot{\phi}$ 的偏导数
3. 定义 Hamiltonian 是一个生活在等时面上面的函数「并不体现协变」：

$$H(\pi,\phi) = \int d^3\mathbf{x}\left(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi,\pi)\right) \tag{19}$$

   并且辅助性定义 Hamiltonian density：

$$\mathcal{H} \equiv \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi,\pi) \tag{20}$$

场的Hamiltonian力学的代数形式

我们在上面的概念基础上使用代数形式描述场的动力学。

1. 客观测量推广到 functional：

$$A[\pi,\phi] = \int d^3\mathbf{x}\, a(\pi,\phi) \qquad B[\pi,\phi] = \int d^3\mathbf{x}\, b(\pi,\phi) \tag{21}$$

2. 通过 functional derivative 定义李代数结构：

$$\{A,B\} \equiv \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{\delta A}{\delta\pi}\frac{\delta B}{\delta\phi} - \frac{\delta A}{\delta\phi}\frac{\delta B}{\delta\pi}\right) \tag{22}$$

   - 李代数结构对应着 canonical 对易关系：

$$\begin{aligned}\{\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\ \{\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)\} &= 0 = \{\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\}\end{aligned} \tag{23}$$

3. 动力学量的时间演化由 Hamiltonian 生成：

$$\dot{\phi}(x) = \{H,\phi(x)\}, \quad \dot{\pi}(x) = \{H,\pi(x)\}, \quad \dot{A} = \{H,A\} \tag{24}$$

- 这个正好对于场和共轭动量场给出了 functional derivative 版本的 Hamilton's Equation:

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= \{H,\pi\} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} = \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \\ \dot{\phi} &= \{H,\phi\} = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \end{aligned} \tag{25}$$

> **Remark:** 注意所有对于积分 functional 的推广都是把导数推广到了 functional derivative 然后再积分「还需要积分是因为 functional derivative 是定义在 local 量的导数的，需要积分才能得到一个等时面上的量」。可见这是一个合理的推广方案!!

2.2 Questions and Thoughts

Question 2.3 为什么对于多粒子的 Lagrangian 没有二阶导数，如果有二阶导数是什么，functional derivative 是什么?

显然 Lagrangian 作为任意的函数我们是十分随意的，我们可以 Generally 写作:

$$L(q(t), q(t'), ..., \dot{q}, \ddot{q}, \cdots, q^{(n)}, t) \tag{26}$$ {eq:gener

但是我们会发现我们因为各种物理的原因收敛到了一般的样子 $L(q,\dot{(q)})$ 因为下面的原因:

1. 如果我们 Action 存在 $S=\int dtdt'L(q(t),g(t'))$ 我们意味着两个不同时间的自由度会存在相互作用。这显然是不符合物理的时间维度的 locality 的。
2. 如果我们存在高阶导数: 一个自然的结果是 Lagrange Equation 是高阶微分方程。而牛顿定律告诉我们力学规律是二阶微分方程。
    - 另一个解释是，如果我们存在高阶导数。那么其实可以把这个变分变成更多的变量的只有一阶导数的变分问题。
3. 对于不显含时间，这意味着能量不守恒，存在其他变量影响捏。

□

Question 2.4 momentum 一定可以反解出来自由度的导数吗?

共轭动量能够反解出来速度是有条件的，只有当下面的 Hessian 矩阵非奇异【也就是可逆】的时候才可以:

$$\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j \tag{27}$$

如果是奇异的话意味着下面的东西:

1. 我们使用了过多的变量来描述系统。使得我们的共轭动量需要满足一些约束。只有在这个约束面上面才是 physical 的。
2. 这样的 Hamiltonian 力学系统需要使用 Dirac 的约束力学来处理。

3. 这种系统一般是有 gauge symmetry 的。

□

Question 2.5　Poisson bracket 构成的线性映射的李代数，为什么是无穷维度的？怎么研究这个性质？

我们注意 Poisson Bracket 是赋予在所有 $A:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的线性映射构成的线性空间的。我们研究这个线性空间的性质，会发现独立的线性映射的个数是无穷多个。

一个直观的基是所有的 delta 函数的组合。显然所有的 delta 函数是有无穷多的。

□

Question 2.6　经典力学我们认为相空间是自由度？但是，量子化之后 p 和 q 其实都是算符？量子的自由度到底是什么？

这个问题其实是说：量子力学系统的自由度到底是什么？

量子的自由度最基础的理解其实是一组 canonical operator!！就像是经典力学里我们的自由度是 (p,q) 这一组 canonical 变量一样。量子力学我们认为自由度是这样的一组【注意一定是一组】$[p_i,x_j]=i\hbar\delta_{ij}$ 的算符。

注意：我们虽然一般只用某一个算符的本征矢量描述自由度，但是实际上决定的是一组canonical 算符的代数关系；经典的【自由度】的概念量子化后变成了【客观测量的代数关系】

这样的算符代数关系连同 Identity operator 构成了一个李代数，我们称之为 Heisenberg Algebra。然后我们的 Hilbert Space 其实是这个李代数的不等价不可约表示空间构成的。

Important: 量子化的步骤

我们上面的思路分成下面几个步骤：

1. 找到一组 canonical 的自由度 (p_i,q_j)
2. 量子化成为 canonical 的算符 $[\hat{p}_i,\hat{q}_j]=i\hbar\delta_{ij}$
3. 研究这个李代数的表示论，构建 Hilbert Space

我们永远不是先有 Hilbert Space，而是先确定我们的自由度，再通过表示论给出 Hilbert Space。

对于量子场论来说，我们也是一样的。我们先找到一组 canonical 的自由度 $[a_p^\dagger,a_p]$ 然后我们作用在一个假设的 Vaccum State 上面，构建出 Hilbert Space。

但是一般的量子场论体系下，我们会发现这个代数空间不仅仅是 Heisenberg 代数的表示空间，也可能构成其他代数（Virasoro Algebra, Kac-Moody Algebra）。

Tip: 代数关系和 Hilbert 空间

我们意识到，我们永远是现有代数关系再有 Hilbert 空间的捏!！从最基础的量子力学来都是这样的。

□

Question 2.7 为什么场论的可以写作 Lagrangian 积分的形式？而不是混沌的一个等时流形上面的函数？

注意空间的 locality!!! 和时间一样。这也是为什么我们要把 x variable 进行区分出来。因为我们需要特殊强调这个变量需要时 local 的!!

□

Question 2.8 我们场论使用的量子力学的动量和位置 3+1 维度的归一化是什么?? Weinberg 之中讨论的协变归一化是什么意思??

非相对论一般归一化

对于三维的量子力学来说，我们需要保证【完备性条件】和【归一化条件】形式不变也就是：

$$\int dx|x\rangle\langle x| = 1, \quad \int dp|p\rangle\langle p| = 1. \tag{28}$$

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'). \tag{29}$$

当然动量我们只能 delta 函数归一化，显然需要从一维变成三维！这样的一个结论就是动量本征态在空间表象写作；

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \tag{30}$$

Weinberg讨论的协变归一化

我们对于量子态的归一化是有自由度的，因为我们只需要保证在一定的测度下完备；并且应该正交的态互相正交就好！所以我们不妨定义下面的归一化条件：

下面解释为什么要选择这个归一化条件：

Question 2.9 Method of Stationary Phase 是什么捏?

讲一下这种近似方法

3 Lecture 3: Fundamentals on Symmetries and Group I

{sec:Lect

3.1 对称性与群

群和物理的坐标变换

给出了群的基本概念，值得注意的是我们会发现，所有某一个集合到自己的双射都构成了一个群结构。

我们不妨考虑一个群，也就是一个流形上面不同的坐标系之间的映射：

$$q_i \mapsto q_i' = f_i(\{q_i\}) \tag{31}$$

所以我们知道**物理上的坐标系变换其实就是一个群的作用**

下文之中我们只考虑那些变换前后的空间是一样的，比如用 $\mathbb{R}^2$ 描述和用 $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+$ 就是不一样的，我们不考虑这样的捏！

对称性的定义

但是我们并不在乎全部的坐标系变换。我们只在乎少量特殊的坐标变换。

Definition 1. *Symmetry*

{def:Symm

我们把 Symmetry 定义为一个【坐标变换】保证了 EoM 的基本形式不变的变换。数学上就是 EoM 的形式替换成新的坐标的 coordinate 之后依然成立！

Remark: 这里坐标变换需要特别提醒，有的时候 Symmetry 仅仅是对于场的形式作用。所以其实我们更严格的应该是使用 jet bundle 的语言来描述这个 Symmetry 变换。

Remark: 几个重要的说明：

1. 存在一个 Symmetry 也就意味着我们不可能通过实验区分 Symmetry 变换前后的物理系统。
2. Symmetry 是一个坐标变换不是变分，这就意味着对于 Symmetry Transformation。但是这个坐标变换在无限小的情况下对于场来说可以 induce 出一个场的构型空间的变分。

Lie Group

Definition 2. *Lie Group*

我们这里定义 Lie Group 需要满足下面的性质：

- *N dim analytical manifold，以及其所有元素都可以通过一个 N 维的坐标系进行描述*
- *群的乘法和逆元在坐标系下是 analytical function 也就是；*

$$\begin{aligned} g(\alpha)g(\beta) &= g(p(\alpha,\beta)), \\ g^{-1}(\alpha) &= g(r(\alpha)), \end{aligned} \tag{32}$$

我们会发现所有的连续群都是 Lie Group。我们对于这个 manifold 显然可以选择一个坐标系进行描述，但是坐标系我们有个 convention 是：

$$g(\vec{0}) = e \tag{33}$$

Lie Group Realization

我们希望考虑一个群元素作用在某一个空间上面的结果【这其实就是群在这个空间上面的表示】我们严格化的写出就是：

> **Definition 3.** *Lie Group Representation*
>
> 首先定义 *GL(V)* 是一个【线性空间 *V*】上，所有【可逆线性映射】构成的空间。我们定义一个 *Lie Group Representation* 是一个映射：
>
> $$\begin{aligned} D : G \to & GL(V) \\ g \mapsto & D(g) \end{aligned} \tag{34}$$
>
> 并且这个映射需要满足：
>
> 1. $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2), \quad \forall\ g_1, g_2 \in G$
> 2. $D(e) = I$

表示的分类

我们可以把 representation 分成主要两类：

- Reducible Representation：存在一个非平凡子空间 $W \subset V$ 使得 $D(g)W \subset W$，也就是这个子空间在群作用下不变。
- Irreducible Representation：不存在这样的子空间。

并且对于 reducible reprensentation 我们或许可以进行 complete reduction 也就是把 V 分解成一系列 invariant subspace 的直和

> **Remark:** 注意！并不是所有的 representation 都可以 complete reduction!! 有的时候我们的矩阵仅仅是上三角矩阵，这样子可以有一个不变子空间但是不能 complete reduction!!

考虑 reprensentation 的其他性质也可以有分类：

- Equivalent Representation：存在一个可逆线性映射 $S : V \to V'$ 使得 $D'(g) = SD(g)S^{-1}$【对于 $V = V'$ 的情况下也就是线性映射可以通过相似变换进行变换，这个在矩阵的意义上就是换了一个基】
- Unitary Representation：存在一个内积 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 使得对于任意的 $g \in G$ 我们有 $D(g)^\dagger D(g) = I$【注意，对于 Unitary 的定义我们务必先定义一个内积结构才能讨论，因为 dagger 的定义就是 $\langle Ux, y\rangle = \langle x, U^\dagger y\rangle$.】

- Faithful Representation：D 是单射，也就是 $g_1 \neq g_2 \Longrightarrow D(g_1) \neq D(g_2)$.

Shur's Lemma

对于 irreducible representation 我们有下面三个很强的结论。考虑下面的 set up：

- D_1, D_2 是某一个群 G 的两个 irreducible representation，分别作用在 V_1, V_2 上面。
- 如果存在一个线性映射 $A : V_1 \to V_2$ 使得对于任意的 $g \in G$ 我们有：

$$AD_1(g) = D_2(g)A \tag{35}$$

也就是 A 把 D_1 和 D_2 联系起来。

1. **Shur's Lemma 1**：A 只有两个选择是零映射或者是一个 invertible mapping
    - 对于第二种情况，V_1 和 V_2 空间有一个相同的维度，并且 D_1 和 D_2 是 equivalent representation
2. **Shur's lemma 2**: 如果 $V_1 = V_2 = V$ 并且 $D_1 = D_2 = D$ 那么 A 需要满足：$A = \lambda Id$。
3. **Shur's lemma 3**：如果上面的 D 并非一个 irrrep 而是一堆 irrrep 的直和，那么 A 可以是一个 block diagonal matrix，每一个 block 对应一个 irrrep，并且每一个 block 是 $\lambda_i Id$。【注意，每一个 block 拥有一个 λ_i】

3.2 Questions and Thoughts

Question 3.10　对称性定义到底是什么？

注意！我们把对称性比较简单的定义为：**所有保证 EoM 不变的 reparametration 变换！**。

> **Remark:** 对称性是坐标变换不是变分。但是对于无穷小对称性变换，我们可以把它写作一个场构型的无穷小变分！！

但是在我研究 diffeo 的时候有一些困扰。因为 diffeo 似乎是 local 的变换。但是不完全是 local 的，似乎 Killing Vector 给出的是 global 的？这个又是为什么呢？ □

Question 3.11　存在 diffeomorphism 的时候，我们怎么理解和研究对称性？

我终于终于理解了【25.9.25】。首先，我们说对称性是坐标变换而不是变分。但是，坐标变换不意味着是 local 的：我们考虑各种不一样的 diffeo 坐标变换：

- 如果这个坐标变换是 Killing Vector Generate 的，那么我们会发现这些坐标变换是 global 的 symmetry。
- 如果这个坐标变换不是 Killing Vector Generate 的，那么我们会发现这些坐标变换是 local 的 symmetry。

我们只是挑出来了一些坐标变换，并且说这些是 global 的!!

□

Question 3.12 场论之中我们怎么确定一个连续变换是一个 global symmetry 还是 gauge symmetry?

请看我们的附录!! 部分!!! □

Question 3.13 怎么理解 Killing Vector 生成的变换是 Global Symmetry Transformation 的? 或者说怎么理解 Killing Vector 给出了一个 Global Symmetry?

差一嘴：Killing Vector 在主动变换和被动变换下面是怎么理解的：

1. 主动变换下也就是 metric 不变的变换 $\mathscr{L}_V g = 0$
2. 被动变换我们理解为不同坐标分量，也就是 $\bar{g}_{ab}(y) = g_{\mu\nu}(x)$，对于 Killing Vector 生成的坐标变换 $x \to y$。也就是函数形式完全没有变换捏，只是直接把自变量替换一下!

已经在上上面的问题之中给出了回答捏!! □

Question 3.14 同样的，我们能不能从场论的角度理解 Diffeo 变换是一个 Gauge Symmetry? 直接从引力的 action 出发研究对称性?

首先我们知道 Diffeo 是引力理论的 gauge symmetry。我们可以说明，引力方程 EoM 给出的 $G_{\mu\nu} = 0$ 这个对于所有的 diffeo 都是不变的。所以我们知道这是一个类似于 gauge symmetry 的东西。同时，很好理解其实 Diffeo 必然是 local 的，因为我们可以随便变换无限小量!!

□

Question 3.15 能不能证明量子场论的 Gauge 变换都类似于 diffeo 这种换一个坐标描述的意思?? 而不是一个正经的物理变换，只不过是长得很像动力学场的变换而已?

似乎某种意义下面应该是可以的，但是可能和 Diffeo 完全不是一个概念。可以去看看 Gauge Field 的书对于那些已经研究明白的 gauge theory 有什么性质。看看这些 Gauge Field 有没有几何的描述【似乎是有的!!】。但是这个讨论有一点点大了!

感觉是一个特别有意思的问题捏! ! 甚至可以问是不是所有的 Gauge Symmetry 都有一个几何 interpretation! 不仅仅是我们一般讨论的 Yang-Mills

Question 3.16 Diffeo 会改变时空的结构「曲率」吗?

不会!! Diffeo 只是一个坐标变换而已! 它不会改变任何物理量! 所以曲率不变!! Diffeo 对应一个李导数的作用，曲率在这个操作下是不会变换的。

如果我们想变分这个 $S = \int \sqrt{g} d^4 x R$ 我们做的是对于 $g_{\mu\nu}$ 进行一个 perturbation，而不是做一个 diffeo! 而是强行进行一个加!!【variation】不被任何 diffeo induce 的 variation! □

Question 3.17　为什么对于 $t \to t' = \lambda t$ 的变换我们有自由度的协变是 $q \to q'(t') = \lambda^p q(t)$

这是来自于，我们强行希望这是一个对称性！也就是 EoM 不变，为此只有特殊的 $q(t)$ 协变才能做到这个。我们请从这个思路理解！ $\square$

Question 3.18　技术上，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是怎么退化到三阶的??

存在这么一个好用的关系捏：

$$\epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{36}$$

4 Lecture 4: Lie Algebra

{sec:Lect

4.1 李代数理论基础

Lie Algebra基本定义

我们定义 Lie Algebra:

Definition 4. *Lie Algebra*

李代数是一个 n 维度的向量空间并且在向量空间之外还需要有一个额外的运算结构：$[*,*]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 满足：

- 反对称性：$[X,Y]=-[Y,X]$
- 双线性：$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$ 并且 $[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]$
- *Jacobi* 恒等式：$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

其中 $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ 并且 $a,b\in\mathbb{R}$。

李代数可以是很抽象的。比如所有相空间上的函数 $f:T^*Q\to\mathbb{R}$ 构成一个李代数，李括号是 Poisson 括号。

Structural Constant

我们发现区分李代数的唯一方法就是其 Lie Bracket 的结构。我们试图具体的描述这个结构。为了能够进行数值计算，我们选择一个基 $\{X_i\}$，并且对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 我们有：

$$X=x^iX_i\quad Y=y^jX_j\ , \tag{37}$$

其中 $X^i,Y^j\in\mathbb{R}$。我们发现，定义了基的 Lie Bracket 就可以定义任意的 Lie Bracket，于是我们定义：

$$[X_i,X_j]=if_{ij}^kX_k\ , \tag{38}$$

其中 ${f_{ij}}^k$ 被我们称为结构常数。我们对于线性空间经常使用分量的语言来描述所以我们也可以写作：

$$[A,B]=[\alpha^iX_i,\beta^jX_j]=i\alpha^i\beta^jf_{ij}^kX_k. \tag{39}$$

结构常数的要求

并不是所有的数字都能够作为结构常数的。Lie Bracket 的性质告诉我们结构常数需要满足下面的约束条件：

- 前两个指标的反对称性：$f_{ij}^k=-f_{ji}^k$
- Jacobi 恒等式结果：$f_{ij}^\ell f_{\ell k}^m+f_{jk}^\ell f_{\ell i}^m+f_{ki}^\ell f_{\ell j}^m=0$

Lie Algebra和矩阵

我们发现很多矩阵构成的线性空间存在矩阵乘法定义的自然 Lie Bracket 所以自然构成了李代数。下面有一个更强的结论：

> **Theorem 3.** *Ado's Theorem*
>
> *每一个有限维的李代数都同构于某个 $gl(n)$ 的子代数。也就是有限维李代数都可以 faithfully 表示为矩阵的形式。*

Lie Group的topological 分类

李群存在两个身份：1 群 2 analytical manifold。我们现在研究作为 manifold 的李群的 topological 分类。我们可以有下面的定义：

- **Connected** 流形中任意两点都可以通过一条连续的路径连接起来。
- **Simply Connected** 流形中任意一条闭合路径都可以连续的收缩到一个点。【注意：T_2 就是一个 connected but not simple connected 的流形】

比如：O(3) 群是所有 3×3 的实正交矩阵构成的群，其中有两个不连通的部分。分别是 $det = 1, det = -1$ 的部分。

- **Connectd Component** 我们选包含 e 的联通部分

所以 O(3) 的 connected component 是 SO(3) 群。SO(3) 群是所有 3×3 的实正交矩阵并且行列式为 1 的矩阵构成的群。SO(3) 群是一个 simple connected 的流形。

Lie Theorem 的说明

我们前面 Lie Algebra 和 Lie Group 都是分开进行定义的。现在我们讨论这两个东西的关系。给出下面三个定理，即 Lie Theorem:

> **Theorem 4.** *Lie Theorem*
>
> 1. *Lie Group G 的切空间 T_eG 在 Lie 括号的运算下构成了一个 Lie Algebra。并且每一点的切空间都和 T_eG 同构。*
> 2. *给定一个 Lie Algebra 都可以找到一个 Lie Group 使得这个 Lie Group 的切空间和这个 Lie Algebra 同构。*
> 3. *给定一个 Lie Algebra $\mathfrak{g}$，存在唯一的 connected and simply connected Lie Group $\tilde{G}$ 使得 $T_e\tilde{G} \cong \mathfrak{g}$。*

Lie Theorem 1的说明

对于切空间的数学理解比较复杂。所以我们使用一个扯淡但是有一定正确性的理解。

- 这里我们认为群在某一点的切空间和群在这一点附近的局部结构是一样的。
- 群在这一点附近的 coordinate system 可以理解为切空间的向量。
- 群在这一点附近的所有 group action 都对应给出了切空间之中 vector 的运算法则【我们希望证明这个给出了李代数结构】。

我们研究 e 附近的结构从而研究 T_e「因为这个简单」并且我们有 $a=0$ 在 e 处，所以我们可以进行 taylor expension。这个时候我们 $T_eG=\mathbb{R}^n$ 于是我们考虑三种 group action induce 这个切空间的运算结构：

- 群的乘法:$g(\alpha)g(\beta)=g(p(\alpha,\beta)) \quad (\alpha,\beta)\mapsto p(\alpha,\beta)$
- 群的逆元：$g^{-1}(\alpha)=g(r(\alpha)) \quad \alpha\mapsto r(\alpha)$
- 一个特殊的 commutation 运算：$g(\alpha)^{-1}g(\beta)^{-1}g(\alpha)g(\beta)=g(c(\alpha,\beta))$

对于前两个我们会发现这个乘法结构 induce 一个 $\mathbb{R}^n$ 之中的加法，乘“-1”运算。但是对于第三个运算我们进行 $c(\alpha,\beta)$ 的展开会发现：

$$c^i(\alpha,\beta)=(T^i_{jk}-T^i_{kj})\alpha^j\beta^k+O(\alpha^2\beta,\alpha\beta^2)\equiv 2T^i_{jk}\alpha^j\beta^k+O(\alpha^2\beta,\alpha\beta^2)\ . \tag{40}$$

对于合理的选择坐标系我们可以让 T^i_{jk} 是完全反对称的，所以有第二项。这个 group action induce 出来我们对于代数空间有一个这样的映射 $[*,*]:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足：

$$[\alpha,\beta]^i=2T^i_{jk}\alpha^j\beta^k\ , \tag{41}$$

> **Remark:** 注意这个是李代数基下面的系数关系，看出和李代数的关系可以参考下面的式子：
>
> $$[A,B]=[\alpha^iX_i,\beta^jX_j]=i\alpha^i\beta^jf^k_{ij}X_k. \tag{42}$$

我们之后可以证明如果 T^i_{jk} 是一个 structure constant 那么这个 induce 出来的运算满足李代数的所有性质。我们不予以详细证明了反正就是成立。并且可以通 identity 附近进行一个操作推广到全局每一点切空间。

Lie Theorem 2的说明

给定一个 Lie Algebra 以及一组基。我们可以先选择一个矩阵表示，我们可以通过 exponential map 给出一个李群表示（的局部）：

$$D(\alpha)=e^{i\alpha^i\tilde{X}_i}\equiv\sum_k\frac{(i\alpha\cdot\tilde{X})^k}{k!} \tag{43}$$

但是 exponential map 并不是一个 surjective map 所以我们只能得到一个局部的李群表示。于是我们需要问这个表示 cover 李群的多少，下面给出定理。

Theorem 5. 如果 *Lie Group* 是一个 *compact and connected Lie Algebra*，那么 *exponential map* 是 *cover* 整个李群的!!

如果仅仅是 *connected* 但是 *non-compact* 那么 *exponential map* 可以进行一个叠加然后 *cover* 整个李群:

$$\prod_{n}^{N} e^{i\alpha_i^{(n)} X_i} \tag{44}$$

Lie Theorem 3的说明

对于这个定理我们不做证明，只是说和其 related 的一个重要的结论:

Theorem 6. 一个 *lie Algebra* 可以存在很多个不同的 *lie group* 使得其切空间在群乘法关系下构成这个 *Lie Algebra*。但是:

每一个 *Lie Algebra* 都存在唯一的 *connected and simply connected Lie Group* 使得其切空间在群乘法关系下构成这个 *Lie Algebra*。并且这个 *Lie Group* 是这个代数的 *Universal Cover*。

4.2 Questions and Thoughts

表示这一章很基础，没啥需要问的

5 Lecture 5: Lie Group and Poincare Group

{sec:}

5.1 Lie Group Representations

5.1.1 一般李代数，李群表示的构造

从代数表示构建群表示

为了之后的代数和群的讨论做铺垫，我们发现，如果给定一个代数的矩阵表示之后，我们可以通过一个操作得到整个群的表示。

Definition 5. *Exponential Map*

给定一个 Lie 代数的矩阵表示 T^i，我们可以通过如下的操作得到 Lie 群的矩阵表示：

$$D[g(\alpha)] = \exp\left(i\alpha^i T^i\right). \tag{45}$$

其中 α_i 是一些实参数，Lie Parameters。

群表示找到代数

同样的一波观察，根据第一个 Lie Theorem 的操作，我们发现我们对于任何李群表示我们在 e 附近进行展开有：

$$D(\alpha) = 1 + i\alpha^i X_i \tag{46}$$

其中 X_i 是某些矩阵构成了这个李群的一个李代数的表示。【这个结论可以在 Lie Theorem 1-2 之中看出来】我们也可以通过群的乘法法则得到这些矩阵的对易关系，从而得到这个李代数的结构常数。这个显然是一个李代数的表示，并且正好就是群对应的

任意群表示都可以写成Exponential Map的形式

所以，对于任意的表示，我们可以把它写成某个李代数的表示 Exponential Map 的形式。上面的代数表示和群表示的关系告诉我们了一个操作，分为两个步骤：

1. 先把某个群表示在单位元附近展开，得到代数表示 $\tilde{X}_i$。
2. 通过代数表示 exp map 重构群表示。

Theorem 7. *Convert to Exp Map*

对于任意 Lie 群的矩阵表示 $D[g(\alpha)]$，都可以通过某种方式写成 Exponential Map 的形式。下面具体构造就是：

$$D(\alpha) \equiv \lim_{n\to\infty} \tilde{D}(\alpha/n)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{\alpha_i}{n}\tilde{X}_i + \mathcal{O}(1/n^2)\right)^n \equiv e^{i\alpha_i \tilde{X}_i} \tag{47}$$

一般表示空间李群的表示

Important: 一般表示空间李群的表示

我们在研究物理的时候一般希望能够构建一般表示空间上李群的表示。下面给出一个 general 的方法：

1. 从李群的 defining representation 出发，通过在 e 附近的展开，给出 defining representation 对应的李代数表示 X_i。

$$D(\alpha) = 1 + i\alpha^i X_i \tag{48}$$

2. 通过李代数的表示 X_i，给出李代数的结构。并且使用李代数的表示理论给出李代数不同维度，在各种表示空间上的表示。

3. 通过 exp map 的方法，给出这些表示空间上李群的表示：

$$D[g(\alpha)] = e^{i\alpha^i \tilde{X}_i} \tag{49}$$

5.1.2 Adjoint Representation

Adjoint Representation

李代数的空间也是一个线性空间。我们发现这个空间可以很自然的作为一个表示空间构造一个群或者代数的表示，称为 Adjoint Representation。

给定一个 Lie 群 G，它的李代数是 $\mathfrak{g}$。我们考虑李代数空间之中的一组基础 X_i，任意李代数的元素都可以写成 $X = \alpha^i X_i$ 的形式。现在我们考虑群作用在李代数空间之中的效果：

$$D(\alpha) = e^{i\alpha^i X_i} \tag{50}$$

$$v \mapsto e^{i\alpha^j X_j} v e^{-i\alpha^j X_j} \tag{51}$$

发现这个操作给出了一个新的李代数元素。这个映射相当于在李代数的线性空间内给出了一个李群的表示。

Definition 6. *Adjoint Representation*

给定一个 Lie 群 G，它的李代数是 $\mathfrak{g}$。我们考虑李代数空间之中的一组基础 X_i，任意李代数的元素都可以写成 $v = v^i X_i$ 的形式。定义 Adjoint Representation 为：

$$D_{Adj}(g(\alpha)) : v \mapsto D(g(\alpha))\ v\ D(g(\alpha))^{-1} \tag{52}$$

其中 $D(g(\alpha)) = e^{i\alpha^i X_i}$ 是群的表示。

李代数的Adjoint Representation

我们考虑一个 $\alpha_i \to 0$ 的情况下的群元素作用在李代数空间的元素 v 上面的效果。我们有:

$$\begin{aligned}(1+i\alpha^j X_j)v(1-i\alpha^j X_j) &= v + i\alpha^j [X_j, v] \\ &= v + i\alpha^j v^k [X_j, X_k] \\ &= v^i X_i + i\alpha^j v^k i f^l_{jk} X_l \\ &= (v^i - \alpha^j v^k f^i_{jk}) X_i \\ &\equiv v'^i X_i\end{aligned} \tag{53}$$

于是我们发现:

$$v^i \mapsto v^i - \alpha^j v^k f^i_{jk} = (\delta^i_k - \alpha^j f^i_{jk}) v^k \tag{54}$$

使用之前李群的表示给出李代数的表示的方法，我们知道李代数的 adjoint 表示是:

$$(\tilde{X}_j)^i_k = i f^i_{jk}, \tag{55}$$

其中 f^i_{jk} 是李代数的结构常数。回顾定义是:

$$[X_i, X_j] = i f^k_{ij} X_k, \tag{56}$$

Adjoint Representation的exp形式

我们之前知道任意表示我们可以写成 exp map 的形式。那么 Adjoint Representation 自然也可以写成 exp map 的形式，我们可以自然的 exp:

$$v^i \mapsto D_{Adj}(g(\alpha))^i_j v^j \equiv (e^{i\alpha^k \tilde{X}_k})^i_j v^j. \tag{57}$$

Adjoint Representation作用在李代数的基

下面考虑 Adjoint Representation 作用在李代数的基 X_i 上面的效果:

$$g(\alpha) : X_i \mapsto e^{i\alpha^j X_j} X_i e^{-i\alpha^j X_j} = X_i D_{Adj}(g(\alpha))^i_j \tag{58}$$

对于无限小变换，左边的基本定义下是:

$$X_i \mapsto X_i + i\alpha^j [X_j, X_i] + \dots. \tag{59}$$

然后根据之前讨论的 exp map 形式的 Adjoint Representation，我们发现:

$$[X_j, X_i] = i f^k_{ji} X_k \tag{60}$$

也就是李代数的结构常数的定义，我们发现这些都是 consistent 的。

李群作用在李代数上

我们在物理上经常使用到李群作用在自己的李代数上面的情况。Adjoint Representation 就给了一个自然的数学语言来描述这个过程。我们发现李群作用在李代数上面可以描述为:

$$v \mapsto D(g(\alpha))v\ D(g(\alpha))^{-1} \tag{61}$$

然后考虑无限小的情况下，对于李代数的基 X_i，我们有:

$$X_i \mapsto X_i + i\alpha^j[X_j, X_i] + ... \tag{62}$$

我们认为 commutator 可以描述李代数作用在其自己上面:

$$[X_j, X_i] = if_{ji}^k X_k \tag{63}$$

5.2 Lorentz and Poincare Group

Poincare Group的定义

Poincare Group 是描述 Lorentz 转动 + 平移的群。定义为

Definition 7. *Poincare Group(ISO(3,1))*

Poincare Group 定义为满足下面的关系的流形上的坐标变换构成的群:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \eta^{\mu\nu}\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta^{\rho\sigma} \tag{64}$$

这个群的参数一共有 10 个，自由度。4 个来自平移部分 a^μ，6 个来自 Lorentz 转动部分 $\Lambda^\mu{}_\nu$。

Lorentz Group的分类

Lorentz Group 是 Poincare Group 的一个子群，我们记作 O(3,1)，包含了所有不包含平移的坐标变换。我们下面发现 Lorantz Group 存在分区。

- **行列式分类**: $\det(\Lambda) = \pm 1$

根据 Lorentz Group 的定义，我们发现行列式只能是 1 或者-1。于是我们可以把 Lorentz Group 分成两个部分，分别是 $\det(\Lambda) = 1$ 的部分和 $\det(\Lambda) = -1$ 的部分。

1. $\det(\Lambda) = 1$ 的部分称为 **Proper Lorentz Group**，记为 $SO(3,1)$。
2. $\det(\Lambda) = -1$ 的部分称为 **Improper element**。这部分不含 identity，所以并不构成一个子群。

- **时间方向分类**: $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ 或者 $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

我们根据 $\eta_{00} = 1$ 以及定义可以推导:

$$1 = \left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \sum_i \left(\Lambda^i{}_0\right)^2 \Rightarrow \left(\Lambda^0{}_0\right)^2 \geq 1 \tag{65}$$

于是我们可以根据 $\Lambda^0{}_0$ 的符号把 Lorentz Group 再分成两个部分:

1. $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ 的部分称为 **orthochronous Lorentz Group**，记为 $SO(3,1)^{\uparrow}$。

2. $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ 的部分称为 **non-orthochronous 部分**。

概括上面的分类我们有：

	$\Lambda^0{}_0$	$\det(\Lambda)$	Group?
$\mathscr{L}_+^{\uparrow} \equiv SO^{\uparrow}(1,3)$	$\geq +1$	$+1$	✓
$\mathscr{L}_+^{\downarrow}$	≤ -1	$+1$	
$\mathscr{L}_-^{\uparrow}$	≥ 1	-1	
$\mathscr{L}_-^{\downarrow}$	≤ -1	-1	

图 2: Lorentz Group 的分类 {fig:lore

我们发现洛伦兹群有三个子群，其中最小的是：

$$\mathscr{L}_+^{\uparrow} \equiv SO^{\uparrow}(1,3) \tag{66}$$

也就是 proper orthochronous Lorentz group。同时包含这个群的还有两个子群：

$$\mathscr{L}_+^{\uparrow} \oplus \mathscr{L}_+^{\downarrow} = SO(1,3) \text{ and } \mathscr{L}_+^{\uparrow} \oplus \mathscr{L}_-^{\uparrow} = O^{\uparrow}(1,3) \tag{67}$$

Parity and Time Reversal

Lorentz 群存在这么多个分支的一个原因是因为其中存在离散的变换。而分成四个部分就是因为两个离散变换以及其组合。

$$P : (t, \vec{x}) \mapsto (t, -\vec{x}) \in \mathscr{L}_-^{\uparrow} \tag{68}$$

$$T : (t, \vec{x}) \mapsto (-t, \vec{x}) \in \mathscr{L}_-^{\downarrow} \tag{69}$$

$$PT : (t, \vec{x}) \mapsto (-t, -\vec{x}) \in \mathscr{L}_+^{\downarrow} \tag{70}$$

我们最后会发现，其实 Lorantz Group 就是 Proper orthochronous Lorentz Group 和这两个离散变换生成的群。

$$O(1,3) = \mathscr{L}_+^{\uparrow} \circ \{1, P, T, PT\} \tag{71}$$

5.3 Questions and thoughts

Question 5.19 作业之中 O(N) 和 SO(N) 的维度是一样的，是怎么导致群不一样的?

给出这两个群的定义：

$$O(N) \equiv \left\{R \in GL(N,\mathbb{R}) | RR^T = R^T R = 1_N\right\}. \tag{72}$$

$$SO(N) \equiv \left\{R \in GL(N,\mathbb{R}) | RR^T = R^T R = 1_N, \det(R) = 1\right\}. \tag{73}$$

我们使用物理学家常用的 exp map 的形式：

$$D[g(\alpha)] = 1 + i\alpha^i T^i + O(\alpha^2). \tag{74}$$

然后会发现这两个群对应的代数都是 so(N)，也就是 $N \times N$ 维度的全反对称纯虚数矩阵空间。但是两者的群结构是不一样的。这是因为 O(N) 包含了 SO(N) 的一个离散部分，也就是行列式为-1 的那些矩阵。这个离散部分无法通过连续变化从单位元到达，因此 O(N) 和 SO(N) 是不同的群，尽管它们的李代数是相同的。

离散部分的生成元是这样的三个很像是 Parity 变换的矩阵：

$$P_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{75}$$

由于他们是离散的，不可以被切空间和 exp map 这样的构造包含进去，所以 O(N) 和 SO(N) 的群结构是不一样的，但是李代数是可以一样的。 $\square$

6 Lecture 6: Poincare Lie Alebra and Representation on Fields

{sec:Lect

下面我们希望知道 Lorentz 群在一般的表示空间上的表示。所以按照之前说的步骤，我们应该：

1. 选择一个好用的 representation，比如：defining representation(也就是 Minkowski 时空的坐标系空间) 进行研究
2. 定义一个好用的 Exp Map 进而通过考虑无限小变换给出 Lorentz 代数的结构；
3. 研究这个李代数的数学结构，给出这个李代数在一般表示空间上的表示；
4. 通过 exp map 的方法，给出 Lorentz 群在这些表示空间

本章我们完成前三步！

6.1 Lie Algebra of SO(3,1)

单位元附近展开为Lie Algebra表示

我们在 Lorentz Group 的 defining representation 表示空间考虑李代数的表示。Poincare 群的 defining representation 是作用在 Minkowski 空间上的坐标变换：

$$g(\Lambda)x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \tag{76}$$

对于这个表示，我们可以把 Λ 在无限小处展开：

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{77}$$

{eq:infin

根据 Lorentz 群的定义，我们知道这个系数 $\omega_{\mu\nu}$ 不是独立的，而是满足：

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{78}$$

下面我们希望按照标准的定义给出这个表示空间下 Lie Algebra 的表示，我们对比定义：

$$D(\alpha) = 1 + i\alpha^{i}X_i \tag{79}$$

发现 eq. (77) 可以表达成为下面的标准形式：

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} \tag{80}$$

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu}_{\nu} \equiv i(\eta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} - \eta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\nu}) \tag{81}$$

为了清晰我们列出下面的表格：

表 1: SO(3,1) 代数以及一般代数

性质	一般李群表示	SO(3,1)
Lie Parameter	α^i	$\omega_{\rho\sigma}$
单位元展开	$D(\alpha) = I + i\alpha^i X_i$	$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu$
生成元	X_i	$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv i(\eta^{\rho\mu}\delta^\sigma_\nu - \eta^{\sigma\mu}\delta^\rho_\nu)$

> **Remark:** 对于 SO(3,1) 的群，我们使用的单位元附近展开形式以及对应的 exp map 其实和标准的不太一样，这是因为我们希望获得常用的对易关系方便求解代数的表示。我们只需要在 exp map 回群表示的时候注意一下即可！

总之，我们知道了 so(3,1) 李代数在 defining representation 下的表示是：

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \equiv i(\eta^{\rho\mu}\delta^\sigma_\nu - \eta^{\sigma\mu}\delta^\rho_\nu) \tag{82}$$

so(3,1)代数结构

下面我们计算这个代数的结构，也就是对易关系：

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = i\left(\eta^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho}\right) \tag{83}$$

使用exp map构建回群表示

所以我们如果找到了上面这个代数的表示，我们根据我们之前单位元附近的展开，就可以通过下面的 exp map 构建出 Poincare 群在这个表示空间上的表示。

对于 defining representation 为例是下面这样子的。但是这个 exp map 的形式是通用的：

$$\Lambda(\omega) \equiv \exp -\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta} \tag{84}$$

例子：Boost坐标变换的群元素

我们希望计算一个例子，也就是 x 方向的 Boost 变换。

x 方向的 Boost 变换是一种坐标变换，翻译成李群的语言就是在 defining representation 下在 $\mathcal{J}^{10}$ 生成元上进行 η 平移生成的群元素。

$$\Lambda \equiv \exp\left(-i\eta\mathcal{J}^{10}\right) = \exp\left(-\eta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{85}$$

经过计算我们知道：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{86}$$

这个矩阵也就是 boost 变换在 Minkowski 坐标变换表示空间下的表示。也就是我们日常说的 4-vector 的 boost 坐标变换。

6.2 Representation of so(3,1) Algebra

so(3,1)代数使用转动和boost生成元

下面我们希望给出 so(3,1) 代数在一般表示空间下的表示。以及这些表示的分类。我们进行下面的变换。

> **Remark:** 记号定义：
>
> - 我们定义 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 作为 so(3,1) 代数在 defining representation 下面的表示。
> - 定义 $J^{\mu\nu}$ 作为 so(3,1) 代数抽象的生成元元素

考虑抽象的代数元素和 Lie parameter，我们可以再 modify 一下 exp map 和 Lie parameter 的形式给出下面的 redefinition：

$$\begin{aligned} &\underline{\text{Rotations}}: \quad J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk}, \quad \theta_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk} \\ &\underline{\text{Boosts}}: \quad K_i \equiv J^{i0}, \quad \eta_i \equiv \omega_{i0} \end{aligned} \tag{87}$$

通过这个变换之后，我们发现 so(3,1) 代数的对易关系可以写作：

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{88}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{89}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \tag{90}$$

这几乎等价在李代数空间上进行一个基的坐标变换。之前使用 $J^{\mu\nu}$ 作为基，现在我们使用 $\{J_i, K_i\}$ 作为基。

这个基下，Lorentz 群的元素可以通过下面这个 exp map 构建出来：

$$\exp\left(-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}J^{\mu\nu}\right) = \exp(-i\theta_i J_i + i\eta_i K_i). \tag{91}$$

复化so(3,1)代数为两个su(2)

作为一般的 trick 我们对这个代数进行复化，试图求出复李代数的表示，然后再根据约束条件约束出实李代数的表示。我们定义：

$$J_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \tag{92}$$

于是我们发现一个神奇的结论就是：

$$[J_i^{\pm}, J_j^{\pm}] = i\epsilon_{ijk}J_k^{\pm} \tag{93}$$

$$[J_i^{\pm}, J_j^{\mp}] = 0 \tag{94}$$

也就是说，so(3,1) 李代数经过复化之后，变成了两个互相对易的 su(2) 李代数的直和。写作：

$$\mathrm{so}(1,3) \sim \mathrm{su}(2) \oplus_{\mathbb{C}} \mathrm{su}(2)_+ \tag{95}$$

> **Remark:** 需要注意的是我们这里使用了 $\sim$ 的记号，说明两个代数并不同构，而是在复化的意义下是同构的。右边的两个 su(2) 代数原则上可以是生成元的任意复数组合，而左边需要时生成元的实数组合。

对于复化后的代数 $su(2) \oplus_{\mathbb{C}} su(2)$ 其元素可以如下进行表达：

$$v = \alpha_i J_i^- + \beta_i J_i^+ \quad (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{C}^6 \tag{96}$$

我们需要把代数的线性组合约束在：

$$\alpha = \beta^* \tag{97}$$

这样我们又重新回到了实李代数 so(3,1) 代数。

两个su(2) exp出洛伦兹群

所以 lorentz 群的元素可以直接通过这两个 su(2) 代数的元素 exp 出来：

$$\exp\left(-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}J^{\mu\nu}\right) = \exp\left(-i(\theta^a - i\eta^a)J_a^- + (\theta^a + i\eta^a)J_a^+\right) \tag{98}$$

两个su(2)直和代数的表示

下面我们考虑代数 $su(2) \oplus_{\mathbb{C}} su(2)$ 的表示。我们可以通过对于两个 su(2) 的表示进行【直积】来构造这个直和代数的表示。

我们定义一个表示是 (j_-, j_+) 表示，这个表示空间的基向量是：

$$\psi_{m_+,m_-}, \quad m_- = -j_i, ..., j_-. \quad m_+ = -j_+, ..., j_+ \tag{99}$$

基向量在代数元素作用下分别变换为:

$$
\begin{aligned}
J_i^- :\ \ \psi_{m_-,m_+} &\to \left(L^-_{m_-,m_+}\right)^i \psi_{m_-,m_+} \\
J_i^+ :\ \ \psi_{m_-,m_+} &\to \left(L^+_{m_-,m_+}\right)^i \psi_{m_-,m_+}
\end{aligned}
\tag{100}
$$

由于是分别作用所以我们表示空间的大小是:

$$
\dim(j_-, j_+) = (2j_+ + 1)(2j_- + 1) \tag{101}
$$

并且这个代数表示给出的两个 Casimir 算子在表示空间下的值是:

$$
J_-^i J_-^i = j_-(j_- + 1)_+^i, \quad J_+^i = j_+(j_+ + 1) \tag{102}
$$

我们可以给出这个表示空间下面 $J^{\pm}$ 的矩阵形式,然后使用 $\alpha = \beta^*$ 的约束条件,给出 so(3,1) 代数在这个表示空间下的表示。

表示与物理学

物理学家认为不同的表示描述了不一样的粒子。下面就是物理学家起的名字捏:

(j_-, j_+)	dim	Type	Example
$(0,0)$	1	Scalar	$\pi^0, \pi^{\pm}$, Higgs
$(1/2,0)$	2	Left-handed spinor	Neutrinos
$(0,1/2)$	2	Right-handed spinor	Anti-neutrinos
$(1/2,0)\oplus(0,1/2)$	4	Dirac spinor	$e^{\pm}, p, n$
$(1/2,1/2)$	4	Vector	$\gamma, W^{\pm}, Z^0, g$
$(1,1)$	9	Traceless metric tensor	“Gravity”

图 3: 不同 so(3,1) 代数表示对应的粒子类型 {fig:repa

需要额外注意的是 $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ 以及 $(1/2,1/2)$ 是两个完全不一样的表示空间。维度就不一样!所以需要仔细区分捏!!

> **Remark:** 我们回忆,从代数表示给出群表示需要使用 exp map。但是有个 bug 是,exp map 并不一定覆盖整个群。所以我们从 Lorentz 代数 exp map 给出表示的时候,我们 cover 的其实只有 $\mathscr{L}_+^{\uparrow}$。

6.3 标量场构型空间作为表示空间

我们之前是用 manifold 上面的坐标系构成的空间作为 Poincare 群的 defining representation 表示空间。但下面希望研究量子场论,所以我们关心,场构型空间作为 Poincare 群的表示空间。

6.3.1 标量场构型空间作为一般 Diifeomorphism 群的表示空间

什么是场构型空间

所谓的场就是 $\phi_a : \mathcal{M} \to V$ 流形到一个线性空间的映射。我们定义一个群如何作用在一个场上面：

1. 坐标变换：$x \to x'$
2. 场的协变：$\varphi(x) \to \varphi'(x')$【这个变换规则需要场本身协变性质决定】

这两个变换共同的作用下，induce 出了一个 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 的映射线性空间上的变换。也就是，我们选定一个坐标系 ψ 之后，我们的场可以写作一个映射：

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to V \tag{103}$$

$$x \mapsto \varphi(x) \tag{104}$$

在群的作用下，涉及的两个变换 induce 出来了一个 $\varphi(x)$ 这个 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 的映射的变换：

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) \tag{105}$$

Important: 什么是场构型空间

我们说的场构型空间其实说的是 $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 所有这样的映射构成的线性空间。然后我们考虑的是这个空间作为群的一个表示空间。【而不是所谓的场这个映射的空间】
区分构型空间不是场构成的空间，而是在一定坐标系下给出的实线性空间到实线性空间映射构成的空间。

Scalar Field

下面我们就根据场在这两个变换下的行为定义标量场。

Definition 8. *标量场*

我们定义标量场 $\phi(x)$ 是一个从 Minkowski 流形到实数域的映射：

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned} \tag{106}$$

diffeomorphism 群 $Diff(\mathcal{M}) = G$ 作用在标量场上面的协变规则是：

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) \tag{107}$$

根据这些我们可以计算出 diffeomorphism 群在标量场构型空间上的表示。我们考虑一个任意 Diffeo 群元素是怎么作用在标量场构型空间上面的。

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = f^\mu_g(x) \quad g \equiv g(\alpha^1, ..., \alpha^N) \in G \tag{108}$$

$$\varphi(x) \mapsto \varphi'(x') = \varphi(x) \tag{109}$$

根据这两点我们就知道，标量场构型空间上，Diffeo 群的表示是：

$$\mathcal{D}_g[\varphi] \equiv \varphi \circ f_{g^{-1}} \tag{110}$$

Infinitesimal Diffeomorphism

为了给出这个表示空间上面的 diffeomorphism 群的 Lie 代数表示，我们考虑一个无限小变换：

$$x'^\mu = f^\mu_{g(\alpha)}(x) = x^\mu - \alpha^j \epsilon^\mu_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{111}$$

对于这个无限小群元素的作用下，我们计算标量场构型空间变成了什么样子捏：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{g(\alpha)}[\varphi](x) &= \varphi(f_{g^{-1}}(x)) \\ &= \varphi(x^\mu + \alpha^j \epsilon^\mu_j + \mathcal{O}(\alpha^2)) \\ &= \varphi(x) + \alpha^j \epsilon^\mu_j \partial_\mu \varphi(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= (1 + i\alpha^j X_j)\varphi(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned} \tag{112}$$

{eq:infin

所以我们发现，diffeomorphism 群在标量场构型空间上的无限小李群：

Diffeomorphism群的Lie代数

我们计算生成元在这个标量场构型空间下的表示的对易关系，给出抽象的 Diffeomorphism 群 Lie 代数的结构。

$$[X_i, X_j] = (-i)^2[\epsilon^\mu_i \partial_\mu, \epsilon^\nu_i \partial_\nu] = \left(\epsilon^\mu_j \partial_\mu \epsilon^\nu_i - \epsilon^\mu_i \partial_\mu \epsilon^\nu_j\right) \partial_\nu \tag{113}$$

> **Remark:** 我们发现其实 diffeo 群给出的 Lie 代数就是微分几何中流形上的向量场通过 Lie 括号构成的 Lie 代数结构捏！

6.3.2 标量场构型空间作为 Poincare 群的表示空间

其实 Poincare 群也是 Diffeomorphism 群的一个子群，所以我们可以直接把上面的结果拿过来使用。我们考虑 Poincare 群作用下，coordinate system 会发生这样的变化：

$$X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{114}$$

$$= (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2))x^\nu + a^\mu \tag{115}$$

$$= x^\mu + (\omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu) \tag{116}$$

$$= x^\mu - \epsilon^\mu \tag{117}$$

所以我们类比 eq. (112) 同样的操作可以给出 Poincare 群在标量场构型空间上的 Lie 代数表示生成元是：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}[\varphi] &= \varphi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu - a^\mu + \dots) \\
&= \varphi(x) - (\omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu)\,\partial_\mu\varphi + \dots \\
&\equiv \left(1 - i\frac{\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}{2} + ia^\mu P_\mu\right)\varphi + \dots
\end{aligned}
\tag{118}
$$

最后的 Lie Parameter 我们使用 Poincare 群的标准记号捏。于是我们发现 Poincare 群在标量场构型空间上的 Lie 代数表示生成元是：

$$
\begin{aligned}
J_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\
P_\mu &= i\partial_\mu
\end{aligned}
\tag{119}
$$

Rediscover Poincare群Lie代数结构

显然我们计算这两个算符的对易关系，必然会发现他们给出我们之前熟悉的 Poincare 群 Lie 代数结构：

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}) \tag{120}$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu) \tag{121}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{122}$$

第一个对易关系我们之前已经见过了，是 so(3,1) 代数的结构。后面两个对易关系描述了平移生成元和 Lorentz 生成元之间的关系。

6.3.3 Adjoint Representation of Poincare Lie Algebra

自由标量场的构型空间作为 Poincare 群的表示空间为我们提供了一个很好的基础进行研究 Poincare 群的 Adjoint 表示。一个疑惑是为什么我们不能在 Defining Representation 下面研究 Poincare 群的 Adjoint 表示呢？因为 Defining Representation，其实只够研究 Lorentz 群的，对于动量算符我们不能用 4×4 的矩阵描述，需要扩充，这里就不做仔细讨论了。

Poincare代数

我们知道 Poincare 群的李代数可以写作生成元的线性组合。其 Lie Parameter 一共是 10 个「因为生成元 $J_{\mu\nu}$ 是反对称的，所以只有 6 个自由度」：

$$V = \omega^{\rho\sigma}J_{\rho\sigma} + a^\rho P_\rho \tag{123}$$

这个线性空间构成了 Poincare 群 Lie 代数的 Adjoint Representation。我们研究这个表示空间下 Lorentz 群的表示！

> **Remark:** 为啥我们之前没有动量的代数呢，是因为 so(3,1) 群的 defining representation 只能描述 Lorentz 群的代数表示，不能描述 Poincare 群的代数表示。但是标量场构型空间表示可以描述 Poincare 群的代数表示。

P子代数下Lorentz群的表示

首先研究 P_μ 构成的子代数空间下 Lorentz 群的表示。我们先研究 Lorentz 代数在这个空间下的 Adjoint Representation：

$$[J^{\mu\nu}, P_\rho] = P_\sigma \left\{ i \left(\eta^{\mu\sigma}\delta^\nu_\rho - \eta^{\nu\sigma}\delta^\mu_\rho \right) \right\} = P_\sigma (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\sigma{}_\rho \tag{124}$$

很惊讶的发现这个结构常数其实正好可以写作 so(3,1) 代数在 defining representation 下的表示矩阵形式！这说明了什么呢：

- Lorentz 代数在这个子代数空间 $\{P_\mu\}$ 下的 Adjoint Representation 正好是 so(3,1) 代数在 defining representation 下的表示！
- 也就是说 P_μ 这一组算子其实是 Poincare 群 Defining Representation 的一组张量算符！！

下面我们研究 Lorentz 群在这个子代数空间下的表示，会自然得到：

$$e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot J} P_\rho \, e^{\frac{i}{2}\omega\cdot J} = P_\sigma \Lambda^\sigma{}_\rho \tag{125}$$

J子代数下Lorentz群的表示

下面研究 $J_{\mu\nu}$ 构成的子代数空间下 Lorentz 群的表示。我们先研究 Lorentz 代数在这个空间下的 Adjoint Representation：

$$[J^{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = J_{\lambda\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\lambda{}_\rho + J_{\rho\lambda}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\lambda{}_\sigma \tag{126}$$

我们发现这个结构常数可以写作两个 so(3,1) 代数在 defining representation 下的张量积表示矩阵形式！同样的写出 lorentz 群在这个子代数空间下的表示：

$$e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot J} J_{\rho\sigma} e^{\frac{i}{2}\omega\cdot J} = J_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma. \tag{127}$$

Poincare代数作为Lorentz群的表示

所以如果我们将 Poincare 代数作为 Lorentz 群的表示空间，对于 Poincare 代数重的任意元素：

$$V = \omega^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + a^\rho P_\rho \tag{128}$$

作用上一个 Lorentz 群的元素之后我们发现结果是：

$$a^\rho \to \Lambda^\rho{}_\mu a^\mu \quad \text{and} \quad \omega^{\rho\sigma} \to \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \omega^{\mu\nu} \tag{129}$$

6.4 一般场构型空间作为 Poincare 群的表示空间

一般Poincare协变场

我们讨论完标量场的情况，我们希望一般场构型空间作为 Poincare 群的表示空间。但问题是，一般场的协变性质需要满足特别的要求才能作为 Poincare 群的表示空间，我们其应该按照 Lorentz 群的表示进行协变，才能构成 Poincare 群的表示空间。

Definition 9. 一般 *Poincare* 协变场

我们定义一般 *Poincare* 协变场 $\phi^A(x)$ 是一个从 *Minkowski* 流形到一个线性空间 V 的映射：

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to V \\ x &\mapsto \varphi^A(x) \end{aligned} \tag{130}$$

Poincare 群 $ISO(3,1)=G$ 作用在一般 *Poincare* 协变场上面的协变规则是：

$$\varphi^A(x) \to \varphi'_a(x') = D(\Lambda)^A{}_B \varphi^B(x) \tag{131}$$

其中 $D(\Lambda)$ 是 *Lorentz* 群在 V 空间下的一个 (j_-, j_+)*spin* 的表示：

$$D^B{}_A(\Lambda)\ ,\ A = 1, \dots (2j_- + 1)(2j_+ + 1) \tag{132}$$

一般协变场构型空间作为Poincare群的表示空间

我们考虑 Poincare 群作用下，一般协变场对应的构型空间会怎么协变：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \equiv f^\mu_{(\Lambda,a)}(x) \tag{133}$$

$$\phi'^A(x') \equiv D^A{}_B(\Lambda)\phi^B(x) \tag{134}$$

我们考虑构型空间对于这样的变换的变化是：

$$\mathcal{D}_{(\Lambda,a)}[\phi]^A(x) \equiv D^A{}_B(\Lambda)\phi^B(f^{-1}_{\Lambda,a}(x)) \tag{135}$$

我们考虑这个变化的无穷小变化：

$$\phi'^A(x) = \left(1^A{}_B - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})^A{}_B\right)(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu))\phi^B(x) \tag{136}$$

$$= (\mathbb{1}^A{}_B - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathbb{1}^A{}_B(ix^\mu\partial^\nu - ix^\nu\partial^\mu) + (\Sigma^{\mu\nu})^A{}_B))\phi^B(x) \tag{137}$$

Remark: 怎么理解这个结果呢，我们发现其实这个是两个表示的直积表示。一个是 Lorentz 群在标量场构型空间下的表示，一个是 Lorentz 群在 V 空间下的表示。

例子：电磁场

一个很好的 Poincare 协变场的例子就是电磁场 $A_\mu(x)$。其协变关系是:

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \tag{138}$$

所以其构型空间上的 Poincare 群的作用是:

$$A'^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}x) \tag{139}$$

6.5 Questions and Thoughts

Question 6.20 量子场论之中的场是流形到一个线性空间的映射还是流形上的坐标系到一个线性空间的映射?

从几何的语言上，场其实是一个 fiber bundle 的截面 (section)。也就是说，场是流形上每一个点到 fiber 的映射。这个 fiber 通常是一个线性空间。

但是，我们这里可以理解场就是流形上的坐标系到一个线性空间的映射。因为这样子我们才能用直观的数来描述场。 □

Question 6.21 为什么我们认为 Diffeomorphism 群作用是一个 local transformation? 有没有可能从群结构的角度理解这个 local transformation?

[我也不到，可能 sup 4 会讲清楚这个问题?]

7 Lecture 7: Symmetry and Conservation Law

{sec:Lect

7.1 Symmetry 变换的定义

7.1.1 Symmetry Transformation for Lagrangian Formalism

对称性的定义「对于场的lagrangian formalism」

我们之前有定义对称性为一个 coordinate transformation，使得 EoM 不变。下面我们从 Lagrangian formalism 出发重新定义：

Definition 10. *Global Symmetry Transformation*

首先考虑一个 Lie Group 给出的 Coordinate Transformation。【正如之前 claim 的，并不一定是坐标变换，这里只是粗浅的理解为坐标变换和场的协变】对于一个 Lie Group G，我们选择其 coordinate system 是 $\{\alpha_i\}$。我们考虑这个群在一个 Field 上面的表示。我们有：

$$\begin{cases} x'^{\mu} = f^{\mu}(x, \alpha) \\ \phi'_a(x') = F_a(\phi(x), \alpha) \end{cases} \tag{140}$$

如果这个变化满足下面的方程：

$$d^4x \left[\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))\right] = d^4x' \left[\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) + \partial'_{\mu}K^{\mu}(\phi')\right] \tag{141}$$

那么我们称之为 Symmetry Transformation。

Remark: 注意我们这个定义的细节是，对于同样的一个 Lagrangian 的形式，我们输入两种场函数 $\phi(x), \partial\phi(x)$ 以及 $\phi'(x), \partial'\phi'(x')$。【注意，不是同点比较！！】但是 L 的函数形式是一样的！！

我们对比其与最一般的定义的关系，definition 1。我们发现：

- 这显然就是一个 coordinate transformation。我们之前讨论了坐标变换可以通过一个群表示
- 这个变换保证了 EoM 不变。我们下面证明：

  1. 首先注意到作用量需要满足：

  $$S = \int_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) = \int_{f(\Omega,\alpha)} d^4x'\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) + \int_{\partial f(\Omega,\alpha)} d\sigma'^{\mu}K^{\mu}(\phi'). \tag{142}$$

  2. 下面我们对这个作用量分别对于 $\phi_a(x)$ 以及 $\phi'_z(x')$ 进行变分得到结果为：

  $$\delta S = \int_{\Omega} d^4x\ \Gamma(\phi, \partial)^a\delta\phi_a = \int_{f(\Omega,\alpha)} d^4x'\ \Gamma(\phi', \partial')^a\delta\phi'_a \tag{143}$$

  我们会发现两个坐标系下，EoM 的函数形式是完全一样的！「虽然输入的场是不一样的」都是 $\Gamma(*)$，其中 $*$ 代表的就是对应坐标系下输入的场。

因此我们证明了这个定义其实就是 Symmetry 最一般定义 definition 1 的一个特例。

对称性变换的interpretation

此外我们还会发现:

- 如果 $\phi_a(x)$ 是一个解的话，那么做一个对称性变换之后 $\phi'_a(x') = F_a(\phi(f^{-1}(x',\alpha)),\alpha)$ 也是一个解。这两个函数形式都是运动方程的解。

这个也就意味着

- Symmetry 意味着存在一组 observer，他们描述的系统是完全一样的。

例子：标量场的平移对称性

我们考虑一个标量场的 lagrangian：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{144}$$

可以证明下面的变换是一个 symmetry transformation：

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu - a^\mu \\ \phi'(x') = \phi(x) \end{cases} \tag{145}$$

这个是一个只有时空坐标变换的对称性变换。

例子：复标量场的全局U(1)对称性

考虑下面这个 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* \tag{146}$$

我们可以证明下面的变换是一个 symmetry transformation：

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu \\ \phi'(x') = e^{i\alpha}\phi(x) \end{cases} \tag{147}$$

某个函数在Transformation下变换

我们物理上会很随意的使用一个名词【求解一个量在 xxx Transformation 之下的变换】，但是从来没说过这个词到底是什么意思。我现在给一个严格说法：

> **Definition 11.** *某个函数在 Transformation 下变换*
>
> *考虑一个 coordinate transformation:*
>
> $$\begin{cases} x'^\mu = f^\mu(x,\alpha) \\ \phi'_a(x') = F_a(\phi(x),\alpha) \end{cases} \tag{148}$$

> 我们考虑一个函数 $G(\phi(x), \partial\phi(x))$，那么我们定义这个函数在这个 *coordinate transformation* 下的变换为：
>
> $$G' = G(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) \tag{149}$$

也就是说，我们在保证函数形式完全不变的情况下，把场完全替换成变换之后的场 $\phi'(x')$ 把坐标导数也完全直接替换乘变换之后的坐标导数 ∂'。

7.1.2 无限小坐标变换以及场构型空间变分

显然使用坐标变换和场的协变的描述 Coordinate Transformation 很不方便。我们会发现，如果考虑无穷小坐标变换还有一个更简单的描述的方式。

当我们考虑无限小 Coordinate Transformation 的时候，我们可以把其当作场构型空间的一个特殊的变分来研究。这样子我们就可以使用熟悉的变分的方法来研究啦！

Infinitesimal Coordinate Transformation

我们考虑一个任意的群 generate 的一个 coordinate transformation，可以写作：

$$\begin{cases} x'^{\mu} = f^{\mu}(x, \alpha) \\ \phi'_a(x') = F_a(\phi(x), \alpha) \end{cases} \tag{150}$$

我们考虑 Lie Parameter 无限趋于 0 的情况，也就是变换无限小的情况，并考虑一阶近似。我们有：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon_i^{\mu}(x)\alpha^i \equiv x^{\mu} - \epsilon^{\mu}(x) \tag{151}$$

$$\phi'_a(x') = \phi_a(x) + \mathcal{E}_{ai}(\phi(x))\alpha^i \equiv \phi_a(x) + \mathcal{E}_a(x) \tag{152}$$

在这个情况下我们下面进行一个 trick，首先对于 $\phi'_a(x')$ 这个函数在 x 点进行 Taylor 展开：

$$\phi'_a(x') = \phi'_a(x) - \epsilon^{\mu}(x)\partial_{\mu}\phi'_a(x) \tag{153}$$

然后我们再把场的协变的无限小变换带入进去，消去 $\phi'_a(x')$，我们得到：

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \left(\mathcal{E}_{ai}(\phi(x)) + \epsilon_i^{\mu}(x)\partial_{\mu}\phi_a(x)\right)\alpha^i \equiv \phi_a(x) + \Delta_{ai}(\phi(x))\alpha^i \equiv \phi_a(x) + \Delta_a(x) \tag{154}$$

所以我们的结论是：

> **Theorem 8.** 无限小坐标变换作为变分
>
> 对于无限小对称性变换，我们可以等价的写作一个场构型的变分：
>
> $$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \Delta_a(x) \tag{155}$$

并且其中：

$$\Delta_a(x) = \Delta_{ai}(\phi(x))\alpha^i = \left(\mathcal{E}_{ai}(\phi(x)) + \epsilon_i^\mu(x)\partial_\mu\phi_a(x)\right)\alpha^i \tag{156}$$

Remark: 其实等价的，对称性变换从这个视角下，就是：

- 某一个特殊的无限小变分，保证作用量的变分在 off-shell 情况下是不变的!!

Weinberg 的书之中就是使用这个视角来定义对称性的!!

例子：标量场的平移变换以及复标量场的全局U(1)变换

对于标量场的平移变换，我们有：

$$\epsilon^\mu = a^\mu, \quad \mathcal{E}_a = 0, \quad \Delta_a = a^\mu\partial_\mu\phi_a \tag{157}$$

对于复标量场的全局 U(1) 变换，我们有：

$$\begin{aligned}
&x'^\mu = x^\mu && \Longrightarrow \epsilon^\mu = 0 \\
&\phi' = e^{i\alpha}\phi \approx (1+i\alpha)\phi && \Longrightarrow \mathcal{E} = i\alpha\phi \\
&\phi'^* = e^{-i\alpha}\phi^* \approx (1-i\alpha)\phi' && \Longrightarrow \mathcal{E}^* = -i\alpha\phi^* \\
&\Delta = \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{158}$$

无穷小对称性变换下Boundary Term

之前我们一直考虑的是【一般坐标变换】，现在我们开始考虑【对称性变换】。我们考虑对称性变换的定义我们会发现，很显然我们有：

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x'))d^4x' = \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))d^4x \tag{159}$$

因此对于多出来的 Boundary Term 我们有：

$$\lim_{\alpha\to 0}\partial'_\mu K^\mu = 0 \tag{160}$$

所以我们可以把 $K^\mu(x)$ 如下进行展开

$$K^\mu = \alpha^i K_i^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) \equiv \tilde{K}^\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{161}$$

7.2 Noether's Theorem

7.2.1 Noether's Theorem 的陈述与证明

Noether's Theorem的陈述

在上面的讨论基础上我们现在可以证明 Noether's Theorem 了!! 我们给出定理：

Definition 12. *Noether's Theorem*

对于一个给定的 *Lie Group* G，我们选择一个 *coordinate system* 之后存在 N 个 *Lie Parameters* $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$。如果这个群对于我们研究的系统是一个 *Symmetry Transformation*，那么对于每一个 *Lie Parameter* α_i，我们都可以定义一个守恒流 J_i^μ，【在 *onshell* 的情况下】满足：

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0 \tag{162}$$

其中守恒量 J_i^μ 定义为：

$$J_i^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Delta_{ai} - \epsilon_i^\mu \mathcal{L} + K_i^\mu \tag{163}$$

其中 Δ_{ai} 是无限小对称性变换下的场的变分提出 α_i 的系数，ϵ_i^μ 是无限小对称性变换下的坐标变换提出 α_i 的系数，K_i^μ 是无穷小对称性变换下的 *boundary term* 提出 α_i 的系数。

Remark: 虽然这个定理 explicitly 给出了守恒流的形式，但是我们一般不会直接使用这个形式来计算守恒流。我们一般会使用后面讨论的一个更简单的方法计算守恒流；所以不必纠结这些奇奇怪怪的项是什么东西。

Noether's Theorem的证明

下面我们给出证明。首先我们考虑对称性的定义式在无穷小对称性变换下面的形式：

$$d^4x \left[\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))\right] = d^4x' \left[\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) + \partial'_\mu K^\mu(\phi')\right] \tag{164}$$

我们对上面这个式子右边的部分进行一个无穷小的展开我们。

- Volume Element 的展开：我们知道体元是按照 Jacobi Matrix 的行列式进行变换的。所以我们有：

$$\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \det\left(\delta_\nu^\mu - \partial_\nu \epsilon^\mu\right) = 1 - \operatorname{Tr}\left(\partial_\nu \epsilon^\mu\right) = 1 - \partial\epsilon \tag{165}$$

- Lagrangian 的展开，我们直接在 x 处进行 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) &= \mathcal{L}(\phi'(x), \partial\phi'(x)) - \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi', \partial\phi') \\ &= \mathcal{L}(\phi'(x), \partial\phi'(x)) - \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\end{aligned} \tag{166}$$

  其中第二行，因为我们只考虑线性项；由于已经有了 ϵ 是对于 α 一阶的！所以直接把 ϕ' 替换成 ϕ。

  然后我们进一步展开 $\mathcal{L}(\phi'(x), \partial\phi'(x))$ 这一部分，我们发现可以使用变分的视角来进行展开，得到：

$$\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) = \mathcal{L}(\phi(x) + \Delta(x), \partial(\phi(x) + \Delta(x)) - \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \tag{167}$$

然后 RHS 的第一项可以展开得到：

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) + \Delta_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} + \partial_\mu \Delta_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \tag{168}$$

在上面的两个展开的结果带入原式，我们有：

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) d^4x = \left[\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) + \Delta_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} + \partial_\mu \Delta_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} - \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu\right](1 - \partial_\nu \epsilon^\nu) d^4x \tag{169}$$

进过化简我们发现：

$$0 = \partial_\mu \left(-\epsilon^\mu \mathcal{L} + \Delta_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} + \tilde{K}^\mu\right) + \Delta_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\right) \tag{170}$$

注意到上面的第二项正好是 EoM 的形式，所以在 onshell 的情况下，这一项为 0。我们就得到了 Noether 定理的结论。

$$0 = \alpha_i \partial_\mu \left[-\epsilon_i^\mu \mathcal{L} + \Delta_{ai} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} + K_\mu^i\right] \tag{171}$$

Noether Charge

我们发现有了 conserve current 之后我可以给出一个等时面上的物理量，这个物理量在时间是守恒的。

Definition 13. *Noether Charge*

对于一个守恒流 J_i^μ，我们可以定义一个等时面上的守恒量：

$$Q_i(t) = \int d^3x J_i^0(\mathbf{x}, t) \tag{172}$$

这个量在时间上是守恒的：

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0 \tag{173}$$

证明很简单，也就是计算：

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int d^3x \partial_0 J_i^0 = -\int d^3x \nabla \cdot J_i = -1 \tag{174}$$

7.2.2 Noether Current 的计算方法

使用Local Transformation计算Noether Current

虽然 Noether 定理之中给出了守恒流的形式，但是这个形式其实并不好用。我们一般不会直接使用这个形式来计算守恒流。我们一般会使用下面的一个 trick!! 我们可以使用一个 symmetry lift 出来的 local transformation 来计算 Noether Current!! 具体步骤如下：

- **Step 1: 计算无限小变分**

  首先我们需要根据对称性变换计算出无限小变分:

$$\delta\phi_a = \phi'_a(x) - \phi_a(x) = \Delta_{ai}(\phi(x))\alpha^i \tag{175}$$

- **Step 2: Lift to Local Transformation**

  然后我们把这个无限小变分提升为一个 local transformation，也就是如果我们现在认为 Lie Parameter 是和时空有关的，我们可以把这个 transformation lift 成为对应的 local transformation:

$$\delta\phi_a(x) \equiv \phi'_a(x) - \phi_a(x) = \Delta_{ai}\alpha^i(x) \tag{176}$$

$$\delta\partial_\mu\phi_a(x) \equiv \partial_\mu(\Delta_{ai}\alpha^i(x)) = (\partial_\mu\Delta_{ai})\alpha^i(x) + \Delta_{ai}\partial_\mu\alpha^i(x) \tag{177}$$

  其中 $\alpha^i(x)$ 是任意的时空函数。

- **Step 3: 计算作用量的变分**

  接下来我们计算这个 local transformation 下作用量的变分，然后使用 on shell 的条件会发现我们的变分结果会变得非常简单:

$$\Delta S \equiv \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi', \partial\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\right] = \int_\Omega J^\mu_i \partial_\mu\alpha^i d^4x + \text{boundary term} \tag{178}$$

- **Step 4: 读出 Noether Current**

  最后我们就可以直接从上面的式子读出 Noether Current 了!!

> **Remark:** 上面的计算之中，我们不一定使用运动方程进行 Noether Current 的计算。但是有的时候也是需要带入运动方程进行简化计算的。
>
> 但是无论如何，我们可以知道 J^μ 是守恒的，是因为运动方程满足的时候 $\delta S = 0$ 恒成立。因此我们分部积分得到 $\partial_\mu J^\mu = 0$。
>
> 但是有的时候会发现，没有使用运动方程条件，推导一堆之后 δS 自动就是 0。这个时候就说明没有守恒流存在，也很可能就是一个 Gauge Symmetry!!

7.3 Noether Current 变分计算技巧

使用变分计算 Noether Current 是一个路径依赖的过程。因为，很可能推导着就变成了变分原理的恒等式，也就是带入运动方程之后 $\delta S = 0$ 恒成立了，看不出守恒流的情况。所以我们会有一些奇技淫巧来帮助我们计算 Noether Current。

- **拼凑 Lie Parameter 乘以全导数**

  我们一般带入变分后的定义会产生 $af[\phi]$ 这样的项，一个思路就是尽可能的将 $f[\phi]$ 拼凑成为一个全导数的形式。这样分部积分后就会给出一个对于 Noether Current 的贡献。

  例子：标量场的时空平移

- **无质量波色子 Lagrangian 全微分变形**

7.4 Symmetry and Conservation of Poincare

下面我们讨论一个 Poincare 协变场的理论。如果 Poincare 群是这个理论的一个对称性变换构成的群的话有什么结果。

7.4.1 时空平移对称性

首先我们考虑时空平移对称性对应的对称荷和守恒量。由于我们知道，对于 Poincare 协变场，场的协变都是随着 Lorentz 变换协变的，而在时空平移变换下按照标量场进行变换。

所以我们列出一般 Poincare 协变场的时空平移变换下的无限小变换：

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} - a^{\mu} \equiv x^{\mu} - \epsilon_i^{\mu}(x)\alpha^i \\ \phi'_a(x') &= \phi_a(x) \equiv \phi_a(x) + \mathcal{E}_{ai}(\phi(x))\alpha^i \end{aligned} \tag{179}$$

对于这样的结果我们可以计算出对应的场构型空间的无限小变分：

$$\epsilon^{\mu} = a^{\mu} = a^{\nu}\delta^{\mu}_{\nu} \Rightarrow \epsilon^{\mu}_{\nu} \equiv \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{180}$$

$$\mathcal{E}_a = 0 \tag{181}$$

$$\Delta_a = a^{\nu}\partial_{\nu}\phi_a \Rightarrow \Delta_{a\nu} \equiv \partial_{\nu}\phi_a \tag{182}$$

如果我们假定平移变换对于这个 Lagrangian 系统并不产生 boundary term 的话，那么我们有 $K_i^{\mu} = 0$。「平移变换的 Jacobi 自然是 0」。也就是说对称性条件更强了是：

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x')) \tag{183}$$

我们可以推导出守恒流，定义为能动量张量！

Definition 14. 能动量张量

对于一个 Poincare 协变场的 Lagrangian 系统，如果时空平移变换是其对称性变换，并且没有产生 Boundary term 的情况下，其对应的守恒流是：

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)}\partial_{\nu}\phi_a - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L} \tag{184}$$

将其定义为能动量张量。

自然的我们也可以给出对应的守恒荷，也就是能动量 4-vector：

$$P_{\mu} \equiv \int T^0{}_{\mu} d^3\mathbf{x} \tag{185}$$

Remark: 我们上面只是对于一个数学上的守恒流取了一个名字。但是上面的推导之中我们完全不能知道其物理意义。我们是通过研究很多已知的系通发现这个量就是对应的物理上的能动量，才以后 interprate 它为能动量张量的！！

7.4.2 Lorentz 对称性

一般Poincare协变场的Lorentz变换

对于 lorentz 变换，我们知道，Poincare 协变场在 Lorentz 变换下不仅仅有时空坐标系的变换还有场的非平凡协变。我们考虑一个 Poincare 协变场的 Lorentz 变换：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{186}$$

$$\phi'_a(x') = D(\Lambda)_a{}^b \phi_b(x) \tag{187}$$

其中矩阵：

$$D(\Lambda)_a{}^b \equiv \left(\exp -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right)_a^b \tag{188}$$

这里 $\Sigma^{\mu\nu}$ 是这个 Poincare 协变场对应的一个 lorentz 代数的表示。

无限小Lorentz变换下的场构型空间变分

我们继续考虑无限小变换的情况。我们有：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{189}$$

$$\phi'_a(x') = \phi_a(x) - \frac{i}{2}(\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})_a{}^b \phi_b(x) \tag{190}$$

我们可以计算出在无限小 Lorentz 变换下的场构型空间变分：

$$\begin{aligned}
\delta\phi_a(x) = \Delta_a &= -\frac{i}{2}(\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu})_a^b \phi_b(x) - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi_a(x) \\
&= -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\delta\right)_a^b \phi_b(x) \\
&\equiv -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(\Sigma_{\mu\nu} + \mathrm{J}_{\mu\nu}\right)_a^b \phi_b(x).
\end{aligned} \tag{191}$$

这里我们使用了 $J_{\mu\nu a}{}^b$ 的定义是：

$$[J_{\mu\nu}]_a{}^b \equiv i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\delta_a^b \tag{192}$$

标量场的Lorentz对称性守恒流

为了简单，我们现在考虑标量场的情况。对于标量场，$\Sigma^{\mu\nu} = 0$，也就是 Trivial 表示。所以我们知道守恒流是：

$$J^{\rho}{}_{\mu\nu} = (x_\mu T^{\rho}{}_{\nu} - x_\nu T^{\rho}{}_{\mu}) \tag{193}$$

能动量张量对称性

我们发现这个守恒流方程外加上能动量张量守恒流方程可以推导出来一个特别的结论：

$$T_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho} T^{\rho}{}_{\nu} = \eta_{\nu\rho} T^{\rho}{}_{\mu} \equiv T_{\nu\mu} \tag{194}$$

但很可惜，只有标量场的情况才自然满足这个条件。但是对于一般的 Poincare 协变场来说，能动量张量并不一定是对称的！但我们可以通过一个叫做 Belinfante-Rosenfeld procedure 的方法把能动量张量改造成对称的形式！！

因为我们发现，如果对于能动量张量进行一个 Modify，其依旧是守恒流：

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \partial_{\sigma} A^{\sigma\mu\nu} \tag{195}$$

其中 $A^{\sigma\mu\nu}$ 满足 $A^{\sigma\mu\nu} = -A^{\mu\sigma\nu}$，那么我们发现 $\Theta^{\mu\nu}$ 依旧是一个守恒流。

从表示空间分析能动量张量对称化

我们从表示空间的角度分析，我们把能动量张量对称化到底意味着什么？能动量张量存在两个 Lorentz 指标，所以其可以看作是 $\mathbb{R}^4$ 到一个 $(1/2, 1/2) \otimes (1/2, 1/2)$ 表示空间的映射。我们知道这个表示空间可以分解为：

$$\begin{aligned} (1/2, 1/2) \otimes (1/2, 1/2) &= (1/2 \otimes 1/2, 1/2 \otimes 1/2) \\ &= (0 \oplus 1, 0 \oplus 1) \\ &= (0,0) \oplus (0,1) \oplus (1,0) \oplus (1,1) \end{aligned} \tag{196}$$

所以我们发现能动量张量的分量可以分为三个部分：

- $(0,0)$ 部分：这个部分对应的就是能动量张量的 trace 部分。
- $(0,1) \oplus (1,0)$ 部分：这个部分对应的就是能动量张量的 antisymmetric 部分。
- $(1,1)$ 部分：这个部分对应的就是能动量张量的 symmetric 部分。

> **Remark:** 对于所有 rank 2 的张量我们都可以进行这样的分解！！

我们意识到，如果一个系统只有时空平移对称性的话，我们可以有任意形式的能动量张量；但是如果一个标量场系统同时具有 Lorentz 对称性的话，我们发现 antisymmetric 部分必须为 0！如果不是标量场，我们也可以通过 Belinfante-Rosenfeld procedure 把 antisymmetric 部分去掉！

> **Remark:** 所以我们发现其实能动量张量包含的信息比我们想象的要多。Lorentz Symmetry 的信息实际上包含在其中。

Lorentz对称性的守恒荷

考虑一个已经被对称化之后的能动量张量。我们的守恒荷是：

$$J_{\mu\nu} \equiv \int d^3\mathbf{x} J^0_{\mu\nu} = \int d^3\mathbf{x} \left(x_\mu T^0{}_\nu - x_\nu T^0{}_\mu \right) \tag{197}$$

我们分两个进行讨论：

1. **空间旋转部分** J_{ij}

   这个部分对应的守恒荷是：

$$J_{ij} = \int d^3\mathbf{x}\left(x_i T^0{}_j - x_j T^0{}_i\right) \tag{198}$$

   这个量对应的物理意义是角动量算符！！

2. **Boost 部分** J_{0i}

   这部分对应守恒荷是：

$$K_i \equiv J_{i0} = \int d^3\mathbf{x}(x_i\rho - x_0 p_i) \tag{199}$$

   其中 $\rho = T^0{}_0$ 我们理解为能量密度。如果我们定义一个坐标是质心位置，我们将其改写 Boost 守恒荷：

$$X_i^{CM} \equiv \frac{\int d^3\mathbf{x} x_i\rho}{\int d^3\mathbf{x}\rho}, \quad K_i \equiv P_0 X_i^{CM} - tP_i \tag{200}$$

   我们发现 Boost 守恒意味着质心沿直线进行运动！

> **Remark:** 一个很重要的事实，就是守恒荷不一定和 Hamiltonian 对易。就像 Boost 的守恒荷和 Hamiltonian 并不是对易的。但是这个守恒荷显含时间，所以多出了一项，保证是守恒的！

7.5 补充：对称性和守恒流的另一种定义

对于对称性以及 Moether Theorem 我们存在另一种等价的定义方式，下面进行讨论。下方内容复制自我的 TP4 的笔记里面的讨论，所以是英语的。

7.5.1 Symmetry and Conserved Current

A more standard definition of Symmetry

In Prof. Rattazzi's lecture the symmetry of a field theory is defined as:

> **Definition 15.** ***Symmetry(QFT EPFL)***
>
> *Consider a field theory with a series of dynamical fields $\phi_a(x)$ and a dynamical Lagrangian $\mathcal{L}[\phi]$. A symmetry of the action is a transformation with parameters α:*
>
> $$x'^\mu = f^\mu(x,\alpha) \tag{201}$$
> $$\phi'_a(x') = F_a(\phi(x),\alpha) \tag{202}$$
>
> *so that satisfy that:*
>
> $$d^4x\left[\mathcal{L}(\phi_a(x),\partial\phi_a(x))\right] = d^4x'\left[\mathcal{L}(\phi'_a(x'),\partial'\phi'_a(x')) + \partial'_\mu K^\mu(\phi')\right] \tag{203}$$

Remark: We haven't say anything about what **transformation** means. Because it has 2 understandings with exactly the same mathematical expression:

- **Active Transformation**: The coordinates are fixed, but the fields are transformed.
- **Passive Transformation**: The coordinates are transformed, and the field transform covariantly.

This definition can be rewrite a bit more elegantly when we define the change of Action under this coordinate transformtaion:

Definition 16. ***Induced Change of Field and Acton under Transformation***

Consider a field theory with dynamical fields ϕ_a and a action S that takes the form:

$$S = \int d^d x \ \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{204}$$

Form a transformation:

$$x'^\mu = f^\mu(x, \alpha) \tag{205}$$

$$\phi'(x') = F(\phi(x), \alpha) \tag{206}$$

We can induce a change of the field configuration:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = F(\phi(f^{-1}(x)), \alpha) \tag{207}$$

We define the action after the as:

$$S' = \int d^d x \ \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) \tag{208}$$

We define Symmetry as:

Definition 17. ***Symmetry(QFT standard)***

A transformation is a symmetry of the action if the action is invariant up to a total derivative:

$$S' = S + \int d^d x \ \partial_\mu K^\mu \tag{209}$$

{eq:Symme

Pluging in the definition of action we have:

$$\delta S[\phi] = \textit{Boundary Term} \tag{210}$$

For we can see that $S' - S$ is the standard definition of variation of action functional induced by the transformation.Thus we can rephrase as: ***A transformation is a symmetry if the induced***

variation of the action functional is a boundary term.

We can Prove that these two definitions are equivalent.We consider eq. (209) and do a variable substitution $x \to x'$, we have:

$$S' = \int d^d x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) + \int d^d x' \ \partial'_\mu K^\mu = S = \int d^d x \ \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{211}$$

Thus we compare the integrands and get the first definition.

Remark: Why do we use the Second definition? Because in the path integral formalism this is more natural and make the derivation more clean. However, the first definition is more intuitive easier to understand.

Noether's Theorem and Conserved Current

Consider a transformation that is a **Symmetry of Rigid Parameters**, we can have a Coserved Current and the form of the current is related to the variation of action functional.

Theorem 9. ***Noether's Theorem(Field Theory Standard)***

Consider a field theory with dynamical fields ϕ_a and a action S that takes the standard form. Assume that we have a transformation that is a symmetry:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \tag{212}$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(x) \tag{213}$$

*where ω_a are **rigid parameters**. Then there exists a conserved current ${J^\mu}_a$ that satisfies, if we **lift the rigid parameters to local parameters** $\omega_a(x)$:*

$$\delta S = - \int dx {J^\mu}_a \partial_\mu \omega_a + Boundary\ Terms \tag{214}$$

*We only have the derivative term $\partial_\mu \omega_a$ this is because the transformation is a symmetry for rigid parameters. One explicit form of ${J^\mu}_a$ is (**Canonical Form**):*

$${J^\mu}_a = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right\} \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \tag{215}$$

If the EoM is satisfied, we have the conservation equation:

$$\partial_\mu {J^\mu}_a = 0 \tag{216}$$

Proof:

[leave it for later.]

Series of Conserved Currents

The Conserved Current is not Unique. We can always add a term of the form:

$$J^\mu{}_a \to J^\mu{}_a + \partial_\nu B^{\mu\nu}{}_a \quad \text{where} \quad B^{\mu\nu}{}_a = -B^{\nu\mu}{}_a \tag{217}$$

Then it is also a conserved current and Satisfy the relation with the variation of action functional. This is because:

$$\int d^dx\ \partial_\nu B^{\mu\nu}{}_a \partial_\mu \omega_a = \int d^dx\ \partial_\mu \left(B^{\mu\nu}{}_a \partial_\nu \omega_a\right) - \int d^dx\ B^{\mu\nu}{}_a \partial_\mu \partial_\nu \omega_a \tag{218}$$

The first term is a boundary term and the second term is symmetric in $\mu\nu$ while $B^{\mu\nu}{}_a$ is antisymmetric in $\mu\nu$ thus it vanishes.

7.5.2 Energy-Momentum Tensor

Canonical Energy-Momentum Tensor

Consider the spacetime translation symmetry:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \tag{219}$$

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{220}$$

We can construct its Canonical Conserved Current which is defined as the canonical

Definition 18. ***Canonical Energy-Momentum Tensor***

The Canonical Energy-Momentum Tensor is defined as the conserved current of spacetime translation symmetry:

$$T_c^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{221}$$

According to the Noether's Theorem, we can see that if a theory has translation symmetry, we lift the rigid translation parameters ϵ^μ to local parameters $\epsilon^\mu(x)$, we have:

$$\delta S = -\int d^dx\ T_c^\mu{}_\nu \partial_\mu \epsilon^\nu + \text{Boundary Terms} \tag{222}$$

and if the EoM is satisfied, we have the conservation equation:

$$\partial_\mu T_c^\mu{}_\nu = 0 \tag{223}$$

This is generally, the canonical E-M tensor is **not symmetric** in its indices and has a **non-vanishing trace**.

Symmetric Traceless Energy-Momentum Tensor

If the theory has Lorentz Symmetry and Scale Symmetry, we can always construct a symmetric traceless energy-momentum tensor from the canonical one by adding an improvement term.

Theorem 10. ***Symmetric Traceless Energy-Momentum Tensor***

Consider a field theory with Lorentz and Scale Symmetry. We can construct a ***Symmetric and Traceless*** *Energy-Monentum Tensor:*

$$T^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu} \tag{224}$$

where B and X are constructed tensors. Moreover, the Lorentz and Scale Conserved Currents can be constructed from this symmetric traceless energy-momentum tensor as:

$$J^{\mu\rho\sigma}_{Lorentz} = T^{\mu\rho}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\rho \tag{225}$$

$$J^{\mu}_{Scale} = T^{\mu\nu}x_\nu \tag{226}$$

Proof: See yellow book chap 4.2.2 and chap 2.5.1.

7.6 补充：Noether Charge 在 Hamiltonian 力学的意义

{sec:Noet

我们发现前面的讨论都是基于 Lagrangian 力学的视角的。但是对于量子力学我们希望研究这些对称性和守恒荷在 Hamiltonian 力学中的意义。这样我们可以直接使用代数力学的方法量子化变成量子力学。

Hamiltonian与时间平移对称Noether Charge

我们可以从两者的定义出发推导发现这两者【在没有边界 term K 的情况下】必然是一个东西。有的时候一个视角方便计算我们就使用一个视角进行计算!!

我们观察场论的能动量张量的定义：

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\nu\phi_a - \delta^\mu_\nu\mathcal{L} \tag{227}$$

我们会意识到，$T^0{}_0$ 的形式和 Hamiltonian Density：

$$\mathcal{H} \equiv \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi,\pi) \tag{228}$$

的定义的形式是完全一样的。所以其实这就证明了，时间平移对称性的守恒荷也就是守恒流在等时面上的积分就是 Hamiltonian。

守恒荷与Hamiltonian对易关系

守恒荷是守恒的，所以我们根据 Hamiltonian 力学之中代数时间演化方程，知道：

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q, H\} = 0. \tag{229}$$

所以我们知道守恒荷和 Hamiltonian 在代数上很可能是对易的。

- 注意!! 如果守恒荷显含时间的话，那么我们有:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \{Q, H\} = 0 \tag{230}$$

这个时候守恒荷和 Hamiltonian 不一定对易!!

一个最典型的例子就是 Boost 守恒荷和 Hamiltonian 不对易!!

守恒荷代数与Lagrangian Formalism生成元算符代数

这两个代数是一样的。所以我们如果想找到守恒荷的代数结构，我们可以直接从 Lagrangian Formalism 的视角下找到生成元算符然后计算其代数结构。我们给出 Lagrangian Formalism 里面生成元的定义:

Definition 19. 生成元定义:

对于一个对称性变换 ω，我们可以 *induce* 一个场构型空间的无限小变分。这个变分可以写作;

$$\delta_\omega \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \phi(x) \tag{231}$$

其中 G_a 是一个微分算符 (一般包含一些函数和导数算符的组合)，我们把这个算符叫做这个对称性变换的生成元算符。

对称性变换的生成元可以通过导数算符互相作用的方式给出一个李代数。我们会发现这个李代数和守恒荷在 Poisson Bracket 下面构成的代数是一致的。我们给出证明:

首先对于两个对称性变换，我们可以计算不同作用顺序的差值:

$$\{\{F, Q_a\}, Q_b\} - \{\{F, Q_b\}, Q_a\} = \delta_b(\delta_a F) - \delta_a(\delta_b F) = [\delta_b, \delta_a]F. \tag{232}$$

然后根据 Poisson Bracket 的 Jacobi Identity，我们有:

$$\{F, \{Q_a, Q_b\}\} = \{\{F, Q_a\}, Q_b\} - \{\{F, Q_b\}, Q_a\}. \tag{233}$$

因此我们得到:

$$[\delta_b, \delta_a]F = \delta_{[b,a]}F = f^c_{ab}\delta_c F = f^c_{ab}\{F, Q_c\}. \tag{234}$$

$$\{F, \{Q_a, Q_b\}\} = f_{ab}{}^c\{F, Q_c\}. \tag{235}$$

这就意味着生成元在算符作用下构成的李代数的结构常数和守恒荷在 Poisson Bracket 下面构成的李代数的结构常数是一样的!! 因此两个李代数在数学结构上是一样的!!

守恒荷作为对称性变换下动力学变量构型变换的生成元

我们知道任意的相空间上的函数都可以 Generate 一个场构型的变换。那么我们想问守恒荷也是一个相空间上的函数。其 Generate 了什么样子的变换呢？答案是：守恒荷 Generate 了对应的对称性变换！！

我们会发现如果我们的场构型的无限小变分是 $\delta\phi_a$ 的话，那么这个无限小变换可以写作下面的形式：

$$\delta_\alpha\phi_a(x) \equiv \phi'_a(x) - \phi_a(x) = \alpha^i \{Q_i, \phi_a(x)\} = \alpha^i \Delta_{ai}(x). \tag{236}$$

这个证明过程可以看作业，其实就是把守恒荷的定义带入 Poisson Bracket 的定义之中。然后使用 functional derivative 的定义进行计算就好。

所以我们知道：

- 对称性变换对应的守恒荷和对称性变换 generator 这个相空间的函数，是一个东西的两种定义方法！

特殊的一个经典的说法就是：**Hamiltonian = 时间平移变换生成元 = 时间平移对称性守恒荷**

7.7 Questions and thoughts

Question 7.22 对于对称性，Weinberg 的定义和这里的定义是怎么对应的？

我们对称性有两种定义方式：

- 课程的定义：定义对称性作为一个 coordinate transformation。这个变换保证 EoM 不变。也就是【Lagrangian 的【形式不变】】
- Weinberg 的定义：定义对称性作为一个 field variation。这个变换如果在任何情况下【不需要 on-shell】都保证【作用量取值】不变。

这两种定义方式是完全等价的。因为 coordinate transformation 可以完全 induce 出来一个 field variation。反过来 field variation 也可以 induce 出来一个 coordinate transformation。并且我们可以证明：

- 两种定义下对应给出的守恒荷是完全一样的！！

第一种定义更加 physical 给予了丰富的物理诠释；第二种定义更加计算 concrete，方便判断 symmetry 以及求解计算守恒流。

课程中的定义	**Weinberg 的定义**
对称性**坐标变换以及场的协变**（coordinate transformation）	对称性被定义为**场的变分**（field variation）
要求：作用量的形式不变的情况下 plug in 变换前后的场和导数算符，取值相同；等价于运动方程形式不变	要求：作用量在变分前后的数值不变
Local symmetry 是群参数依赖于时空点的对称性变换	Local symmetry 是无限小变分系数 $\epsilon(x)$ 依赖于时空点的场变分

表 2: 两种对称性定义的比较与对应关系

□

Question 7.23　为什么对于经典力学（并非场论）的时间平移对称性的推导之中不需要使用运动方程呢？

我们注意！！！

- 我们需要【满足运动方程】来证明守恒流是守恒的！！
- 但是推导守恒流的形式的时候没有必要使用运动方程！！

比如，经典力学的时间平移对称性的推导之中，我们并没有使用运动方程就可以读出守恒流：

$$\delta S=\int dt\dot{a}(\dot{q}\frac{L}{\dot{q}}-L)+\partial_t(aL) \tag{237}$$

我们自然可以直接读出守恒流是：

$$H=\dot{q}\frac{L}{\dot{q}}-L \tag{238}$$

如果需要证明这个流是守恒的，我们需要运动方程满足，这个时候：

$$\delta S=0\Rightarrow\frac{dH}{dt}=0 \tag{239}$$

如果存在一个对称性，不论运动方程是否满足我们发现 $\delta S=0$，那么才是 Gauge Symmetry。 □

8 Sup 4: Generalized Noether's theorem

{sec:Sup

上文之中对于 Noether 定理的证明是有待考察的。

- 一个群 generate 出来的 symmetry 变换一定给出守恒流吗?? 答案是肯定的!
- 但是，守恒流一定是 non-trivial 的吗? 答案是否定的!

我们发现一系列的 Symmetry 其实会给出 trivial 的守恒流。这一系列我们称之为 gauge symmetry。但是 trivial 的守恒流并不意味着 trivial 的守恒荷。所以我们仔细来讨论一下这些特殊的 gauge symmetry 是什么!!

- 由于内容过多，我将在 Adanced Lectures on GR 的 note 之中进行详细讨论。

9 Lecture 8: Quantization of Scalar Field

{sec:Lect

9.1 自由标量场量子化

9.1.1 经典自由标量场 motivation

谐振子近似

我们考虑一个任意经典的 Lagrangian 可以写作：

$$L = L(q, \dot{q}) \tag{240}$$

1. **低速展开**：我们对于 $\dot{q}$ 进行展开得到：

$$\mathcal{L} = F_0(q) + F_1(q)\dot{q} + F_2(q)\dot{q}^2 + F_3(q)\dot{q}^3 + \dots \tag{241}$$

   可以证明 $F_1(q)$ 项是一个 total derivative 所以不会影响运动方程，所以我们忽略它。

2. **低能近似**：我们考虑 $F_0(q) = -V(q)$ 的情况下在一个 $V(q_0)$ 最低点附近进行展开

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2}V''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots \tag{242}$$

在上面两个近似的基础上，忽略高阶项得到 Lagrangian 是下面的形式：

$$L = -\frac{1}{2}m\omega^2\delta^2 + \frac{m}{2}\dot{\delta}^2 \tag{243}$$

也就是一个谐振子运动。

从谐振子到自由标量场

我们如果考虑一个**低速**，**低能**的标量协变场理论。那么我们就会得到下面的 Klein-Gordon Lagrangian：

Definition 20. *Klein-Gordon Field*

Klein-Gordon Field 是一种标量协变场的理论，其 Lagrangian 为：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{244}$$

我们会立刻发现其两个性质：

- **经典 EoM**：对于这个场来说其经典 EoM 即为 Klein-Gordon 方程：

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0. \tag{245}$$

- **量纲分析**：根据 Action 是一个 Dimension less 的东西分析其每一个部分的量纲得到：

$$\left[d^4x\right] = E^{-4}, \quad [\mathcal{L}] = E^4, \quad [\phi] = E, \quad \left[m^2\right] = E^2. \tag{246}$$

Hamiltonian Formalism of KG Field

> **Remark:** 注意！从此开始我们已经固定了一个时间维度和一个等时面了，可以知道我们的量子化是在这个等时面上面进行的！

对于正则量子化我们需要从 Hamiltonian formalism 开始。我们通过场论的方法给出：

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \tag{247}$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2. \tag{248}$$

经典对称性与守恒量

我们知道 Klein-Gordon Lagrangian 有平移对称性，并且作为标量场理论 Energy-Momentum Tensor 自动保证了对称条件不需要调整。

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2\right] \ . \tag{249}$$

我们计算其对应的守恒荷：

$$H = \int d^3\mathbf{x} T^0{}_0 = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right), \tag{250}$$

$$P_i = \int d^3\mathbf{x} T^0{}_i = \int d^3\mathbf{x}\dot{\phi}\partial_i\phi = \int d^3\mathbf{x}\pi\partial_i\phi. \tag{251}$$

我们发现能动量张量的第一个守恒荷正好对应了 Hamiltonian 自己。所以我们知道：

- Hamiltonian 就是时间平移对称性的守恒荷。【这对于一切场论都是成立的！！】

9.1.2 自由标量场量子化

正则量子化公理

我们对于正则量子化在量子力学的情况进行推广。下面给出场的正则量子化的原则：

> **Axiom 1. 标量场正则量子化公理**
>
> 我们将经典场 $\phi(x)$ 以及其共轭动量 $\pi(x)$ 提升为算符，保证这些算符的对易关系满足如下的条件：
>
> - ***Hermite Operators*** 时空作为基的场算符以及共轭动量算符都是厄米算符：
>
> $$\phi(x)^\dagger = \phi(x), \quad \pi(x)^\dagger = \pi(x). \tag{252}$$

- ***Canonical Commutation Relations*** 场算符以及共轭动量算符满足如下的对易关系：

$$\{\ ,\ \} \to i[\ ,\ ] \tag{253}$$

上面信息完全给出了一个经典理论对应的量子理论

Remark: 我们正则量子化只需要定义 canonical commutation relations 就可以了。因为我们知道所有客观测量都是相空间的函数，所以 canonical commutation relations 已经足够定义一切物理量的对易关系了！

所以我们量子化后会给出：

$$i\left[\hat{\pi}(\mathbf{x},t),\,\hat{\phi}(\mathbf{y},t)\right] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{254}$$

$$\left[\hat{\pi}(\mathbf{x},t),\,\hat{\pi}(\mathbf{y},t)\right] = \left[\hat{\phi}(\mathbf{x},t),\,\hat{\phi}(\mathbf{y},t)\right] = 0. \tag{255}$$

再根据具体理论研究的可观测量，Hamiltonian 等等对于相空间的依赖给出其他对应的量子算符对应的代数关系。这就是量子化的过程！！这些代数关系在 Hilbert 空间上面的表示给出了这个量子理论的全部物理内容。

复习量子化的一些等价概念

我们知道，量子化前 Hamiltonian 力学的各种代数结构是完全的给到量子力学的。只是空间变成了 Hilbert Space！

特别的，对于对称性，守恒荷相关的概念我们也可以通过对易关系相同推广到量子力学中。甚至得到更加丰富的结论，我们总结几点：

- **量子守恒荷和 Hamiltonian 对易**：

  根据量子化条件，我们知道一个经典对称性的存在意味着守恒荷 Q 与 Hamiltonian 的 Poisson Bracket 为零。量子化之后我们就有：

$$\{Q, H\} = 0 \quad \to \quad [\hat{Q}, \hat{H}] = 0. \tag{256}$$

  也就是说量子守恒荷与 Hamiltonian 对易。因而，量子守恒荷和 Hamiltonian 可以有共同本征态，可以共同对角化。我们经常使用这个性质来简化问题，比如经典

- **量子守恒荷作为 Hilbert Space 上变换的生成元**：

  我们对于经典的情况已经知道：

  - 对称性变换的守恒荷等价于作为相空间函数的对称性变换生成元

  那么这个结论可以通过量子化的手段推广到量子力学之中。我们就会发现：

  - 守恒荷量子化的结果变成了 Hilbert Space 上的算符 (Heisenberg Picture) 和态 (Schrodinger Picture) 的变换生成元。

从 Heisenberg Picture 我们可以直接看出：

$$\delta_\omega \hat{\mathcal{O}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{Q}_\omega, \hat{\mathcal{O}}], \tag{257}$$

其中 $\hat{\mathcal{O}}$ 是任意的可观测量算符，$\hat{Q}_\omega$ 是对应对称性变换的守恒荷算符。这正是量子力学中生成元的定义形式：守恒荷通过对易子产生算符的无穷小变换。

类似地，在 Schrödinger Picture 中，守恒荷作为作用在态矢量上的生成元：

$$|\psi\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}\omega\hat{Q}}|\psi\rangle, \qquad \delta_\omega|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\omega\hat{Q}|\psi\rangle. \tag{258}$$

因此我们看到，无论在经典力学还是量子力学中，**对称性变换的生成元与守恒荷是同一个对象。**它在经典极限下通过 Poisson 括号生成变换，而在量子理论中通过对易子生成变换。这也解释了为什么 Noether 守恒量的代数结构与其所对应的对称性李代数完全一致。

[Weinberg 之中使用了另一个思路来讨论这个问题，是基于更纯粹的代数的。回头可以参考捏?]

9.1.3 自由标量场 Spectrum 分析

Hamiltonian Operator对称分析

我们希望研究这个量子化 Hamiltonian 给出的能级信息：

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\,\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\left[\frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\left(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x})\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2(\mathbf{x})\right]. \tag{259}$$

但是我们意识到存在：$\nabla\hat{\phi}$ 把原本没有关系的不同流形位置上的场进行了一个耦合。我们希望通过对称性分析进行对角化。进行一个对称性分析：

我们已经知道存在空间平移对称性。因此，我们可以使用动量本征态来对角化 Hamiltonian。这个操作可以使用 fourier transform 的 trick 进行实现。

Fourier Transform Trick

我们先考虑离散的动量空间情况。也就是我们认为空间流形是一一个 T^3 的环面满足：

$$0 \le \mathrm{x}^1 < \mathrm{L},\ 0 \le \mathrm{x}^2 < \mathrm{L},\ 0 \le \mathrm{x}^3 < \mathrm{L}. \tag{260}$$

并且场对于任意一个边界都是满足周期边界条件：

$$\phi(x^1, x^2, x^3) = \phi(x^1 + L, x^2, x^3) = \phi(x^1, x^2 + L, x^3) = \phi(x^1, x^2, x^3 + L). \tag{261}$$

这样我们可以对于场算符进行 Fourier Transformation。给出下面的结论。

- **Fourier Basis:** 我们定义一些函数进行 Fourier Transformation：

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}_{\mathbf{n}} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3. \quad V = L^3. \tag{262}$$

我们知道这个函数构成了平移算符在 T^3 上的本征函数系，可以发现：

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}}\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\ . \tag{263}$$

并且满足完备归一关系：

$$\begin{aligned}(\psi_{\mathbf{n}},\psi_{\mathbf{m}}) \equiv \int \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})^*\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \frac{1}{V}\int e^{i(\mathbf{k}_{\mathbf{m}}-\mathbf{k}_{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{x}}d^3\mathbf{x} = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}},\\ \sum_{\mathbf{n}}\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})^*\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{264}$$

Remark: 关于离散和连续的 delta 函数。对于离散和连续的 forier 展开我们可以得到两种 delta 函数的定义，对于离散情况下我们是使用 Kronecker delta function：

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}e^{i(\mathbf{k}_{\mathbf{n}}-\mathbf{k}_{\mathbf{m}})\cdot\mathbf{x}}. \tag{265}$$

而对于连续情况我们使用 Dirac delta function：

$$\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \tag{266}$$

我们使用 Fourier Basis 进行展开。我们定义 Fourier Mode 的 Operator

Definition 21. *Mode Operators*

我们对于场算符进行线性组合，给出 *Mode Operators* 的定义：【这里我们图方便省略了算符，但记住 ϕ_n,ϕ 都是算符，$\psi(x)$ 只是个函数】

$$\phi_{\mathbf{n}}(t) = \int \psi^*_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x},t)d^3\mathbf{x},\quad \pi_{\mathbf{n}}(t) = \int \psi^*_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x},t)d^3\mathbf{x}, \tag{267}$$

那么根据正交完备关系，我们可以使用这些 Operator 完全的重构场算符，以及这个理论的一切算符。我们研究这些算符的性质。

Mode Operators的性质分析

- **重构场算符**：

$$\phi(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{n}}\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{n}}(t),\quad \pi(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{n}}\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\pi_{\mathbf{n}}(t). \tag{268}$$

- **Hermite Conjugate**: 显然这个线性组合后的算符不一定是 Hermite 的。我们分析会发现：

$$\phi^\dagger_{\mathbf{n}}(t) = \phi_{-\mathbf{n}}(t),\quad \pi^\dagger_{\mathbf{n}}(t) = \pi_{-\mathbf{n}}(t). \tag{269}$$

- **对易关系**：我们根据定义得到：

$$[\phi_{\mathbf{n}}(t),\phi_{\mathbf{m}}(t)]=[\pi_{\mathbf{n}}(t),\pi_{\mathbf{m}}(t)]=0, \tag{270}$$

$$[\phi_{\mathbf{n}}(t),\pi^{\dagger}_{\mathbf{m}}(t)]=i\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \tag{271}$$

Hamiltonian的Mode Decomposition

我们使用 Mode Operators 作为动力学的自由度重构 Hamiltonian。我们发现 Hamiltonian 可以写作：

$$H=\int \mathcal{H}d^3\mathbf{x}=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left[\pi^2+(\nabla^i\phi)^2+m^2\phi^2\right] \tag{272}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{n}}\left[\pi_{\mathbf{n}}\pi^{\dagger}_{\mathbf{n}}+\left(m^2+\mathbf{k}^2_{\mathbf{n}}\right)\phi_{\mathbf{n}}\phi^{\dagger}_{\mathbf{n}}\right],\quad \mathbf{k}_{\mathbf{n}}\equiv\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{L}}\mathbf{n}. \tag{273}$$

9.1.4 自由标量场的连续极限下 Spectrum 分析

连续极限

如果我们希望考虑整个空间而不是 T^3 流形上面的结论。所以我们选择 $L\to\infty$ 的极限并分析其中的变化，我们发现：

- **k_n 的变换**：离散的情况下我们有 $k_n=\dfrac{2\pi n}{L}$ 在连续极限下 $n\to\infty, L\to\infty$ 所以我们有理由认为存在连续变量：

$$\mathbf{k}_n\to\lim_{L\to\infty}\frac{2\pi}{L}\mathbf{n}(\mathbf{k},L)=\mathbf{k}. \tag{274}$$

- **求和到积分**：对于 n 的求和可以自然的写作对于 k 的积分：

$$\sum_{\mathbf{n}}(\dots)\to\int d^3\mathbf{n}\,(\dots)=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\int d^3\mathbf{k}\,(\dots)\,. \tag{275}$$

- **Field Mode Operator rescale:** 根据 mode operator 的定义在 $L\to\infty$ 的时候 $\psi_n\to 0$ 所以我们需要对 mode operator 进行 rescale：

$$\phi_k=\lim_{L\to\infty}\sqrt{V}\phi_n \tag{276}$$

因此存在【正好是傅立叶变换的关系】：

$$\phi_{\mathbf{k}}(t)\equiv\int d^3\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t).\quad \phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\phi_{\mathbf{k}}(t). \tag{277}$$

其中逆变换的求解我们使用了 delta 函数的一个性质：

$$\int d^3\mathbf{x}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}}=(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}), \tag{278}$$

- **Momentum Mode Operato rescale:** 类比动力学场，我们把动量场的 mode operator 也定义为：

$$\int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\pi(\mathbf{x},t) = \tilde{\pi}_{\mathbf{p}}(t) \tag{279}$$

逆变换也是同理。

- **Delta 函数：** 在离散的情况下是使用 Kronecker delta function，在连续极限下我们使用 Dirac delta function，这两个函数是这样的极限关系：

$$V\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = \int_V d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k_n}-\mathbf{k_m})\cdot\mathbf{x}} \to (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k_n}-\mathbf{k_m}), \tag{280}$$

所以我们形式化的有：

$$V = (2\pi)^3\delta^3(0). \tag{281}$$

这些关系在数学上是有问题的。但是物理上帮我们理解了 dirac delta 函数 0 点发散的意义，其实等价于我们考虑无穷大体积的发散。

连续极限下的对易关系

同样的我们分析 mode operator 的对易关系是：

$$\left[\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(t), \tilde{\phi}_{\mathbf{p}}(t)\right] = [\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}(t), \tilde{\pi}_{\mathbf{p}}(t)] = 0 \quad \left[\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(t), \tilde{\pi}_{\mathbf{p}}(t)\right] = i\int d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{p})x} = i(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{k}) \tag{282}$$

连续极限下Hamiltonian

同样的我们构造 Hamiltonian 给出下面的结果：

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger + \omega_{\mathbf{k}}^2\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}^\dagger\right), \tag{283}$$

我们发现这个 Hamiltonian 正好是无穷多个独立谐振子的总和！所以类比量子力学我们使用产生湮灭算符进行表示：

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\omega_{\mathbf{k}}\tilde{\phi}_{\mathbf{k}} + i\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}\right), \quad a_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\omega_{\mathbf{k}}\tilde{\phi}_{-\mathbf{k}} - i\tilde{\pi}_{-\mathbf{k}}\right), \tag{284}$$

我们计算其对易关系满足：

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{285}$$

我们发现 Hamiltonian 可以写作：

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}}\left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}(2\pi)^3\delta(0)\right]. \tag{286}$$

零点能密度发散

我们会发现存在 $\delta(0)$ 根据之前的讨论我们 interpret 为无穷大体积的发散，所以我们计算零点能量是：

$$E_0 = V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}, \quad \rho_0 \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}, \tag{287}$$

ρ_0 我们 interpret 为单位体积的零点能量密度。我们发现这个积分在 $k \to \infty$ 的时候发散了！

> **Remark:** 注意！这个发散不仅仅是体积趋于无穷导致的，更核心是我们选择了无限密度的自由度！

9.2 Questions and thoughts

Question 9.24　有没有什么定理保证 Hamiltonian 一定对应着时间平移对称性的守恒荷？

我们参考上一章 section 7.6之中的讨论！

□

Question 9.25　为什么 Poisson Bracket 给出的守恒量的对易关系和对称性生成元给出的对易关系是完全一样的？这意味着什么？

见上一章的 section 7.6之中的讨论！ □

10 Lecture 9-10: Spectrum and Lorentz Covariant of Quantum Scalar Field

{sec:Lect

10.1 自由标量场 Hilbert Space

10.1.1 Fock Space 构造 Hilbert Space

Fock Space as Hilbert Space

对于自由标量场我们的复习其基本知识:

- **Hmiltonian 形式**

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}. \tag{288}$$

- **产生湮灭算符对易关系**

$$\left[H, a^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}}, \quad [H, a_{\mathbf{k}}] = -\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}, \tag{289}$$

对于这样形式的系统我们有一套系统的方法构建其 Hilbert 空间:

Definition 22. *Fock Space 作为 Hilbert 空间*

对于自由标量场，我们定义其 *Fock Space* 作为 *Hilbert* 空间:

$$\mathcal{H} = \mathrm{Span}\left\{\prod_j a^\dagger_{\mathbf{k}_j}|0\rangle, j = 0, 1, 2....\right\} \equiv \{|0\rangle, |\mathbf{k}_1\rangle, |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle, ...\}. \tag{290}$$

其中 $|0\rangle$ 是真空态，满足 $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$。

我们可以使用对易关系很自然的赋予一个内积结构。

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle = \langle 0|a_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \tag{291}$$

对称波函数与波色子

我们会发现这个 Hilbert 空间上的态必然是对称的。也就是说:

$$|\Psi_f\rangle \equiv \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2\ f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2\ f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1\rangle = \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2\ f(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle. \tag{292}$$

其中 $f(k_1, k_2)$ 必然是一个对称函数，因为反对称的部分会被削掉！！这说明我们的理论是一个关于波色子的量子理论

量子态的Interpretation

我们如何理解这个 Hilbert 空间中的量子态呢？我们发现这些量子态可以被解释为 on shell 的粒子。为了看出来这个结果我们需要正则量子化一下动量算符「也就是空间平移对称性的守恒量我们 interpret 成为动量」:

$$P^i = -P_i = -\int d^3\mathbf{x}\dot{\phi}\partial_i\phi = -\int d^3\mathbf{x}\pi\partial_i\phi \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathbf{k}^i a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \tag{293}$$

发现对易关系有:

$$[P^i, a_{\mathbf{k}}^\dagger] = \mathbf{k}^i a_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad [P^i, a_{\mathbf{k}}] = -\mathbf{k}^i a_{\mathbf{k}}. \tag{294}$$

对于这个关系我们 interpret 为:

- $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ 产生了一个为能量和动量为：$k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = (\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \mathbf{k})$ 的 on shell $k^\mu k_\mu = m^2$. 粒子。

> **Remark:** 注意!!! 我们所有的讨论都是在一个固定的参考系下面进行的!!! 我们固定了时间是什么并且选择了固定的参考系下的空间坐标系!!!
>
> 对于坐标变换前后这个「粒子」的动量会发生什么变换我们后面会进行讨论，结论是，对于 Lorentz 变换来说粒子的动量会按照 Lorentz 变换进行变换。

10.1.2 Lorentz 不变形式的 Measure 和 Delta 函数

物理人喜欢把一切细节写作协变样子的，哪怕我们上面的讨论固定了一个参考系。但是，我们会希望一个形式的三维积分和三维 delta 函数在 Lorentz 变换下也是协变的【并且之后我们会知道不同参考系下面量子化确实就是按照协变形式协变】。我们下面讨论怎么书写!

- **Lorentz 不变 measure**：对于这个三维积分 measure 在 lorentz 变换下不变的

  $$d\Omega_k \equiv \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}, \tag{295}$$

  这个不变的理解可以认为是因为我们这个三维的积分等价于四维的 on shell 积分，而 on shell 的约束方程和四维度的 measure 都是 Lorentz 不变的。因此我们整个三维度的 measure 也是 Lorentz 不变的:

  $$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)f(k) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} f(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \tag{296}$$

  当然数学上我们也可以严格验证其 Lorentz 不变的性质：

  $$d\Omega_{k'} = d\Omega_k, \quad k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu. \tag{297}$$

- **Lorentz 不变 delta 函数**：对于 delta 函数我们也可以定义一个协变的 delta 函数：

  $$(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \tag{298}$$

我们可以验证其在 Lorentz 变换下也是不变的：

$$(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{k}') = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \quad p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}p^{\nu}, k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}. \tag{299}$$

> **Remark:** 为什么我们可以使用这个协变形式呢？本质上是因为我们的场都是 on shell 的！因此我们可以把 k^0 用 $\mathbf{k}$ 表示出来，蕴含着不 explicit 的 Lorentz 协变性！！

于是我们可以强行把 Hamiltonian 和动量算符写在一起：

$$P^{\mu} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} k^{\mu}\bar{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\bar{a}_{\mathbf{k}}, \quad \bar{a}_{\mathbf{k}} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}a_{\mathbf{k}}, \tag{300}$$

这很协变了。btw，我们这里的 $\bar{a}$ 是一个稍微 modify 过的产生湮灭算符。

- **协变产生湮灭算符**

$$a_{\mathbf{k}} \to \bar{a}_{\mathbf{k}} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}a_{\mathbf{k}}, \quad \left[\bar{a}_{\mathbf{k}}, \bar{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\right] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}), \tag{301}$$

- **协变量子态**

  显然我们的 Hilbert Space 也可以写作这个协变的形式，其定义与内积结构是：

$$|\mathbf{k}\rangle \equiv \bar{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}|0\rangle, \quad \langle\mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle = \langle 0|\bar{a}_{\mathbf{p}}\bar{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}|0\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{302}$$

  我们会发现这个内积结构自然的给出了 Lorentz 不变的形式。之后我们的坐标变换的讨论会知道确实左边的量子态内积也是 Lorentz 不变的！！

Important: 协变形式

从此以后未加声明，我们使用协变形式来书写自由标量场的量子态和算符，并且不再使用上横线进行区分！我们写的 a_k 以后都是 $\bar{a}_k$ 的意思！并且这里由于我们知道所有 a_k 全部代表 on shell 的粒子，因此我们有的时候为了方便使用 $k^{\mu} = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ 来表示其四维动量！$a_{\mathbf{k}}, a_k$ 两者是完全没有区别的！！

协变的产生湮灭算符表示场算符形式为：

> **Theorem 11.** 自由标量场等时面展开
>
> 自由标量场的场算符和共轭动量算符的展开为：
>
> $$\phi(\mathbf{x}) = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^{\dagger}_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right), \tag{303}$$
>
> $$\pi(\mathbf{x}) = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \left(-i\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + i\omega_{\mathbf{k}}a^{\dagger}_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right). \tag{304}$$

10.1.3 动量与位置表象

我们之前研究是在动量表象的，所以给出的单粒子态是 $|\mathbf{k}\rangle$。我们也可以定义位置表象的单粒子态，我们 interpret 场算符 $\phi(x)$ 作为产生一个在位置 x 的粒子的算符：

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}|\mathbf{p}\rangle \tag{305}$$

我们计算会发现：

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle \equiv \langle\mathbf{p}|\phi(\mathbf{x})|0\rangle = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{306}$$

这正好就是平面波的形式!!

- 我们 interpret 为 $\phi(\mathbf{x})|0\rangle$ 是一个在位置 $\mathbf{x}$ 的粒子态。

10.2 Heisenberg Picture 构造全时空的场算符

{sec:Heis

时间平移构建全时空场算符

量子化的过程是在一个等时面上面定义的，但是我们的 Heisenberg Picture 已经告诉我们这些算符在不同时间是什么样子的，我们不妨先通过 Heisenberg Picture 把这些算符扩展到全时空。根据量子力学 Heisenberg Picture，我们给出定理：

Theorem 12. 自由标量场时间演化

自由标量场在未来过去时间的构型为：

$$\phi(x^\mu) \equiv e^{iHt}\phi(0,\mathbf{x})e^{-iHt}, \tag{307}$$

$$\pi(x^\mu) \equiv e^{iHt}\pi(0,\mathbf{x})e^{-iHt} \tag{308}$$

下面我们通过自由标量场的 Hamiltonian，具体计算这些场算符在时空的形式。通过产生湮灭算符和 Hamiltonian 的对易关系我们知道：

$$e^{iHt}a_{\mathbf{p}}e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt}a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-iHt} = a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{iE_{\mathbf{p}}t}, \tag{309}$$

因此全时空的场算符可以写作：

{thm:cova

Theorem 13. 自由标量场的全时空场算符的协变形式

自由标量场的全时空场算符的协变形式为：

$$\phi(x) = \int d\Omega_{\mathbf{p}}\left(e^{-ip_\mu x^\mu}a_{\mathbf{p}} + e^{ip_\mu x^\mu}a^\dagger_{\mathbf{p}}\right). \tag{310}$$

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = \int d\Omega_{\mathbf{p}}\Big(-i\omega_{\mathbf{p}}e^{-ip_\mu x^\mu}a_{\mathbf{p}} + i\omega_{\mathbf{p}}e^{ip_\mu x^\mu}a^\dagger_{\mathbf{p}}\Big). \tag{311}$$

我们可以验证，这个显然是满足经典的 Klein Gordon 运动方程的。

空间的类似的note

其实通过产生湮灭算符和动量算符的对易关系我们也可以有下面的关系：

$$e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{312}$$

注意，这里全部都是 Euclidean 的内积！我们通过这个带入 theorem 13会发现一个神奇的关系：

$$e^{-iP^{\mu}b_{\mu}}\phi(x)e^{iP_{\mu}b^{\mu}} = \phi(x-b) \quad e^{iP^{\mu}b_{\mu}}\phi(x)e^{-iP_{\mu}b^{\mu}} = \phi(x+b) \tag{313}$$

{eq:spati

我们把时空结合起来，就会发现，其实场在时空每一个点的取值都可以通过一个“演化算符”然后任意时空点的取值可以通过这个算符作用在原点的场算符上面得到：

$$\phi(x) = e^{i(Ht-\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})}\phi(0)e^{-i(Ht-\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})} = e^{iP_{\mu}x^{\mu}}\phi(0)e^{-iP_{\mu}x^{\mu}}, \tag{314}$$

Remark: 我们这里用了记号，所有 P^{μ} 都是算符而 p^{μ} 是数值！

10.3 角动量和 Boost 守恒量

{sec:Boos

角动量与boost算符的产生湮灭算符表示

我们希望使用产生湮灭算符写出角动量和 boost 算符。其中需要一个数学技巧：

$$\int d^3x\ x^i e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} = i(2\pi)^3\frac{\partial}{\partial k_i}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{315}$$

最终得到：

$$J^{ij} = \int d^3\mathbf{x}(x^iT^{0j} - x^jT^{0i}) = -i\int d\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t)\left(k^i\frac{\partial}{\partial k^j} - k^j\frac{\partial}{\partial k^i}\right)a_{\mathbf{k}}(t) \tag{316}$$

$$= -i\int d\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{\dagger}\left(k^i\frac{\partial}{\partial k^j} - k^j\frac{\partial}{\partial k^i}\right)a_{\mathbf{k}}, \tag{317}$$

$$J^{j0} = \int d^3\mathbf{x}\left(x^jT^{00} - tT^{0j}\right) = \int d\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t)\left(i\omega_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial k^j} - tk^j\right)a_{\mathbf{k}}(t) \tag{318}$$

$$= \int d\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{\dagger}i\omega_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial k^j}a_{\mathbf{k}}. \tag{319}$$

Remark: 注意区分上下指标捏 $\partial/\partial_{k_i} = -\partial/\partial_{k^i}$。上面的公式左边和右边的上下指标是不同的，但是我们其实是利用了这个关系！请务必注意捏！

其与产生湮灭算符的对易关系为：

$$[J^{ij}, a_{\mathbf{p}}] = i\left(p^i\frac{\partial}{\partial p^j} - p^j\frac{\partial}{\partial p^i}\right)a_{\mathbf{p}}, \quad [J^{i0}, a_{\mathbf{p}}] = -i\omega_{\mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial p^i}a_{\mathbf{p}}. \tag{320}$$

角动量算符旋转生成元

我们可以换一套基，使用角动量算符和 boost 算符作为生成元！对于角动量算符我们定义为：

$$J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}J^{ij} \tag{321}$$

其具体形式为：

$$J^k = \int d\omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}(-i\mathbf{p}\wedge\nabla_{\mathbf{p}})^k a_{\mathbf{p}} \equiv \int d\omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{L}^k a_{\mathbf{p}} \tag{322}$$

与产生湮灭算符对易关系为：

$$[J^k, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = i(\mathbf{p}\wedge\nabla_{\mathbf{p}})^k a^\dagger_{\mathbf{p}} \tag{323}$$

> **Remark:** 注意！这个对易关系的推导之中我们需要使用分部积分，保证导数作用在 $a^\dagger_p$ 上面！但问题是，我们完全不知道怎么计算导数作用在 $a^\dagger_p$ 上面的结果！！因此这个对易关系只能作为一个形式结果存在！！我们之后如果使用这个会需要再进行分部积分把导数作用在其他部分上面！

boost算符boost生成元

同样的对于 boost 算符我们定义：

$$K^i = J^{i0} \tag{324}$$

所以我们 boost 算符用产生湮灭算符表示的形式是：

$$K^i = \int d\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}} i\omega_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k^j} a_{\mathbf{k}}. \tag{325}$$

我们计算其与产生湮灭算符的对易关系为：

$$[K^i, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = i\omega_{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial p^i} a^\dagger_{\mathbf{p}}. \tag{326}$$

角动量算符作用在单粒子态上

经典力学告诉我们角动量就是转动变换的守恒荷。我们不妨把这个定义一般沿用，使用转动的守恒荷定义系统的角动量。因而我们前面得到的算符 J^i 其实就是场论的角动量算符。我们知道角动量算符作用在量子态上会给出其角动量。因此我们不妨研究其作用在单粒子态上面的结果：

10.4 量子理论的 Poincare Covariance

现在我们希望研究 Poincare 变换前后【physical 的量子态】的变化。

- 标量场的定义已经告诉我们其按照 $\phi'(x') = \phi(x)$ 进行协变。但标量场并非 physical interpretation 的物品。

- 我们希望研究产生湮灭算符 (这些有 physical 粒子 interpretation) 在 Poincare 变换下的变化。
- 进一步研究量子态在 Poincare 变换下的变化。

首先我们需要理解什么是 **Poincare 变换后的产生湮灭算符**。考虑另一个坐标系下的人观察这个场，其观察到的场构型是 $\phi'(x)$ 输入一个相对于自己的 x 给出一个 $\phi'(x)$ 的取值。因此我们定义其观测到的产生湮灭算符为:

Definition 23. *Poincare 变换下的产生湮灭算符*

对于一个 *Poincare* 变换 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$，我们定义变换后的产生湮灭算符为:

$$a'_{\mathbf{k}} \ \textit{satisfies}\ \phi'(x) = \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \left(a'_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu x^\mu} + a'^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu x^\mu} \right). \tag{327}$$

10.4.1 时空平移变换下量子态的变换

平移变换下产生湮灭算符

对于时空平移变换 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$，我们根据标量场的定义有：$\phi'(x) = \phi(x-a)$。带入场算符的表达式我们有:

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \phi(x-a) && (328)\\
&= \int d\Omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu(x^\mu - a^\mu)} + a^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu(x^\mu - a^\mu)} \right) && (329)\\
&= \int d\Omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{ik_\mu a^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger_{\mathbf{k}} e^{-ik_\mu a^\mu} e^{ik_\mu x^\mu} \right). && (330)
\end{aligned}$$

对比我们上面的定义我们可以得到时空平移变换下产生湮灭算符的变换形式:

Theorem 14. 时空平移变换下产生湮灭算符的变换

对于时空平移变换 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$，产生湮灭算符的变换形式为:

$$a'_{\mathbf{p}} = e^{ip_\mu a^\mu} a_{\mathbf{p}}, \quad a'^\dagger_{\mathbf{p}} = e^{-ip_\mu a^\mu} a^\dagger_{\mathbf{p}}. \tag{331}$$

Unitary Operator表示时空平移

我们发现其实时间平移变换可以使用一个 Unitary 算符进行表达。我们定义算符:

$$U(a) = e^{iP_\mu a^\mu}, \quad U^\dagger(a) = e^{-iP_\mu a^\mu}. \tag{332}$$

其中 P^μ 是之前定义的量子化动量的算符。根据前面 section 10.2的一些结论我们会发现:

$$\phi'(x) = \phi(x-a) = e^{-iP_\mu a^\mu} \phi(x) e^{iP_\mu a^\mu} \quad a'_{\mathbf{p}} = e^{-iP_\mu a^\mu} a_{\mathbf{p}} e^{iP_\mu a^\mu} \tag{333}$$

> **Remark:** 第一个公式前一部分是标量场的定义，后一部分是 $\phi(x-a)$ 和算符作用的关系是前面证明的数学结果

也就是说其实时空平移变换前后的场算符和产生湮灭算符可以通过一个 Unitary 算符作用得到！写作定理：

> **Theorem 15.** *Unitary Operator 表示时空平移变换*
>
> 对于时空平移变换 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$，场算符和产生湮灭算符的变换形式为：
>
> $$\phi'(x) = U^\dagger(a)\phi(x)U(a) = e^{-iP_\mu a^\mu}\phi(x)e^{iP_\mu a^\mu}, \quad a'_{\mathbf{p}} = U^\dagger(a)a_{\mathbf{p}}U(a) = e^{-iP_\mu a^\mu}a_p e^{iP_\mu a^\mu}. \tag{334}$$

时空平移变换的量子态

我们认为量子态定义为产生湮灭算符作用在真空态上面得到的！因此我们定义时空平移变换下的量子态为：

> **Theorem 16.** 时空平移变换下量子态的变换
>
> 对于时空平移变换 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$，量子态的变换形式为：
>
> $$|\mathbf{p}'\rangle = a'_{\mathbf{p}}|0\rangle = e^{ip_\mu a^\mu}|\mathbf{p}\rangle = U^\dagger(a)|\mathbf{p}\rangle. \tag{335}$$

10.4.2 Lorentz 变换下量子态的变换

在 Lorentz 变换前后 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，我们根据标量场的定义有：$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$。带入场算符的表达式我们有：

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{336}$$

$$= \int d\Omega_{\mathbf{k}} \left(a_k e^{-ik_\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu} + a_k^\dagger e^{ik_\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu} \right) \tag{337}$$

$$= \int d\Omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\Lambda^{-1}k} e^{-ik_\nu x^\nu} + a_{\Lambda^{-1}k}^\dagger e^{ik_\nu x^\nu} \right). \tag{338}$$

对比我们上面的定义我们可以得到 Lorentz 变换下产生湮灭算符的变换形式：

> **Theorem 17.** *Lorentz* 变换下产生湮灭算符的变换
>
> 对于 *Lorentz* 变换 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，产生湮灭算符的变换形式为：
>
> $$a'_{\mathbf{p}} = a_{\Lambda^{-1}p}, \quad a'^\dagger_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\Lambda^{-1}p}. \tag{339}$$

Unitary Operator表示Lorentz变换

同样的我们可以发现其实 Lorentz 变换可以使用一个 Unitary 算符进行表达。对于一个 Lorentz 变换 Λ 我们定义算符：

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{J}^{\mu\nu}\right), \quad \Rightarrow \quad U(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right). \tag{340}$$

这里第一个 J 是 defining representation 下的 Lorentz 生成元，第二个 J 是 section 10.3之中讨论的算符。我们计算其作用在场上面的结果会得到：

$$U(\Lambda)^\dagger\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x), \quad U(\Lambda)^\dagger a_p U(\Lambda) = a_{\Lambda^{-1}p}. \tag{341}$$

因此我们知道 Lorentz 变换后的场算符和产生湮灭算符可以通过一个 Unitary 算符作用得到！写作定理：

Theorem 18. *Unitary Operator 表示 Lorentz 变换*

对于 Lorentz 变换 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，场算符和产生湮灭算符的变换形式为：

$$\phi'(x) = U^\dagger(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda), \quad a'_{\mathbf{p}} = U^\dagger(\Lambda)a_{\mathbf{p}}U(\Lambda) \tag{342}$$

Lorentz变换的量子态

我们认为量子态定义为产生湮灭算符作用在真空态上面得到的！因此我们定义 Lorentz 变换下的量子态为：

Theorem 19. *Lorentz 变换下量子态的变换*

对于 Lorentz 变换 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，量子态的变换形式为：

$$|p'\rangle = a'_{\mathbf{p}}|0\rangle = |\Lambda^{-1}p\rangle = U^\dagger(\Lambda)|p\rangle. \tag{343}$$

10.5 补充讨论：Lorentz Group 的表示总结

到现在我们已经遇到了 Lorentz Group 在各种表示空间的表示，我们总结一下：

- **Defining Representation**：这是 Lorentz Group 最基本的表示空间，就是四维时空本身。Lorentz 变换作用在时空坐标上面的形式 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 就是 Defining Representation。
- **Adjoint Representation**：这是 Lorentz Group 作用在其 Lie 代数上的表示。也就是李代数本身在 Lorentz 变换的 UAU^{-1} 作用下的变换。
- **场构型空间 Representation**：这是 Lorentz Group 作用在场构型空间上的表示。定义上是：

$$\phi'_a(x) = D(\Lambda)_a{}^b\phi_b(\Lambda^{-1}x). \tag{344}$$

  对于自由标量场来说，$D(\Lambda) = 1$。

- **Hilbert 空间 Representation**：这是 Lorentz Group 作用在 Hilbert 空间上的表示。对于自由标量场 Hilbert 空间来说是：

$$|p\rangle' = U(\Lambda)^\dagger |p\rangle = \left|\Lambda^{-1}p\right\rangle. \tag{345}$$

上面的讨论之中,我们其实发现了一个结论,也就是 Lorentz 变换在量子场构型空间的表示和在 Hilbert 空间的表示有一定的关系。我们推测对于更一般的场来说，这个关系应该是：

> **Theorem 20.** ***Lorentz Group* 在场构型空间和 *Hilbert* 空间的表示关系**
>
> *对于一个 Lorentz 变换 Λ，其在场构型空间的表示为 $D(\Lambda)$，在 Hilbert 空间的表示为 $U(\Lambda)$，那么他们之间的关系为：*
>
> $$U^\dagger(\Lambda)\phi_a(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)_a{}^b\phi_b(\Lambda^{-1}x). \tag{346}$$

这是极其合理的结论，因为我们的量子化过程需要把经典场构型变成 Hilbert 空间的算符，所以这两个表示空间之间必须有这样的联系才能够自洽。

10.6 Complex Scalar Field

如果我们希望一个标量场的理论，内部包含一个 $U(1)$ 对称性，那么单个标量场是不能够包含这个内部对称性的。我们需要引入两个标量场。

10.7 Question and Thoughts

Question 10.26　为什么自由标量场 $k^\mu = (\omega_k, k)$ 产生的粒子，进行一个 lorantz 变换重新量子化之后，会正好给出了一个对应的 $k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$ 的粒子态?

对于自由标量场的协变我们需要理清楚两个事情：

- 产生湮灭算符在坐标变换下的协变行为
- 真空态在坐标变换下的协变行为

我们可以证明对于 Lorentz 变换来说，这两者，真空态是 invariant 的，而产生湮灭算符是按照 k 进行 Lorentz 变换的。所以我们最终得到的粒子谱正好是按照 k 进行 Lorentz 变换的。

□

Question 10.27　为什么我们使用 Heisenberg Picture 时间平移的场算符自然满足运动方程?

这就是 Heisenberg Picture 给出的。我们使用时间演化算符是已经输入了 on shell 条件的。所以自然是满足运动方程的。严格的也可以通过 poisson bracket 进行证明捏! □

Question 10.28　Hamiltonian Formalism 到底是有多少的协变性，有多少的非协变性?? 也就是什么坐标变换会让 Hamiltonina invariant??

11 Lecture 10: Classical Spinor Field

{sec:Lect

11.1 Weyl Spinor Field

我们下面考虑按照 Lorentz 群的 $(1/2,0)$ 以及 $(0,1/2)$ 表示变换的场，也就是 Weyl Spinor Field。我们首先复习一下两个表示。

Lorentz群的旋量表示

对于 Lorentz 群的表示，我们把生成元线性组合为：

$$J_{\pm}^{i} \equiv \frac{J^{i} \pm iK^{i}}{2}, \quad [J_{\pm}^{i}, J_{\pm}^{j}] = i\epsilon^{ijk} J_{\pm}^{k} \tag{347}$$

也就是两个 $su(2)$ 代数。我们可以使用 (j_+, j_-) 来标记 Lorentz 群的表示，其中 $j_\pm$ 是两个 $su(2)$ 代数的自旋。对于 Weyl Spinor Field 来说，我们有两种表示：

- **左手旋量表示** $(1/2,0)$ 表示

$$(1/2,0) \Rightarrow \begin{cases} J_{-}^{i} & = \frac{\sigma^i}{2} \\ J_{+}^{i} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} J^{i} &= \frac{\sigma^i}{2} \\ K^{i} &= +i\frac{\sigma^i}{2} \end{aligned} \tag{348}$$

- **右手旋量表示** $(0,1/2)$ 表示

$$(0,1/2) \Rightarrow \begin{cases} J_{-}^{i} & = 0 \\ J_{+}^{i} & = \frac{\sigma^i}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} J^{i} &= \frac{\sigma^i}{2} \\ K^{i} &= -i\frac{\sigma^i}{2} \end{aligned} \tag{349}$$

其中 σ^i 是 Pauli 矩阵。

对于两个旋量表示，我们可以从代数的表示使用 exp map 构建 Lorentz 群的表示。我们回顾角动量的标准 exp map 形式为：

$$D(\Lambda(\omega)) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J} + i\vec{\eta}\cdot\vec{K}} \tag{350}$$

因此我们得到两个旋量表示的 Lorentz 群表示为：

- **左手旋量表示** $(1/2,0)$ 表示

$$\Lambda_L(\omega) \equiv D_{(1/2,0)} = e^{-\frac{1}{2}(\vec{\eta}+i\theta)\cdot\sigma} \tag{351}$$

- **右手旋量表示** $(0,1/2)$ 表示

$$\Lambda_R(\omega) \equiv D_{(0,1/2)} = e^{-\frac{1}{2}(-\vec{\eta}+i\theta)\cdot\sigma} \tag{352}$$

Weyl Spinor Field的定义

通过这两个旋量表示我们可以定义 Weyl Spinor Field：

Definition 24. *Weyl Spinor Field*

我们定义在 *Lorentz* 变换下按照下面方式变换的场为 *Weyl Spinor Field*:

- **左手 *Weyl Spinor Field:*** $\psi_L(x)$

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x') = \Lambda_L(\omega)\psi_L(\Lambda^{-1}x') \tag{353}$$

- **右手 *Weyl Spinor Field:*** $\psi_R(x)$

$$\psi_R(x) \to \psi'_R(x') = \Lambda_R(\omega)\psi_R(\Lambda^{-1}x') \tag{354}$$

旋量表示的性质

由于下面开始讨论旋量表示的一些性质：

- Spinor Representation **不是 Unitary 的表示！！** 这是因为 Lorentz 群是非紧群，所以其有限维表示除了 trivial representation 之外一般来说都是 Non-Unitary 的表示！！

Remark: 对于标量场因为是 trivial representation 所以是 unitary 的表示

- 左右手表示互为彼此的 conjugate inverse：$\Lambda_L = \left(\Lambda_R^\dagger\right)^{-1}$
- 左右手旋量表示都是属于 $SL(2,\mathbb{C})$ 群的表示！！ $\Lambda_L, \Lambda_R \in SL(2,\mathbb{C})$ 实际上，$SL(2,\mathbb{C})$ 是 Lorentz 群的双覆盖群！也就是说正好两套 Lorentz 群的表示可以使用 $SL(2,\mathbb{C})$ 群的表示来描述！

$$SO(3,1) \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \tag{355}$$

- 左右手旋量表示在空间旋转变化下的变换是相同的！！ $\Lambda_L(R) = \Lambda_R(R) = e^{-i\frac{\vec{\theta}\cdot\sigma}{2}}, \quad R \in SO(3)$ 所以旋量场构型的变化是：

$$e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2}\psi_{L/R}(R_\theta^{-1}x) \tag{356}$$

Remark: 我们会发现旋量场构型的协变，很像是量子力学里面 spin-1/2 粒子的转动。但是我们注意！！ **旋量场是一个经典的场！！ 上方的讨论和量子力学没有任何关系！！** 所以我们也不放可以认为 **spin 本身并不是一个量子力学的概念！** Spin 只是 Lorentz 群的一个表示而已！！

11.2 Parity and Dirac Field

Motivation

我们上面讨论了两个 Weyl Spinor Field。这两个场的构型空间分别构成了 $SO(3,1)$ 群的表示。但是！我们回忆：

- SO(3,1) 群并不是完整的 Lorentz 群，其中并不包含 Parity 变换和 Time Reversal 变换!!

我们真正希望找到的不是 SO(3,1) 群的表示作为我们的场，而是完整的 Lorentz 群的表示作为我们的场！！因此我们需要考虑 Parity 变换和 Time Reversal 变换的表示是什么?「由于 Parity 变换更重要一点所以我们先考虑这个」

11.2.1 Parity 变换的表示

Parity 变换的定义

我们定义 Parity 变换，也就是使用其 Defining Representation 上面的形式：

Definition 25. *Parity 变换*

Parity 变换 P 定义为：

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\in O(3,1)\ . \tag{357}$$

我们下面考虑其在不同表示空间的表示。我们会使用一个 Trick，也就是先考虑其在 Adjoint Representation 上的表示，然后利用 Adjoint Representation 足够抽象的性质来求解其在一般表示空间下的表示。

Remark: 之后我们使用 P 表示 Parity 在 Defining Representation 上面的形式，使用 P 表示 Parity 在一般表示空间下的表示！！至于一般 representation 是场构型空间还是 Hilbert 空间需要靠语境决定！

Parity 在Adjoint Representation上的作用

我们计算其在 SO(3,1)Algebra 表示空间的表示。我们现考虑 Defining Representation 下面的情况，Parity 作用在 Lorentz Alegbra 的 Defining Representation 上面形式为：$P\mathcal{J}^{\mu\nu}P^{-1}$，其中 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 是 Lorentz 群的 Lie Algebra 的生成元在 Defining Representation 上面的形式，我们回忆为：

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\rho}{}_{\sigma}=i(\eta^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\sigma}-\eta^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}) \tag{358}$$

我们计算结果为：

$$P\mathcal{J}^{\mu\nu}P^{-1}=P^{\mu}{}_{\rho}P^{\nu}{}_{\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma} \tag{359}$$

Remark: 注意这个等式左边的 P 是作用在没写出来的指标上，右边是直接作用在生成元的指标上！这个关系我们可以直接验证！！

- 我们记住！！！**Adjoint Representation** 是一个抽象的 Representation！！！其中李代数 $J^{\mu\nu}$ 是一个抽象的元素。所以我们有上面的关系对于一切表示空间都是成立的！！！

Theorem 21. *Parity 作用在 Adjoint Representation*

Parity 作用在 Lorentz 群 Lie Algebra 的抽象的生成元上面的形式为:

$$\mathrm{P} J^{\mu\nu} \mathrm{P}^{-1} = P^{\mu}{}_{\rho} P^{\nu}{}_{\sigma} J^{\rho\sigma} \tag{360}$$

这个关系可以帮助我们求解 Parity 在一般表示空间下的表示。因为一般的表示空间下，Parity 的表示和 Lorentz Algebra 的表示的生成元之间都需要满足:

$$\mathrm{P} J^{\mu\nu} \mathrm{P}^{-1} = P^{\mu}{}_{\rho} P^{\nu}{}_{\sigma} J^{\rho\sigma} \tag{361}$$

的关系。

Parity在Adjoint Representation上表示「补充」

上面我们仅仅使用了 Lorentz Algebra 作为表示空间。我们很难不思考能否使用 Poincare 代数作为 Parity 的表示空间? 答案是可以的! 但是一个难点是:

- 我们尚未定义 Parity 变换作用在平移生成元上面! 因为平移生成元不能够使用 Lorentz Group 的 Defining Representation 来表示!! 需要进行扩充。

在合理的扩充和定义下我们有下面的结论，我们不妨当作定义来进行处理:

Definition 26. *Parity 作用在 Poincare 代数*

对于 Poicare 群的表示来说，Parity 作用其上的结果为:

$$\mathrm{P} U(\Lambda, a) \mathrm{P}^{-1} = U\left(P \Lambda P^{-1}, P a\right), \tag{362}$$

其中左手边的 P 在这个表示空间下的表示。右手边的 P 是 Defining Representation 下的 Parity 矩阵。

[这个是抄 Weinberg 之中的讨论的!]

如果对于上面的式子考虑微小变换我们就可以得到 Parity 作用在 Poincare 代数生成元上的表示:

Theorem 22. *Parity 作用在 Poincare 代数生成元上*

Parity 作用在 Poincare 代数生成元上面的表示为:

$$\mathrm{P} P^{\mu} \mathrm{P}^{-1} = P^{\mu}{}_{\nu} P^{\nu}, \tag{363}$$

$$\mathrm{P} J^{\mu\nu} \mathrm{P}^{-1} = P^{\mu}{}_{\rho} P^{\nu}{}_{\sigma} J^{\rho\sigma}. \tag{364}$$

Parity在Lorentz群一般表示空间直和空间的表示

我们根据 Parity 作用在 Poicare 代数的生成元的结果知道，Parity 作用在转动算符和 boost 算符上面的结果为：

$$\mathrm{P}J^i\mathrm{P}^{-1} = J^i, \tag{365}$$
$$\mathrm{P}K^i\mathrm{P}^{-1} = -K^i. \tag{366}$$

我们考虑 Parity 作用在一般的 Lorentz 群表示空间 (j_1, j_2) 上面的结果。我们发现：

$$\mathrm{P}J_\pm^i\mathrm{P}^{-1} = \frac{\mathrm{P}J^i\mathrm{P}^{-1} \pm i\mathrm{P}K^i\mathcal{P}^{-1}}{2} = \frac{J^i \mp iK^i}{2} = J_\mp^i. \tag{367}$$

也就是说，Parity 作用在 (j_1, j_2) 表示空间上面会把 J_+^i 和 J_-^i 交换掉!! 从而变成一个 (j_2, j_1) 表示空间!! 所以我们总结两点：

- 单独的 $(j_1, j_2), j_1 \neq j_2$ 表示空间**不闭合**，不能作为 Parity 变换的表示空间!!
- 但是 $(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)$ 表示空间**闭合**，可以作为 Parity 变换的表示空间!!

因此如果我们希望构造一个场构型空间作为完整的 Lorentz 群表示的话，我们需要考虑 $(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)$ 表示空间!!

求Parity表示的思路

我们整理一下 Parity 变换表示的思路。我们其实是：

1. 通过定义找到其在 Adjoint Representation 上的表示
2. 利用生成元在不同表示空间下的具体形式，给出 Parity 在不同表示空间下的表示

11.2.2 Dirac Spinor Field

对于 Weyl Spinor 来说我们如果希望不仅仅表示 SO(3,1) 群而是完整的 Lorentz 群的话，我们需要把左手旋量表示和右手旋量表示合并起来!! 也就是说我们考虑 $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ 表示空间!! 按照这个表示空间进行变换的场我们称为 Dirac Spinor Field。

Parity作用在(1/2,0)以及(0,1/2)表示上面

我们考虑 Parity 作用在 (1/2,0) 表示以及 (0,1/2) 表示上面的形式，我们有：

$$\mathrm{P}\Lambda_{L/R}(\vec{\theta}, \vec{\eta})\mathrm{P} = \Lambda_{L/R}(\vec{\theta}, -\vec{\eta}) = \Lambda_{R/L}(\vec{\theta}, \vec{\eta}). \tag{368}$$

note 我们右边没有写 P^{-1} 是因为经典的情况下我们有 $P^2 = 1$。一个合理的理论需要这个关系保持的!!

Dirac Spinor Field的定义

在上方准备的基础上我们可以定义 Dirac Spinor Field：

Definition 27. *Dirac Spinor Field*

我们定义两个 Weyl Spinor Field 的直和作为 Dirac Spinor Field:

$$\Psi_D(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}. \tag{369}$$

Dirac Spinor Field 在 Lorentz 变换下的变换为:

$$\Psi_D(x) \to \Psi'_D(x) = \begin{pmatrix} \Lambda_L(\omega) & 0 \\ 0 & \Lambda_R(\omega) \end{pmatrix} \Psi_D(\Lambda^{-1}x). \tag{370}$$

其变换矩阵即为两个 Weyl Spinor Field 的变换矩阵的直和:

$$\Lambda_D \equiv \begin{pmatrix} \Lambda_L(\theta,\eta) & 0 \\ 0 & \Lambda_R(\theta,\eta) \end{pmatrix} \tag{371}$$

Dirac Spinor Field 在 Parity 变换下的变换为:

$$\Psi_D(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \mapsto \Psi'_D(x' = Px) \equiv \begin{pmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} = \gamma^0 \Psi_D(x) \tag{372}$$

其中变换矩阵为:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{373}$$

对于 Dirac Spinor Field 来说在 Lorentz 变换下的变换矩阵和 Parity 变换下的变换矩阵之间正好满足:

$$\gamma_0 \Lambda_D(\vec{\theta}, \vec{\eta}) = \Lambda_D(\vec{\theta}, -\vec{\eta})\gamma_0. \tag{374}$$

11.3 Complex Conjugate and Majorana Spinor

11.3.1 2D Levi-Civita 符号

2D Levi-Civita符号

我们定义 2D Levi-Civita 符号:

Definition 28. *2D Levi-Civita 符号*

我们定义 2D Levi-Civita 符号为:

$$\epsilon \equiv i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{375}$$

显然我们有这个符号的性质：

$$\epsilon^T = \epsilon^{-1} = -\epsilon \quad \epsilon^2 = -1. \tag{376}$$

Levi-Civita符号作用在Pauli矩阵上

我们考虑 Levi-Civita 符号作用在 Pauli 矩阵上面的结果：

$$\epsilon^{-1}\sigma_i\epsilon = \epsilon\sigma_i\epsilon^{-1} = -\sigma_i^* = -\sigma_i^T \quad \epsilon^{-1}\sigma_i^*\epsilon = \epsilon\sigma_i^*\epsilon^{-1} = -\sigma_i. \tag{377}$$

之后我们会定义 $\sigma^\mu = (I, \sigma^i)$ 以及 $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\sigma^i)$，我们有：

$$\epsilon^{-1}\sigma^\mu\epsilon = \bar{\sigma}^{\mu*} = \bar{\sigma}^{\mu T}, \quad \epsilon^{-1}\bar{\sigma}^\mu\epsilon = \sigma^{\mu*} = \sigma^{\mu T}. \tag{378}$$

11.3.2 Complex Conjugate Representation

su(2)的Complex Conjugate Representation

我们发现如果一个表示的基和矩阵形式我们使用的是复数的话，那么我们可以通过一个表示构建另一个表示。我们使用 su(2) 代数的 spin-1/2 表示来说明这个过程。对于这个表示我们可以有两个表示：

$$T^i = \frac{\sigma^i}{2}, \quad T^{i*} = -\frac{\sigma^{i*}}{2}. \tag{379}$$

这两个构成了两个等价的表示，我们称后者为前者的 Complex Conjugate Representation。其等价性在前面的 Levi-Civita 符号作用在 Pauli 矩阵上的结果中已经体现出来了。

考虑这个两个代数表示给出的群表示分别为：

$$H \to e^{-i\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}, \quad H^* \to e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}^*\cdot\vec{\theta}}H^* \tag{380}$$

我们会发现这两个群表示也是等价的，因为我如果考虑一个表示空间进行变换 $H^* \to \epsilon H^*$ 的话，我们有：

$$\epsilon H^* \to \epsilon e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}^*\cdot\vec{\theta}}H^* = e^{i\frac{i}{2}\epsilon\vec{\sigma}^*\cdot\epsilon^{-1}\vec{\theta}}\epsilon H^* = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}\epsilon H^*. \tag{381}$$

我们会发现变形后的表示空间在群作用下和原来的表示空间是一样的！！所以这两个表示是等价的！！

Lorentz群的Complex Conjugate Representation

下面我们考虑 Lorentz 群的 (1/2,0) 表示和 (0,1/2) 表示的 Complex Conjugate Representation 以及其等价性。我们有：

$$\Lambda_R^T = e^{\frac{1}{2}(\vec{\eta}-i\vec{\theta})\vec{\sigma}^T} = e^{-\frac{1}{2}(\vec{\eta}-i\vec{\theta})\epsilon^{-1}\vec{\sigma}\epsilon} = \epsilon^{-1}\Lambda_R^{-1}\epsilon = \epsilon^{-1}\Lambda_L^\dagger\epsilon \tag{382}$$

对比左右我们可以推出第一个小结论：

{thm:Weyl

Theorem 23. *Levi-Civita 符号连接 (1/2,0) 和 (0,1/2) 表示*

对于 left 和 right spinor representation 我们有：

$$\Lambda_R = \epsilon^{-1}\Lambda_L^*\epsilon \tag{383}$$

于是我们进一步给出结论：

{thm:Weyl

Theorem 24. *Weyl Spinor 的 Complex Conjugate Representation 等价性*

(1/2,0) 表示的 complex conjugate representation 和 (0,1/2) 表示是等价的，二者之间的联系由 Levi-Civita 符号给出：

$$\epsilon\psi_{L/R}^* \sim \psi_{R/L} \tag{384}$$

抽象的写出来就是：

$$(1/2, 0) \sim (0, 1/2)^* \tag{385}$$

Proof：我们不妨考虑一个 (1/2,0) 表示空间 ψ_L，进行一个变换之后在 Lorentz 群作用下的变换为：

$$\epsilon\psi_L^* \to \epsilon\Lambda_L^*\psi_L^* = \epsilon\Lambda_L^*\epsilon^{-1}\epsilon\psi_L^* = \Lambda_R(\epsilon\psi_L^*) \tag{386}$$

说明左手的 complex conjugate 表示在 Levi-Civita 符号作用下正好变成了右手表示！！所以二者是等价的表示！！ □

Remark: 这里我们使用 $\sim$ 记号的意思是，这两个东西在表示论意义上给出了等价的表示空间。也就是说两者在 Lorentz 变换下变换矩阵形式一模一样！

11.3.3 Majorana Spinor Field

Majorana Spinor Field的定义

这样我们意识到仅仅使用 Left Weyl Spinor Field 我们就可以构造出来一个能够表示 Parity 变换的场构型空间！！我们定义：

Definition 29. *Majorana Spinor Field*

我们通过 ψ_L 以及其 complex conjugate $\epsilon\psi_L^*$ 构造 Majorana Spinor Field:

$$\Psi_M(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \epsilon\psi_L^*(x) \end{pmatrix}. \tag{387}$$

> *这样构造的 spinor field 在在 Lorentz 变换和 Parity 变换下和 Dirac Spinor 满足一样的协变关系！*

Charge Conjugation

Majorana Spinor Field 与 Dirac Spinor Field 有一个重要的区别，也就是如果我们定义 Charge Conjugation 变换。这个场在变换下是不变的！！这里不多加讨论了！

11.4 Questions and Thoughts

Question 11.29 为什么经典场构型作为 Lorentz 群表示是 Non-Unitary 的??

我们知道 lorentz 群是非紧群，所以它的有限维表示一般来说是不可约的非酉表示！！但是！！我们作用在 Hilbert Space 上面的表示是 Unitary 的！！这是两个表示捏！！务必区分。 □

Question 11.30 作业之中为什么我们强调了 Normal Ordering? 这个和正常 ordering 有什么区别，为什么我们不是自然给出的 normal ordering?

根据 Wick 定理我们可以有更 General 的结果。但是对于标量场来说相当于我们忽略了一个无穷大的常数项。这个常数项一般计算下我们不认为是物理上有意义的东西，所以我们直接忽略掉了。 □

12 Lecture 11: Classical Spinor Fields and Lagrangians

{sec:Lect

12.1 Spinor 的指标记号

根据前面 Complex Conjugate 的讨论我们可以使用一种指标记号标记 left handed 和 right handed 的 spinor。一个思路就是我们使用 ϵ 作为类似 metric 来升降指标。

> **Remark:** 指标记号有很多种 convention，我们这里使用的是和 David Tong 的 SUSY 讲义完全不一样的一种。之后学习的时候要注意区分！！

标准指标定义

我们之前一直使用向量和矩阵的形式表示 spinor，下面我们为这些向量和矩阵赋予一个标准的指标记号。我们定义：

Definition 30. *Weyl Spinor 标准指标记号*

- ***Weyl Spinor***：对于 *spinor* 向量我们赋予指标：

$$(\psi_L)_\alpha\,,(\psi_R)^{\dot{\alpha}} \tag{388}$$

- ***Lorentz Transformation***：对于 *Lorentz* 变换在 *Spinor* 空间的表示矩阵我们赋予指标：

$${(\Lambda_L)_\alpha}^\beta = e^{-\frac{1}{2}(\vec{\eta}+i\theta)\cdot\sigma}, \quad {(\Lambda_R)^{\dot{\alpha}}}_{\dot{\beta}} = e^{-\frac{1}{2}(-\vec{\eta}+i\theta)\cdot\sigma} \tag{389}$$

注意：指标的前后顺序对应着矩阵的行和列！

在这个标准指标记号下，场本身的 Lorentz 变换写作：

$$(\psi_L)_\alpha \to {(\Lambda_L)_\alpha}^\beta(\psi_L)_\beta, \quad (\psi_R)_{\dot{\alpha}} \to {(\Lambda_L)^{\dot{\alpha}}}_{\dot{\beta}}(\psi_L)^{\dot{\beta}} \tag{390}$$

指标的升降

我们定义使用 ϵ 作为类似 metric 的对象来进行指标的升降。具体定义如下：

Definition 31. *ϵ 指标规则*

对于 ϵ 矩阵我们定义指标：

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1. \tag{391}$$

注意其中矩阵形式：

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon^{-1} = -\epsilon^T\ . \tag{392}$$

下面我们使用 ϵ 来进行指标的升降:

Definition 32. *Weyl Spinor* 指标升降规则

对于 *Weyl Spinor* 我们定义标准指标进行升降（正变换）的结果为:

$$(\psi_L)^{\alpha} \equiv \epsilon^{\alpha\beta} (\psi_L)_{\beta}, \quad (\psi_R)_{\dot{\alpha}} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\psi_R)^{\dot{\beta}}. \tag{393}$$

注意！正变换升降指标是对于 ϵ 的**第二个指标**进行 *contract*!!

逆变换回到标准指标的结果为:

$$(\psi_L)^{\beta} \epsilon_{\beta\alpha} = (\psi_L)_{\alpha}, \quad (\psi_R)_{\beta} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = (\psi_R)^{\dot{\alpha}} \tag{394}$$

注意！逆变换降指标是对于 ϵ 的**第一个指标**进行 *contract*!!

注意！我们需要固定正变换和逆变换 contract 不同的指标，是因为 ϵ 是**反对称矩阵**！因此 ϵ 两个上指标和两个下指标是一样的而非 metric 一样的逆的关系，真正的逆是交换两个指标的顺序因为 $\epsilon^{-1} = \epsilon^T$，因此正变换和逆变换求和指标是不同的！

Levi-Civita符号的性质

- **自身 contraction**：Levi-civita 符号自身 contraction 满足:

$$\epsilon^{\gamma\alpha}\epsilon^{\delta\beta}\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\gamma\delta} \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}} = \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}. \tag{395}$$

进一步我们可以定义一个上一个下指标的 Levi-Civita 符号:

Definition 33. 混合指标 *Levi-Civita* 符号

我们定义一个上一个下指标的 *Levi-Civita* 符号:

$$\epsilon_{\alpha}{}^{\beta} \equiv \epsilon^{\gamma\beta}\epsilon_{\gamma\alpha} \text{ and } \epsilon^{\beta}{}_{\alpha} \equiv \epsilon^{\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\alpha} \tag{396}$$

根据前面的定义我们有:

$$\epsilon_{\alpha}{}^{\beta} = -\epsilon^{\beta}{}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta} \tag{397}$$

以及

$$\epsilon_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \text{ and } \epsilon^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \equiv \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \tag{398}$$

根据前面的定义我们有:

$$\epsilon^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{399}$$

Conplex Conjugate的指标记号

在上面指标定义的基础上，我们可以很简洁的书写两个 complex conjugate 关系。对于 Spinor Field 自己的 complex conjugate theorem 24我们可以改写：

$$[(\psi_L)_\alpha]^* = (\psi_L^*)_{\dot{\alpha}}, \quad [(\psi_L)^\alpha]^* = (\psi_L^*)^{\dot{\alpha}}, \quad [(\psi_R)^{\dot{\alpha}}]^* = (\psi_R^*)^\alpha, \quad [(\psi_R)_{\dot{\alpha}}]^* = (\psi_R^*)_\alpha \tag{400}$$

这也就可以理解为把指标从复共轭之中提出来会变换指标的类型。同样的 Lorentz 变换矩阵的 complex conjugate 关系 theorem 23也可以改写为：

$$(\Lambda_R)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \, (\Lambda_R)^{\dot{\gamma}}_{\ \dot{\beta}} = \left[(\Lambda_L)^{\delta}_{\ \alpha}\right]^* \epsilon_{\dot{\delta}\dot{\beta}} = \left[-\,(\Lambda_L)^{\delta}_{\ \alpha}\,\epsilon_{\delta\beta}\right]^* \equiv -\left[(\Lambda_L)_{\alpha\beta}\right]^* \tag{401}$$

12.2 (1/2,1/2) 表示

如果我们希望讨论 Weyl Spinor 是怎么构建 Invariant 的 EoM 以及有 Lorentz Symmetry 的 Lagrangian 的，我们需要用到一些特殊技术。为此我们需要先讨论一下 (1/2,1/2) 表示的构造以及它和 Defining Representation 的关系。

12.2.1 表示空间基本构造

讨论完 Weyl Spinor 的 (1/2,0) 和 (0,1/2) 表示之后，我们可以讨论一下 (1/2,1/2) 表示。这个表示对应的就是四维矢量表示，我们探讨如何使用标准的 Lorentz 表示来看这个。

(1/2,1/2)表示的构造

我们先给出这个表示的定义是什么：

Definition 34. *(1/2,1/2) 表示定义*

这个表示空间定义为两个 Weyl Spinor 的表示的张量积空间，其空间基底为：

$$\hat{v}_\alpha^{\ \dot{\beta}} = (\psi_L)_\alpha (\psi_R)^{\dot{\beta}}. \tag{402}$$

在 Lorentz 变换下其变换规则为：

$$\hat{v}_\alpha^{\ \dot{\beta}} \to (\Lambda_L)_\alpha^{\ \gamma} (\Lambda_R)^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\delta}} \hat{v}_\gamma^{\ \dot{\delta}} \tag{403}$$

这里的讨论我们使用矩阵语言更加方便也好计算，我们重新定义：

Definition 35. *(1/2,1/2) 表示 (矩阵形式)*

我们定义一个表示，表示空间的基是一个 2×2 矩阵，在 Lorentz 变换下其变换规则为：

$$v \to \Lambda_L v \Lambda_R^T \tag{404}$$

其中矩阵：

$$\Lambda_L(\omega) = e^{-\frac{1}{2}(\vec{\eta}+i\theta)\cdot\sigma}, \quad \Lambda_R(\omega) = e^{-\frac{1}{2}(-\vec{\eta}+i\theta)\cdot\sigma} \tag{405}$$

简单的计算可以知道，这个定义等价于上面的定义，所以自然就是 (1/2,1/2) 表示。

标准表示形式

实际上我们可以使用一个 modified 的表示空间的定义，从而看出这个变换等价于四矢量的变换形式。我们定义：

Definition 36. *(1/2,1/2) 表示 (左右手形式)*

- **左手** 我们定义 $v = \hat{v}\epsilon^{-1}$，*Lorentz* 变换下其变换规则为：

$$v \to \Lambda_L v \Lambda_L^\dagger \tag{406}$$

- **右手** 我们定义 $\bar{v} = \hat{v}^T\epsilon$，*Lorentz* 变换下其变换规则为：

$$\bar{v} \to \Lambda_R \bar{v} \Lambda_R^\dagger \tag{407}$$

表示空间分析

我们分析表示空间会发现：

- $\hat{v}, v, \bar{v}$ 都是属于 $M(2,\mathbb{C})$ 空间 (2x2 复矩阵空间)。
- $v, \bar{v}$ 在 Lorentz 变换下，如果是 Hermite 则 Lorentz 变换下仍然是 Hermite 的。

如果我们假设这两个表示是不可约表示，则我们可以进一步假设 $v, \bar{v}$ 全部都是 Hermite 矩阵：

$$v,\ \bar{v} \in MH(2,\mathbb{C})\ . \tag{408}$$

Remark: 注意，这是一个并不严谨但是 work 的合理的假设!!

- 由于群论上 $MH(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^4$，因此这个表示空间是四维实空间。

12.2.2 Defining Representation 等价于 (1/2,1/2) 表示

我们下面讨论这个表示和 Lorentz 群的 Definig Representation 的关系。我们会发现其实两个表示是完全等价的。

Pauli Basis展开

对于所有的 2×2 和 Hermite 矩阵我们存在一个 Trick 也就是使用 Pauli Basis 进行展开，展开系数必然是实数。我们定义：

Definition 37. *Pauli Basis 标准展开*

- v 的 *Pauli Basis* 展开基为：$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i), \quad \sigma^0 = 1, \quad \sigma^i =$ Pauli matrices 标准展开结果为：

$$v = \eta_{\mu\nu} v^\mu \sigma^\nu = \begin{pmatrix} v^0 - v^3 & -v^1 + iv^2 \\ -v^1 - iv^2 & v^0 + v^3 \end{pmatrix} \tag{409}$$

- $\bar{v}$ 的 *Pauli Basis* 展开基为：$\bar{\sigma}^\nu = (\sigma^0, -\sigma^i)$ 标准展开结果为：

$$\bar{v} = \eta_{\mu\nu} v^\mu \bar{\sigma}^\nu \tag{410}$$

这里我们注意记号 v 是一个 2×2 的 Hermite 矩阵，而 v^μ 是四维实矢量是 Pauli Basis 展开的系数。Pauli Basis 下面有一个特别常用的性质：

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu} = \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu \tag{411}$$

Determinant不变在Pauli Basis下的表现

我们很容易意识到一个性质，也就是 (1/2,1/2) 表示的基如果使用左右手形式 $v, \bar{v}$ 那么其行列式在 Lorentz 变换下是不变的。我们有：

$$\det v' = \det v |\det \Lambda_L|^2 = \det v \tag{412}$$

这个性质在 Pauli Basis 下的表现为：

$$v'^\mu v'_\mu = \det V' = \det V = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 \equiv v^\mu v_\mu \tag{413}$$

也就是说：

- Pauli Basis 下面展开系数 v^μ 满足 Minkowski 度规下的内积不变性。

Pauli Basis展开系数作为四矢量

我们可以推测展开系数在 Lorentz 变换下满足四矢量变换规则，事实的确如此。我们首先计算 Pauli Basis 的基矢量在 Lorentz 变换下的变换规则：

$$\Lambda_L(\omega) \sigma^\mu \Lambda_L^\dagger(\omega) = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu \sigma^\nu \ , \tag{414}$$

$$\Lambda_R(\omega) \bar{\sigma}^\mu \Lambda_R^\dagger(\omega) = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \ . \tag{415}$$

Theorem 25. *Pauli Basis 展开系数变换规则*

> *Pauli Basis* 展开系数 v^μ 在 *Lorentz* 变换下满足四矢量的变换规则：
>
> $$\Lambda_L(\omega)v^\mu\sigma_\mu\Lambda_L^\dagger(\omega) = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu v^\nu\sigma_\mu \ , \tag{416}$$
>
> $$\Lambda_R(\omega)v^\mu\bar{\sigma}_\mu\Lambda_R^\dagger(\omega) = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu v^\nu\bar{\sigma}_\mu \ . \tag{417}$$
>
> 其中 Λ_L, Λ_R 分别是 *(1/2,0)* 和 *(0,1/2)* 表示的 *Lorentz* 变换矩阵，Λ 是 *Defining Representation* 的 *Lorentz* 变换矩阵。

也就是说：

- (1/2,1/2) 表示的基在 Pauli Basis 下展开系数变换规则和 Defining Representation 的基的变换法则完全一致。

群的意义

上面表示的结论其实反应了两个群的关系：

$$\mathscr{L}_+^\uparrow \simeq SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \tag{418}$$

12.3 Covariant 运动方程

上面我们讨论了场构型空间作为表示空间的各种协变场，下面我们希望讨论这些协变场可以存在的各种【不变的】运动方程！我们回顾一下【不变】的意思，也就是运动方程的形式"长得一样"，但是把所有场和坐标全部替换成变换后的形式之后，运动方程依然成立！

12.3.1 Weyl Spinor 的运动方程

运动方程构造

对于一个 Lorentz 变换来说，我们有 Weyl Spinor 的变换关系：

$$\psi_l(x) \to \psi_L'(x') = \Lambda_L(\omega)\psi_L(x) \tag{419}$$

$$\psi_R(x) \to \psi_R'(x') = \Lambda_R(\omega)\psi_R(x) \tag{420}$$

为此我们可以构造对应的协变的微分算符一起构造运动方程。我们定义：

$$\partial = \partial_\mu\sigma^\mu \quad \bar{\partial} = \partial_\mu\bar{\sigma}^\mu \tag{421}$$

我们根据 Pauli Basis 的性质可以知道这个微分算符满足性质：

$$\partial' = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu\partial_\mu\sigma^\nu = \Lambda_L(\omega)\partial\Lambda_L^\dagger(\omega) \tag{422}$$

$$\bar{\partial}' = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu\partial_\mu\bar{\sigma}^\nu = \Lambda_R(\omega)\bar{\partial}\Lambda_R^\dagger(\omega) \tag{423}$$

Remark: 注意！这里的 σ^μ 仅仅是一个矩阵。只是不小心和四矢量的指标进行求和了！这样的神奇操作导致了一些神奇结果！

因此我们可以构造协变的运动方程：

Definition 38. *Weyl Spinor 的协变运动方程*

对于 Weyl Spinor 我们可以构造协变的运动方程：

$$i\bar{\partial}\psi_L = 0, \quad i\partial\psi_R = 0 \tag{424}$$

Proof: 我们证明这两个方程是 Lorentz 不变的。根据 lorentz 不变的定义我们计算方程变换后应有的形式和变换前应有的形式的关系，由于数学上我们有：

$$\bar{\partial}' = \Lambda_R(\omega)\partial\Lambda_R^\dagger(\omega), \quad \psi_L' = \Lambda_L(\omega)\psi_L \tag{425}$$

根据前面讨论的性质我们有 $\Lambda_R^\dagger(\omega)\Lambda_L(\omega) = I$，因此我们有：

$$\bar{\partial}'\psi_L' = \Lambda_R(\omega)\bar{\partial}\psi_L \tag{426}$$

因此如果 $\bar{\partial}\psi_L = 0$ 成立，则在 Lorentz 变换下仍然成立。同理可以证明 $\partial\psi_R = 0$ 也是 Lorentz 不变的。

运动方程物理诠释

我们可以通过研究运动方程的二阶导数形式来理解这个方程蕴含的物理。我们研究下面方程：

$$\partial\bar{\partial}\psi_L = \partial_\mu\partial_\nu\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi_L = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)\psi_L = \partial_\mu\partial^\mu\psi_L = \Box\psi_L \tag{427}$$

Remark: 这是一个极其重要的常用的结论也就是 $\partial\bar{\partial} = \Box$！这个结论在后面会经常使用！

这也就说明：

$$\bar{\partial}\psi_L = 0 \implies \Box\psi_L = 0 \tag{428}$$

我们类比对于标量场的运动方程 $\Box\phi = 0$，可以理解为 Weyl Spinor 的运动方程实际上是描述质量为零的粒子的运动方程。

Weyl Spinor运动方程的解与粒子interpretation

求解运动方程我们一般进行 mode expansion，然后求解运动方程允许的 mode！当然从标量场量子化那里我们也有发现 mode expansion 之后的 mode 具有实际的物理意义也就是单粒子态的产生湮灭算符，所以研究经典的 mode 来理解场所代表的粒子种类！我们进行 mode expansion：

$$\psi_L(p) = \int d^4x e^{ipx}\psi_L(x) \quad \psi_L(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\psi_L(p) \tag{429}$$

我们将其带入运动方程得到结果为:

$$\bar{P}\psi_L(p) = 0, \quad \bar{P} = p_\mu\bar{\sigma}^\mu \tag{430}$$

这是一个代数方程，数学上可以证明对于这个方程来说非零解，也就是 mode 存在，等价于方程的行列式为零:

$$\det\left(\bar{P}\right) = 0 \Leftrightarrow p^2 = 0 \tag{431}$$

也就是说我们的 Weyl Spinor 运动方程给出的 mode 的 on shell 条件是动量的模长为 0。如果类比标量场我们期望:

- Weyl Spinor 描述质量为 0 的粒子!

12.3.2 Majorana Spinor 的运动方程

Weyl Spinor 的运动方程告诉我们其描述的是质量为 0 的 spin-1/2 粒子，但是我们依旧希望能够描述有质量的 spin-1/2 粒子。于是我们研究其他的 spinor field 的运动方程来推测其描述的粒子种类。

Majorana Spinor的运动方程构造

上面的讨论之中我们已经知道 $\bar{\partial}\psi_L$ 在 Lorentz 变换下按照 Λ_R 变换。对于 Chiral 的 Weyl Spinor 来说我们无法自然存在 Λ_R 变换的项，但是对于 Majorana Spinor 来说 $\epsilon\psi_L^*$ 在 Lorentz 变换下正好按照 Λ_R 变换，因此我们可以构造一个 Majorana Spinor 的运动方程。

Definition 39. *Majorana Spinor 的运动方程*

Majorana Spinor 的运动方程定义为:

$$i\bar{\partial}\psi_L(x) = m\epsilon\psi_L^*(x) \tag{432}$$

其中 m 是一个复数常数。

这个运动方程还有一个等价的形式，我们可以对上面的方程进行 complex conjugate 然后使用 ϵ 升降指标，我们得到:

$$i\sigma^\mu\partial_\mu\epsilon\psi_L^*(x) = m^*\psi_L(x) \tag{433}$$

如果我们认为 m 是实数，这个方程完全等价的可以写成 4 维的 Majorana Spinor 的形式:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_M = 0, \quad \gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{434}$$

其中 γ^μ 是 Weyl 表示下的 Gamma 矩阵。

运动方程的物理诠释

同样的我们考虑二阶导数的形式。对于第一个方程两边进行 ∂ 的导数，然后带入第二个方程，我们得到：

$$(\Box + |m|^2)\psi_L(x) = 0 \tag{435}$$

这完全和标量场的 Klein-Gordon 方程形式一样，因此我们可以理解为：

- Majorana Spinor 的运动方程描述质量为 $|m|$ 的 spin-1/2 粒子！

No Charge Interpretation

但是我们 Majorana Fermion 会自然的发现这个运动方程没有任何的 $U(1)$ 对称性：

$$\psi_L(x) \;\mapsto\; e^{i\alpha}\psi_L(x) \tag{436}$$

这个变换下运动方程并不能保持形式，因为两边的相位不一样。因此我们会意识到这个粒子没有对应的守恒流！因此我们可以理解为：

- Majorana Fermion 描述的是没有电荷的 spin-1/2 有质量粒子！

12.3.3 Dirac Spinor 的运动方程

最后！我们希望有一个粒子既有质量又有电荷！我们发现 Dirac Spinor 来构造运动方程正好满足这个需求！

Dirac Spinor的运动方程构造

类比 Majorana Spinor 的情况我们同时包含两个 Weyl Spinor 来构造 Dirac Spinor 的运动方程。我们定义：

Definition 40. *Dirac Spinor 的运动方程*

Dirac Spinor 的运动方程定义为：

$$\bar{\partial}\psi_L(x) = m\psi_R(x), \quad i\partial\psi_R(x) = m\psi_L(x) \tag{437}$$

其中 m 是一个实数。同时我们可以将其写成 4 维 Dirac Spinor 的形式：

$$(i\not{\partial} - m)\Psi_D(x) = 0, \quad \not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu \quad \gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{438}$$

稍微 note 一下 Gamma 矩阵满足 4 维的 Clifford 代数：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{439}$$

我们可以根据 Gamma 矩阵的构造和之前的讨论验证这个运动方程是 Lorentz Invariant 的，我们根据 Gamma 矩阵的构造和之前讨论的 (1/2,1/2) 表示的结论有：

$$\Lambda_D(\theta,\eta)\not{p}\Lambda_D(\theta,\eta)^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \gamma_\mu = \not{\Lambda}p. \tag{440}$$

因此这个运动方程在 Lorentz 变换下依旧成了 $F = 0 \Rightarrow F' = F(\psi'(x'), x') = 0$。

运动方程的物理诠释

首先，我们发现 U(1) 对称性是存在的：

$$\psi_L(x) \mapsto e^{i\alpha}\psi_L(x), \quad \psi_R(x) \mapsto e^{i\alpha}\psi_R(x) \tag{441}$$

的变换下运动方程形式完全不变。其次，我们考虑二阶导数形式：

$$(\Box + m^2)\psi_L(x) = 0, \quad (\Box + m^2)\psi_R(x) = 0 \tag{442}$$

当然这个结果我们也可以直接从 4 维 Dirac Spinor 的形式推导出来:

$$(i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m)\Psi_D(x) = (\Box + m^2)\Psi_D(x) = 0 \tag{443}$$

其中使用了 Clifford Algebra 的性质 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$。和 $\{\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ 类似我们可以对称化导数给出上面的结果。对于这个结论我们可以理解为：

- Dirac Spinor 的运动方程描述质量为 m 的有电荷粒子！

Parity变换性质

我们特殊 note 一下这个运动方程在 Parity 变换下形式依旧不变！！回顾一下我们之前定义的 Parity 变换下 Dirac Spinor 的变换为：

$$\Psi_D(x) \to \gamma^0\Psi_D(Px), \quad x \to Px = (x^0, -x) \tag{444}$$

对于这个变换我们有：

$$(i\not{\partial} - m)\Psi_D(x) \to (i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\gamma^0\Psi_D(Px) = \gamma^0(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\Psi_D(Px) \tag{445}$$

变换后的形式正好是变换前形式乘以一个 γ^0，因此如果变换前形式为 0，则变换后形式依旧为 0！

12.4 Lagrangian Formulation of Spinor Fields

在有了运动方程的基础上，我们构造 Lagrangian 来得到这些运动方程。对于 Lagrangian，我们需要满足：

- Lagrangian 有 Lorentz 对称性，在 Lorentz 变换下形式是不变的！
- 给出的 Euler-Lagrange 方程正好是我们想要的运动方程！

Spinor Field不变量

对于 Spinor Field 来说我们可以构造一些 Lorentz 变换的不变量保证对称性：

$$S_1(x) \equiv \psi_L(x)^\dagger \psi_R(x), \qquad S_1^\dagger(x) \equiv \psi_R(x)^\dagger \psi_L(x), \tag{446}$$

$$S_2(x) \equiv \psi_L(x)\partial \cdot \bar{\sigma}\psi_L(x), \qquad S_3(x) \equiv \psi_R(x)\partial \cdot \sigma\psi_R(x). \tag{447}$$

我们发现有这样的四种！我们注意对于变换矩阵满足：$\Lambda_L^\dagger \Lambda_R = 1$ 这两个并非 Unitary 表示！

12.4.1 Weyl Spinor 的 Lagrangian

Definition 41. *Weyl Spinor 的 Lagrangian*

Weyl Spinor 的 Lagrangian 定义为：

$$S_W = \int d^4x \mathcal{L}_W = \int d^4x \; i\psi_L^\dagger(x)\bar{\partial}\psi_L(x) \tag{448}$$

给出运动方程正好是：

$$0 = \frac{\delta S_W}{\delta \psi_L^\dagger} = i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi_L(x) \tag{449}$$

12.4.2 Dirac Spinor 的 Lagrangian

我们使用上面的不变量进行拼凑得到：

$$\int d^4x \left(i\psi_L^\dagger(x)\bar{\sigma} \cdot \partial\psi_L(x) + i\psi_R^\dagger(x)\sigma \cdot \partial\psi_R(x) - m\psi_L^\dagger(x)\psi_R(x) - m\psi_R^\dagger(x)\psi_L(x) \right) \tag{450}$$

如果使用 4 维 Dirac Spinor 的形式我们可以写成：

Definition 42. *Dirac Spinor 的 Lagrangian*

Dirac Spinor 的 Lagrangian 定义为：

$$S_D = \int d^4x \mathcal{L}_D = \int d^4x \; \bar{\Psi}_D(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi_D, \quad \bar{\Psi}_D \equiv \Psi_D^\dagger \gamma^0 \tag{451}$$

给出的运动方程为 Dirac 方程：

$$0 = \frac{\delta S_D}{\delta \bar{\Psi}_D} = (i\partial\!\!\!/ - m)\Psi_D \tag{452}$$

12.4.3 Majorana Spinor 的 Lagrangian

表面上 Majorana Spinor 的 Lagrangian 和 Dirac Spinor 的 Lagrangian 形式一样。只不过是把 ψ_R 替换成 $\epsilon\psi_L^*$。我们定义：

$$S_M = \int d^4x\mathcal{L}_M = \int d^4x \left(i\psi_L^\dagger(x)\bar{\sigma}\cdot\partial\psi_L(x) - \frac{m}{2}\psi_L^T\epsilon\psi_L - \frac{m^*}{2}\psi_L^\dagger\epsilon^T\psi_L^* \right) \tag{453}$$

使用变分原理我们认为的独立变量其实是 ψ_L 以及 ψ^* 我们可以对于这两个量分别进行变分。对于质量项两个独立变量是 decoupled 的，第一项是 ψ_L 的质量项，第二项是 ψ_L^* 的质量项。但问题是如果我们看质量项的话会发现：

$$\psi_L^T\epsilon\psi_L = -\phi_L^T\epsilon^T\psi_L = -\psi_L^T\epsilon\psi_L \tag{454}$$

所以我们使用一般的数字是无法经典的写出一个 Majorana Spinor 的 Lagrangian 的！只能使用 Grassmann 数！我们变分也需要使用 Grassmann number 的规则。

12.5 补充讨论：Internal Symmetry 以及场论构造

Invariant Tensor 构造

我们现在有了标量场和 Dirac Field。我们现在希望考虑如果很多的标量场和 Dirac Field 存在于一个理论。

$$\phi_i(x), \quad i=1,2,\cdots,N, \quad \Psi_a(x), \quad a=1,2,\cdots,M \tag{455}$$

并且我们希望赋予这个理论一些 Internal Symmetry，也就是让场之间可以进行某种变换但是不影响 Lagrangian 的形式。我们应该怎么构造 Interaction Terms 呢？

- 核心是利用 **Invariant Tensor** 来构造不变量！

所有的 Internal Symmetry 的指标都需要使用 Invariant Tensor 来进行 contract 从而保证不变量的形式。

> **Remark:** 注意 Invariant Tensor 是表示 dependent 的！不同的表示有不同的 Invariant Tensor！我们选择 Internal Symmetry 是某个群的时候，需要确定这个是哪个表示，再通过这个表示的 Invariant Tensor 来构造不变量！

> **Remark:** 注意其实我们的场论想构造 SU(2) 的 internal symmetry 的时候使用的是两个复标量场，因此我们其实有四个实标量场的自由度！

常用Internal Symmetry Group

我们常用的 Internal Symmetry Group 有：

- SU(N)：δ_{ij}，$\epsilon_{i_1 i_2\cdots i_N}$ ；SU(2)Exp map 形式：$U(\theta) = e^{i\theta^i\sigma^i/2}$

- SO(N)：δ_{ij}，$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N}$；SU(2) Triplet 或者说 SO(3)(注意，我们一般说 SU(2) Triplet 的时候其实是 SO(3) 的定义表示) Exp map 形式：$R(\theta) = e^{i\theta^i J^i}$ 其中 $(J^i)^a_b = -i\epsilon^{iab}$
- U(1)：1 Exp map 形式：$e^{i\alpha}$
- U(2)：δ_{ij} ；Exp map 形式：$U(\theta, \phi) = e^{i\theta^\mu \sigma^\mu/2} e^{i\phi}$ 这里有一个 I 的加入！
- O(N)：δ_{ij}

12.6 补充：Gamma Matrix in Weyl Representation

Gamma矩阵的Weyl表示

我们这里使用的 Gamma 矩阵是 Weyl 表示下的 Gamma 矩阵。我们来梳理一下其一些性质。首先定义上矩阵元素为：

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i) \tag{456}$$

基本性质就是满足 4D 的 Clifford Algebra：$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ 这个矩阵对应了 Dirac Spinor 表示空间，我们可以写出一些性质，比如 Dirac Spinor 的 Lorentz 变换矩阵为：

$$\Lambda_D(\omega) = \begin{pmatrix} \Lambda_L(\omega) & 0 \\ 0 & \Lambda_R(\omega) \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right), \quad S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{457}$$

$$\Lambda_D^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} \Lambda_L^{-1}(\omega) & 0 \\ 0 & \Lambda_R^{-1}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_R^\dagger(\omega) & 0 \\ 0 & \Lambda_L^\dagger(\omega) \end{pmatrix} \tag{458}$$

S矩阵的性质

我们会发现一个很好用的矩阵 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$，我们计算其矩阵形式为：

$$S^{0i} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \tag{459}$$

由于我们知道 $\Lambda_D(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right)$，因此我们可以看到 $S^{\mu\nu}$ 实际上就是 Dirac Spinor 表示空间的 Lie 代数生成元。我们可以证明其确实构成了 Lorentz 代数的一个旋量空间的表示：

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\rho}) \tag{460}$$

更多性质需要更多的讨论捏！

Lorentz矩阵作用下

我们之前知道 Weyl Spinor 的 Lorentz 变换矩阵作用下 $\sigma^\mu v_\mu$ 以及 $\bar{\sigma}^\mu v_\mu$ 的变换规则。我们可以利用其得到 Dirac Spinor 的 Lorentz 变换矩阵作用下的 Gamma 矩阵 contraction 的量 $v_\mu \gamma^\mu = \not{v}$ 的变

换规则:

$$\Lambda_D(\omega)\not{v}\Lambda_D^{-1}(\omega) = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu v_\mu \gamma^\nu \tag{461}$$

注意！Gamma 矩阵是一个永远不变的东西，变的是 v_μ！

12.7 Questions and Thoughts

Question 12.31 确认讲义中的 convention 是不是有问题啊!!

指标是没有问题的!! 但是最后化成矩阵的形式的时候出错了！ □

Question 12.32 关于 $sl(2,\mathbb{C})$ 以及其与 $so(1,3)$,$su(2)$，群和代数到底是什么关系捏??

Question 12.33 Lorentz 群的元素的矩阵形式的 Notation 到底是什么意思?? 务必回顾一下!

我感觉不需要过度纠结这个形式，只需要记住一个神奇的转制和逆矩阵的关系就好:

$$\Lambda^T = \eta\Lambda^{-1}\eta \tag{462}$$

13 Lecture 12: On Shell Mode Expansion of Dirac Spinor Field

{sec:Lect

13.1 Classical Dirac Spinor Field 的 On Shell Solution

在自由标量场量子化里面虽然我们没有先讨论 on shell mode expansion。但是在量子化研究之中我们希望对角化 Hamiltonian，所以我们依旧进行了 mode expansion，并且通过算符 Heisenberg Picture 下的变换给出了 on shell 的条件。我们已经意识到:

- 对于物理 Interpretation; Hilbert Space 构造来说，on shell mode expansion 是必要的;
- On shell expansion 的形式由经典场的结构完全决定

因此，在量子化 Dirac 场之前，我们需要先研究经典 Dirac 场的 on shell mode expansion。On shell Mode expansion 的操作方法为

- 使用 Forier Transformation 的方法得到经典场的动量空间表达式;
- 根据运动方程，给出非 0 的互相独立的 mode 也就是 on shell equation $p^2 - m^2 = 0$ 之类的

我们下面进行这个过程

13.1.1 On shell Mode Expansion

Mode Expansion以及Mode Equation

下面我们使用 ψ 来表示 Dirac Spinor Field。满足运动方程 $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$ 我们为了求解这个方程，我们使用 Fourier Transformation 的方法，假设:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu x^\mu} \hat{\psi}(p), \quad \hat{\psi}(p) = \int d^4x \; e^{ip_\mu x^\mu} \psi(x) \tag{463}$$

其中 $p_\mu x^\mu = p^0 t - p^i x^i$。

> **Remark:** 我们注意！这里和标量场使用三维 Fourier Transform 不一样，我们使用了四维的。因为我们要求运动方程。

将 Fourier Transform 代入运动方程，我们得到 mode 的约束方程:

$$(\not{p} - m)\hat{\psi}(p) = 0 \; . \tag{464}$$

Mode Solution

一个经典的 Trick 是：**存在非 0 解等价于系数矩阵的行列式为 0**。因此我们计算:

$$\det\left(\not{p} - m\right) = \det(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0 \Rightarrow (p^2 - m^2)^2 = 0 \Rightarrow p^0 = \omega_p = \pm\sqrt{m^2 + p^2} \tag{465}$$

其中我们使用关系 $\not{p}\not{p} = p_\mu p_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)/2 = p^2$.。因此 on shell 的 mode 可以通过设计下面的 $\hat{\psi}(p)$ 形式给出来:

$$\hat{\psi}(p) = 2\pi\delta(p^2 - m^2)\left(\theta(p_0)u(p) + \theta(-p_0)v(-p)\right) \tag{466}$$

对于所有 $p^0=\omega_p=\sqrt{p^2+m^2}$ 的展开系数我们计作 $u(p)$；对于所有 $p^0=\omega_p=-\sqrt{p^2+m^2}$ 的展开系数我们计作 $v(-p)$。这里的 $u(p), v(p)$ 是四分量的 Spinor，并且必然是 **on shell 的**。我们将这个形式 Fourier Transform 回到时空空间：

$$\psi(x)=\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\delta(p^2-m^2)e^{-ip_\mu x^\mu}\left(\theta(p_0)u(p)+\theta(-p_0)v(-p)\right) \tag{467}$$

$$=\int d\Omega_{\mathbf{p}}\left(e^{-ip_\mu x^\mu}u(p)+e^{ip_\mu x^\mu}v(p)\right) \tag{468}$$

其中我们回顾 Ω_p 这个 measure 的性质 $\int d\Omega_{\mathbf{p}}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}2\pi\delta(p^2-m^2)\theta(p_0)$。特别注意的是，由于我们的 mode expansion **全部是 on shell 的**，因此我们这里 $px=p^0t-p^ix^i$ 中的 $p^0=\omega_{\mathbf{p}}=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$。

Spinor进一步Expansion

我们现在已经使用 on shell mode $u(p), v(p)$ 进行展开了。但是这两个量都是四分量的旋量，我们希望进一步简化使得展开系数是纯纯的数字。我们假设这两个旋量满足下面的展开：

$$u(p)=\sum_i a_i(p)u_i(p)\ ,\quad v(p)=\sum_i b_i(p)v_i(p) \tag{469}$$

其中 $u_i(p), v_i(p)$ 是某一组线性无关的旋量基，$a_i(p), b_i(p)$ 是纯数字的展开系数。我们知道，不同动量 mode 满足的 dirac 方程和动量的形式是有关系的，所以基必然也是依赖于动量的，为了简洁的讨论，我们使用方法：

- 先选择一个参考动量 $p_0^\mu=(m,0,0,0)$，在这个动量下求解 Dirac 方程，得到一组基 $u_i(m), v_i(m)$；
- 然后对于任意动量 p^μ，使用 Lorentz 变换将参考动量变换到 p^μ，然后使用这个 Lorentz 变换作用在参考动量下的基上，得到任意动量下的基 $u_i(p), v_i(p)$。

13.1.2 展开旋量 mode $u(p)$

参考动量下的基解

我们选择参考动量 $p^\mu=(m,0,0,0)$，代入 Dirac 方程 $(\not{p}_0-m)U(p_0)=0$：

$$m\left(\gamma^0-1\right)u(p_0)=m\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_L\\ \xi_R\end{pmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad \xi_L=\xi_R=\sqrt{m}\xi\quad u(p_0)=\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} \tag{470}$$

其中 ξ 是任意的二分量旋量。我们发现 Dirac Equation 仅仅告诉我们对于这个 on shell mode，左旋量和右旋量是相等的。我们可以任意选择一个二分量旋量 ξ，都可以满足 Dirac Equation。因此我们选择二分量旋量的标准基：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad u_1(p_0)=\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix},\quad u_2(p_0)=\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi_2\\ \xi_2\end{pmatrix} \tag{471}$$

因此 on shell 的 mode 在参考动量下的基解就是上面的两个。总之表示为：

$$\xi = a_1(p_0)\xi_1 + a_2(p_0)\xi_2 \quad \Rightarrow \quad u(p_0) = a_1(p_0)u_1(p_0) + a_2(p_0)u_2(p_0) \tag{472}$$

从参考动量Boost到任意动量

现在我们选择一种方式将参考动量 $p_0^\mu = (m, 0, 0, 0)$ Boost 到任意动量 $p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$。我们选择标准 Boost 为：

{def:stan

Definition 43. *Standard Boost*

对于任意动量 $p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$，我们定义将参考动量 $p_0^\mu = (m, 0, 0, 0)$ Boost 到 p^μ 的 Lorentz 变换为：

$$\Lambda_{\mathbf{p}} = e^{i\eta_{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{K}}, \quad \eta_{\mathbf{p}} = \left(\tanh^{-1}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mathbf{p}}}\right)\right)\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad K^i = J^{0i} \tag{473}$$

注意！这里的 K^i 是 Lorentz 群 Defining Representation 下的 Boost Generator。三维的求和是直接 Euclidean 的求和 $p^iK^i = p^iJ^{0i}$

btw 我们一般使用 $\tanh^{-1}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mathbf{p}}}\right) = \eta$ 来表示 rapidity。当然一般还有其他完全一样的写法：

$$\eta = \sinh^{-1}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}\right) = \cosh^{-1}\left(\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{m}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mathbf{p}}}\right) \tag{474}$$

证明Boost之后满足Dirac Equation

我们还需要证明如果 $u(p_0)$ 满足参考动量下的 Dirac Equation，那么 $u(p) = \Lambda_D(\eta_p)u(p_0)$ 也满足任意动量下的 Dirac Equation。我们已知参考动量下的 Dirac Equation 为：

$$(\not{p}_0 - m)u(p_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_D(\eta_p)(\not{p}_0 - m)u(p_0) = 0 \tag{475}$$

我们插入 $\Lambda_D^{-1}(\eta_p)\Lambda_D(\eta_p) = I$，得到：

$$(\Lambda_D(\eta_p)\not{p}_0\Lambda_D^{-1}(\eta_p) - m)u(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\not{p} - m)u(p) = 0 \tag{476}$$

其中我们使用了 $\Lambda_D(\eta_p)\not{p}_0\Lambda_D^{-1}(\eta_p) = \not{p}$。因此 Lorentz 变换之后的旋量依然满足 Dirac Equation。Lorentz 变换后的基也就是一个合法的 on shell 基。

任意动量下的基解

我们现在给出一个任意动量的 $u(p)$ 的形式。我们计算：

$$u(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_1(p) = \Lambda_D(\eta_p)u_1(p_0) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi \\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi\end{pmatrix} \tag{477}$$

其中我们使用了形式化的定义:

$$\sqrt{\sigma^\mu p_\mu} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}+m}I - \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}+m}}\right) \tag{478}$$

$$\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}+m} + \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}+m}}\right) \tag{479}$$

我们可以证明这个定义满足 $(\sqrt{\sigma^\mu p_\mu})^2 = \sigma^\mu p_\mu = \omega_p - \sigma\cdot\mathbf{p}$，$(\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu})^2 = \bar{\sigma}^\mu p_\mu = \omega_p + \sigma\cdot\mathbf{p}$。注意我们这里的 $\mathbf{p}\cdot\sigma = p^i\sigma^i$。因此我们可以得到任意动量下的基，我们展开:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad u_1(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_1\\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_1\end{pmatrix},\quad u_2(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_2\\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_2\end{pmatrix} \tag{480}$$

使得最终结果满足:

$$\xi = a_1(p)\xi_1 + a_2(p)\xi_2 \quad\Rightarrow\quad u(p) = a_1(p)u_1(p) + a_2(p)u_2(p) \tag{481}$$

13.1.3 展开旋量 mode $v(p)$

我们可以重复上面的过程，给出 $v(p)$ 的展开。其对应的 Dirac Equation 为 $(\not{p}+m)v(p)=0$。我们重复过程得到:

$$\xi_i = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad v_1(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_1\\ -\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_1\end{pmatrix},\quad v_2(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_2\\ -\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_2\end{pmatrix} \tag{482}$$

使得最终结果满足:

$$v(p) = b_1(p)v_1(p) + b_2(p)v_2(p) \tag{483}$$

13.1.4 On Shell Mode Expansion 总结

在上面基础上我们给出 On Shell Mode Expansion 的最终形式:

Theorem 26. *Dirac Spinor Field 的 On Shell Mode Expansion*

Dirac Spinor Field $\psi(x)$ 的 On Shell Mode Expansion 为:

$$\psi(x) = \int d\Omega_p \sum_s \left(a_s(p)u_s(p)e^{-ip_\mu x^\mu} + b_s(p)v_s(p)e^{ip_\mu x^\mu}\right) \ . \tag{484}$$

基解为:

$$u_1(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_1\\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_1\end{pmatrix},\quad u_2(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_2\\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_2\end{pmatrix} \tag{485}$$

$$v_1(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_1\\ -\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_1\end{pmatrix},\quad v_2(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi_2\\ -\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi_2\end{pmatrix} \tag{486}$$

其中 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，并且 $\sqrt{\sigma^\mu p_\mu}, \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}$ 的定义见上文。

13.2 Spinor Basis 性质

{sec:spin

为了后续研究方便，我们会讨论很多 u_s, v_s 这些 Basis 的性质。

Dirac Conjugation

我们先复习一下 Dirac Field 是怎么定义共轭的：

$$\bar{v} = v^\dagger \gamma^0 \tag{487}$$

Basis的正交归一化

我们通过根据定义进行直接计算会发现这些 Basis 满足下面的正交归一化关系。对于相同的 u, v 我们有归一化关系：

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = -\bar{v}_r(p)v_s(p) = 2m\delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(p)\gamma^\mu u_s(p) = \bar{v}_r(p)\gamma^\mu v_s(p) = 2p^\mu \delta_{rs} \tag{488}$$

对于不同的 u, v 我们有正交关系：

$$\bar{u}_r(p)v_s(p) = \bar{v}_r(p)u_s(p) = 0, \quad u_r^\dagger(p)v_s(-p) = v_r^\dagger(-p)u_s(p) = 0. \tag{489}$$

特别的我们注意到对于 γ^μ 选择 γ^0 的时候：$u_r^\dagger(p)u_s(p) = v_r^\dagger(p)v_s(p) = 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}$

Basis的完备关系

我们可以根据 ξ_i 向量的完备关系：$\sum_r \xi_r \xi_r^\dagger = 1_{2\times 2}$. 进一步通过计算得到 u_s, v_s 的完备关系：

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m. \tag{490}$$

其中我们使用了关系:$(\sqrt{p_\mu \sigma^\mu})^2 = p_\mu \sigma^\mu$, $(\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu})^2 = p_\mu \bar{\sigma}^\mu$. 以及还有 $\sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} = \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}\sqrt{p_\mu \sigma^\mu} = mI$.

13.3 Chirality, Helicity 性质

Remark: 强调！本章全部内容都是**经典的**！这里完全不涉及任何量子化的内容，全部是经典的 Dirac Spinor Field 的性质！！

13.3.1 Chirality

Chirality定义

我们知道 Dirac Spinor Field 其实是通过两个 Weyl Spinor Field 直和得到的，我们希望定义一个量来描述这个场可以分成两个 Chiral Weyl Spinor Field 的程度。我们先定义一个新的 Gamma 矩阵：

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{491}$$

我们定义 Chirality：

> **Definition 44.** *Chirality 为某一个 Dirac Field 的 γ^5 的本征值！*

如果这个场完全只有左手 Weyl Spinor Field 组成 $\psi = (\psi_L, 0)$，那么它的 Chirality 为 -1；如果这个场完全只有右手 Weyl Spinor Field 组成 $\psi = (0, \psi_R)$，那么它的 Chirality 为 $+1$。

Chiral Projector

一般一个 Dirac Spinor Field 不可能仅仅由左手或者右手 Weyl Spinor Field 组成。但是我们可以通过一个 Projector 把 Dirac Spinor Field 投影到左手或者右手 Weyl Spinor Field 上。我们定义 Chiral Projector：

> **Definition 45.** *Left/Right Chiral Projector*
>
> *我们可以通过下面两个投影算符把 Dirac Spinor Field 投影到左手或者右手 Weyl Spinor Field 上：*
>
> $$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{492}$$

Chirality和运动方程

- 我们知道如果一个 Dirac Spinor Field 满足**有质量的 Dirac Equation**，那么它的**左右手部分必然不是独立的**，因此它不可能是 Chirality 的本征态。
- 如果一个 Dirac Spinor Field 满足**无质量的 Dirac Equation**，那么它的左右手部分是独立的，因此它可以是 Chirality 的本征态。也就是可以**有纯左手和右手的 Weyl Spinor Field 解**。

13.3.2 Helicity

Helicity定义

我们可以定义另一个描述 Spinor Field 的性质的量，叫做 Helicity。Helicity 矩阵定义为自旋在动量方向的投影：

$$h = \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \tag{493}$$

其中 $\mathbf{S}$ 是 Spin Operator。这里的点乘依旧是三维的 Euclidean 求和。

Definition 46. *Helicity 定义为某个 Field 的 Helicity Operator 的本征值!*

- **Weyl Spinor 的 Helicity**

  对于 Weyl Spinor 来说，其 Spin 是通过 Pauli 矩阵定义的 $S^i = \frac{1}{2}\sigma^i$。所以对于 Weyl Spinor 来说，Helicity 的定义为：

$$h_W = \frac{1}{2}\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \tag{494}$$

- **Dirac Spinor 的 Helicity**

  同样的 Dirac Spinor 在 Weyl Basis 下是两个 Weyl Spinor 的直和，因此我们可以定义 Dirac Spinor 的 Helicity Operator 为：

$$h_D = \begin{pmatrix} h_W & 0 \\ 0 & h_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix} \tag{495}$$

  特别的这个矩阵满足 $h_D^2 = 1/4I$

我们注意，Helicity 的定义是依赖于动量的。因此并非一个 Lorentz Invariant 的良定的量。同时对于有质量的粒子来说，我们可以总是通过一个 Boost 把粒子 Boost 到静止系，这个时候完全不可以定义 Helicity。因此 **Helicity 只有对于无质量粒子才是一个良定的量**。

Helicity和运动方程

我们考虑 Dirac Spinor Field 的 on shell mode $u(p)$ 我们回忆：

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma^\mu p_\mu}\xi \\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}\xi \end{pmatrix} \tag{496}$$

我们考虑无质量极限 $m \to 0$，我们有：

$$u(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \begin{pmatrix} (1-2h_W)\xi \\ (1+2h_W)\xi \end{pmatrix}, \tag{497}$$

我们发现 on shell mode 可以使用 Helicity 矩阵进行写出来!

13.3.3 Massless Limit 下 Chirality 和 Helicity 的关系

给出上面的定义之后我们可以讨论这两个量的关系。由于我们对于经典的场论仅仅关心 on shell 的情况，因此我们讨论 on shell mode 下 Chirality 和 Helicity 的关系。但是由于 Chirality 对于有质量的 Dirac Field 的 on shell mode 是不可以被对角化的，所以我们考虑 **Massless Limit** $m \to 0$ 下的关系。

无质量On shell粒子的Chirality和Helicity

我们考虑无质量极限 $m \to 0$ 下面的 on shell mode $u(p)$，我们有：

$$h_D u(p) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} u(p) = \frac{1}{2}\gamma^5 u(p), \tag{498}$$

这给出了一个非常重要的关系：

Theorem 27. *对于物质量 On shell 的 Dirac Spinor Field，其 Chirality 和 Helicity 满足关系：*

$$h_D = \frac{1}{2}\gamma^5 \tag{499}$$

两者是完全等价的!! 这也意味着 Helicity 对于物质量粒子是一个 Lorentz Invariant 的良定量!!

Massless Dirac Spinor Field的on shell mode

我们简短的说明，对于 Massless 的 Dirac Spinor Field 来说，我们的 Dirac Equation 的在 Mode Expand 之后的结果为 $\not{p} u(p) = 0$。

Remark: note 这里我们使用 $u(p)$ 写出之前的 $\hat{\psi}(p)$

通过之前 massless 极限我们已经意识到，on shell 的 $u(p)$ 可以使用 Chirality 和 Helicity 的本征态进行写出，并且 **On shell 条件告诉我这两者的本征态务必一样!**。因此我们的 on shell mode 其实是：

$$u_-(p) = \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \begin{pmatrix} \xi_-(p) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_+(p) = \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(p) \end{pmatrix} \tag{500}$$

其中 $\xi_\pm(p)$ 是 Weyl Spinor 的 Helicity 本征态：

$$\hat{h}\xi_\pm = \pm\frac{1}{2}\xi_\pm \tag{501}$$

Remark: 这里只是给个 hint!! 严格的 mode expansion 需要严格的讨论!!

14 Lecture 13: Quantization of Dirac Field

{sec:Lect

14.1 Quantization 的思路与准备

14.1.1 Quantization 的思路

Quantization是什么

对于量子化我们的操作是，把所有经典的量的 Poisson Bracket 替换为量子力学之中的对易关系。但是，对于 Classical Spinor Field，我们完全没有研究过 Poisson Bracket 以及分析力学的性质再研究起来可能会十分麻烦**因为它是一个约束系统**。因此我们或许需要给出更一般的量子化的方式：

> **Axiom 2.** 正则量子化公理
>
> 对于经典的场我们存在动力学场 $\phi_i(x)$ 以及其共轭动量场 $\pi_i(x)$，量子化即为下方的操作：
>
> - **场替换为算符**：我们把经典场替换为算符 $\phi_i(x)$ 但并不一定 *Hermite*，只有其中实数部分变成了 *Hermite* 算符。
> - **共轭对易关系**：算符需要满足共轭对易关系：
>
> $$[\phi_i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)]_\pm = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{502}$$
>
> 其中 $[A,B]_\pm = AB \pm BA$，上标 $+$ 表示反对易关系，$-$ 表示对易关系。对于不同的场我们有自由选择不一样的量子化方式。

Hilbert Space的构造

在量子化之后我们需要构造 Hilbert Space，我们期望其 Hilbert Space 是 Fock Space，这样我们可以构建粒子的 interpretation。为此，我们需要研究 Hamiltonian 量子化后的性质。我们的思路是：

- 经典上进行求解 Hamiltonian
- 量子化：给出对易关系或者反对易关系（同时可以验证一下 Hamiltonian 确确实实是生成元满足 $\dot{\psi}(x) = i[H,\psi(x)]$；毕竟我们没有讨论经典力学的情况所以验证一下还是令人放心的）
- 通过 Mode Expansion 进行对角化 Hamiltonian，给出 on shell 的产生湮灭算符。
- 构造真空态，产生算符作用在真空态上构造 Fock Space。

14.1.2 Quantization 准备工作

> **Remark:** 注意：我们这一小节依旧是**纯经典的内容**。但是其实里面讨论基本上是不严谨的，因为 Dirac Field 是一个约束系统，我们并没有讨论 Dirac Bracket 的内容。所以这里的内容只能作为一种直观的理解，严格的处理需要使用 Dirac Bracket 的内容。

量子化之前我们需要进行一些准备工作：求解 Hamiltonian 形式；给出理论的 Canonical Variable；给出 Mode Expansion 的反向变换方便我们通过场对易关系给出产生湮灭算符的对易关系。

Hamiltonian的求解

对于 Lagrangian，我们希望认为 ψ 和 $\bar{\psi}$ 是独立变量，因此我们可以通过分部积分的方式重新改写 Lagrangian 保证两者都存在动力学项：

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\partial\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right) - m\bar{\psi}\psi \tag{503}$$

对此我们求解 EM Tensor 可以以得到 Hamiltonian 密度，然后对于等时面进行积分得到 Hamiltonian 以及动量算符

Theorem 28. *Dirac Field 的 Hamiltonian 和动量算符*

$$H = \int d^3x\,\bar{\psi}(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi, \quad P^i = -P_i = -i\int d^3\mathbf{x}\psi^\dagger\partial_i\psi \tag{504}$$

Remark: 我们知道对于标量场来说，我们可以通过 Legendre 变换；时间平移对称性守恒量；时间平移对称性生成元三种方式完全等价的求解 Hamiltonian。但是对于 Dirac Field 这个约束系统来说这些并不完全等价。严格的解释需要使用 Dirac Bracket。但是我们这里选择了合适的路径至少保证了后两者是等价的！

Canonical Variable的求解

对于 Dirac Field，我们可以通过 Lagrangian 求解其共轭动量，这个时候不能够使用分布积分之后的 Lagrangian，严格的解释需要**使用 Dirac Bracket**：

Theorem 29. *Dirac Field 的 Canonical Variable*

$$\psi(x), \quad \pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x) \tag{505}$$

反向Mode Expansion

我们经常需要使用场的 Canonical 对易关系给出产生湮灭算符的对易关系，因此我们需要给出反向的 Mode Expansion。我们的 on shell mode expansion 是包含时间的，现在我们不妨考虑 $t=0$ 的等时面上面的情况。我们回顾一下 on shell mode expansion：

$$\psi(x) = \int d\Omega_{\mathbf{p}} e^{-ip_\mu x^\mu}\sum_s\left(a_s(p)u_s(p) + b_s(-p)v_s(-p)\right) \tag{506}$$

对于 $t=0$ 的等时面上我们不使用协变的指标进行书写，使用 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = \sum_i x^i p^i$ 进行书写 $exp(-ip_\mu x^\mu) = exp(i\mathbf{px})$。因此我们有：

$$\psi(\mathbf{x}) = \int d\Omega_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\sum_s\left(a_s(p)u_s(p) + b_s(-p)v_s(-p)\right) \tag{507}$$

我们对其进行三维的反向 Forier 变换：

$$\int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}) = \int d\Omega_{\mathbf{p}'} \sum_s \left(a_s(p')u_s(p') + b_s(-p')v_s(-p')\right) \int d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \tag{508}$$

我们使用 section 13.2之中的性质可以知道：

$$u_s^\dagger(p)\int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}) = a_s(p), \quad v_s^\dagger(-p)\int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}) = b_s^\dagger(-p) \tag{509}$$

14.2 Quantization of Dirac Field

由于正则量子化的方法是在一个等时面上面进行的，因此我们需要把之前的 on shell mode expansion 限制在等时面上面。我们不妨选择 $t = 0$ 的等时面上面进行量子化。其上的 on shell mode expansion 为：

$$\psi(\mathbf{x}) = \int d\Omega_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_s (a_s(p)u_s(p) + b_s(-p)v_s(-p)) \tag{510}$$

我们之后每一步操作都默认是在 **0 时间的等时面上面**进行的。

14.2.1 Fermionic Quantization

正则对易关系

在各种尝试之后人们发现，量子化 Dirac Field 的最好方式是使用反对易关系，这样可以避免出现各种的问题 (负能量，non-Unitary)。我们现在 Promote 所有的场为算符，并且给出反对易关系：

> **Theorem 30.** *Dirac Field 的量子化*
>
> *我们现在 promote 所有的 Dirac Field 作为算符，并且要求满足反对易关系：*
>
> $$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{y})\} = 0 \quad \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \pi_\beta(\mathbf{y})\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{511}$$

我们带入 canonical momentum 的表达式 $\pi(x) = i\psi^\dagger(x)$，我们可以得到：

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{512}$$

产生湮灭算符的反对易关系

下面我们计算量子化之后的 mode 的系数 $a_s(p), b_s(p)$ 的反对易关系。我们使用反向 mode expansion 的结果：

$$\left\{a_r(p), a_s(k)^\dagger\right\} = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \quad \left\{b_r(p), b_s^\dagger(k)\right\} = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \tag{513}$$

我们之前的展开 convention 很好的给出了 covariant 的 delta 函数，这样两边其实都是 Lorentz 协变的力！

14.2.2 Hamiltonian 的对角化

Hamiltonian的对角化

下面我们研究 Hamiltonian 量子化之后的性质，我们显然知道 Hamiltonian 是一个非对角的形式，我们希望将其对角化进行研究。对于自由标量场我们这个时候选择了三维的 mode expansion。对于 Dirac Field 我们在标量场的启发下已经先见之明的使用了 on shell mode expansion，我们现在发现其**正好能对角化 Hamiltonian**。我们把量子化之后的 mode expansion 带入 Hamiltonian：

Theorem 31. *Dirac Field 的 Hamiltonian 的对角形式*

$$H = \int d\Omega_{\mathbf{p}} \sum_s \omega_{\mathbf{p}} \left(a_s^\dagger(p) a_s(p) - b_s^\dagger(p) b_s(p) \right) \tag{514}$$

我们这个时候为了消除负能量，一般选择另外一组产生湮灭算符 $\tilde{b}_s = b_s^\dagger$, $\tilde{b}_s^\dagger = b_s$，这样 Hamiltonian 可以写成：

$$H = \int d\Omega_{\mathbf{p}} \sum_s \omega_{\mathbf{p}} \left(a_s^\dagger(p) a_s(p) + \tilde{b}_s^\dagger(p) \tilde{b}_s(p) \right) + \text{常数项} \tag{515}$$

Hamiltonian对易关系

我们根据 Fermionic 反对易关系给出 Hamiltonian 和 Mode 系数的对易关系。注意，我们对于 Hamiltonian 的生成的定义依旧是**反对易**关系，只是反对易关系其实可以使用对易关系进行给出：

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}, \quad [AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \tag{516}$$

因此我们可以计算出：

$$[H, a_r^\dagger(p)] = \omega_{\mathbf{p}} a_r^\dagger(p); \quad [H, \tilde{b}_r^\dagger(p)] = \omega_{\mathbf{p}} \tilde{b}_r^\dagger(p); \tag{517}$$

这也确实说明我们选择的新的 $\tilde{b}$ 才是标准的正能量的产生湮灭算符。

14.3 Dirac Field 的 Hilbert Space

单一Fermionic谐振子的Hilbert Space构造

为了更好理解 Fermionic 的量子化，我们先考虑一个简单的单一 Fermionic 谐振子。其 Hamiltonian 为：

$$H = \omega b^\dagger b = -\omega b b^\dagger + \omega \tag{518}$$

其中 b 和 $b^\dagger$ 满足反对易关系：$\{b, b^\dagger\} = 1$。我们现在构造其 Hilbert Space。我们定义真空态 $|0\rangle$ 满足 $b|0\rangle = 0$，我们可以构造出唯一的激发态 $|1\rangle = b^\dagger |0\rangle$。我们理解如果 $\omega > 0$ 的话，$|0\rangle$ 是最低能量态；如果 $\omega < 0$ 的话，$|1\rangle$ 是最低能量态。

Hamiltonian和动量算符的Mode形式

我们使用场的 on shell mode expansion 再改写动量算符得到：

$$P^i = \int d\Omega_{\mathbf{p}} p^i \left[\sum_r \left(a_r^\dagger(p) a_r(p) + \tilde{b}_r^\dagger(p) \tilde{b}_r(p) \right) \right] \tag{519}$$

和 Hamiltonian 进行结合我们就有四动量算符的形式：

$$P^\mu = \int d\Omega_{\mathbf{p}} p^\mu \left[\sum_r \left(a_r^\dagger(p) a_r(p) + \tilde{b}_r^\dagger(p) \tilde{b}_r(p) \right) \right] \tag{520}$$

以及这个算符和产生湮灭算符的对易关系：

$$[P^\mu, a_r^\dagger(p)] = p^\mu a_r^\dagger(p), \quad [P^\mu, \tilde{b}_r^\dagger(p)] = p^\mu \tilde{b}_r^\dagger(p) \tag{521}$$

Dirac Field的Hilbert Space构造

因此我们知道这个理论其实有四种激发态 $a_r^\dagger(p) |0\rangle, \tilde{b}_r^\dagger(p) |0\rangle, r = 1, 2$。每一种产生算符会激发一个 on shell 动量为 p^μ 的粒子。作用在真空态上面给出 Hilbert Space:

> **Theorem 32.** *Dirac Field 的 Hilbert Space*
>
> *我们定义真空态 $|0\rangle$ 满足 $a_r(p) |0\rangle = 0, \tilde{b}_r(p) |0\rangle = 0$，我们可以通过作用产生算符在真空态上面构造 Hilbert Space*：
>
> $$\mathcal{H} = span \left\{ \prod_{i=1}^{N} a_{s_i}^\dagger(p_i) \prod_{j=1}^{M} \tilde{b}_{r_j}^\dagger(k_j) |0\rangle \mid N, M = 0, 1, 2, \cdots; s_i, r_j = 1, 2 \right\} \tag{522}$$

对于其中的任意一个量子态都是 P^μ 的本征态，其本征值为所有粒子的动量之和。我们意识到这个 Hilbert Space 中粒子满足 Fermi-Dirac 统计：

- 所有的产生算符之间都是 anti-commute 的；因此不可能存在两个完全一样的粒子在一个量子态上面，这就是**泡利不相容原理**。
- 由于反对易，所以波函数必然是全反对称的。

Spin and Statistics Theorem

我们量子化 Dirac Field 得到 FD 统计的粒子，这其实是一个非常深刻的结论。我们可以把这个结论推广为更一般的 **Spin and Statistics Theorem**：

> **Theorem 33.** *Spin and Statistics Theorem*
>
> *对于一个 Lorentz 群的表示协变场，按照 (j_-, j_+) 表示进行协变。如果量子化的理论需要满足 Unitary, Causality 以及 Positivity of Energy，那么该场量子化之后的统计性质由 $j_- + j_+$ 决定*：
>
> - *如果 $j_- + j_+$ 为整数，那么该场量子化之后满足 Bose-Einstein 统计。*
> - *如果 $j_- + j_+$ 为半整数，那么该场量子化之后满足 Fermi-Dirac 统计。*

关于为什么仅仅和 $j_- + j_+$ 有关，是因为我们的场是按照 $j_- \otimes j_+$ 的表示进行协变的。这个表示等价于很多表示的直和，而这些表示的 spin 的奇偶行完全由 $j_- + j_+$ 决定。

14.4 Heisenberg Picture 构造全时空的场算符

前面的量子化过程是在 $t = 0$ 这个等时面上面完成的。但是我们希望构建全时空的场算符。为此我们使用 Heisenberg Picture 的方式进行构造。就可以得到一个 on shell 的全时空的场算符，我们给出：

$$\psi(x) \equiv e^{iHt}\psi(\mathbf{x})e^{-iHt} \tag{523}$$

为了计算这个，我们依旧先证明一个数学上的关系：

$$e^{iHt}a_r(p)e^{-iHt} = a_r(p)e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt}\tilde{b}_r(p)e^{-iHt} = \tilde{b}_r(p)e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}. \tag{524}$$

我们把这个关系带入上面的式子，我们就有：

Theorem 34. *Dirac Field* 的全时空场算符的协变形式

Dirac Field 的全时空场算符为：

$$\psi(x) = \int d\Omega_{\mathbf{p}} \left[\sum_r e^{-ip_\mu x^\mu} a_r(p)u_r(p) + e^{ip_\mu x^\mu}\tilde{b}_r^\dagger(p)v_r(p)\right] \tag{525}$$

注意我们使用的仍然是 $(+,-,-,-)$ 的 *metric*。

14.5 U(1) 对称性与电荷守恒

在一般时空 isometry 对称性之外，Dirac Field 还存在一个非常重要的内部对称性：U(1) 对称性。对于下面的 Global U(1) 变换，Lagrangian 是满足对称性的条件的：

$$\psi \to e^{-i\alpha}\psi \quad \bar{\psi} \to e^{i\alpha}\bar{\psi} \tag{526}$$

自然我们可以计算其守恒流是：

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{527}$$

并且我们也可以给出守恒荷：

$$J^0 = \psi^\dagger\psi \Rightarrow Q = \int d^3\mathbf{x}\, \psi^\dagger\psi = \int d\Omega_{\mathbf{p}} \sum_r \left(a_r^\dagger(p)a_r(p) - \tilde{b}_r^\dagger(p)\tilde{b}_r(p)\right) \tag{528}$$

对于这个守恒荷我们给出下面的 Interpretation：

- $a_r^\dagger(p)$ 产生的粒子携带守恒荷 $+1$；$\tilde{b}_r^\dagger(p)$ 产生的粒子携带守恒荷 -1。

- 我们可以解释其为电荷，Dirac Field 描述的粒子携带电荷 $+1$，反粒子携带电荷 -1。所以我们解释其描述了两种带 $+1$ 和-1 电荷的粒子。

14.6 角动量和 Boost 守恒荷

经典Lorentz变换守恒流与守恒荷

我们回顾一下经典的情况。在 Lorentz 变化下，根据 Dirac Field 的定义其满足下面的协变关系：

$$\psi(x) \to [\Lambda_D(\omega)]\psi(\Lambda^{-1}(\omega)x). \quad \Lambda_D = e^{-i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \quad \Lambda = e^{-i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{J}^{\mu\nu}} \tag{529}$$

我们可以计算其守恒流以及守恒荷为：

$$J^{\rho}_{\mu\nu} = x_\mu T^{\rho}_{\nu} - x_\nu T^{\rho}_{\mu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}\{\gamma^\rho, S_{\mu\nu}\}\psi, \quad J_{\mu\nu} \equiv \int d^3x J^0_{\mu\nu} \tag{530}$$

我们一般会把 Lorentz Boost 守恒荷分为角动量和 Boost 两部分，角动量守恒荷为：

$$J_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{ij}, \quad J_k = \int d^3\vec{x}\psi^\dagger\left[\vec{x}\wedge(-i\vec{\nabla}) + \frac{1}{2}\Sigma\right]\psi., \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{531}$$

其中 Σ 就是对角的自选算符，而前面是轨道角动量！

角动量作用于单粒子态

这里我们可以看出结果：

- Dirac Field 量子化的 r 指标实际上是自旋指标，$r = 1, 2$ 分别对应 $s_z = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 的粒子态。

验证方法就是作用角动量守恒量在单粒子态上面，我们 interpret 这个守恒量是角动量量子化之后的算符，我们发现不同的 r 指标确实对应不同的 z 方向自旋取值。

14.7 Questions and Thoughts

Question 14.34 为什么对称性的守恒荷和角动量，动量可以认为是一个东西？为什么量子化之后的算符作用在量子态上面的本征值就是角动量，动量的取值？

思路是这样的，我们使用旋转对称性和角动量给出一个说明：

- 首先经典力学告诉我们，旋转对称性给出的 Nother 定理的守恒量正好是经典对应的角动量
- 下面我们**定义**对于场论 or 一切经典体系：角动量定义为旋转对称性的守恒量。
- 接下来量子力学公理告诉我们，守恒量量子化之后的算符的本征值是量子态在该守恒量下的取值。

这个思路是十分清晰的！ □

15 Lecture 14: Representation of Poincare Algebra

{sec:Lect

本章我们试图回答一个问题：

- Poincare 群在 Hilbert Space 上面的表示如何分类？

我们研究这个问题的 motivation 是因为：

- Wigner Theorem 告诉我们：对于一个量子力学系统，Hilbert Space 必然承载着系统的对称性群的一个幺正表示 (或者反幺正表示)；
- 量子场论我们把 Hilbert Space Interpret 作为粒子态的空间；

因此 Poincare 代数在 Hilbert Space 上面的表示的分类等价于**拥有 Poincare 对称性的理论可以描述什么样的粒子**

15.1 Poincare 群在 Hilbert Space 上一般表示

15.1.1 Poincare 群的表示一般研究

回顾一下拿到一个群进行研究我们通常采取下面的步骤：

- 使用一个好用的表示开始研究；(之前 Lorentz 群我们使用了 Defining Representation)
- 定义一个 Exp Map 形式进而得到群的生成元 (根据一些李群的定理这一步一定可以实现)，通过群乘法规则给出生成元的对易关系从而得到群对应的 Lie 代数结构；
- 通过 Lie 代数结构给出 Lie 代数的表示
- 进行 Exp Map 得到 Lie 群的表示

假设Hilbert Space上存在Poincare群的Unitary Representation

之前我们讨论了 Lorentz 群的表示理论，我们使用的是其 Defining Representation，而现在 Poincare 群不存在一个很自然的矩阵形式的 Defining Representation。同时，我们也不追求寻找有限维表示，因为对于 non-compact 群来说，有限维 Unitary 表示必然是 trivial 的。因此我们直接假设 Poincare 群在 Hilbert Space 上面存在一个 Unitary Representation，记为 $U(\Lambda, a)$。根据表示的定义，其满足群的乘法规则：

$$U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)\ . \tag{532}$$

Exp map以及Poincare Lie代数

如果这个表示存在，根据很多李群李代数的定理其必然可以通过 Exp Map 从一个代数给出。我们现在希望定义一个 Exp Map 然后研究 Poincare 代数的结构：

Definition 47. *Poincare 群标准 Exp Map*

我们定义 Poincare 群的 Exp Map 如下:

$$U(\Lambda, a) = U(a)U(\Lambda) = \exp\left(ia_\mu P^\mu\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \ , \tag{533}$$

其中我们定义:

$$U(a) = \exp\left(ia_\mu P^\mu\right), \quad U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \ . \tag{534}$$

其中 $J^{\mu\nu}$ 是 Lorentz 代数的生成元，P^μ 是平移生成元。

通过无限小的变换以及 Poincare 群的乘法规则，我们可以得到生成元的对易关系。这也就是 Poincare 代数的对易关系。于是我们得到了 Poincare 代数结构:

Definition 48. *Poincare 代数: 通过 10 个生成元 $\{P^\mu, J^{\mu\nu}\}$ 以及上面的对易关系构成的 Lie 代数。*

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad [P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho), \tag{535}$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}) \tag{536}$$

Poincare群的Adjoint Representation

上面的研究已经可以给出一个 Poincare 群的特殊的表示也就是 Adjoint Representation，我们可以通过群乘法关系计算群元素作用在 Lie 代数生成元上的结果:

$$U^\dagger(a)P^\mu U(a) = P^\mu, \quad U^\dagger(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu, \tag{537}$$

$$U^\dagger(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma}. \tag{538}$$

这就是 Poincare 群的 Adjoint Representation。同时我们会发现生成元本身在群元素作用下按照 Lorentz Vector 和 Lorentz Tensor 的方式变换。

15.1.2 Poincare 代数不可约表示 Casimir 算符分类

Casimir Operator方法寻找不可约表示

显然长成上面这样的表示有很多很多很多种，我们怎么找到其中各种不可约的表示呢? 我们回忆 Shur's Lemma 告诉我们: 对于一个不可约表示，所有和表示作用交换的算符必然是 λI。因此，我们给出下面一个操作:

- 寻找一些算符 C_i 使得对于任意的 Poincare 群元素 (Λ, a) 我们有:

$$U(\Lambda, a)C_i U^\dagger(\Lambda, a) = C_i \ . \tag{539}$$

- 这些算符给出相同本征值的态必然构成一个不可约表示空间，可以使用其本征值来标记不可约表示。

我们下面使用这个方法寻找 Poincare 代数的不可约表示。

Poincare代数的Casimir Operator

1. 寻找 Lorentz 子群 $U(\Lambda)$ 的 Casimir

之前的 Adjoint Representation 已经告诉我们群元素作用在生成元上面的结果。因此我们知道 Poincare 生成元在 Lorentz 群表示 $U(\Lambda)$ 作用下按照 Lorentz Vector 和 Tensor 的方式变换，也就是说他们是 Lorentz 群 Defining Representation 的张量算符！数学家告诉我们：

- 张量算符可以通过和 Invariant Tensor 进行 contracting 得到标量算符，也就是我们想要的对于 $U(\Lambda)$ 的 Casimir

我们知道 Lorentz 群的 Invariant Tensor 只有 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 两种。因此我们可以使用这些不变量张量对生成元进行 contracting 得到标量算符：

$$P^\mu P_\mu, \quad J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\mu\nu}J_{\rho\sigma}, \quad W^\mu W_\mu \tag{540}$$

1. 寻找整个 Poincare 群的 Casimir

下面再筛选一下那些算符在平移群 $U(a)$ 作用下也是不变的。我们发现只有下面两个：

Theorem 35. *Poincare 代数的 Casimir 算符*

Poincare 代数有且仅有两个 Casimir 算符：

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \quad C_2 = W^\mu W_\mu \ , \tag{541}$$

其中 W^μ 是 Pauli-Lubanski 矢量，定义为：

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma \ . \tag{542}$$

Pauli-Lubanski矢量性质

其中我们使用了一个新的矢量算符 W^μ，我们来研究一下它的性质。主要就是对易关系为：

$$W_\mu P^\mu = 0, \tag{543}$$

$$[P^\mu, W^\nu] = 0, \tag{544}$$

$$[J^{\mu\nu}, W^\rho] = i(\eta^{\nu\rho}W^\mu - \eta^{\mu\rho}W^\nu) \tag{545}$$

$$[W^\mu, W^\nu] = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\rho P_\sigma \tag{546}$$

Poincare代数不可约表示分类

对于 Poicare 代数的不等价不可约表示，我们可以使用 Casimir 算符的本征值进行分类：

Theorem 36. *Poincare 代数不可约表示分类*

Poincare 代数表示空间也被成为 Hilbert Space 必然可以约化为 Casimir 算符本征值固定的子表示空间的直和：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m^2,w^2} \mathcal{H}(m^2, w^2). \tag{547}$$

下面我们要研究这些不可约表示空间 $\mathcal{H}(m^2, w^2)$ 的结构。

Remark: 注意！我们虽然使用了一个完全平方来书写 Casimir 的本征值，但是不意味着本征值一定是大于等于 0 的！ m^2, w^2 可以是负数！

15.2 固定 m^2, w^2 不可约表示

下面我们讨论固定 m^2, w^2 的这些不可约表示的分类以及试图求解这些表示的具体形式。

15.2.1 不可约表示基本讨论

表示空间的基在Poincare群作用下的变换

我们希望标记这些不可约表示空间的基矢量，我们通常选择 **Maxmally Commuting Set of Operators** 的本征值来标记这些基矢量。我们知道 Poincare 代数的生成元中，P^μ 是相互对易的，因此我们可以选择 P^μ 的本征值为 p^μ 的基矢量标记为：$|p^\mu, \sigma\rangle$ 其中 σ 是标记其余的自由度的！

我们考虑 Poincare 群的元素作用在这样的基矢量上面的结果。对于平移变换十分 trivial，毕竟我们选择了 P^μ 的本征值作为标记，因而有：

$$U(a) |p^\mu, \sigma\rangle = e^{ia_\mu p^\mu} |p^\mu, \sigma\rangle, \tag{548}$$

下面我们考虑 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用在基矢量上面的结果。我们发现：

$$P^\mu \left(U(\Lambda) |p^\mu, \sigma\rangle\right) = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \left(U(\Lambda) |p^\mu, \sigma\rangle\right). \tag{549}$$

也就是说 Lorentz 变换会把本征值 p^μ 变换为 $\Lambda^\mu_\nu p^\nu$。也就是说对于一般的某个不等价不可约表示空间 $\mathcal{H}(m^2, w^2)$，其基矢量在 Lorentz 变换作用下为：

$$U(\Lambda) |p^\mu, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) \left|\Lambda^\mu_\nu p^\nu, \sigma'\right\rangle . \tag{550}$$

这里 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 是某个矩阵元，我们仍然未知。

表示空间按照动量的初步分类

于是我们会发现，使用 p^μ 为本征值的态在 Poincare 群的作用下只会变成本征值为 $\Lambda^\mu_\nu p^\nu$ 的态。因此我们可以按照 Λ 作用在 p^μ 上面的轨道来分类这些表示空间。也就是说我们考虑所有可能的动量 p^μ，然后按照 Lorentz 变换的作用把这些动量分成不同的轨道，每一个轨道对应一个不可约表示空间。我们会发现对于所有 $p^\mu \in \mathbb{R}^4$，其轨道可以分为下面四类，并且我们希望研究每一类轨道选择一个代表元素：

- **有质量粒子表示** $m^2 = p^\mu p_\mu > 0$ 并且 $p^0 > 0$ 的轨道，代表元素 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$
- **无质量粒子表示** $m^2 = p^\mu p_\mu = 0$ 并且 $k \neq 0$ 的轨道，代表元素 $k^\mu = (k, 0, 0, k)$
- **真空表示** $m^2 = p^\mu p_\mu = 0$ 并且 $k < 0$ 的轨道，代表元素 $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$
- $m^2 = p^\mu p_\mu > 0$ 并且 $p^0 < 0$ 的轨道，代表元素 $k^\mu = (-m, 0, 0, 0)$

物理上我们认为前三种表示是 physical 的，并且给出 interpretation：第一种为有质量粒子表示，第二种为无质量粒子表示，第三种为真空表示。第四种表示我们认为是 unphysical 的，因为其对应的能量是负的。

> **Remark:** 其实我们这里研究的 Lorentz 群并不是 SO(3,1) 而是 $\mathcal{L}^\uparrow_+$，也就是 proper orthochronous Lorentz 群。在此并未考虑 parity 以及 time-reversal 变换。

15.2.2 Wigner Little Group 方法构建不可约表示

下面我们试图构建一个 Poincare 群的表示。然后我们证明这样构建出来的表示是不可约的也就是拥有两个 Casimir 算符的确定本征值。

Wigner Little Group的定义

对于 Lorentz 群来说，我们给定一个固定的动量 k^μ，我们定义 Wigner Little Group 如下：

> **Definition 49.** *Wigner Little Group*
>
> *我们定义 Wigner Little Group 为：*
>
> $$G_L(k^\mu) = \{\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow_+ | \Lambda^\mu_\nu k^\nu = k^\mu\} \ . \tag{551}$$

我们可以证明这些 Lorentz 群的元素构成了一个子群。因此对于 Wigner Little Group 的元素对应的 Hilbert Space 上面的表示满足：

$$U(W)\left|k^\mu, \sigma\right\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W)\left|k^\mu, \sigma'\right\rangle \ , \quad W \in G_L(k^\mu) \ . \tag{552}$$

Wigner Little Group表示诱导Poincare群表示

下面我们介绍一种使用一个标准动量 k^μ 的 Wigner Little Group $G_L(k^\mu)$ 的表示来诱导 Poincare 群表示的方法。我们首先假设我们对于某个表示空间的一个标准动量 k^μ 已经知道了其 Wigner Little

Group 的不可约表示，其表示空间为 $|k^\mu,\sigma\rangle$。表示为：

$$U(W)\,|k^\mu,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W)\,\big|k^\mu,\sigma'\big\rangle \ , \quad W\in G_L(k^\mu)\ . \tag{553}$$

> **Remark:** 注意这里的 σ 标记的是 Wigner Little Group 的表示空间的基矢量不再是任意并不知道的指标。

我们现在可以使用下面步骤构建 Poincare 群的表示：

1. **定义标准 boost**：对于任意的动量 p^μ，我们选择一个 Lorentz 变换 $\Lambda(p)$ 使得：

$$\Lambda(p)k^\mu = p^\mu\ . \tag{554}$$

   我们称之为**标准 boost**。

> **Remark:** 注意：标准 boost 的选择显然不是唯一的，不同选择给出了同一个表示空间的不同的基矢量。

2. **定义标准 boost 的表示**：我们要求标准 boost 的表示矩阵 $H(p)=U(\Lambda(p))$ 完全不影响 Wigner Little Group 的指标 σ，也就是说：

$$H(p)\,|k^\mu,\sigma\rangle = |p^\mu,\sigma\rangle\ . \tag{555}$$

3. **诱导构建 Lorentz 变换的表示**：我们构建的表示的基由一个 on shell 的四动量 p^μ 以及 Wigner Little Group 的指标 σ 进行标记，在 Lorentz 变换作用下：

$$U(\Lambda)\,|p^\mu,\sigma\rangle = U(\Lambda)H(p)\,|k^\mu,\sigma\rangle \tag{556}$$
$$= H(\Lambda p)H^{-1}(\Lambda p)U(\Lambda)H(p)\,|k^\mu,\sigma\rangle \tag{557}$$

   我们会发现 $H^{-1}(\Lambda p)U(\Lambda)H(p) = U(W(\Lambda,p))$，其中 $W(\Lambda,p)=\Lambda^{-1}(\Lambda p)\Lambda(p)\in G_L(k^\mu)$。因此我们知道：

$$U(\Lambda)\,|p^\mu,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\,\big|\Lambda^\mu_{\ \nu}p^\nu,\sigma'\big\rangle\ . \tag{558}$$

Wigner Little Group诱导表示的不可约性

我们上面构建出了一个表示，但是我们并不知道这个表示是不是不可约的。我们需要证明这个表示是不可约的，证明方法就是保证这个表示空间对于 Casimir 算符存在确定的数值。

- 对于 P^2 Casimir 十分 trivial，因为上面构造的表示作用在表示空间只会把 p^μ 变换为 $\Lambda^\mu_{\ \nu}p^\nu$，并不会改变其本征值 m^2，因此这样构造的表示空间必然是 $P^2=m^2$ 的本征子空间。

但是对于 W^2 Casimir 来说我们需要更深入的理解。为此我们需要先理解其与 Wigner Little Group 的关系。我们可以计算 Pauli-Lubanski 矢量和动量对易关系发现：

$$[W^\mu, P^\nu] = 0 \ . \tag{559}$$

也就是说其作用在一个态上面并不会改变其动量本征值。并且我们考虑其作用在一个态上面的形式：

$$W^\mu |p^\mu, \sigma\rangle = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma |p^\mu, \sigma\rangle = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma J_{\nu\rho} |p^\mu, \sigma\rangle \ . \tag{560}$$

这也就是说其作用在动量本征态上面给出了一个不改变动量的 Lorentz 变换的生成元组合。这也给我们了一个 hint，经过数学上的严格证明【这里并不讨论】我们发现：

Theorem 37. *Pauli-Lubanski 是确定动量下 Wigner Little Group 的生成元!*

一个例子是对于动量 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$，我们分析任何三维转动都不改变其数值所以 Wigner Little Group 为 SO(3)。然后我们计算 Pauli-Lubanski 矢量：$W^0 = 0$，$W^i = -mJ^i$，其中 J^i 是三维转动的生成元。因此我们发现 Pauli-Lubanski 矢量的空间部分正好给出了 Wigner Little Group SO(3) 的生成元。

因此我们需要证明表示空间有固定的 w^2 也就是需要证明 $W^2 |p, \sigma\rangle$ 存在固定的本征值。我们如果之前构建的是 Wigner Little Group 的不可约表示，那么：

$$W^2 |k^\mu, \sigma\rangle = w^2 |k^\mu, \sigma\rangle \ . \tag{561}$$

必然有唯一确定的 w^2。然后我们考虑对于任意的动量 p^μ，我们有：

$$\begin{aligned} W^2 |p^\mu, \sigma\rangle &= W^2 H(p) |k^\mu, \sigma\rangle & (562)\\ &= H(p) H^{-1}(p) W^2 H(p) |k^\mu, \sigma\rangle & (563)\\ &= w^2 |p^\mu, \sigma\rangle \ . & (564)\end{aligned}$$

其中第二步我们使用了 W^2 作为 Casimir 的定义，也就是在任何群元素表示作用下不变。因此确实我们构建的表示空间是 $W^2 = w^2$ 的本征子空间。

[感觉这一部分内容没有一本书讲清楚，我写的也不是很严谨省略了一些重要的数学证明。之后有精力可以补充。]

我们现在知道，求解 Poincare 群在 Hilbert Space 上面的表示的问题，等价于求解 Wigner Little Group 的不可约表示的问题。我们下面分别讨论前三种 physical 的表示对应的 Wigner Little Group 以及其不可约表示以及其分类。

15.3 有质量粒子表示

Wigner Little Group: SO(3)

对于有质量粒子我们选择标准动量 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$，我们发现 Wigner Little Group 为 SO(3)。因此我们需要研究 SO(3) 的不可约表示。我们可以直接抽象的求解，当然也可以直接使用 Pauli-Lubanski

矢量这组生成元进行求解。我们知道 SO(3) 的不可约表示由一个非负整数或者半整数 j 进行标记，表示空间的维度为 $2j+1$。因此我们得到了有质量粒子的 Poincare 群不可约表示由两个数值进行标记。

因此我们发现有质量的粒子的不等价不可约表示由两个数值进行标记：

- $m^2 > 0$：我们 interpret 为粒子的质量平方；
- $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$：我们 interpret 为粒子的自旋。

物理上这告诉我们拥有 Poincare 对称性的理论可以描述任意质量以及任意自旋的粒子！

btw Hilbert Space 一般要求是有一个合理的内积结构的，我们可以选择一个 Lorentz 不变内积的定义：

$$\langle p, \sigma | \bar{p}, \sigma' \rangle = (2\pi)^3 2E_{\bar{\mathbf{p}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{565}$$

Spin Basis

一个常用的表示空间 Basis 的选择是 Spin Basis。我们定义这个 Basis 的标准 Boost 为之前讨论 Dirac Field 的时候就是用的标准 Boost definition 43。使用这个 Basis 我们有：

$$U(R_\theta)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} \mathcal{D}^{(s)}_{\sigma'\sigma}(R_\theta) |R_\theta \mathbf{p}, \sigma'\rangle. \tag{566}$$

我们可以极其清晰的看见轨道角动量和自旋角动量的区分。这个 Basis 一般用于描述非相对论极限下的粒子，毕竟这个 Basis 下粒子的行为和非相对论量子力学之中的概念完全一致！