

Diff_GEO

Yu Liu

2025 年 6 月 18 日

摘要

这个笔记主要包含很多数学上的内容，主要是微分几何!!!

目录

Chapter 1

Terminology of Math

对于 Morphisms，有下面各种术语进行对比：

Morphisms 的定义和翻译

- homeomorphism：是拓扑空间的映射，满足：连续的双射；并且有连续的逆映射
- Isomorphism：也就是一个映射，我们只要求这个映射 preserve 一些 structure（具体请取决于语境），也就是映射前后东西是“一类的”；同时这个映射需要有逆映射。
- Automorphism：首先是一个 iso，但是同时是自己到自己的映射。
- Endomorphism：首先是一个 morph，但并不一定有逆映射所以不是 iso；但是是自己到自己的。
- biholomorphism：指的两个复平面之间的映射，需要是双射；同时正和逆映射都是 holomorphic 的！

Chapter 2

Differential Geometry

2.1 Fiber Bundle

我们现在物理的语言使用了很多纤维丛的概念，我们进行一个梳理。

纤维丛

我们可以在流形 \mathcal{M} 上面每一个点 x 都赋予一个流形结构 \mathcal{F}_x 。这个体系需要有下面几个结构：

- Base Manifold: 就是原始的流形 \mathcal{M}
- Fiber over a point x : 也就是所有的 \mathcal{F}_x ，并且我们要求这些流形微分同胚于一个正常的流形 \mathcal{F} ，这个称之为: typical fiber。
- Total Space: 也就是所有的 \mathcal{F}_x 的并

$$\mathcal{B} := \bigcup_{x \in M} F_x \quad (2.1)$$

- canonical projection: 存在两个流形 \mathcal{B} 到 \mathcal{M} 的满射：

$$\pi : \mathcal{B} \rightarrow M \quad (2.2)$$

并且我们有 $F_x = \pi^{-1}(x)$

- local product structure:

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_\alpha \times F \quad (2.3)$$

2.2 Riemann Surfaces

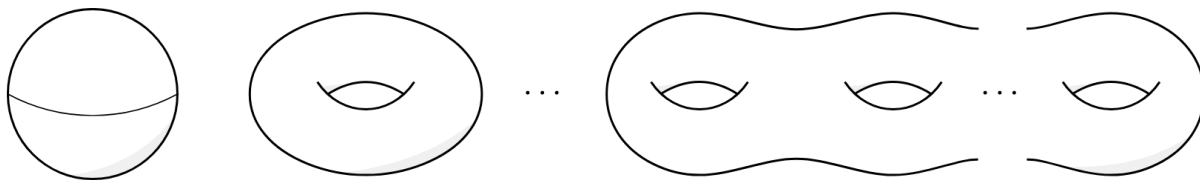
首先我们定义什么是一个 Riemann Surface：

Definition 1. *Riemann Surface*

也就是一个光滑的，连续的，*compact* 的。但是最重要的是：复的 *1-dim* 流形。我们记作：

$$(\Sigma, p_1, \dots, p_n). \quad (2.4)$$

这样的流形有一个特点，我们可以用 genus g 进行分类，如下图所示：



一个很重要的 complex 1-manifold 是 S^2 我们使用复几何的语言来说就是 \mathbb{P}^1 相当于 1 维的复的 projective plane。也就是，引入无穷远点的复平面。

\mathbb{P}^1 的 automorphism 群是：

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3 \\ ad - bc \neq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (2.5)$$

其中：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (2.6)$$

另一个很重要的 complex 1-manifold 是 T^2 。相当于复平面但是做一个 quotient：

$$\mathbb{C}/\Lambda \quad (2.7)$$

其中：

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \quad (2.8)$$

这个 quotient 我们使用两个复数 ω_1 和 ω_2 。

Moduli Space

下面定义 Moduli Space $\mathcal{M}_{g,n}$ 也就是确定 (g,n) 的黎曼曲面的等价类：

$$\mathcal{M}_{g,n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Riemann surfaces} \\ \text{of genus } g \text{ with } n \text{ marked points} \end{array} \right\} / \text{iso}. \quad (2.9)$$

其中等价关系 iso 指的是 biholomorphism $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 使得 markpoint 保持不变 $\phi(p_i) = p'_i$

我们希望定义 moduli space 上面积分的概念，但是，困难在于黎曼曲面有太多的 automorphism。但我们发现了一种消除所有的 automorphism 的方法，也就是开洞！我们给出两个定理：

Theorem 1. 球上的洞洞来限制 moduli space

对于一个有三个洞洞的球 $(\mathbb{P}^1, p_1, p_2, p_3)$ 我们可以找到唯一的映射 $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 从而使得：

$$(\mathbb{P}^1, p_1, p_2, p_3) = g \cdot (\mathbb{P}^1, 0, 1, \infty) \quad (2.10)$$

对于一个有四个洞洞的球