AdS3 from random CFT

X. D. H.

2025 年 6 月 20 日

摘要

这是科研项目学习的模板!!! 呀呀呀!!

目录

Chapter 1

AdS3 from random CFT

这主要是阅读文章:“AdS3 gravity and random CFT”(Cotler 和 Jensen, 2021, p. 0) (pdf)。这个文章计算了一个特殊的 AdS3 的引力路径积分，并且说明了这个或许对偶一个 CFT2 的 ensemble。这篇文章是认为开始通过 Random CFT 试图理解三维量子引力的基础工作。后面大家存在逐渐构建出来一些 random model 试图对偶上面 AdS 的理论。

之后一个值得阅读的文章是:“Approximate CFTs and Random Tensor Models”(Belin 等, 2024, p. 0) (pdf)。这里出不构建了一个 CFT data 的矩阵模型。并且在其 fol up 文章:“3d Gravity as a random ensemble”(Jafferis 等, 2024, p. 0) (pdf)。里面有仔细对于引力对偶的说明。对于这个模型计算我们`[[Random CFT matrix model to AdS]]`里面考虑。

我们现在 fol Cotler 的文章关于最原始的模型

Introduction 简介

二维引力的回顾

我们知道 JT 引力对偶于矩阵模型，其精确对偶说的是:

$$\langle \mathrm{tr}(e^{-\beta_1 H}) \cdots \mathrm{tr}(e^{-\beta_n H}) \rangle_{\text{ensemble}} =$$

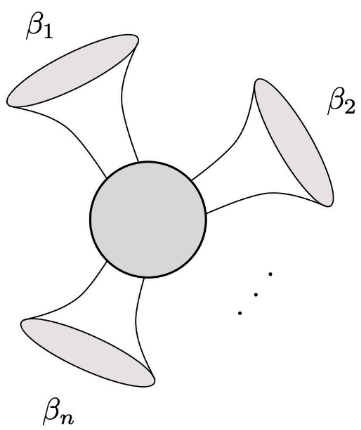

图 1.1: 由 JT 引力对偶矩阵模型的图示（示意） {fig:jt-

其中，图灰色的圈圈意味着对于所有可能的几何和拓扑进行求和。同时，如果我们考虑两点函数那么有下面的展开。并且，这个两点函数 connected 的项的 leading term 对应着 connected 的几何，也就是欧几里得虫洞 Euclidean wormhole

$$\langle \mathrm{tr}(e^{-\beta_1 H})\,\mathrm{tr}(e^{-\beta_2 H})\rangle_{\text{ensemble, conn.}} =$$

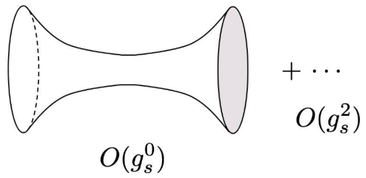

图 1.2: 两点函数的几何展开与欧几里得虫洞 {fig:wor

所以，Euclidean 虫洞是一个比较重要的模型。但是这个模型对与 AdS/CFT 的语境存在矛盾：

1. 存在两个边界意味着，存在两个可以 factorize 的 local CFT
2. 但，几何的联通意味着存在不能 factorize 称为两边的关联函数

我们解决这个问题的方式，是并不认为边界上的 CFT 是一个单独的模型，而是一系列的 CFT ensemble。这样子，在 Ensemble average 的语境下可以给出两个 CFT 之间的关联。所以我们的 $\mathrm{tr}(e^{-\beta H})$ 并不是一个确定的数值，而是一个 random variable，只用在 ensemble 平均下面给出一个具体的数值。

三维引力基本回顾

AdS3 静电引力的经典解已经解决，参考文章"2 + 1 DIMENSIONAL GRAVITY AS AN EXACTLY SOLUBLE SYSTEM"(Witten, 1988, p. 46) (pdf) 【虽然有可能是错的】我们认为三维引力没有 local 自由度，但是我们有 edge mode。

在 Witten 和 Malony 文章（Quantum Gravity Partition Functions in Three Dimensions, J）之中，计算了，边界是 τ 的 torus 上面的 leading term 引力路径积分。他们其实就是求和 saddle point。这些几何在图像上基本上等价于一个 disk 乘上一个 circle，基本上就是一个填满的 torus。但结果上并没有给出一个合理的 CFT 的 spectrum。

但是，这个理论在 Bulk 和 Boundary 基本上都是不对的。

- Bulk 里面，我们不能仅仅对于 saddle point 进行求和，或许一些 off shell 的情况会给出很大的影响
- Boundary 里面，或许一个 CFT 不是 physical 的，而是 Ensemble of CFT。

本文正是在探讨这样的可能性。

本文内容基本概述

我们希望计算对于一个 Torus times time interval 的三维引力，我们推测这个或许可以作为某个矩阵模型在某个 ensemble average 下面的平均：

$$\langle Z(\tau_1)Z(\tau_2)\rangle_{\mathrm{conn}} = Z_{\mathbb{T}^2\times I}(\tau_1,\tau_2) + \cdots ,$$

我们认为如果 dual to 一个单独的理论，那么右边计算出来的第一项是 0 ==【我并未懂呃呃呃】==

文章的结论给出计算结果是：

$$Z_{\mathbb{T}^2\times I}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2\pi^2}Z_0(\tau_1)Z_0(\tau_2)\sum_{\gamma\in PSL(2;\mathbb{Z})}\frac{\mathrm{Im}(\tau_1)\mathrm{Im}(\gamma\tau_2)}{|\tau_1+\gamma\tau_2|^2},\quad Z_0(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)}|\eta(\tau)|^2}.$$

其中 Z_0 是一个 non-compact 波色子的配分函数。并且其中特殊函数 η 定义为：$\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ 并且 $q=e^{2\pi i\tau}$；以及 γ 是 modular transformation 也就是 $\gamma\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ 其中满足 $ad-bc=0$。

下文讲了半天作者是怎么计算出这个配分函数的结论的。

下面，作者分析了一下这个配分函数的性质：

1. 存在 modular 的对称性
2. 可以按照 Virasoro 代数分解成 Primaries 的部分；并且可以通过 spin 进行分类

$$Z^P(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2\pi^2\sqrt{\mathrm{Im}(\tau_1)\mathrm{Im}(\tau_2)}}\sum_{\gamma\in PSL(2;\mathbb{Z})}\frac{\mathrm{Im}(\tau_1)\mathrm{Im}(\gamma\tau_2)}{|\tau_1+\gamma\tau_2|^2}.$$

并且还可以根据固定的 spin 进行展开得到：

$$Z^P_{s_1,s_2}(\beta_1,\beta_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}}{\beta_1+\beta_2}e^{-E_{s_1}\beta_1-E_{s_2}\beta_2}\left(\delta_{s_1,s_2}+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right),\quad E_s=2\pi\left(|s|-\frac{1}{12}\right)$$

并且这个行为可以很好的 RMT 进行对应。

基础知识回顾

首先，所有计算基于 first order formalism of gravity。这个体系下，我们可以理解引力是有约束的相空间路径积分。

相空间路径积分以及 constrain first 量子化

相空间路径积分意味着一个模型：

1. 哈密顿量只有时间一阶导数，比如：$L=\dot{q}^2-V$
2. 我们的路径积分仅仅做在相空间 (p_i,q_i)，而不是构型空间 q_i

一个经典的例子就是：对于作用量 $L=\dot{q}^2-V$ 在构型空间上面的路径积分其实等价于 $L=p\dot{q}-H(p,q)$ 在相空间的路径积分。

这个理论其实是有约束的路径积分的理论。

Yang-Mills 理论的哈密顿形式

对于一个 Yang-Mills 理论来说，我们可以写出作用量以及配分函数：

$$Z = \int \frac{[dA_\mu]}{\text{gauge}} e^{iS_{\text{YM}}}, \quad S_{\text{YM}} = -\frac{1}{4g^2} \int d^d x \, \text{tr}(F^2),$$

这个时候，我们仅仅是对于势能进行场构型的路径积分。但是，如果我们并不积分电场强度，那么就可以给出一个相空间的路径积分的形式。

Chapter 2

科研主体内容

这里我们介绍科研主体的知识内容!!

Chapter 3

知识补充!

这里记录一些补充的知识!!!

Chapter 4

Scratch Book

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!~~

真的吗???

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!~~ 哈哈哈哈!!!