$U_q(sl_{2})$ 量子群基础介绍

#量子群 #数学 #Liouville理论 #广义对称性

这里我准备fol文章「Ponsot和Teschner, 《Liouville Bootstrap via Harmonic Analysis on a Noncompact Quantum Group》.」第二章的内容学习量子群的基本内容。
这些内容都是基于对于李代数有一定的了解，对于李代数可以见：

- 单李代数的介绍 基础Simple Lie Algebra

量子群 $U_q(sl_2)$ 定义

我们知道所有的有限的单李代数都可以通过Dynkin Diagram或者对应的cartan矩阵进行分类。这意味着我们并不能够简单的deform一个李代数并且要求李代数保持李代数结构（因为这样不一定能够变成一个合理的dynkin图）但是我们可以进行另一波操作：

- 考虑一个李代数 g， 并给出它的universal enveloping algebra U(g)
- 选择一个保持 Hopf 代数结构的deformation，这个会给出另一个代数，我们称之为量子群
  （所以量子群其实是一个代数）

$Sl(2,\mathbb{C})$代数回顾

对于这个李代数我们一般有三个Generator记作 E, F, H 满足下面的对易关系：

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H.$$

对于这样三个生成元，所有的多项式组合构成了 $U(sl_2)$ 的enveloping algebra。generator可以对于一个具体的rep 有着具体的构造形式。我觉得仔细看一下，F就很像是下降算符， E很像是上升算符，H就是哈密顿量。

显然对于这样的一个代数，我们可以给出一个表示。但是，我们下面希望给出一个表示空间张量积之后的表示。位了考虑这个，我们需要定义我们的generator是怎么作用在多个表示空间张量积之后的空间上的。为此我们可以定义一个 Δ 的映射满足：
$\Delta: U(sl_2)\to U(sl_2)\otimes U(sl_2)$. 定义为：

$$\Delta(E)=E\otimes 1+1\otimes E,\quad \Delta(F)=F\otimes 1+1\otimes F,\qquad \Delta(H)=H\otimes 1+1\otimes H.$$

这个定义并不是唯一的，但是所有这样的定义需要满足下面的条件，才能是合法的。

- 对于commutator有对易的关系：$\Delta([x,y])=[\Delta(x),\Delta(y)],\quad \forall x,y\in U(sl_2)$.
- 并且这个算符可以进行复合，复合的consistency需要下面的定义进行保证：

$$(\Delta\otimes \mathrm{id})\circ\Delta=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$$

也就是所谓的复合之后复合在左右两边哪个都一样。

关于Δ的选用

这样的复合是可以进行任意选取的，并且复合给出的consistency relation可以对于代数的Universal enveloping的结构有影响的。

下面我们使用这个例子构建量子群：

量子群物理理解

其实就是推广 Δ 捏！！！对于经典的群我们一般使用比较trivial的 Δ 的关系。但是量子群最大的区别之一，其实就是允许有更丰富的，和q相关的 Δ 存在。

量子群的表示