QFT 3 Learning Note

X. D. H.

2025 年 9 月 12 日

摘要

这个是 EPFL 的 QFT3 课程的学习笔记。

目录

1 Note of Lecture 1 **2**

1.1 Take home messages 2

1.1.1 Poincare Group and Representation 2

1.2 Questions and discussions 3

2 Scratch Book **5**

Chapter 1

Note of Lecture 1

{chap:Le

1.1 Take home messages

{sec:Tak

Important: 总论

Lecture 之中。我们回顾了 Poincare 群的结构以及其表示理论。根据表示理论得到了一些基量子态。然后根据不同的 Lorantz Transformation 的变换把这些量子态变换到不同的一般基之中。介绍了 normal basis, spin basis, helicity basis 的性质。

1.1.1 Poincare Group and Representation

我们狭义相对论研究的是不同惯性系之间的物理规律是不变的。那么说明，我们需要研究惯性系之间物理量是怎么变换的。变换构成了 poincare group ISO(3,1)：

$$x'^{\mu} = g(\Lambda, a)x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \Lambda \in SO(3,1), \quad a \in \mathbb{R}^4. \tag{1.1}$$

{eq:poin

对于这个群来说满足下面的性质：

$$\begin{aligned} g(\Lambda_1, a_1)g(\Lambda_2, a_2) &= g(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1), \\ g(\Lambda, a) &= g(1, a)g(\Lambda, 0), \\ g^{-1}(\Lambda, a) &= g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \end{aligned} \tag{1.2}$$

{eq:poin

下面我们考虑量子力学的 Hilbert Space 里面。这个群所有元素可以通过生成元进行 exp map 给出来：

$$\begin{aligned} U(g(\Lambda, 0)) &= U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right), \\ U(g(0, a)) &= U(a) = \exp(i a_{\mu} P^{\mu}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

{eq:grou

我们发现这个群的表示是有下面的 generator 并且满足这样的对易关系：

$$\begin{aligned} &[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0, \\ &[P^{\mu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}P^{\rho}), \\ &[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

{eq:gene

并且我们根据 exp map 以及群的乘法关系我们发现生成元都是 tensor operator 并且满足变换关系：

$$
\begin{aligned}
&U^\dagger(a)P^\mu U(a) = P^\mu, \\
&U^\dagger(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu, \\
&U^\dagger(\Lambda)\mathcal{J}^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \mathcal{J}^{\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

{eq:tran

为了构建表示，我们需要选择 Casimir Operator，并且用 Casimir Operator 的本征子对于空间进行分类。Casimir 是 Poincre Inv 的算符，我们发现是：

$$
M^2 = P^\mu P_\mu \quad W^2 = W^\mu W_\mu \tag{1.6}
$$

{eq:casi

其中 $W^\mu = \dfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\sigma \mathcal{J}_{\nu\rho}$ 是 Pauli-Lubanski 矢量。所以我们的 Hilbert Space 可以写作；

$$
\mathcal{H} = \bigoplus_{m^2,w^2} \mathcal{H}(m^2, w^2). \tag{1.7}
$$

{eq:Hilb

所以我们不妨在固定一个 m^2, w^2 考虑量子态 $|p,\sigma\rangle$，发现这样的量子态有四类，并且每一类都可以通过一个特殊向量给出，并且这个基向量的不变的群元素定义了一个 little group，我们知道 σ 就是应该 label 这一部分的：

P^2	P^0	Reference vector	G_L
$m^2 = 0$	$P^0 = 0$	$\bar{p}^\mu = (0,0,0,0)$	$SO(3,1)$
$m^2 > 0$	$P^0 > 0$	$\bar{p}^\mu = (m,0,0,0)$	$SO(3)$
$m^2 = 0$	$P^0 > 0$	$\bar{p}^\mu = (\omega,0,0,\omega)$	$ISO(2)$
$m^2 < 0$	$-$	$\bar{p}^\mu = (0,0,0,m)$	$SO(2,1)$

{fig:lit

一个结论是除了真空（第一个）之外我们发现 P-L Tensor 正好构成了这个 little group 的生成元。证明方法是直接计算 W^μ 作用 $W^\mu|\bar{p},\sigma\rangle = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{p}^\sigma \mathcal{J}^{\nu\rho}|\bar{p},\sigma\rangle$。我们会发现这些分量作用根本不改变 $\bar{p}$。所以这些量是 little group 的生成元。

1.2 Questions and discussions

{sec:Que

Question 1.2.0　为什么只有洛伦兹变换可以有很完善的 $J^\mu{}_a$，为什么不是 poincare group?

注意！我们对于张量的 $\Lambda^\mu{}_a$ 的定义其实是 $\dfrac{dx^\mu}{dy^a}$ 所以我们 poincare 变换在求导之中平移变换就没了！！

Question 1.2.1　算符的升降指标意味着什么？张量算符的协变形式思考一下！

当我们讨论张量算符的升降指标的时候。我们想说的是张量算符的升降指标会不会意味着会改变 Poincare Group 的 Unitary 算符作用在这个算符两端给出的结果是逆变的。显然是这样的捏。我们可以认为升降指标就是作用上一个 metric，metric 作用在 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 上面会变成逆变的。

Question 1.2.2　$\Lambda^\mu{}_a$ LT 的逆矩阵的指标前后，到底怎么写捏？

$(J^{-1})^\nu{}_a = J^\nu{}_a$ 这是一个很好的记号捏捏。课上老师写的 $(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu$ 应该是很错误的写法！！

我们还需要讨论洛伦兹变换矩阵如果升降指标会发生什么：

$$\Lambda^{-1\mu}{}_{a} = \Lambda_{\mu}{}^{a} \tag{1.8}$$ {eq:inve

这个就是 Rattazzi 混淆的地方捏。

Question 1.2.3 为什么动量，角动量算符什么的是和表示的生成元是一样的呢？怎么证明？

Question 1.2.4 为什么构成的 Lorentz Inv Scalar 只有四个独立的呢？

这里我们讨论的是从洛伦兹生成元构成的洛伦兹不变量独立的个数。这个讨论虽然是量子的，但是我们知道洛伦兹变换的生成元都是对于洛伦兹变换的张量算符：

$$\begin{aligned} U^{\dagger}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda) &= \Lambda^{\mu}_{\nu}P^{\nu}, \\ U^{\dagger}(\Lambda)\mathcal{J}^{\mu\nu}U(\Lambda) &= \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}. \end{aligned} \tag{1.9}$$ {eq:tens

所以，这些量就仿佛是量子化后的客观测量一样。并且量子化后的变换和经典的是一毛一样的，我们不妨把这些可观测量当成经典的来构造 lorantz invariant。

我们把 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 本身理解为一个物理量。这个物理量是对于 lorentz 协变的。我们考虑这个物理量到底有哪些自由度。我们会发现，如果换一个惯性系「或者说进行 lorentz 变换」可以变到一个 canonical form：

$$J^{\mu\nu}_{\text{canonical}} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$ {eq:cano

我们现在意识到这个量独立的自由度只有两个：E 和 B。所以我们可以构造两个独立的 lorentz invariant 其实只有两个。最后得出的结论是：

$$\mathcal{J}^{\mu\nu}\mathcal{J}_{\mu\nu},\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}_{\rho\sigma} \tag{1.11}$$ {eq:inde

这两个算符其实是 Lorentz Group 的 Casimir Operator。

并且有意思的是，这个有一些电动力学的影子。因为 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 在洛伦兹群下面的变换关系和电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 在洛伦兹群下面的变换关系是一样的。所以，我们也就发现，用电磁场张量构造的两个不变量也是两个独立的 Lorentz Invariant。其中第一个的物理意义就是 $E^2 - B^2$，第二个物理意义是 $\vec{E}\cdot\vec{B}$。第一个不变量就是电磁场的 Lagrangian。

但是还没有完，这个是 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 矩阵的情况，我们还需要考虑 P^{μ}。我们会发现能够构造的独立的 Lorentz Invariant (带上 P) 其实是四个：

$$P^{\mu}P_{\mu}, \mathcal{J}^{\mu\nu}\mathcal{J}_{\mu\nu}, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}_{\rho\sigma}, W^{\mu}W_{\mu}, \tag{1.12}$$ {eq:four

对于两个带 P 的我没有什么直观的理解呀呀呀，希望之后能补充一下。

Question 1.2.5 Little group 之中使用的 Λ_k 和一般 Lorentz trans Λ 什么关系？

我目前绝地就是完全是一个 lorantz group 里面的一个东西。问题出在哪里呢，出在我们定义不同的 basis 的时候使用了定义式 (比如对于 normal basis 我们有)：

$$|k,\sigma\rangle = U(\Lambda_k)\,|\bar{p},\sigma\rangle \tag{1.13}$$ {eq:defi

我们这个量子态的 $|k,\sigma\rangle$ 之中的 σ 指的是在 $U(\Lambda_k)$ 转动之前是 σ。或者就是指从 $|\bar{p},\sigma\rangle$ 转动过去的！

Chapter 2

Scratch Book

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!~~