Runkel 四部曲学习笔记

X. D. H.

2025 年 8 月 10 日

摘要

这是一个 runkel 的四部曲的学习笔记，主要是参考了 Runkel 写的四部曲的梗概进行学习。

目录

Chapter 1

Introduction

首先整体介绍一下 CFT 是什么。这个文章的内容是使用 TQFT 以及 Braided Tensor Category 的结构进行 CFT 的 correlation function 的求解。

- conformal inv 复习

共形不变性就是考虑两个 C^∞ 的流形 $M, M')$ 上面赋予一定的 metricg, g'。如果这两个流形是 conformally equivalent，则存在一个 diffeo$f: M \to M'$ 使得满足：

$$(f^* g')(p) = \Omega(p) g(p) \tag{1.1}$$

其中 $\Omega : M \to \mathbb{R}_{>0}$ 是这样一个映射。

> **Remark:**
> 复习一下微分几何的张量的 pull back 的定义就是说把一个流形上的张量映射到另一个流形上面的张量的一种合理方法。

1.1 CFT in Minkowski Space

{sec:CFT

对于 QFT 的公理体系，我们有两种思路。一个是对于 field insertion at point 的 Wightman axioms 的公理体系；另一个是对于 algebras of observable 关于 Algebraic QFT 的公理体系 (Local Quantum Physics 教材详见！)

我们下面主要探讨第二种。我们考虑 minkovski 时空上面存在 mertric 如下:$\eta(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{d-1} x_i y_i$ 这样的 metric 的基础上我们定义一个 double cone, 也就是光锥。$V_\pm = \{x \in M | \eta(x, x) > 0, \pm x_0 > 0\}$ 同时我们定义

Chapter 2

2D CFT

Chapter 3

TQFT

Chapter 4

Scratch Book

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜！！！这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜！！！这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜！！！这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜！！！这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜！！！~~

4.1 Chiral Vertex Operator

我们研究一个量子场论最重要的一个东西就是量子场，也就是我们的关联函数。对于二维的共形场论求解关联函数可以通过一个"积木"来实现。也就是 conformal block。可以像是一点点搭积木一样拼凑成为一个二维的共形场论的关联函数。

对于共形场论来说，我们一般求解的"场"。其实就是 vertex operator。因为，这个算符或者说场对应了 Virasoro 代数的表示的量子态。我们知道一个量子态其实是希尔伯特空间的一个向量。对于共形场论来说希尔伯特空间是 Vir 代数的表示的直和。

在认识到上面基本的知识之后，我们接下来介绍我们的目的。我们要研究 RCFT 之中包含的一个特殊的数学结构。这个数学结构使得我们的对偶是可能的。其中很重要的一个两就是我们的 Chiral Vertex Operator。

4.1.1 Definition of Chiral Vertex Operator

接下来我们一点点定义我们的 Chiral Vertex Operator, 这里的定义我们只考虑 minimal model 的情况，但是 RCFT 并不仅仅只有 minimal model。对于 affine Lie Algebra 的定义我们后面会进行讨论：

> **Definition 1.** *Chiral Vertex Operator*
>
> - *CVO* 是一个从 *Vir* 代数的表示到另一个 *Vir* 代数的表示的映射：
>
> $$\Phi_{i,k}^{j,\beta}(z) : H_i \to H_k \tag{4.1}$$
>
> 这个算符是由另一个表示空间 j 之中的一个量子态 β 标记的。从表示空间 i 到表示空间 k 的映射

- 对于 *primary state* 标记的 *CVO* 的矩阵元素，当对于 *primary state* 的元素。我们有定义：

$$< i|\Phi^{j}_{i,k}(z)|k >= \|\Phi^{j}_{i,k}\| z^{-(\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i)} \tag{4.2}$$

- 对于 *primary state* 标记的 *CVO* 的矩阵元素，当对于 *descendents* 的元素。我们可以求解：

$$\Big[L_n, \Phi^{j,\beta}_{ik}(z)\Big] = \left(z^{n+1}\frac{d}{dz} + (n+1)z^n\Delta(\beta)\right)\Phi^{j,\beta}_{i,k}(z). \tag{4.3}$$

  方程得到。

- 对于 *descendent* 标记的 *CVO* 我们可以直接把 $L_{-\mathcal{I}}$ 作用在 *CVO* 上面（因为，*CVO* 可以认为是 *VIr* 代数表示对应的量子场）得到：

$$\Phi^{j,\beta}_{ik}(z) = L^{(z)}_{-\mathcal{I}}\Phi^{j}_{ik}(z) \tag{4.4}$$

  其中 $\Phi^{j}_{ik}(z)$ 指 *primary field* 标记的 *CVO*。此外对于 *V* 代数作用在场上面其实就是进行一个留数积分：

$$\Phi^{j,\beta}_{ik}(z) \equiv \oint d\xi_1(\xi_1 - z)^{n_1+1}T(\xi_1)...\oint d\xi_\ell(\xi_\ell - z)^{n_\ell+1}T(\xi_\ell)\Phi^{j,|j\rangle}_{ik}(z). \tag{4.5}$$

下面是一个简单的计算的例子，可以熟悉相关 V 代数的计算。我们计算一个 $\Delta_\phi \neq 0$ 的表示的 CVO 在真空态下面的元素：

$$\langle 0|\,[L_{-1}, \Phi^{\phi}_{0,0}]\,|0\rangle = \partial_z \langle 0|\,\Phi^{\phi}_{0,0}\,|0\rangle = \left\|\Phi^{\phi}_{0,0}\right\|(-\Delta_\phi)z^{-\Delta_\phi-1} = 0 \tag{4.6}$$

最后等于 0 是因为，我们已知真空态是 $\Delta = 0$ 的表示的 primary state。这个其实它自己也是一个 degenerate state。满足关系:$L_{-1}\,|0\rangle = 0$。因此可以求出来:$\left\|\Phi^{\phi}_{0,0}\right\| = 0$。

Remark:

我们为什么要定义 CVO？首先我们明确 CVO 并没有实际的物理意义。对于一个算符，我们不可能把 holomorphic 和 anti-holomorphic 的部分分开。但是，我们一个很简单的观察是，对于 CFT 的三点函数来说，计算结果 holomorphic 和 anti-holomorphic 的部分是可以分开的。

因此，我们定义 CVO，本质上就是定义一种等价于 conformal block 的算符理论。更准确的说是相当于把三点函数的 conformal block 进行一个算符意义上面的推广。

4.1.2 Chiral Vertex Operator and Conformal Block

下面我们讨论，我们这样定义这个算符怎么帮助我们研究 conformal block 和他们之间的关系。

4.2 Modular Tensor Categories description of RCFT

本章我们给出一个很强的结论！

Theorem 1. *RCFT 是群理论的推广*

我们认为 *RCFT* 对应着 *Modular Tensor Category*；群理论对应着 *Tanniaka Category*。而 *Modular Tensor Category* 是 *T Category* 的推广。因此我们认为，*RCFT* 是群理论的推广！

为了说明这个定理，我们首先考虑群理论的结构的另一种表达，称为 Tanniaka-Klein Theory 为此我们考虑的一个对象是一个群的所有有限维度的表示:

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{G}) = \{V | V \text{ is finite dimensional representation of } \mathcal{G}\} \tag{4.7}$$