Prepared for submission to JHEP

Note on Moore-Seiberg Construction of RCFT

X. D. H.

E-mail: yuliu21012858@gmail.com

Abstract: 本文主要 follow Moore 和 Seiberg 的讲义"Lectures on RCFT" 主要内容就是介绍 RCFT 是如何跟 TFT 进行对偶的!

ArXiv ePrint: 114.514

目录

1 Fundamentals **2**

2 Chiral Vertex Operator **2**

3 Modular Tensor Categories description of RCFT **3**

1 Fundamentals

首先，我们还是需要回顾共形场论之中重要的结论。特别是本文之中会涉及的结论。此外，我们也会涉及一些量子对称性和拓扑场论之中的结论保证我们可以更好的理解这些内容。

2 Chiral Vertex Operator

我们研究一个量子场论最重要的一个东西就是量子场，也就是我们的关联函数。对于二维的共形场论求解关联函数可以通过一个“积木”来实现。也就是 conformal block。可以像是一点点搭积木一样拼凑成为一个二维的共形场论的关联函数。

对于共形场论来说，我们一般求解的“场”。其实就是 vertex operator。因为，这个算符或者说场对应了 Virasoro 代数的表示的量子态。我们知道一个量子态其实是希尔伯特空间的一个向量。对于共形场论来说希尔伯特空间是 Vir 代数的表示的直和。

在认识到上面基本的知识之后，我们接下来介绍我们的目的。我们要研究 RCFT 之中包含的一个特殊的数学结构。这个数学结构使得我们的对偶是可能的。其中很重要的一个两就是我们的 Chiral Vertex Operator。

接下来我们一点点定义我们的 Chiral Vertex Operator：

Definition 1. *Chiral Vertex Operator*

- *CVO 是一个从 Vir 代数的表示到另一个 Vir 代数的表示的映射：*

$$\Phi_{i,k}^{j,\beta}(z) : H_i \to H_k \tag{2.1}$$

  这个算符是由另一个表示空间 j 之中的一个量子态 β 标记的。从表示空间 i 到表示空间 k 的映射

- 对于 *primary state* 标记的 *CVO* 的矩阵元素，当对于 *primary state* 的元素。我们有定义*:*

$$< i|\Phi_{i,k}^{j}(z)|k >= \|\Phi_{i,k}^{j}\| z^{-(\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i)} \tag{2.2}$$

- 对于 *primary state* 标记的 *CVO* 的矩阵元素，当对于 *descendents* 的元素。我们可以求解*:*

$$\left[L_n, \Phi_{ik}^{j,\beta}(z)\right] = \left(z^{n+1}\frac{d}{dz} + (n+1)z^n\Delta(\beta)\right)\Phi_{i,k}^{j,\beta}(z). \tag{2.3}$$

  方程得到。

- 对于 *descendent* 标记的 *CVO* 我们可以直接把 $L_{-\mathcal{I}}$ 作用在 *CVO* 上面（因为，*CVO* 可以认为是 *VIr* 代数表示对应的量子场）得到：

$$\Phi_{ik}^{j,\beta}(z) = L_{-\mathcal{I}}^{(z)}\Phi_{ik}^{j}(z) \tag{2.4}$$

其中 $\Phi_{ik}^{j}(z)$ 指 *primary field* 标记的 *CVO*。此外对于 V 代数作用在场上面其实就是进行一个留数积分：

$$\Phi_{ik}^{j,\beta}(z) \equiv \oint d\xi_1(\xi_1 - z)^{n_1+1}T(\xi_1)... \oint d\xi_\ell(\xi_\ell - z)^{n_\ell+1}T(\xi_\ell)\Phi_{ik}^{j,|j\rangle}(z). \tag{2.5}$$

下面是一个简单的计算的例子，可以熟悉相关 V 代数的计算。我们计算一个 $\Delta_\phi \neq 0$ 的表示的 CVO 在真空态下面的元素:

$$\langle 0|[L_{-1}, \Phi_{0,0}^{\phi}]|0\rangle = \partial_z\langle 0|\Phi_{0,0}^{\phi}|0\rangle = \left\|\Phi_{0,0}^{\phi}\right\|(-\Delta_\phi)z^{-\Delta_\phi-1} = 0 \tag{2.6}$$

最后等于 0 是因为，我们已知真空态是 $\Delta = 0$ 的表示的 primary state。这个其实它自己也是一个 degenerate state。满足关系: $L_{-1}|0\rangle = 0$ 。因此可以求出来: $\left\|\Phi_{0,0}^{\phi}\right\| = 0$ 。

3 Modular Tensor Categories description of RCFT

本章我们给出一个很强的结论!

Theorem 1. *RCFT 是群理论的推广*

我们认为 *RCFT* 对应着 *Modular Tensor Category*; 群理论对应着 *Tanniaka Category*。而 *Modular Tensor Category* 是 *T Category* 的推广。因此我们认为，*RCFT* 是群理论的推广!

为了说明这个定理，我们首先考虑群理论的结构的另一种表达，称为 Tanniaka-Klein Theory 为此我们考虑的一个对象是一个群的所有有限维度的表示:

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{G}) = \{V | V \text{ is finite dimensional representation of } \mathcal{G}\} \tag{3.1}$$