QFT and Gauge Theory Notes

X. D. H.

2025 年 11 月 12 日

摘要

本文是 David Tong 的 QFT 以及 Gauge Theory 课程笔记的学习笔记，记录了我在学习该课程过程中所做的总结与思考。

目录

1 Classical Dirac Field

{sec:Cla

1.1 Convention of Exp Map and Algebra

我们知道，合理的场按照 Lorentz Group 的表示进行场的协变。但是 Lorentz Group 的表示在不同书上有着不同的定义，这是因为；

- 物理人喜欢随便定义 Exp Map!! 然后不同的 Exp Map 给出了不同的 Lorentz Algebra，但是由于 Exp Map 不同所以给出了同样的群。这很傻逼

为了避免混乱，我们列举一下常见的 Exp Map 定义:

- **第一种 anti-Hermite 定义**:
  - **Exp Map 定义**: $\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)$
  - **Lorentz Algebra**: 生成元代数为:

$$[\mathcal{M}^{\rho\sigma}, \mathcal{M}^{\tau\nu}] = \eta^{\sigma\tau}\mathcal{M}^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau}\mathcal{M}^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu}\mathcal{M}^{\sigma\tau} - \eta^{\sigma\nu}\mathcal{M}^{\rho\tau} \tag{1}$$

- **第二种 Hermite 定义**:
  - **Exp Map 定义**: $\Lambda = \exp\left(-i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)$
  - **Lorentz Algebra**: 生成元代数为:

$$[\mathcal{M}^{\rho\sigma}, \mathcal{M}^{\tau\nu}] = i(\eta^{\sigma\tau}\mathcal{M}^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau}\mathcal{M}^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu}\mathcal{M}^{\sigma\tau} - \eta^{\sigma\nu}\mathcal{M}^{\rho\tau}) \tag{2}$$

我们使用第一种 anti-Hermite 定义适用于本书之中的推导。毕竟 Clifford Algebra 和这个定义更加适配。

1.2 Dirac Field

1.2.1 Clifford Algebra and Rep of Lorentz Group

Clifford Algebra and Representation

我们可以从一个 Clifford 代数给出一个衍生的 Lorentz 代数。因而通过 Clifford 代数的表示给出 Lorentz Algebra 的表示。

Definition 1. *Clifford Algebra*

我们定义一组生成元 γ^μ，$\mu = \{0, 1, 2, 3\}$，满足:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}1 \tag{3}$$

其中，$\eta^{\mu\nu}$ 是 Minkowski 度规。上述反对易关系定义了一个 Clifford 代数，记作 $Cl_{1,3}(\mathbb{R})$。

对于这个代数有一个简单的四维表示，Weyl Representation：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Lorentz Algebra from Clifford Algebra

从 Clifford 代数出发，我们可以定义其包络代数之中的一组代数元素为：

$$S^{\rho\sigma} = \frac{1}{4}\left[\gamma^\rho, \gamma^\sigma\right] = \left\{\begin{matrix} 0 & \rho = \sigma \\ \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\sigma & \rho \neq \sigma \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} \tag{5}$$

可以证明，这组生成元满足 Lorentz 代数的对易关系：

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = S^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - S^{\nu\sigma}\eta^{\rho\mu} + S^{\rho\mu}\eta^{\nu\sigma} - S^{\rho\nu}\eta^{\sigma\mu} \tag{6}$$

此外我们也有：

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu} \tag{7}$$

1.2.2 Dirac Spinor Field

Dirac Spinor Field

我们意识到 Clifford 代数的四维表示给出了一个 Lorentz 代数的四维表示。因而我们可以定义一个四分量的场 $\psi_a(x)$，$a = \{1, 2, 3, 4\}$，按照这个表示协变。这个场称为 Dirac Spinor Field。

Definition 2. *Dirac Spinor Field*

我们定义一个四分量的场 $\psi^\alpha(x)$，$\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$，按照 Clifford 代数的四维表示所给出的 Lorentz 代数表示协变：

$$\psi^\alpha(x) \to S[\Lambda]^\alpha{}_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x) \tag{8}$$

其中：

$$S[\Lambda] = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right) \tag{9}$$

[省略对于 boost 和 rotation 具体形式计算]

non-Unitary of Representation

我们注意到，使用 Clifford Algebra 构建的 Lorentz Group Representation 都不是 Unitary Representation。我们知道，使用我们的 anti-Hermite 的 Exp Map 的定义，表示是 Unitary 则意味着，$S^{\mu\nu}$ 需要是 anti-Hermite 的。

Theorem 1. *non-Unitary of Representation from Clifford Algebra*

对于 Clifford Algebra 构建的 $S_{\mu\nu}$ 必然是非 anti-Hermite 的，因而 Clifford Algebra 构建的 Lorentz Group Representation 必然是非 Unitary 的。

我们实际进行计算发现：

$$(S^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{1}{4}[(\gamma^\mu)^\dagger, (\gamma^\nu)^\dagger] \tag{10}$$

那么我们需要知道 $(\gamma^\mu)^\dagger$ 是 anti-Hermite 才可以，但是根据 Clifford Algebra：

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{Real Eigenvalues} \\ (\gamma^i)^2 = -1 \quad &\Rightarrow \quad \text{Imaginary Eigenvalues} \end{aligned} \tag{11}$$

所以 Clifford Algebra 构建出来的 γ^μ 不可能都是 anti-Hermite 的，因而 $S^{\mu\nu}$ 也不可能是 anti-Hermite 的。

Hermition的选择

我们选择一个 Clifford 代数表示保证：

- $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ 是 Hermite 矩阵
- $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ 是 anti-Hermite 矩阵

Weyl 表示正好就是满足这个条件的！**【从此开始我们严格选择 Weyl Representation】**

1.2.3 Lagrangian of Dirac Spinor Field

Scalar from Dirac Spinor Field

之前我们构建 action 都是构造一个这个场能够给出的描述动力学「有导数什么的」的标量。naively 我们可以认为下面的形式给出标量：

$$\psi^\dagger(x)\psi(x) \to \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)S[\Lambda]^\dagger S[\Lambda]\psi(\Lambda^{-1}x) \tag{12}$$

但问题是，$S[\Lambda]^\dagger S[\Lambda] \neq 1$，所以这个形式并不是标量。我么发现通过下面的引入可以构造出来一个 $S[\Lambda]$ 的逆矩阵和 dagger 的关系：

$$S[\Lambda]^\dagger = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}(S^{\rho\sigma})^\dagger\right) = \gamma^0 S[\Lambda]^{-1}\gamma^0 \tag{13}$$

因此我们重新定义一个共轭，保证能够给出标量：

Definition 3. *Dirac Conjugate*

我们定义 Dirac 共轭为：

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \tag{14}$$

因此我们构建出了一系列的 Lorentz Scalar 和 Lorentz Vector：

- Lorentz Scalar: $\bar{\psi}(x)\psi(x)$
- Lorentz Vector: $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$
- Lorentz Tensor: $\bar{\psi}(x)S^{\mu\nu}\psi(x)$

Dirac Lagrangian

有了这些 Lorentz Tensor 我们可以顺利构造一些有动力学的 Lorentz Scalar 作为 action。我们最终给出:

Definition 4. *Dirac Lagrangian*

Dirac Spinor Field 的 Lagrangian 为:

$$S = \int d^4x\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \tag{15}$$

Dirac Equation from Euler-Lagrange Equation

给定上面的 Lagrangian 我们可以通过 Euler-Lagrange 方程得到场的运动方程:

- 对于 $\bar{\psi}$:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{16}$$

- 对于 ψ:

$$\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0 \tag{17}$$

1.3 Chiral Fermion

1.3.1 Weyl Representation

Decomposition in Weyl Representation

观察 Weyl Representation 下面的 $S[\Lambda]$ 的行为我们会发现，对于 Lorentz Transformation 这个表示是 Block diagonal 的:

$$S[\Lambda_{\text{rot}}] = \begin{pmatrix} e^{+i\cdot\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad S[\Lambda_{\text{boost}}] = \begin{pmatrix} e^{+\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

也就是说这个是两个不可约表示的直和。可以认为 Dirac Spinor Field 实际上是两个 Weyl Spinor Field 的直和:

Definition 5. *Weyl Spinor Field*

我们定义两个二分量的场 $u_+(x)$ 和 $u_-(x)$ 分别按照下面的表示协变:

$$u_\pm \to e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2}u_\pm \quad \text{and} \quad u_\pm \to e^{\pm\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2}u_\pm \tag{19}$$

Dirac Spinor Field 可以表示为这两个 Weyl Spinor Field 的直和:

$$\psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \tag{20}$$

Chiral Weyl Equation

我们考虑使用 Weyl Spinor 来书写 Lagrangian 以及 EoM。我们发现 Lagrangian 写作：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = iu_{\sigma}^{\mu}\partial_\mu u_- + iu_+^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_+ - m(u_+^\dagger u_- + u_-^\dagger u_+) = 0 \tag{21}$$

其中：

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^i) \quad \text{and} \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i) \tag{22}$$

数一下自由度

表面上 ψ 是一个四维的复向量，因此存在 8 个实自由度。但是一个动力学系统的自由度往往会比我们表面上描述动力学变量的自由度要少，因为我们可能会存在一些没有意识到的冗余。常常使用 Hamiltonian Formalism 来帮我们意识到这些冗余。比如：

$$\pi_\psi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi} = i\psi^\dagger \tag{23}$$

因此我们会发现，本身认为独立的 ψ 以及 $\psi^\dagger$ 共同构成了相空间。所以其实，真正的自由度是 4 个实自由度。

因而对于 Weyl Spinor Field 来说，我们实际上只有 2 个实自由度。

1.3.2 General Clifford Representation

2 Yang-Mills Theory

{sec:Yan

2.1 Yang-Mills 理论

3 Lattice Gauge Theory

{sec:Lat

3.1 格点量子场论

4 Scratch book

{sec:Scr

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!~~