3D Gravity with Virasoro TQFT

X. D. H.

2025 年 6 月 20 日

摘要

这个 note 其实是一个简单的科研 note。也算是作为 book reading note 的模板。我主要的任务是进行一个 book reading project 来理解文章“Solving 3d Gravity with Virasoro TQFT”以及之后的

目录

Chapter 1

Project 进度

这里我们记录我们为了读懂文章需要补充的知识点。

需要学习的东西 1

- ~~Chern-Simons 以及和 AdS3 的关系~~
- ~~Chern-Simons 的经典理论~~
- ~~Teichmuller 理论基础~~
- 相空间是 Teichmuller Space 基础
- 怎么在 Teichmuller 空间上进行量子化!!
  - 关于内积结构，可以学学 virasoro minimal string

我建议以后不会的东西直接在读到哪里用红色的框框标记出来

我真的不会

回去学吧!!! test 123 this is not so good??? isn't it this is good

Chapter 2

Quantization of Teichmuller Theory and CFT

这里我想主要 fol Verlinde 的文章捏！！我希望给出的思路就是量子化 Teichmuller 空间然后把量子化之后的结果和 CFT 的理论对应上!!

2.0.1 如何量子化 Teichmuller 空间

Teichmuller 空间一个定义可以理解为一个度规的空间：

$$\frac{\text{metrics on }\Sigma}{\text{Weyl}(\Sigma)\times\text{Diff}_0(\Sigma)} \tag{2.1}$$

也就是所有的可能的度规矩阵，但是模掉 identical sector 的线性变换和 weyl transformation。对于度规来说，我们可以使用 zweibein 的公理体系来进行描述：

$$\mathrm{d}s^2 = e^+\otimes e^-. \tag{2.2}$$

这里我们使用 Lightcone coordinate。对于正常的 zweibein 就是 $e^+ = e^0+e^1$ 以及 $e^+ = e^0-e^1$ 。对于一般的这样的理论我们可以有一个 $U(1)$ 的规范场 ω （因为二维的洛伦兹变换其实就是 U(1) 的，我们使用这个是因为我们希望有一个方法求曲率）。我们可以使用 cartan，发现我们的理论满足这样子的关系：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^+e^- &\equiv \mathsf{d}e^- + \omega\wedge e^- = 0,\\ \mathcal{D}^-e^+ &\equiv \mathsf{d}e^+ - \omega\wedge e^+ = 0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

然后其中 curvature 的形式是：

$$R \equiv \mathrm{d}\,\omega = \Lambda e^+\wedge e^-, \tag{2.4}$$

这个式子让我们意识到如果曲率 R 是一个固定的量，其实我们确定的是一个 weyl transformation。下面我们就可以通过 zweibein 的理论定义一个 teichmuller 空间：

Teichmuller space from zweibein

空间可以定义为:

$$\mathscr{T} = \mathscr{E}_{\text{cc}}/\mathscr{G}, \quad \mathscr{S} = \text{Diff}_0 \times \text{LL}, \tag{2.5}$$

其中 $\mathscr{E}_{\text{cc}}$ 是 curvature 恒定的 zweibein；Diff_0 是小的 identity component of 2D diffeo group；LL local lorentz transformation，也就是消除，选择一个 zweibein 的自由度!!

定义了空间之后我们需要找到一个 symplectic form on $\mathscr{T}$

Chapter 3

On a Canonical Quantization of 3D Anti de Sitter Pure Gravity

这里我们需要仔细阅读一下这个文章的重要章节。可以学习两个东西:

- 为什么 AdS3 的相空间是两个 Teichmuller 空间
- 怎么在基础的这两个 Teichmuller 空间上进行量子化。

3.1 理论总体陈述

我们会发现量子化 AdS3 我们可以使用一种"constrain first" 的思路进行操作。也就是是我们首先找到一个 non-dynamical equation 的解空间，然后把这个量子化成 Hilbert 空间。

两种量子化的思路

对于量子化我们一般有两种思路:

- directly quantize first
- constrain first quantization

之前 Verlinde 已经通过第一种方式考虑 Chern-Simons 理论完成了对于 AdS3 的量子化，并且认为波函数就是 conformal block。那么这篇文章我们主要想说明的是，第二种思路依旧可以得出一样的结论。

对于 AdS3 来说，我们这个"constrain first" 的操作结果就是，找到 2nd order Einstein Gravity 的解，或者 1st order 的 CS 理论的约束方程量子化；这样的量子化结果和对于某个 Chern-Simons 理论进行 quantize first 的量子化的结果是一样的。

3.2 经典理论的复习

3.3 CS formulism

Chapter 4

3D Gravity from VTQFT

最开始我需要总体讲述一下!!

4.1 研究背景

本文主要跟随 Collier 等人 2023 年的文章《Solving 3D Gravity with Virasoro TQFT》(p. 0) 进行学习与整理。

我们研究的是一个 bulk 理论。我们认为三维 AdS 的量子引力可以通过几何量子化（geometric quantization）的方法对偶到一个拓扑量子场论（TQFT），即 Virasoro TQFT。该文章给出了一种 Virasoro TQFT 与引力配分函数之间的关系，并发展了若干技术，通过 Virasoro TQFT 来计算 3D 引力中的若干物理量。

我们引入的 TQFT 源自于对 Teichmüller 空间的量子化。我们之所以关注 Teichmüller 空间，是因为该空间正好是 AdS_3 的想空间（这并不是严格的说法，严格定义请参考后文）。

文章的逻辑可分为以下几个步骤：

(1) 说明 AdS_3 在经典上等价于一个 Chern-Simons 理论；

(2) 说明对应理论的相空间是 Teichmüller 空间；

(3) 对 Teichmüller 空间进行量子化，得到的波函数为共形块（conformal block）；

(4) 以 conformal block 构成 Hilbert 空间，构造出 Virasoro TQFT；

(5) 论证该 TQFT 与引力配分函数之间的对应关系。

4.2 Introduction

首先进行一个回顾介绍，因为我并不熟悉这个领域。

我们认为三维引力足够简单，并且有着很多 non-trivial 的内容，所以我们有希望构建一个比较完整的模型。并且我们知道 3D Gravity 和 TQFT 有很多相似的地方，因为并没有 local 的激发，所以我们认为有希望能够通过 TQFT 的角度研究这个理论。

同时我们也知道根据已经熟悉的 AdS/CFT 的对偶，我们会先考虑负宇宙学常数的时空。

- 3D Gravity 的 asymptotic 对称性告诉我们，AdS3 应该对偶一个有两套 Virasoro 代数的 CFT，并且 central charge 是 $c = \frac{3l}{2G_N}$
- 我们也会认为边界的 CFT 可能是一大堆 large c CFT 的 ensemble 的对偶！而并不是一个单独的 CFT
  - 但问题是，对于 CFT2 我们有很多 consistency condition 的约束，我们并不可以随便的进行 average。
  - 问题是我们并不太会解 crossing symmetry。

本文章并不会从 AdS/CFT 的角度介绍，而是从 bulk 的角度介绍 AdS-TQFT 的对偶!!!

本篇文章的目的是:

我们希望能够搞出来一个 AdS3 和 TQFT 的 explicitly 的关系。通过这个关系，我们可以计算很多 bulk quantity。比如通过一些技巧构造 partition function

复习对于 AdS QG 的研究:

- 经典的 AdS3 Einstein Gravity 可以对偶一个 $PSL(2,\mathbb{R}) \times PSL(2,\mathbb{R})$ 的 Chern-Simons theory。
  - 但是量子化后两者并不一样。一个原因是我们的引力的 metric g 应该是 non-degenerate 的。但是 Chern-Simons 理论并没有这个要求。所以引力理论的相空间其实是 Chern-Simons 理论的相空间的子空间。所以做 chern-simons 路径积分的时候我们会积分一些完全没有引力 interpretation 的 configuration。
  - 引力的相空间实际上是 spacial slice 的两份 Teichmuller space
- 对于 Teichmuller space 我们其实可以直接做量子化。
  - 量子化后的 Hilbert Space 可以通过所有的 Virasoro conformal block 得到。
  - Teichmuller 空间上面可以很自然的作用 2d mapping class group (也就是 modular transformation 以及 crossing transformation) 这些相当于 Unitary operator on Hilbert space (of conformal blocks)
  - Virasoro Conformal Block 可以构成一个 3D TQFT。也就是将 Moore-Seiberg 推广到 non-rational case。这样我们得到了 AdS/TQFT 的一个对偶，我们可以通过 TQFT 的一些技术进行计算。

总之，我们使用一个推广的 Moore-Seiberg 到 non-rational case 的 TQFT construction 来重新构建 3D Gravity 的 TQFT 对偶!

Proposal of Duality

在某一个固定拓扑流形上的三维引力配分函数可以写成 Virasoro TQFT 的形式:

$$Z_{\text{grav}}(M) = \sum_{\gamma \in \text{Map}(\partial M)/\text{Map}(M,\partial M)} |Z_{\text{Vir}}(M^\gamma)|^2. \tag{4.1}$$

接下来我们解释一下上方的等式的一些细节:

Virasoro TQFT partition function
上面的配分函数其实是两个 copy of Virasoro TQFT 的配分函数。

- 对于一个确定的流形 Vir TQFT 的配分函数完全可以计算，使用 surgery 的技巧
  - 但问题是，由于少于三个洞的流形上 Hilbert space 并不了好定义，所以不太能算
  - 并且内积并不一定是有限的数，所以有的配分函数是无穷的。
  - 存在 framing anomaly，但是如果是 double fold 那么会 cancel
- Vir TQFT 和 Liouville CFT 存在着对偶的关系。其 Hilbert space 其实就是 conformal block 的空间。并且 conformal block 的空间是可以定义内积的。
- 我们的 TQFT 的内积的积分我们其实可以使用 DOZZ formula 进行计算。
- 同时 Hilbert Space 给出了一个 mapping class group 的表示，也就是对于所有 crossing 操作和 modular invariant 操作构成的群的表示。所以我们可以通过这个群结构更好的了解 Hilbert space

Mapping class group 以及 gauge tranformation
引力理论和 TQFT 的区别在于,引力理论的背景 manifold 是动力学的,但是 TQFT 则是确定的。其中，有很多 diffeomorphism 在引力理论的视角下面是 gauge transformation 但是在 TQFT 的视角下面并不是。这些多出来的 diffeo 我们可以用 **mapping class group** 来表示!!!

$$\mathrm{Map}(M, \partial M) \equiv \mathrm{Diff}(M, \partial M)/\mathrm{Diff}_0(M, \partial M), \quad \mathrm{Map}(\partial M) \equiv \mathrm{Diff}(\partial M)/\mathrm{Diff}_0(\partial M). \tag{4.2}$$

我们这里 $\mathrm{Diff}(M, \partial M)$ 指的是允许在边界上进行 non-trivial 变换的微分同胚。这里我们的 gravity 的 diff 更大,是因为他不一定满足 QFT 公理比如:factorization of amplitudes。

需要说明的一个很重要的 subtlety 是，我们对 topology 进行求和的时候，我们需要对 boundary mapping class group 求和。这个群并不是规范的!!!
但是对于三维流行 AdS 我们正好有一个规则就是 $\mathrm{Map}(M, \partial M) \subset \mathrm{Map}(\partial M)$ 这说明，对 topology 求和和 gauging bulk mapping class group 正好部分 cancel 了!!!! 所以我们有这个求和:

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{Map}(\partial M)/\mathrm{Map}(M, \partial M)} |Z_{\mathrm{Vir}}(M^\gamma)|^2. \tag{4.3}$$

其中 M^γ 指的是在 mapping class group 元素 γ 作用下的流形。这样的求和复原了之前算过的结论!!

4.3 AdS3 的相空间以及量子化

我们之前研究的经典的 3D Gravity 和 Chern-Simons Theory 有着对应。但是在量子化之后我们会发现两者有着不同，分成下面三点：

- 三维引力我们需要对所有的 topology 进行路径积分，但是对于 TQFT 我们的流形是固定的。
- 三维引力要求 metric 是 lorentzian 的，但是 gauge field 并不一定。很可能相空间有一些存在并不符合
- 三维引力我们的规范群是 Diff(M) globally 和 $SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ 并不一样！

对于量子化，我们会认为我们 1 的 3-流形是这个样子的 $\Sigma\times\mathbb{R}$ 并且在 Σ 上面赋予表示初始条件的相空间。

Phase space

我们给出一个结论。我们的一般的 Chern-Simons 的相空间其实是比 AdS3 的相空间要大的。
真正的 AdS3 的对应的 Σ 上面附着的相空间其实是 double-fold Teichmuller space。

$$\text{Gravity phase space} = \mathcal{T}\times\overline{\mathcal{T}}\ . \tag{4.4}$$

现在的问题是我们怎么在这样的空间上进行量子化。我们已经知道的是 Teichmüller space 是一个 Kahler manifold。所以我们可以进行几何量子化。

- 第一步：find a holomorphic line bundle $\mathcal{L}$ over $\mathcal{T}$ whose first Chern class is the symplectic form。也就是 $c_1(\mathcal{L})=\omega$
- 第二步：我们认为 Hilbert space 是 holomorphic sections of this line bundle

我们会发现，一个很好的 section 的选择是 **Virasoro Conformal Block**。所以我们给出下面的结论：

量子化 Teichmuller 空间

我们的 chern-Simons 相空间进行一个量子化之后得到的 Hilbert space 其实就是 conformal block 构成的空间！！
下面我们讨论这个空间自己的性质！！

4.4 Conformal Block 构成的 Hilbert 空间

我们知道一个 Chern-Simons 理论对应的 central charge 是：

$$c=1+6Q^2\ ,\qquad Q=b+b^{-1}\ ,\qquad b=\frac{1}{\sqrt{k-2}}\ . \tag{4.5}$$

我们主要考虑 $c \geq 25$ 也就是 $b \in [0,1]$ 的情况。然后我们的理论的 conformal weight 是：

$$\Delta = \alpha(Q-\alpha) = \frac{c-1}{24} + P^2, \quad \alpha = \frac{Q}{2} + iP. \tag{4.6}$$

4.4.1 Conformal Block 的内积结构

我们知道 Hilbert space 是：

- 线性空间
- 有 Unitary 的内积结构

所以下面我们需要赋予 conformal block 一个内积结构。

$$\langle \mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_2 \rangle = \int_{\mathcal{T}} Z_{\text{bc}} \; Z_{\text{timelike Liouville}} \, \overline{\mathcal{F}}_1 \mathcal{F}_2 \tag{4.7}$$

下面我们解释为什么要这样定义内积结构：

- 对于 Teichmüller space 进行积分其实就是积分 moduli space of Riemann surface
- 我们需要一个 $c = 26$ 的东西进行 anomaly cancelation。所以我们需要乘一个 $c' = 26 - c \leq 1$ 的 CFT 配分函数（因为我们的理论已经要求 $c \geq 25$ ）。我们使用了 timelike Liouville 理论。所以我们 Hilbert Space 使用 Timelike Liouville 的 conformal block
- 最后我们使用 bc ghost 的配分函数作为 measure。

接下来我们分析，在上面的内积结构下什么样的 conformal block 是可以 normalizable 的。

这里我们给出一个 argument 就是说只有 Liouville conformal block 是可以被 normalized，其他的可能会出现问题。

- 对于四点 block 来说，最低阶的展开式子是：

$$z^{-\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta} \bar{z}^{-\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta'} \tag{4.8}$$

更具体的写出来是：

$$\mathcal{F}^{(s)}_{\Delta_s}(\Delta_i | x) = x^{\Delta_s - \Delta_1 - \Delta_2} \left\{ 1 + \frac{(\Delta_s + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_s + \Delta_4 - \Delta_3)}{2\Delta_s} x + ... \right\}. \tag{4.9}$$

- 对于 Timelike Liouville 的配分函数，行为是：

$$|z|^{-2(\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2) + \frac{\hat{c}-1}{12}} |\log|z||^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.10}$$

具体的推导过程可以见Timelike liouville。但是这个很合理，因为**我们这个是四点函数所以没有 internal index 因为已经求和完了，但是还是有 z 这个和流形形状相关的参数**。由于对于 conformal weight 的对应 $\hat{\Delta} \equiv 1 - \Delta_i$ 我们有整体积分元的行为是：

$$z^{\Delta - \frac{c-1}{24} - 1} \bar{z}^{\Delta' - \frac{c-1}{24} - 1} |\log|z||^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{4.11}$$

我们分析什么时候积分会收敛。需要这个积分在 0 点行为是好的。至少没有奇奇怪怪的 pole，所以我们需要满足关系：

$$\Delta > \frac{c-1}{24} \ , \tag{4.12}$$

这也正好就是 Liouville 的关系!!

tll

需要学习一波 timelike liouville 的理论
以及为啥这个大于就是收敛捏???

4.4.2 内积的具体计算!!

下面给出一些计算这个内积的例子!!

三点函数

三个洞的球的 Teichmuller 空间只有一个点是 trivial 的!!。所以我们可以直接归一化三点函数到 1，毕竟我们可以选择一个归一化。毕竟这个三点和三点上的数值我们都是知道的。就把三点 block 直接归一成为 1。但是一个问题是不能归一的是 timelike liouville 的三点函数，因为如果 block 归一之后剩下的部分其实是 Timelike Liouville 的 OPE 系数。所以求出来就是：

$$\langle \mathcal{F}_{0,3} \mid \mathcal{F}_{0,3} \rangle = \widehat{C}_{\mathrm{TLL}}(\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{P}_3), \tag{4.13}$$

对于我们的讨论我们使用下面的归一化：

$$\widehat{C}_{\mathrm{TLL}}(\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{P}_3) = \left.\frac{1}{C_0(i\widehat{P}_1, i\widehat{P}_2, i\widehat{P}_3)}\right|_{b=\hat{b}} . \tag{4.14}$$

其中这个特殊函数是可以具体的写出来的!! 使用这个关系，结论是：

$$\langle \mathcal{F}_{0,3} \mid \mathcal{F}_{0,3} \rangle = \frac{1}{C_0(P_1, P_2, P_3)} . \tag{4.15}$$

> **Remark:**
>
> $\mathcal{H}_{0,3}$ 空间其实只有一个点，也就是一个矢量，我们酸的其实就是这个唯一的矢量和自己的内积!! 注意我们这个空间是赋予一个确定的流形 $\Sigma_{g,n}$ 的!! 而不是对于任意流形都是可以互相内积的!!!!

一般流形上的 conformal block

通过计算我们可以证明所有的 conformal block 的归一化满足下面的条件，对于同样的一个 channel $\mathcal{C}$ 来说 Liouville conformal block 是正交的：

$$\langle \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_{g,n}(\vec{P}_1) | \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_{g,n}(\vec{P}_2) \rangle = \frac{\delta^{(3g-3+n)}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)}{\rho^{\mathcal{C}}_{g,n}(\vec{P}_1)}, \tag{4.16}$$

解释一下这个公式的几个点：

- 我们 delta 函数是先对流形进行一个 pant decomposition 确定一个 channel 之后对于所有 internal cuffs 的 conformal weight 取 delta
- 归一化的系数我们使用的是：

$$\rho^{\mathcal{C}}_{g,n}(\vec{P}) = \prod_{\text{cuffs } a} \rho_0(P_a) \prod_{\substack{\text{pairs of pants} \\ (i,j,k)}} C_0(P_i, P_j, P_k) , \tag{4.17}$$

其中 ρ_0 指的是 universal cardy density of state。

$$\rho_0(P) = 4\sqrt{2}\sinh(2\pi bP)\sinh\left(2\pi b^{-1}P\right) \tag{4.18}$$

下面我们解释一下为什么这个内积会是这样的形式。

- 首先是弦理论的一个结论 **BRST close 如果是可以做到的那么 left 和 right moving 的场其实都是 level-matching 的**所以我们会有 $\delta^{(3g-3+n)}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$ 这个项
- 很自然分母也分为这两种。因为这个内积其实就是在求一个弦理论的散射振幅。散射振幅一般分成两个部分，一个 propergator 就是两点函数，另一个是 structure constant of trivalent vertices。相当于就是两点函数和三点函数。我们使用下面的公式求可以得到上面的结论：

$$\lim_{P_3\to 1} C_0(P_1, P_2, P_3) = \rho_0(P_1)^{-1}\delta(P_1 - P_2)\ . \tag{4.19}$$

universal Cardy density of states

这是个什么东西和 Liouville 的两点函数有什么关系!!??

> **Remark:**
>
> 我们注意 Liouville 理论是一个 Diagonal 的 CFT，所以三点函数的系数什么的都是 chiral 的。只有一个 P。但问题是 general 的 CFT，甚至哪怕是使用 Liouville conformal Block 构建出来的，其实都不一定是 chiral 的!!!

4.4.3 Hilbert 空间作为 MS Groupoid 的表示空间

由于所有的无穷维度 Hilbert 空间其实都是 Iso 的，所以我们其实还需要更加细致的研究这样的一个空间的结构!!

我们知道 Teichmuller 空间上可以作用 mapping class group。但是问题是，其实我们的 Hilbert 空间作用上 MCG 之后并不能完整刻画结构。我们只能把 block 分为一个个的 channel，但是不同的 channel 之间其实还是有关系的!! 所以我们的 moore seiberg groupoid 完全的表征了这些的关系。

Chapter 5

AdS3 from Ensemble

这篇文章的主要目的就是构建一个 tensor and matrix model 这个模型可以描述 chaotic CFT2。并且这个模型我们发现和 pure AdS3 引力存在着对偶的关系！

5.1 Ensemble definition

这里我们定义我们主要研究的模型是什么。这里我们需要两个 data，random matrix 和 tensor：

- Random matrix Δ_s 其实对应着 Dilation 变换的算符，但被 s spin 标记
- tensor 是 C_{ijk} 就是 OPE 系数

模型的配分函数可以通过研究一个 matrix-tensor path intergral，积分有限个 Primary 来确定：

$$\mathcal{Z}=\prod_{s\in\mathbb{Z}}\int D\Delta_s DC_{ijk}e^{-V_0(\Delta_s)-\frac{1}{\hbar}V_\varepsilon(\Delta_s,C_{ijk})}. \tag{5.1}$$

其中我们的 Hamiltonian 包含两个项：

- $V_0(\Delta_s)$ 的存在是保证 Cardy density of states 的，对于一个固定的 spin s
- $V_\varepsilon(\Delta_s,C_{ijk})$ 则是为了保证 potential 在 bootstrap solution 处于一个占比最大的情况。

> **Remark:**
>
> 注意我们的算符 Δ 实际上是 $L_0+\bar{L}_0$ 但是 CFT 两个是有自由度的，所以我们是在确定 spin 的情况下给予这个 Δ 的。
>
> 再注意，我们这个模型只考虑了整数自旋，也就是玻色子的情况！！！

解释一下 Cardy density of States

我需要一个对于第一项的解释捏！！

一个启发在 Solving 3D gravity with VTQFT 里面，16 页讲到：

$$\Delta=\frac{c-1}{24}+\left(\frac{\ell}{4\pi b}\right)^2, \tag{5.2}$$

具体还是需要了解一下 Verlinde 原始文章。Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories。

下面我对于系数进行一个说明：

- $\bar{h}$ 是一个很小的系数，当趋近于 0 的时候我们的理论趋近于只能允许合理的 CFT 的存在，但是这个就够不成一个很好的 ensemble 所以有一个这样的很小的数字限制
- 我们一般考虑 $N \to \infty$ 和 $\bar{h}$ 趋近于 0 的情况。但塞最后这个其实会变成对于 e^{-c} 的展开

5.1.1 矩阵模型的特性

对于相对论量子场论来说，Dilation 算符必须和 CRT 对称性 commute。

这个到底是什么意思

什么事 CRT 对称性，这有什么关系请见Cythia Yan 的文章

- 对于 bosonic 的理论这意味着我们的理论必须使用 GOE Ensemble（一种特殊的 matrix model）具体的细节请见Cythia Yan 的文章

只用这个 Ensemble 的好处是我们可以同时对角化 CRT 和 dilation 的对称性算符。但是问题是，我们并不能随意的 unitary 变换矩阵的基。最终导致的结果是，Δ_s **矩阵应该是一个实对称矩阵**。

矩阵模型

需要简单的学一下矩阵模型的基本概念。

- 同时使用 GOE 的好处是，我们正好 perserve 了 OPE 系数的 reality condition

我们的 OPE 系数需要满足一个条件：

$$C^*_{ijk} = \exp\left(i\pi(s_i + s_j + s_k)\right) C_{ijk} \tag{5.3}$$

对于满足这个条件的理论正好需要选择一些特殊的基。那么这些特殊的基之间的变换也是 consist with GOE 的。

- 还需要讨论的是 OPE 系数的对称性。我们从三点函数出发讨论

对于 fermion 来说，OPE 系数存在着 branch cut 的问题。所以我们考虑 integer spin 的情况，有下面的对称性：

$$C_{ijk} = \begin{cases} C_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)} \exp(i\pi(s_i + s_j + s_k)) & \text{for odd permutations } \sigma \in S_3 \\ C_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)} & \text{for even permutations } \sigma \in S_3 \end{cases}$$

5.1.2 Potential 的构建

我们的 potential 的要求是在 CFT 的 crossing symmetry 和 modular invariance 下面是不变的。所以他大概就是长这样的:

$$V \sim \sum |\text{constraint}|^2 \tag{5.4}$$

回顾 conformal block 性质

首先我们回顾我们 conformal block 的性质。对于一个确定的流形（相当于确定了几点函数）$\Sigma_{g,n}$ 来说，上面的所有的 conformal block 构成了一个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_{g,n}$ 。

- 需要所有 n puncture 上面的 external weight 是一样的，但是 internal weight 是可以选择的
- 这个空间存在一个内积!

$$\langle \mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2\rangle = \int_{\mathcal{T}_{g,n}} Z_{\text{bc}}\ Z_{\text{timelike Liouville}}\ \mathcal{F}_1^*\mathcal{F}_2, \tag{5.5}$$

- Liouville conformal block 对于这个内积的选取构成了一个完整的基!

理解路径积分

我需要理解怎么做内积的 conformal block，但是这就需要理解什么是对于 Teichmuller 空间进行积分。

我们下面通过 Inner product 定义这个 constrain。我们使用下面的一些 convension:

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s) \tag{5.6}$$

其中:

$$h = \frac{Q^2}{4} + P^2, \quad \bar{h} = \frac{Q^2}{4} + \bar{P}^2, \qquad Q = (b + b^{-1}), \quad c = 1 + 6Q^2 \tag{5.7}$$

Timelike Liouville

这个我也需要学学是什么!!

5.2 四点 crossing equation

下面我们考虑四点的 crossing equation 对于 potential 的作用。

Chapter 6

Gravity dual of quantum Liouville from TN construction

这个部分主要就是 follow hung1 法师的文章：“Quantum 2D Liouville Path-Integral Is a Sum over Geometries in AdS3 Einstein Gravity”的内容。我突然意识到我能看懂了!!

6.1 主要内容介绍

这个文章之中，我们使用三角剖分以及缩小动动的经典的 TN 的操作给出了一个 Liouville 的配分函数。并且这个配分函数可以理解为 3D 的 state-sum（在一定的边界条件下）。这在 c 十分大的时候可以理解为以 Einstein-Hilbert 作为 weight 的一个求和。

CFT 边界条件信息

有一个基本的结论是 RCFT 里面，如果我们知道 CFT 的所有允许的边界条件，那么我们可以给出这个理论的全部的信息!!

Liouville 理论虽然并不是 RCFT 但是他的基本上所有 boundary 的信息全都已经有了，所以可以仿照 RCFT 进行操作。

RCFT 可以写成 TN 或者 strange correlator 的样子，其实是 non-invertible symmetry 语境下面的 holographic ”sandwich” 的技术。其中，non-invertible symmetry 可以很清晰的使用 TDL 进行一个描述!!

从 RCFT 推广到 irCFT 的时候最大的问题是，从一个不连续的求和并且是对于有限多的数字求和变成了一个连续的对于无限的数字的积分。所以可能积分的时候会有发散的问题。但这篇文章我们可以规避这个问题因为我们并不是考虑一个 irrational 推广的 TV TQFT 的波函数 $\left|\Psi_{\mathcal{U}_q(SL(2,\mathcal{R}))}\right\rangle$ 而是考虑一个 strange correlator 的数值，也就是 $\left\langle\Omega\middle|\Psi_{\mathcal{U}_q(SL(2,\mathcal{R}))}\right\rangle$ 在这个情况下正交的条件可以成立，并且积分是收敛的。

6.2 构建缩小的洞洞

Chapter 7

知识补充!

这里记录一些补充的知识，首先我们分成专题的补充很多的前置的知识：

7.1 Classical 3D Gravity and Chern-Simons

我们知道经典的三维引力可以使用 TQFT 进行表达。也就是经典的三维引力和一个 $PSL(2,\mathbb{R})\times PSL(2,\mathbb{R})$ 的 Chern-Simons theory 有联系。具体的说就是：

经典三维引力

三维引力的 1st order formulism 可以进行 redefine 并使得其 EoM 和 action 对应一个 $SL(2,\mathbb{R})_k \times SL(2,\mathbb{R})_{-k}$ 的 Chern-Simons 理论。

7.1.1 Vielbein and spin connection Formalism

我们考虑的是 first-order formalism。也就是说我们并不会使用 metric $g_{\mu\nu}$ 作为一个基本的场，而是选择另外一个场 e_μ^a 作为一个基本的场，也就是 **frame field** 或者在三维里面我们成为 dreibein。

Dreibein Formalism

我们定义一些矩阵称之为 dreibein，如下：

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)\eta_{ab}e_\nu^b(x), \tag{7.1}$$

下面我们给出一些性质：

- e_μ^a 矩阵可以理解为一个坐标变换矩阵，是对偶矢量的基的坐标变换矩阵。$e^a = e_\mu^a dx^\mu$
- e 矩阵的行列式一定是非零的，因为这是行列式定义决定的，我们把定义式写成矩阵形式就是：$g = e^T\eta e$ 所以行列式的关系就是：$\det(g) = -\det(e)^2$ 我们可以如下进行定义：

$$e = \det(e) = \sqrt{-\det(g)} \tag{7.2}$$

- 由于横列式不为 0，我们可以定义逆矩阵，也就是 inverse frame field 满足下面关系：

$$e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b \text{ and } e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{7.3}$$

- 很容易发现对于 e^a_μ 的构造并不是唯一的。由于洛伦兹群并不改变 minkovski 度规，所以我们对 e^a_μ 进行一个洛伦兹变换其实完全也满足定义式子，所以我们会发现不同的 e^a_μ 满足下面关系:

$$e'^a_\mu = \Lambda_b^{-1a}(x) e^b_\mu(x) \text{ with } \Lambda \in SO(2,1) \tag{7.4}$$

下面我们希望做流形上的微积分，毕竟所有的 action 其实都是流行上的微积分的结果。为此，我们需要通过 dreibein 写出微分形式之中的重要组成部分。我们有下面的构造：

- **1-form**：首先很显然可以构造一个 1-form 就相当于新的坐标的基：

$$e^a \equiv e^a_\mu dx^\mu \tag{7.5}$$

- **levi-civita Symbol**: 这个可以显然通过 $e\epsilon_{\mu\nu\rho}$ 是一个张量，并进行坐标变换得到！

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \equiv e^{-1}\epsilon_{abc} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho, \tag{7.6}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \equiv e\,\epsilon^{abc}\, e^\mu_a e^\nu_b e^\rho_c. \tag{7.7}$$

注意，我们这里虽然都没有加帽子，这些 $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ 都是 symbol 并不是 tensor!!!!

下面我们定义新的坐标下面的协变导数（注意我们的 spin connection 在坐标变换下面并不是按照 tensor 变换的。）。我们可以定义 connection coefficient：

Definition 1. *connection coefficient*

对于某一个度规我们可以给出一个协变导数的 *connection coefficient*，也就是我们的 *Christoffel symbol* 在坐标变换下面的结果：*(注意我们这里的 a，b 是抽象指标，不是基矢量的指标!!)*

$$(e_\tau)^b\,\nabla_b(e_\mu)^a = \gamma^\sigma{}_{\mu\tau}(e_\sigma)^a \tag{7.8}$$

或者说：

$$\gamma^\nu{}_{\mu\tau} = (e^\nu)_a (e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a. \tag{7.9}$$

这个式子等价于 *Chirstoffel symbol* 的坐标变换关系，也就是说，$\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ 本质上就是新的基的联络：

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \tag{7.10}$$

还有另一套记号我觉得更方便一点点：（这里我们并不使用抽象指标，*a* 啥的都是基的指标!!） 我们定义 *connection coefficient* 满足下面的关系：

$$e^\mu_a \nabla_\mu e_b = \nabla_a e_b = e_c \omega^c_{ab} \tag{7.11}$$

或者说：

$$\omega^c{}_{ab} = e^c{}_\nu e_a{}^\mu(\partial_\mu e_b{}^\nu + e_b{}^\alpha \Gamma^\nu_{\mu\alpha}) = e^c{}_\nu e_a{}^\mu \nabla_\mu e_b{}^\nu. \tag{7.12}$$

Spin Connection

从 connection coefficient 出发我们可以定义一个 1-form，我们称之为 spin connection 1-form：

Definition 2. *spin connection*
我们定义一个 *1-form* 为：

$$\omega^c{}_b = \omega^c{}_{ab} e^a \tag{7.13}$$

注意!!! 对于 *Torsion Free* 的导数算符，我们的联络下面两个指标是 *Symmetric* 的!!!! 这个 *1-form* 和 *Dreibein* 的关系是：

$$\omega^c{}_b = e^c{}_\nu e_a{}^\mu (\nabla_\mu e_b{}^\nu) e^a_\eta dx^\eta = e^c{}_\nu (\nabla_\mu e_b{}^\nu) dx^\mu \tag{7.14}$$

我们会发现另外的一个性质，由于我们的 dreibein 有一个 lorenzian 的对称性，所以进行洛伦兹变换之后的 spin connection 也是可以求出来的。通过下面的推导我们会发现满足下面的变换关系：

$$\omega'^a{}_b = \Lambda^a{}_c \omega^c{}_d (\Lambda)^d{}_b + \Lambda^a{}_c (d\Lambda)^c{}_b. \tag{7.15}$$

推导过程如下：

L-T 之下 $e^b \to (\Lambda)^l_g e^g = e'^l$

$$\omega^c_{ab} \to \Lambda^m_c \Lambda^a_n e^c_\nu e^\mu_a (\nabla_\mu e^\nu_b \Lambda^b_l) = \omega'^m_{nl}$$

变换后 $\omega^{m\prime}_l = \omega'^m_{nl} \times e'^n$

$$= \Lambda^m_c \Lambda^a_n e^c_\nu e^\mu_a (\nabla_\mu e^\nu_b \Lambda^b_l) \Lambda^n_g e^g_\eta \overbrace{\boxed{dx^\eta}}^{\text{1-form}}$$

$$= \Lambda^m_c \underline{\Lambda^a_n} \underbrace{e^c_\nu e^\mu_a (\nabla_\mu e^\nu_b)}_{\omega^c_{ab}} \Lambda^b_l \underbrace{\Lambda^n_g}_{\delta^a_g} e^g_\eta \boxed{dx^\eta} + \Lambda^m_c \Lambda^a_n \overbrace{\underline{e^c_\nu} e^\mu_a (\nabla_\mu \Lambda^b_l) \underline{e^\nu_b}}^{\delta^c_b} \Lambda^n_g e^g_\eta \boxed{dx^\eta}$$

$$= \Lambda^m_c \Lambda^b_l \omega^c_{ab} e^a_\eta dx^\eta + \Lambda^m_c \underbrace{\Lambda^a_n \Lambda^n_g}_{\delta^a_g} e^\mu_a (\nabla_\mu \Lambda^c_l) e^g_\eta dx^\eta$$

$$= \Lambda^m_c \Lambda^b_l \omega^c_{ab} e^a_\eta dx^\eta + \Lambda^m_c (\nabla_\eta \Lambda^c_l) dx^\eta$$

$$= \Lambda^m_c \Lambda^b_l \omega^c_b + \Lambda^m_c \, d\Lambda^c_l$$

这里提示一下，这个变换关系显然满足一个

下面我们给出两个 Cartan Structure 的结论，我们会发现 second cartan structure 其实和曲率张量有关系。我们下面进行说明:

Theorem 1. *first Cartan structure equation*

我们可以通过组合 *spin connection* 和 *Dreibein* 组合出来一个 *2-form*。并且可以证明这个 *2-form*:

$$T^a \equiv de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \ , \tag{7.16}$$

很容易发现这个式子满足下面的性质:

- $T^a = 0$ 恒成立。这个就是第一 *cartan* 结构方程
- 这个量按照 *lorenzian* 变换:

$$T^a \to \Lambda^a{}_b T^b \tag{7.17}$$

下面一些证明:

定理 5-7-1 [嘉当(Cartan)第一结构方程]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^\nu = -\boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu . \tag{5-7-6}$$

证明 $-(e^\mu)_a \wedge \omega_\mu{}^\nu{}_b = -(e^\mu)_a \wedge [(e_\mu)^c \nabla_b (e^\nu)_c] = -2(e^\mu)_{[a}(e_\mu)^c \nabla_{b]}(e^\nu)_c$

$= -2\delta^c{}_{[a}\nabla_{b]}(e^\nu)_c = -2\nabla_{[b}(e^\nu)_{a]} = (\mathrm{d}e^\nu)_{ab}$. □

Theorem 2. *second Cartan structure equation*

使用一个特殊的 *notation*（*lcb*）

下面我们给出一个关系，成为 *second cartan structure equation*。这个方程告诉了我们曲率和 *spin connection* 之间的关系。(就可以类比，我们之前 *Christolff symbol* 和黎曼张亮起时有一个很好的关系，那么下面这个方程其实就是这个关系的一种推广。)

首先，我们可以从黎曼张量得到一个 *2-form* $(R_\mu{}^\nu)_{ab}$ 这个是一个用两个数 μ 和 ν 标记的对偶矢量场，并且是全反对称的对偶矢量是 *2-form*，我们定义为:

$$R_{ab\mu}{}^\nu \equiv R_{abc}{}^d (e_\mu)^c (e^\nu)_d, \quad R_\mu{}^\nu = \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu e^\rho \wedge e^\sigma, \tag{7.18}$$

其中 $(e_\mu)^c$ 是一个用 μ 标记的矢量，我们用 c 作为矢量的抽象指标。这个是正向的变换，其实反向的变换也是可行的。我们可以有:

$$R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu = R_{ab\mu}{}^\nu (e_\rho)^a (e_\sigma)^b. \tag{7.19}$$

Second Cartan Structure equation 告诉我们下面的事实:

$$(R_\mu{}^\nu)_{ab} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu + \boldsymbol{\omega}^\lambda{}_\mu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu{}_\lambda. \tag{7.20}$$

使用另一个 *notation*（和前面 *section* 统一）

其中 $\boldsymbol{\omega}_\mu^\nu$ 就是我们上面的定义的对偶矢量 $\omega^c{}_b$ 应该乘以一个*-1* 。只是这里我们使用了一些不太一样的 *notation*。我们一般会把 μ 指标升上去，也就是线性组合一波。$\omega^{ab}=\eta^{ac}\omega^b{}_c$，这样升上去可以证明这个 *1-form* 的两个指标是对称的。或者说相应的对于黎曼张量对应定义，但同时因为符号问题，可能还需要一个指标对称性的变换。这个 *notation* 下面定义是：

$$R^{ab}=\frac{1}{2}R^{ab}_{\mu\nu}(x)dx^\mu\wedge dx^\nu, \tag{7.21}$$

$$R^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu}=e^\lambda_a e^\sigma_b R^{ab}{}_{\mu\nu}. \tag{7.22}$$

用的是升上去一个指标的黎曼张量定义的!!!

我们改写上面的公式有：

$$d\omega^{ab}+\omega^a{}_c\wedge\omega^{cb}=R^{ab}, \tag{7.23}$$

或者说用分量：

$$(R^{ab})_{\mu\nu}=\partial_\mu\omega^{ab}_\nu-\partial_\nu\omega^{ab}_\mu+\omega^{ac}_\mu\omega^b_{\nu c}-\omega^{ac}_\nu\omega^b_{\mu c} \tag{7.24}$$

second Cartan structure equation

所以就是说公式是：

$$d\omega^{ab}+\omega^a{}_c\wedge\omega^{cb}=R^{ab}, \tag{7.25}$$

【上方的讨论是有问题的，因为了 *lcb* 书里的 $\omega^\mu{}_\nu$ 的定义其实多了个*-1*，但是，这个符号通过对于黎曼曲率张量的指标变换，消去了呃呃呃呃呃所以在反正必然是错了】

7.1.2 Einstein Hilbert Action

对于 E-H action（我们暂时并不考虑边界项）

$$S_{\mathrm{EH}}[g]\equiv\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}d^3x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda)+B, \tag{7.26}$$

我们可以用上面的 formalism 进行改写，变成：

$$S_{\mathrm{EH}}[e,\omega]=\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\epsilon_{abc}\left(e^a\wedge R^{bc}[\omega]-\frac{\Lambda}{3}e^a\wedge e^b\wedge e^c\right). \tag{7.27}$$

下面我们进行证明：

$$d^3x\sqrt{-g}=edx^0dx^1dx^2=\frac{1}{3!}e\epsilon_{\mu\nu\rho}dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho \tag{7.28}$$

$$=\frac{1}{3!}\epsilon_{abc}e^a\wedge e^b\wedge e^c; \tag{7.29}$$

以及

$$\epsilon_{abc}e^a\wedge R^{bc}=\frac{1}{2}e\epsilon_{\mu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\nu\rho}\epsilon^{\mu\nu\rho}d^3x \tag{7.30}$$

$$=d^3x\sqrt{-g}R. \tag{7.31}$$

□

在三维情况下我们有一个特殊的性质，就是任何一个二维的全反对称张量，我们可以使用一个一维的向量来进行描述。也就是 dual notation。下面就是定义：

$$R_a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}R^{bc} \leftrightarrow R^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}R_c, \quad \omega_a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^{bc} \leftrightarrow \omega^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}\omega_c. \tag{7.32}$$

使用 dual notation 我们的 EH action 可以写成：

$$S_{\text{EH}}[e,\omega] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\left(2e^a \wedge R_a[\omega] - \frac{\Lambda}{3}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c\right). \tag{7.33}$$

7.1.3 Chern-Simons Theory

我们讨论一下 Chern Simons theory 到底是什么。

Chern-Simons Theory

对于一个三维的流形上面我们可以赋予一个李群，并保证每一点赋予的李群都是一样的 G。这个群有个李代数称之为 g。我们可以写出下面的 action：

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \text{Tr}\left[A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right], \tag{7.34}$$

- k 被称为这个理论的 level
- A 是一个 1-form。但是这个 1-form 的系数 $A = A_\mu dx^\mu$ 中的 A_μ 是李代数 g 之中的一个元素。
- Tr 指的是这个李代数的一个合理的 non-degenerate bilinear form 结构。我们目前还没有定义，后面具体计算需要给出具体的定义。我们不妨作出这个假设，我们用李代数的基展开 $A_\mu = A_\mu^a T_a$。并且给李代数赋予一个 Tr，$d_{ab} = Tr(T_a T_b)$。那么这就相当于赋予李代数一个 g 的结构。当然这个可以任意赋予的。只有存在这样的结构的规范群，才能有 CS 理论

这个理论的运动方程是：

$$F \equiv dA + A \wedge A = 0, \tag{7.35}$$

这个运动方程意味着：

$$A = G^{-1}dG \tag{7.36}$$

也就是说这个 A 其实是规范等价于这个李群（规范群）的单位元的。这就意味着这个理论其实并没有有意义的解，是一个 topological 的解。

接下来我们给出一个重要的结论：

CS & Einstein-Hilbert

对于三维引力来说，我们的 action 对偶于一些有特殊的规范群的 Chern-Simons 理论：

- AdS：SO(2,2)
- $\Lambda=0$：ISO(2,1)
- dS：SO(3,1)

下面我们仔细考虑 AdS3 的情况进行证明。首先我们需要讨论 $SO(2,2)$ 群是什么。

$SO(2,2)$ Group

这是一个有六个生成元（李代数元素）的李群。并且这六个生成元满足下面的对易关系：

$$[J_a,J_b]=\epsilon_{abc}J^c,\quad [J_a,P_b]=\epsilon_{abc}P^c,\quad [P_a,P_b]=\epsilon_{abc}J^c, \tag{7.37}$$

其中 $a,b,c\in\{0,1,2\}$ 并且这些指标的升降我们可以用 minkovski 度规来定义。也就是说我们这个李群上的流形结构的度规赋予的是 minkovski 的。
也就是说他们的 Tr 的定义如下：

$$(J_a,P_b)=\eta_{ab}\ ,\qquad (J_a,J_b)=0=(P_a,P_b). \tag{7.38}$$

并且三维的时候我们自然可以把二阶张量写成一阶的，我们会发现其实这个群就是三维的洛伦兹群：

$$J_a\equiv\frac{1}{2}\epsilon_{abc}J^{bc}\leftrightarrow J^{ab}\equiv-\epsilon^{abc}J_c, \tag{7.39}$$

J 是旋转，P 是 boost

下面我们构造一个 Gauge Field。通过我们之前定义的两个 1-form：

$$A_\mu\equiv\frac{1}{\ell}e^a_\mu P_a+\omega^a_\mu J_a. \tag{7.40}$$

我们根据这个定义我们可以写出一个 SO(2,2)CS 理论也就是：

$$\mathrm{Tr}[A\wedge dA]=(\frac{1}{\ell}e^aP_a+\omega^aJ_a,\frac{1}{\ell}de^bP_b+d\omega^bJ_b) \tag{7.41}$$

$$=\frac{1}{\ell}\left(e^a\wedge d\omega^b+\omega^a\wedge de^b\right)\eta_{ab}=\frac{2}{\ell}e^a\wedge d\omega_a, \tag{7.42}$$

以及：

$$\frac{2}{3}\mathrm{Tr}[A\wedge A\wedge A]=\frac{1}{3}\mathrm{Tr}[[A,A]\wedge A] \tag{7.43}$$

$$=\frac{1}{3\ell}\left(\frac{1}{\ell^2}e^a\wedge e^b\wedge e^c+3\epsilon_{abc}e^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c\right). \tag{7.44}$$

整体上我们就得到了 AdS3 的 Chern-Simons 理论。

$$S_{\mathrm{CS}}[e,\omega]=\frac{k}{4\pi\ell}\int_{\mathcal{M}}\left(2e^a\wedge R_a[\omega]+\frac{1}{3\ell^2}\epsilon_{abc}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\right), \tag{7.45}$$

其中：

$$R_a = d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c. \tag{7.46}$$

其 level 是：$k = \frac{l}{4G}$；$\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ 我们需要知道在 bulk 考虑下似乎这个理论就是 trivial 的但是，考虑到边界条件，我们会发现我们有无穷维度的自由度在边界上!! 并且边界条件其实并不是唯一的。边界上存在着对称性，我们称之为 global symmetry 或者 asymptotic symmetry。正是 boundary 上的 global symmetry 应该求和导致了有着无穷的自由度。

接下来一个比较重要的事实，就是 $SO(2,2)$ 是一个半单李代数，也就是他可以写成单李代数的直和：

$$so(2,2) \approx sl(2,\mathbb{R}) \oplus sl(2,\mathbb{R}) \tag{7.47}$$

我们可以定义另一套生成元：

$$J_a^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(J_a \pm P_a), \tag{7.48}$$

这些生成元满足下面的代数关系：

$$[J_a^+, J_b^+] = \epsilon_{abc}J^{+c}, \quad [J_a^-, J_b^-] = \epsilon_{abc}J^{-c}, \quad [J_a^+, J_b^-] = 0. \tag{7.49}$$

因此，我们可以构造两个 $SL(2,\mathbb{R})$ 的 Chern-Simons connection：

$$A = (e^a/\ell + \omega^a)T_a\ , \qquad \bar{A} = (e^a/\ell - \omega^a)T_a, \tag{7.50}$$

我们的 action 和运动方程是如下的：

$$A = (e^a/\ell + \omega^a)T_a\ , \qquad \bar{A} = (e^a/\ell - \omega^a)T_a, \tag{4.28}$$

with T_a now being the generators of $sl(2,\mathbb{R})$. One can show that the decomposition of the action then reads

$$S_{\text{CS}}[\Gamma] = S_{\text{CS}}[A] - S_{\text{CS}}[\bar{A}] \equiv S_{\text{CS}}[A,\bar{A}], \tag{4.29}$$

that is, can be rewritten as the difference of a chiral and anti-chiral Chern-Simons action.

Finally, let us mention that Einstein's equations of motion are equivalent to the ones in the Chern-Simons formalism, namely $F^a = 0$, $\bar{F}^a = 0$. More precisely, varying the action with respect to e^a gives the constant curvature equation

$$F^a + \bar{F}^a = 0 \Leftrightarrow R^{ab} + \frac{1}{\ell^2}e^a \wedge e^b = 0, \tag{4.30}$$

while varying with respect to ω^a leads to the torsion free equation

$$F^a - \bar{F}^a = 0 \Leftrightarrow T^a = de^a + {\omega^a}_b \wedge e^b = 0. \tag{4.31}$$

We thus verify that solving the equations of motion in the Chern-Simons formalism is considerably simpler than solving Einstein's equations.

最后，我们很显然有结论，就是经典的 Chern-Simons 理论给出了 AdS3 的作用量!!

7.2 基础的复几何的概念

7.2.1 黎曼曲面基础

对于二维曲面，我们指的是一个二维的流形。我们通常认为这个流形有下面的说法：

- 1. 曲面是 closed 当我们的曲面没有边界
- 2. 曲面是 finite type 如果我们可以通过把 close 的曲面移除有限个点或者 open disk 得到的
- 3. 我们默认考虑有定向的曲面

Definition 3. *connected sum*

我们可以对于两个有定向的曲面定义 *connected sum* $S = S_1 \# S_2$。我们才用下面的步骤：分别从两个曲面上选取一个 *close disk*，数学表达就是：$D_1 \subset S_1$ 和 $D_2 \subset S_2$。

$$\varphi_i : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \to D_i, \quad i = 1, 2, \tag{7.51}$$

然后我们可以定义：

$$S_1 \# S_2 = \left(S_1 \smallsetminus \mathring{D}_1 \sqcup S_2 \smallsetminus \mathring{D}_2 \right) / \sim \tag{7.52}$$

这个模掉的等价类是：

$$\varphi_1(x, y) \sim \varphi_2(x, y) \quad \textit{for all } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ with } x^2 + y^2 = 1. \tag{7.53}$$

图像就是：

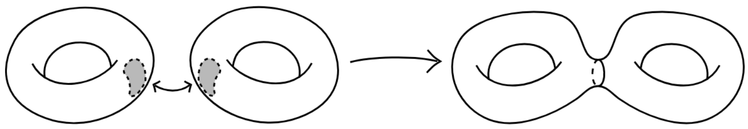


FIGURE 1. A connected sum of two tori.

给出了粘贴的严格定义之后，我们会给出戏 amain 的一个定义，就是怎么分类所有 close 2-surface：

Theorem 3. 二维 *close* 流形分类定理

所有的 *2-d*，*close*，有定向的流形都微分同胚于 *2-sphere* 和有限个 *torus* 的 *connected sum*。

为此我们可以构建一些数字来 character 一个 finite type 曲面 (g,b,n)：

Definition 4. *Signature of surface*

对于一个二维曲面，我们可以用三个数来描述，被称为 *signature*。

- g 是 *connected sum* 之中使用的 *tori* 的数量，被称为 *genus*
- b 是 *finite type* 流形移除的 *disk* 的数量，被称为 *number of boundary components*
- n 是 *finite type* 流形上移除的点的个数，被称为 *punctures*

任何一个流形我们可以写成 $\Sigma_{g,b,n}$ 或者 $\Sigma_g = \Sigma_{g,0,0}$

下面我们介绍一个二维流形上重要的拓扑不变量 Euler characteristic。

我们的二维流形可以进行三角刨分，我们可以把它分成三部分：$\mathcal{T} = (V, E, F)$。

- 也就是是在流形上选择有限的点 $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$
- 并且给出有限个边 $E = \{e_1, \ldots, e_l\}$ 保证连接两个点。
- 剩下的面 F，必须有三个 edge 作为边界。

Remark:

我们需要注意 triangulation 并不是代数拓扑里面的 simplical complex 的概念。比如，下面的图就不是一个 simplical complex（具体看看代数拓扑的书）

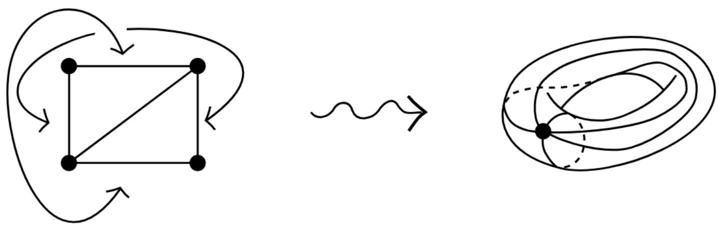


Figure 2. A torus with a triangulation

我们根据 triangulation 可以为流形赋予一个数字，我们可以定义这个 Euler Characteristic。

Definition 5. *Euler characteristic*

对于一个 *close manifold* 我们给出的定义是：（注意我们的这个计算只能）

$$\chi(S) = |V| - |E| + |F|. \tag{7.54}$$

根据代数拓扑里面的 singular homology，我们可以发现这个数是同伦不变的。为此我们可以给出下面的定理：

Theorem 4. *Euler Characteristic* 的具体数

- 对于一个 *close* 的 *surface* 来说：$\chi(S) = 2 - 2g$
- 对于一个 *open* 的 *surface* 来说：$\chi(\Sigma_{g,b,n}) = 2 - 2g - b - n.$

注意，我们本身的 triangulation 并不能够在一个有 puncture 的曲面上定义。但是我们可以修订定义，认为 puncture 就是一个 vertex，那么就可以给出上面的第二个式子。

黎曼曲面的概念

下面我们定义一个很重要的概念，也就是黎曼曲面：

黎曼曲面

Riemann surface X 是一个连续的 Hausdorff 的拓扑空间 X。并且这个空间上面需要有两个结构：open cover $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ； maps $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ 这两个结构需要满足下面的关系：

- $\phi_\alpha(U_\alpha)$ 是一个开集，并且 ϕ_α 是一个 homeo（也就是连续的双射）
- 对于 $\alpha, \beta \in A$ 我们对于 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 我们下面的映射是全纯的：

$$\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{7.55}$$

我们的 $((U_\alpha, \phi_\alpha))_{\alpha\in A}$ 被称为 atlas。

对于这个群面我们有两个性质，是可以通过定义证明出来的：

- Riemann surface 是 second countable
- Riemann surface 是自动是有一个定向的

下面我们给出一些黎曼曲面的例子，$\mathbb{C}$ 是最经典的例子，而如果我们算上无穷远点我们称之为 projective line $\mathbb{P}^1$ 或者有的时候我们使用 $\hat{\mathbb{C}}$ 进行描述，也是，被称为 Riemann sphere。所有 Riemann Sphere 的连通开集都是黎曼曲面。

Definition 6. *Domain*

也就是 Riemann Sphere 的连通开集！！所有的 domain 都是黎曼曲面，从 $\mathbb{P}^1$ 里面继承了黎曼曲面的结构！！！

黎曼曲面的自同态

首先我们定义什么是全纯的 holomorphic 的映射：

Definition 7. *holomorphic map*

首先我们与两个黎曼曲面，$X=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ，$Y=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ 。我们有一个两个曲面之间的映射：$f:X\to Y$。如果是全纯的需要满足下面的函数是一个全纯函数：

$$\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))\to\psi_\beta(f(U_\alpha)\cap V_\beta) \tag{7.56}$$

- 如果 f 是一个 *bijection*，那么我们称之为是一个 *biholomorphism* 或者 *conformal*
- $AuT(X)$ 表示 X 的自同态群，也就是所有的 *biholo* 构成的群

一个重要的例子就是 Riemann Sphere 这个面的 autholo 群是：

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))=\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})=\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\left\{\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}:\lambda\neq0\right\}. \tag{7.57}$$

同时这个群也同构于：

$$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})\simeq\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbb{C},\quad ad-bc=1\right\}/\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \tag{7.58}$$

黎曼群面的 Quotient

Quotient of Riemann Surface

Theorem 1.2.4. *Let $D\subset\widehat{\mathbb{C}}$ be a domain and let $G<\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ such that*

(1) $g(D)=D$ for all $g\in G$

(2) If $g\in G\setminus\{e\}$ then the fixed points of g lie ourside of D.

(3) For each compact subset $K\subset D$, the set

$$\{g\in G:g(K)\cap K\neq\emptyset\}$$

is finite.

Then the quotient space

$$D/G$$

has the structure of a Riemann surface.

这个定理告诉我们，如果一个 Domain 进行 quotient。只有对 freely,properly discontinuously 的子群的 quotient 才是一个 Riemann Surface。

这个定理告诉我们什么呢？就是给定一个 domain，我们可以通过 quotient 这个 domain 得到一个黎曼曲面。一个很重要的例子就是构造 Torus。

对于 $\mathbb{C}$ 作为 Riemann Sphere 的一个 Domain。我们可以模去下面的矩阵 generate 的群：

$$g_1:=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},g_\tau:=\begin{bmatrix}1&\tau\\0&1\end{bmatrix}\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \tag{7.59}$$

并且我们定义这个群作用在二维平面上面是这样定义的：

$$g_1(z) = z + 1 \quad \text{and} \quad g_\tau(z) = z + \tau \tag{7.60}$$

我们可以证明这个群满足上面很好的性质所以，Quotient 的结果依旧是一个黎曼曲面。这个黎曼曲面我们记作：$\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ 。然后我们会发现这个流形其实就是一个 torus。我们可以构建下面的 homeomorphism：$\mathbb{C}/\Lambda_\tau \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$$[x + y\tau] \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \tag{7.61}$$

我们还可以构建 Hyperbolic Surface 的 Quotient 出来的黎曼流形：

Definition 8. *Hyperbolic Surface*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} \tag{7.62}$$

也就是上半复平面。这个平面的 $AuT(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$。对于这个群我们也可以构建出一堆 quotient 出来的子黎曼曲面。

Remark:
$PSL(2, \mathbb{R})$ 的群，其实是保下面的这个度规的群：

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{7.63}$$

这个度规其实是曲率为-1 的时空的度规。

下面我们给出一个特别特别强的定理：

Uniformization Theorem

X 是一个 simply connected Riemann surface。那么 X 必然 biholo 于下面的几个黎曼曲面之一：

$$\widehat{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{C} \quad or \quad \mathbb{H}^2. \tag{7.64}$$

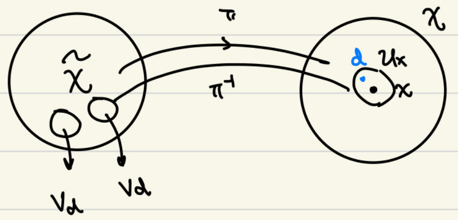
这意味着这三个黎曼曲面我们选任意一个进行 quotient 可以得到所有的黎曼曲面!!! 也就是说：

Corollary 1.3.3. *Let X be a Riemann surface. Then there exists a group $G < \mathrm{Aut}(D)$, where D is exactly one of $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ or $\mathbb{H}^2$ so that*

- *G acts freely and properly discontinuously on D and*
- *$X = D/G$ as a Riemann surface.*

为了一定程度说明这个定理我们需要定义下面的概念就是一个拓扑空间的 Universal Covering。

∘ $\tilde{X}$ is a Covering Space of X Exist $\pi : \tilde{X} \to X$



$$\begin{cases} * \ \pi^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{\alpha \in D_x} V_\alpha \\ * \ \pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_x \text{ is homeo } \quad \forall \alpha \in D_x \end{cases}$$

E.g. $\begin{cases} \text{1) Id Map is Covering} \\ \text{2) } r: \mathbb{R} \to S^1 \quad r(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad t \in \mathbb{R} \quad r(t) \in S^1 \end{cases}$

→ Covering is not Unique

∘ Universal Covering

$(p, \tilde{X})$ $\quad p : \tilde{X} \to X$ is a simple connected covering

(β, E) $\quad \beta : E \to X$ is a simple connected covering

⇒ ∃ uniquely determined homeo $\alpha : \tilde{X} \to E$ 使

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commute

⇒ p 为 Universal Covering

→ Universal Covering is Unique (But not always Exist)

解读上面的 Uniformization Thm

对于一个黎曼曲面来说，我们有定理保证可以构造一个 Universal Covering，并且这个 covering 是一个 simply connected 的 Riemann surface。

所以根据 UT，我们知道，任意黎曼曲面的 Universal covering 必然 biholo 于下面三个黎曼曲面之一：

$$\widehat{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{C} \quad or \quad \mathbb{H}^2. \tag{7.65}$$

也正因此，所有的黎曼曲面都可以通过被 Universal covering 进行 quotient。也就是被那三种黎曼曲面 quotient 得到。并且我们的 Universal Covering 的构造保证：

$$\widetilde{X}/\pi_1(X) = X. \tag{7.66}$$

我们的 quotient 选择的群就是这个黎曼曲面的基本群。所以我们，只要说这个黎曼曲面的基本群是某一个 Domain 的 aut 群的 free,properly discontinuously 的子群那么就说明这个曲面是哪一个 Domain Quotient 出来的。

那么为了研究怎么进行 Quotient，下面是这三个流形的 aut 群!

- $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{\varphi : z \mapsto az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*,$

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

根据这个定理我们可以把所有黎曼曲面分成三类，那么现在，我们试试能不能再仔细的分类每一类里面的黎曼曲面。

三个基本的 Riemann Surface 能 quotient 出个啥?

- 如果一个黎曼曲面 X 的 Universal Covering biholo 于 $\widehat{\mathbb{C}}$，那么这个黎曼曲面自己 biholo 于 $\widehat{\mathbb{C}}$
- 如果一个黎曼曲面 X 的 Universal Covering biholo 于 $\mathbb{C}$，那么这个黎曼曲面自己 biholo 于下面三种情况之一：

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{C}/\{0\}, \quad \mathbb{C}/\left\langle \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{7.67}$$

- 如果一个黎曼曲面 X 的 Universal Covering biholo 于 $\mathbb{H}^2$，那么情况就会十分复杂，我们需要仔细研究 $Aut(\mathbb{H}^2)$ 的 FP 子群的结构从而得到，能够被 quotient 出来的黎曼曲面

为了研究什么黎曼曲面可以被 hyperbolic surface quotient 出来，我们下面讨论 $Aut(\mathbb{H}^2)$ 的子群结构。

Theorem 5. *$Aut(\mathbb{H}^2)$ 的特殊子群*

如果一个群 $G \subset PSL(2, \mathbb{R})$ 并且 act properly on $\mathbb{H}^2$ 并且是 Abelian 的。那么这个群只有两种情况:

- *$G \sim \mathbb{Z}$*
- *G 是一个有限群，并且 rank 1*

7.2.2 黎曼曲面的流形结构

黎曼曲面的曲率结构

由于黎曼曲面是一个流形，其实其上有一个很自然的 metric 结构的。对于 P^1 来说就是恒定的 1 curvature 的结构；对于 $\mathbb{C}$ 来说就是 0 curvature；对于 $\mathbb{H}$ 来说就是 -1 curvature。我们其实会发现，黎曼曲面的结构，会自动赋予所有的黎曼曲面一个等 curvature 的度规。我们可以通过一个定理看出来:

Theorem 6. *Killing-Hopf 定理*

任意一个有常曲率属于 $\{1, 0, -1\}$ 的黎曼曲面可以通过 quotient 一个有黎曼曲面结构的广义黎曼流形的 orientation preserving isometry group 的一个 FP 子群得到，并且

quotient 自下面三个有黎曼曲面结构的二维广义黎曼流形:

$$S^2 \textit{with round metric} \quad \mathbb{R}\textit{with Euclidean metric} \quad \mathbb{H}^2 \textit{with hyperbolic metric} \tag{7.68}$$

这个定理出发我们其实可以还原上面三种基本的 Rienmann surface 能 quotient 出的东西。我们先定义有黎曼曲面结构的广义黎曼流形的 orientation preserving isometry group:

$$\mathrm{Isom}^+(M) = \{\varphi : M \to M : \varphi \text{ is an orientation preserving isometry }\}. \tag{7.69}$$

对于上面定理提到的三种流形来说:

- $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{S}^2) = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ 这个群的 FP 子群只有 trivial 的，所以 quotient 出来的黎曼曲面都同构于其自己
- $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 这个群的 FP 子群，有三种，一个是 trivial 的，另外两个正好是圆柱（$\mathbb{C}/0$ ）和 torus 上面的基本群，所以 quotient 出来就是我们之前讨论的三种黎曼曲面
- $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. 我们上面已经讨论了，这个的 FP 子群巨多无比，所以就 quotient 出来各种各样子的曲面

所以我们会发现，这些 quotient 出来的黎曼曲面都有一个 {0,1,-1} 的曲率结构。

所有黎曼曲面的度规结构

根据上面的定理我们其实可以构造一个一一映射，就是从所有没有边界的黎曼曲面的空间（quotient 掉 biholo）到曲率为 {0,-1,1} 的二维广义黎曼流形 (quotient 掉 isometry):

Proposition 2.2.1. *Given an orientable surface Σ of finite type with $\partial\Sigma = \emptyset$, the identification described above gives a one-to-one correspondence of sets*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Riemann surface} \\ \textit{structures on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Complete Riemannian} \\ \textit{metrics of constant} \\ \textit{curvature } \{-1, 0, +1\} \\ \textit{on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \sim,$$

where the equivalence on the left is biholomorphism and the equivalence on the right is isometry (and homothety in the Euclidean case).

也就是说所有的黎曼曲面都可以赋予一个恒定曲率的度规结构!!!!

Remark:

这一定程度的意味着一件事情就是有两个东西是一模一样的:

- 黎曼曲面和 {0,-1,1} 度规的二维广义黎曼流形是对应的
- 其上的 biholo 一一对应于广义黎曼流形的 isometry

并且对于黎曼曲面来说，欧拉指标和曲率满足关系：

$$\kappa \cdot \text{area}(X) = 2\pi\ \chi(X) \tag{7.70}$$

很自然的面积我们也可以求，通过欧拉指标，对于 $\Sigma_{g,b,n}$ 来说：

$$\text{area}(X) = 2\pi(2g + n + b - 2). \tag{7.71}$$

黎曼曲面的共形结构

我们任意黎曼曲面都可以赋予一个常曲率的度规结构。同样的，我们的任意黎曼面其实还有一个共形结构。首先我们定义什么是共性等价的。

> **Definition 9.** *conformally equivalent*
>
> 我们说同一个流形的两个度规是共形等价的，其实是说，对于其流形上存在一个映射：$\rho : X \to \mathbb{R}_+$ 使得两个度规之间满足：
>
> $$ds_1^2 = \rho \cdot ds_2^2. \tag{7.72}$$
>
> 满足这个等价关系的等价类我们称之为共形等价类。

下面我们可以给出一个类似的定理（我也懒得做出说明了呃呃呃呃呃）

Proposition 2.3.1. *Given an orientable surface Σ of finite type with $\partial\Sigma = \emptyset$, the identification described above gives a one-to-one correspondence of sets*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Riemann surface} \\ \textit{structures on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \textit{biholom.} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Conformal classes} \\ \textit{of Riemannian} \\ \textit{metrics on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \textit{diffeomorphism.}$$

7.2.3 Torus 上面的 Teichmuller Space

下面我们通过对黎曼曲面的理解引申出两个衍生的空间：Moduli Space 和 Teichmuller Space。首先我们可以通过一些具体例子入手进行研究。由于 Riemann Sphere 上面的 Moduli Space 和 Teichmuller Space 都是 Trivial 的。所以我们不妨先研究一个更有意思一点的，就是 Torus。Torus 的定义就是 $\mathbb{C}$ quotient 去两个变量给出的矩阵出来的黎曼曲面。

Torus 可以如下构造 biholo 等价类。$R_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$, 其中 $\tau \in \mathbb{H}^2$ 并且我们有：

$$\Lambda_\tau = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{7.73}$$

所有的 torus 可以 biholo 于用 τ 标记的。但是注意**同样的一个 torus 可以 biholo 于不止一个 τ 标记的 torus** 所以我们应该研究什么样子的 τ 才是真正的对应的 torus 的 biholo 等价类!!

Theorem 7. *Torus 的 Biholo 等价类*

对于两族 Torus R_τ 和 $R_{\tau'}$ 他们之间是 biholo 当且仅当:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{7.74}$$

其中满足: $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ with $ad - bc = 1$.

这样看上去我们所有 Torus 的 biholo 等价类都可以用下面这个空间进行标定:

$$\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}^2/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \tag{7.75}$$

有一个 P 是因为如果把四个整数都进行变号其实结果是不变的。首先讨论这个 quotient 后的面是不是黎曼曲面,由于我们 quotient 的群 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 其实并不是 freely 的,所以 quotient 之后的结果并不是一个黎曼曲面。但是我们可以讨论就是这个 quotient 的 **fundamental domain**。也就是说,对于所有的 $\tau \in \mathbb{H}^2$,存在 $g \in PSL(2,\mathbb{Z})$ 使得 $g\tau \in \mathcal{F}$ 我们可以用下面的公式和图片表示:

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |z| \geq 1 \text{ and } -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \tfrac{1}{2} \right\}. \tag{7.76}$$

在上半平面里面画出来就是:

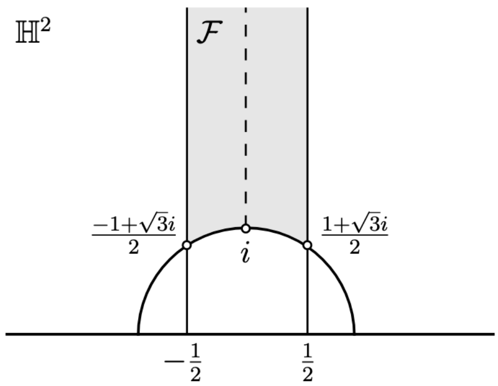


FIGURE 1. A fundamental domain for the action of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ on $\mathbb{H}^2$.

下面我们仔细分析这个灰色的区域每一个部分作用上 $p \in PSL(2,\mathbb{Z})$ 之后的结果!分析之后我们会发现,我们有基本的操作,就是左右平移 1;或者把中间的圆里面的点 map 到圆外面的!!! 所以灰色的空间其实左右的边界是站起来的下面的圆左右其实也是"粘起来的"。我们把这些边界粘起来其实这个流形应该长这个样子的;

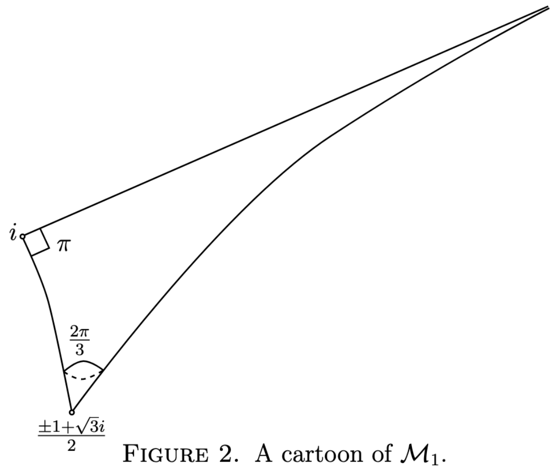


FIGURE 2. A cartoon of $\mathcal{M}_1$.

这个也就是 M_1 的形状!!! 这个形状的名字其实是 hyperbolic orbifold（像是两个流形但是把边界完全粘贴在一起一样所以我们叫 orbifold）。下面我们定义 torus 上面的两个衍生的空间：

- Moduli Space：也就是 $M_1 = \mathbb{H}^2/PSL(2,\mathbb{Z})$
- Teichmuller Space：也就是 $T_1 = \mathbb{H}^2$

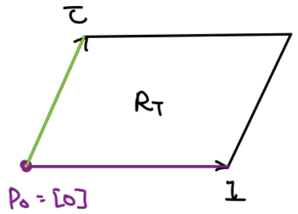
下面我们试图给出更加 general 的定义。下面我们会发现有两种定义 Torus 上面的 Teichmuller 空间的方法。一个是从定义 marking 和 marking 等价的角度；另一个是从定义微分同胚的角度。

从 Marking 的角度定义 Teichmuller 空间

我们定义什么是一个 Torus 的 marking。也就是 Torus 的某一个点上面的基本群的两个 generator。我们记作：

$$[A_\tau], [B_\tau] \in \pi_1(R_\tau, p_0). \tag{7.77}$$

我们发现可以给一个 Torus 上面赋予一个自然的 Marking 结构（也就是 1 和 τ 这两条线）（就是选取一个特殊的点，给出这个点上面的基本群的生成元）：



$\pi_1(R_\tau, P_0)$

$[A_\tau], [B_\tau] \in \pi_1(R_\tau, P_0)$

Natural Choice : $\begin{cases} [A_\tau] \to 1 \\ [B_\tau] \to \tau \end{cases}$

Induce $f: R_\tau \to R_\tau$ biholomorphism !

$f_*: \pi_1(R_\tau', P_0) \to \pi_1(R_\tau, P_0)$

<u>Defi</u> : R is Rieman Surface $\overset{\text{Homeo}}{\sim} T^2$ (Torus)

* Marking on R is Generating Set $\Sigma_p \subset \pi_1(R, p)$ consist of 2 element

  e.g. 上示 $([A_\tau], [B_\tau]) = \Sigma_p$

(同一个 R)

* 2个 Marking Σ_p 与 $\Sigma'_{p'}$ <u>等价</u> $\Leftarrow$ 存在 continuous curve α from $p \to p'$

  存在 Isomorphism $T_\alpha : \pi_1(R, p) \to \pi_1(R, p')$ $T_\alpha(\Sigma_p) = \Sigma'_{p'}$

* 2个 Marked Riman Surface homeo to T^2 are <u>等价</u>

  若存在 : $h: R \to R'$ biholo : s.t. $h_*(\Sigma) \cong \Sigma'$

所以我们可以定义 Teichmuller 空间:

Definition 10. *从 Marking 角度定义 Teichmuller space*

我们认为两个有 marking 结构的 Torus 是 equivalent 的。如果存在一个 biholo $f: R \to R'$ 使得这个 biholo induce 出来的自然 marking 结构是同构的:

$$h_*(\Sigma) \simeq \Sigma'. \tag{7.78}$$

我们定义

Theorem 3.3.2. *Let $\tau, \tau' \in \mathcal{T}_1$. Then the marked Riemann surfaces*

$$(R_\tau, \{[A_\tau], [B_\tau]\}) \quad \text{and} \quad (R_{\tau'}, \{[A_{\tau'}], [B_{\tau'}]\})$$

are equivalent if and only if $\tau' = \tau$. Moreover, we have an identification

$$\mathcal{T}_1 = \left\{ (R, \Sigma_p) : \begin{array}{c} R \text{ a Riemann surface homemorphic to } \mathbb{T}^2 \\ p \in R,\ \Sigma_p \text{ a marking on } R \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

Remark:

这个定义的方式的本质其实就是选择一种方式，让我们构造 Riemann 曲面的等价类的时候，并不考虑不同 τ 之间的同构的关系。通过引入一种特殊的数学结构，保证不同 τ 的选择之中没有 equivalent 了！！！（也就是不能再用 biholo 了！！）

从微分同胚的角度定义 Teichmuller 空间

首先我们选用一个固定的唯一的（但是比较任取的）surface S 并且保证这个曲面微分同胚于 $\mathbb{T}^2$。也就是选择一个 universal 的独特的 torus。下面我们定义，赋予"微分同胚"结构的等价：

> **Definition 11.** *微分同胚结构等价关系*
>
> *我们令 R 和 R' 是两个 torus。这个时候定义一个 orientation preserving diffeomorphism*
>
> $$f : S \to R \quad \text{and} \quad f' : S \to R' \tag{7.79}$$
>
> *这样我们就可以赋予一个黎曼曲面一个微分同胚结构，我们记作 (R, f) 和 (R', f')。*
>
> *如果这两个黎曼曲面等价，就是说存在一个 biholo $h : R \to R'$ 保证：*
>
> $$(f')^{-1} \circ h \circ f : S \to S \tag{7.80}$$
>
> *这个函数是 homotopy 于 identity 的（而不是基本群里面其他的，像是转一圈回去那种。）*

下面，我们给出这个微分同胚等价和赋予 marking 结构等价之间的关系。如果我们赋予 S 这个 universal 的 torus 一个 marking 的结构，我们可以证明我们的 f 微分同胚可以赋予流形 (R, f) 一个 marking 的结构。这个样子，赋予微分同胚结构和赋予 marking 结构其实是可以一一映射的。并且 marking 等价和微分同胚等价是一毛一样的。

Note that if we pick a generating set $\{[A], [B]\}$ for the fundamental group $\pi_1(S, p)$ then every pair (R, f) as above defines a point

$$(R, \{f_*([A]), f_*([B])\}) \in \mathcal{T}_1 \, .$$

It turns out that this gives another description of the Teichmüller space of tori:

THEOREM 3.4.2. *Fix S and $[A], [B] \in \pi_1(S, p)$ as above. Then the map*

$$\left\{ (R, f) : \begin{array}{c} R \text{ a Riemann surface, } f : S \to R \\ \text{an orientation preserving diffeomorphism} \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \to \quad \mathcal{T}_1$$

given by

$$(R, f) \mapsto (R, \{f_*([A]). f_*([B])\}),$$

is a well-defined bijection.

7.2.4 Teichmuller theory 的基本定义

我们最后一般选择第二种方法定义 Teichmuller Space。我们严格的写下来：

定义 Teichmuller Space

Definition 3.5.1. Let S be a surface of finite type. Then the *Teichmüller space* of S is defined as

$$\mathcal{T}(S) = \left\{ (X, f) \ : \ \begin{array}{c} X \text{ a Riemann surface }, f : S \to X \\ \text{an orientation preserving diffeomorphism} \end{array} \right\} \Big/ \sim,$$

where

$$(X, f) \sim (Y, g)$$

if and only if there exists a biholomorphism $h : X \to Y$ so that the map

$$g^{-1} \circ h \circ f : S \to S$$

is homotopic to the identity.

We will often write

$$\mathcal{T}(\Sigma_{g,n}) = \mathcal{T}_{g,n} \quad \text{and} \quad \mathcal{T}(\Sigma_g) = \mathcal{T}_g \,.$$

当然对于任意的 finite type 的黎曼曲面我们其实也可以找到一个等价的第一种定义。上面我们仅仅是对于 finite type 的曲面进行定义。我们下面把这个定义推广到有 mark point 的 puncture 的情况。

定义有标记点的 Teichmuller Space

Proposition 4.1.4. *Let $n \geq 1$ and fix n distinct points $x_1, \ldots, x_n \in \Sigma_g$. There is a bijection*

$$\mathcal{T}(\Sigma_{g,n}) \longrightarrow \{ (X, f) \ : \ f : \Sigma_g \to X \ \textit{an orientation preserving diffeomorphism} \} \Big/ \sim,$$

where $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2)$ if and only if there exists a biholomorphism $h : X_1 \to X_2$ such that

$$f_2^{-1} \circ h \circ f_1(x_i) = x_i \quad \textit{for } i = 1, \ldots, n$$

and $f_2^{-1} \circ h \circ f_1 : \Sigma_g \to \Sigma_g$ is homotopic to the identity through maps fixing $x_1, \ldots x_n$.

Remark:

我想起来我们在画 conformal block 的时候我们一般使用流形上面 embed 一堆线。在想这些线其实可以理解成为 Teichmuller 空间上给出来的微分同胚 $f : S \to R$ 的结构。因为我们关心的是这个微分同胚在基本群里面的地位，所以我们只需要画一条线就好。

Question: 关于 braiding 和 mapping class group 的关系

似乎 mapping class group 只给出了一个 dehn twist 和 F move 的 generation 但是并没有给出 braiding 的产出呀!!!!

Answer：

下

面我们给出一个 Teichmuller theory 里面的一个很重要的基本概念。也就是 mapping class group。我们下面给出这个群的定义。

Mapping Class Group

对于一个 compact finite type 的曲面 S_0 我们有其中的一个有限集合 $\Sigma \in S_0$。我们可以通过进行 quotient 给出一个更小一点的空间 S。我们下面定义 S 上面的 Mapping class group:

$$\mathrm{MCG}(S) = \mathrm{Diff}^+(S, \partial S, \Sigma)/\mathrm{Diff}_0^+(S, \partial S, \Sigma) \tag{7.81}$$

其中我们涉及两个微分同胚群，我们如下定义。

$$\mathrm{Diff}^+(S, \partial S, \Sigma) = \left\{ f : S_0 \to S_0 : \begin{array}{c} f \text{ an orientation preserving diffeomorphism that} \\ \text{acts as the identity on the boundary components} \\ \text{of } S_0 \text{ and preserves the elements of } \Sigma \text{ pointwise} \end{array} \right\}$$

and

$$\mathrm{Diff}_0^+(S, \partial S, \Sigma) = \left\{ f \in \mathrm{Diff}^+(S, \partial S, \Sigma) : \begin{array}{c} f \text{ homotopic to the identity} \\ \text{through a homotopy preserving} \\ \text{the elements of } \Sigma \text{ pointwise} \end{array} \right\}.$$

The group operation is induced by composition of functions.

注意，我们的 Diff 不仅仅是 orientation preserving 的并且还需要是保证映射先后 Σ 上面的点必须映射回自己的。

根据这个定义我们可以通过我们已经构造的 Teichmuller 空间给出 moduli space 的定义。

Definition 12. *Moduli Space*

我们定义这个空间就是 Teichmuller 空间对于 mapping class group 取一个模!

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)/\,\mathrm{MCG}(S). \tag{7.82}$$

一般是用这个记号:

$$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n}) = \mathcal{M}_{g,n} \quad \text{and} \quad \mathcal{M}(\Sigma_g) = \mathcal{M}_g. \tag{7.83}$$

给出了定义之后我们下面给出一些黎曼曲面给出的 Teichmuller 空间，mapping class group 还有 moduli 空间的例子。

7.2.5 Teichmuller theory

我希望继续讲一讲 Teichmuller 理论是什么?

7.3 Mathematical Quantization

有一个比较清楚的给物理人的文章可以 fol 一下

7.4 Quantization of Bosonic String

我们相当于在一个二维的曲面上面进行路径积分从而量子化一个弦理论。Naively 我们的量子化可以写成:

$$\int [dX \ \mathrm{dg}] \ \exp(-S) \ . \tag{7.84}$$

其中我们的 S 可以写成:

$$S = S_X + \lambda\chi_1, \tag{7.85}$$

具体地说就是:

$$S_X = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\sigma \mathbf{g}^{1/2}\mathbf{g}^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \tag{7.86}$$

$$\lambda_\chi = \frac{1}{4\pi}\int_M d^2\sigma \ \mathrm{g}^{1/2}R + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial M} dsk. \tag{7.87}$$

但是我们并不可以这样进行路径积分因为这会导致 overcounting，因为我们的度规和场在 Diff 和 Weyl transformation 之下其实是不变的，我们很可能把同样的一个场算了两次。真正的配分函数是:

$$\int \frac{[dX \ dg]}{V_{\mathrm{diff}\times\mathrm{Weyl}}} \exp(-S) \equiv Z. \tag{7.88}$$

我们首先一个问题是我们的 $g_{\mu\nu}$ 其实并没有任何的自由度。在二维的时候，他只有三个分量而如果确定一个 gauge 的话，那么刚好就是三个约束方程（两个空间坐标变换的，也就是 diff; 一个 Weyl transformation 的）我们希望 fix 我们的 metric 在一个 fiducial metric 不妨取下面的两种 gauge 之一:

- 如果考虑三种变换，可以使用 unit gauge：$\hat{g}_{ab}(\sigma) = \delta_{ab}$.
- 如果仅仅考虑 diffeo，那么就用 conformal gauge：$\hat{g}_{ab}(\sigma) = \exp[2\omega(\sigma)]\delta_{ab}$.

我们使用 FP 量子化的技巧可以给出结论:

$$Z[\hat{g}] = \int [dX]\Delta_{\mathrm{FP}}(\hat{g}) \exp(-S[X,\hat{g}]). \tag{7.89}$$

其中我们通过 det 和配分函数的关系这个 FP trick 可以得到:

$$\Delta_{\mathrm{FP}}(\hat{g}) = \int [dbdc] \ \exp(-S_{\mathrm{g}}) \ , \tag{7.90}$$

其中:

$$S_{\mathrm{g}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \hat{g}^{1/2} b_{ab}\hat{\nabla}^a c^b = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \hat{g}^{1/2} b_{ab}(\hat{P}_1 c)^{ab}. \tag{7.91}$$

也就是相当于需要在理论里面加入一个 bc ghost 的配分函数才能合理的在二维平面上进行量子化!! 并不考虑弦是一个曲面的问题。

7.5 速通 Liouville theory

普通的 liouville theory 我们称之为 spacelike liouville theory。我们下面进行定义。

7.5.1 Spacelike Liouville

这是一个理论，对于这个理论有下面的要求：

Liouville theory 定义

首先说明 convention，我们一般这样子 parametrize：

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + b^{-1}, \quad \Delta = \alpha(Q - \alpha), \quad \alpha = \frac{Q}{2} + iP. \tag{7.92}$$

表示 c，可以使用 Q 和 b；表示 Δ 可以使用 α 和 P。这个理论有下面的约束：

- $c > 1$，但是一般我们考虑 $c \geq 25$ 的情况
- $\Delta \geq \frac{Q^2}{4} = \frac{c-1}{24}$ 也就是说 $P \in \mathbb{R}$

对于这个样子的一个理论我们可以进行 Bootstrap 出所有的三点函数和两点函数：

3/2-point functions

对于三点函数我们有：

$$\langle V_{P_1}(0)V_{P_2}(1)V_{P_3}(\infty)\rangle = C_b(P_1,P_2,P_3) \equiv \frac{\Gamma_b(2Q)\Gamma_b(\frac{Q}{2} \pm iP_1 \pm iP_2 \pm iP_3)}{\sqrt{2}\Gamma_b(Q)^3\prod_{k=1}^{3}\Gamma_b(Q \pm 2iP_k)}. \tag{7.93}$$

从这个公式中我们会发现，把 P 反号方程并不会改变，所以我们认为：

$$V_p = V_{-P} \tag{7.94}$$

对于两点函数我们就是让第三个场 $\Delta_3 = 0$，也就是说 $P_3 = \frac{iQ}{2}$ 有：

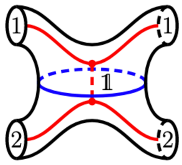
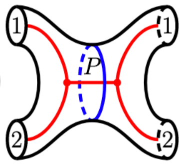
$$\langle V_{P_1}(0)V_{P_2}(1)\rangle = C_b(P_1,P_2,1) = \frac{1}{\rho_0^{(b)}(P_1)}(\delta(P_1-P_2)+\delta(P_1+P_2)). \tag{7.95}$$

其中：

$$\rho_0^{(b)}(P) = 4\sqrt{2}\sinh(2\pi bP)\sinh\left(2\pi b^{-1}P\right). \tag{7.96}$$

这些解都是很 universal 的数在 2D CFT 之中。因为他们其实是 2D CFT 的一组 crossing kernel!!!!

- $\rho_0^{(b)}$ 其实是 modular crossing kernel for torus vaccum character
- C_b 其实是 4 点函数的 crossing kernel 之中的一个！！ 特殊的 crossing kernel

 $= \int_0^\infty \mathrm{d}P\, \rho_0^{(b)}(P) C_b(P_1, P_2, P)$ 

那么我们接下来可以发现用这些数据可以算出 liouville CFT 的所有 correlation function：

关联函数

对于任意黎曼面上面的关联函数我们可以写成：

$$\langle V_{P_1} \cdots V_{P_n} \rangle_g = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \left(\prod_a \mathrm{d}P_a \rho_0^{(b)}(P_a) \right) \left(\prod_{(j,k,l)} C_b(P_j, P_k, P_l) \right) |\mathcal{F}_{g,n}^{(b)}(\mathbf{P}^{\text{ext}}; \mathbf{P}|\mathbf{m})|^2. \quad (7.97)$$

其中：

- $\mathcal{F}_{g,n}^{(b)}(\mathbf{P}^{\text{ext}}; \mathbf{P}|\mathbf{m})$ 是有 $\mathbf{P}^{\text{ext}}$ 个 external point；以及 $3g-3+n$ 个 internal point $\mathbf{P}$ 的

Chapter 8

Scratch Book

这个章节的主要目的是，如果 fol 一个知识点，不小心 fol 到了 shit。但是又不忍心删除。不妨放在这里吃灰（((

8.0.1 Local Lorentz frame formulism

对于一个 Manifold 来说我们总可以选取一个坐标系，或者一组基矢量，保证这一组基矢量是“正交”的，数学上就是说: $g(e^\mu, e^\nu) = g_{\mu\nu} = \pm 1$ or 0。

- **triad**：我们称呼这样的基矢量是 triad，他们满足关系：

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a e^b \tag{8.1}$$

  其中:

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu \tag{8.2}$$

  这里我们的 e^a 可以理解为这样一组 1-form（**注意：这里我们的指标虽然写在上面！但是意思其实是对偶矢量，上面那个 a 并不是抽象指标记号!!!!**）

  我们会意识到 $e^a{}_\mu$ 看起来就是一个坐标变换矩阵 x'^μ / x^ν 所以显然这样的矩阵存在一个逆。我们称之为 $e_a{}^\mu$ 满足下面的关系：

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b \text{ and } e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu \tag{8.3}$$

  这个逆矩阵的定义我们显然可以构造一个 vector：

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu \tag{8.4}$$

- **Spin connection**：我们的 traid 给出了一族对偶矢量场以及一族矢量场。我们显然可以求一下这个矢量场在沿着自己方向平行移动时候的量，也就是 connection coefficient:

$$e_a^\mu \nabla_\mu e_b = \nabla_a e_b = e_c \omega_{ab}^c \tag{8.5}$$

  我们解释一下这个量。这个量本质上就是 connection coefficient 在新的基下面的坐标变换的定义（**注意，connection coefficient 并不是一个 tensor**）。或者说两者就是等价

的！我们可以通过下面的推导看出两者的等价性，我们直接带入协变导数的定义，并且两边作用上正交的对偶矢量：

$$\omega^c{}_{ab} = e^c{}_\nu e_a{}^\mu (\partial_\mu e_b{}^\nu + e_b{}^\alpha \Gamma^\nu_{\mu\alpha}) = e^c{}_\nu e_a{}^\mu \nabla_\mu e_b{}^\nu. \tag{8.6}$$

不难发现这个新的 connection coefficient 就是新的坐标下面协变导数的 connection coefficient，正好是他的变换关系：

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \tag{8.7}$$

然后我们就可以定义一个 1-form，我们称之为 **Spin connection**：

$$\omega^a{}_b \triangleq \omega^a{}_{bc} e^c \tag{8.8}$$

我们注意，这个 $\omega^a{}_b$ 是一个被 a,b 两个指标 label 的 1-form。其中 e^c 是一个 1-form 而 ω^a_{bc} 就是一个单纯的数!! 这个定义式子相当于就是把一堆 1-form 进行线性叠加!

给出了上方的定义之后我们主要研究 spin connection 的性质。我们首先意识到，根据定义：$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a e^b$ 我们如果对于 e^a 这一组 1-form 进行一个 lorenzian 的变换 $e'^a = \Lambda^a_b e^b$ 那么，这依旧给出了一个 valid 的 triad。因为 lorenzian 变换的定义就告诉我们这是一个保 minkovski 度规不变的变换。

那么我们如果做了这样的洛伦兹变换我们的 spin connection 也会相应的发生改变。我们认为这样的改变其实就是在 spin connection 上面作用 lorentz group。在洛伦兹群的作用下，我们的 spin connection 按照如下变换关系变换：

$$\omega'^a{}_b = \Lambda^a{}_c \omega^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b + \Lambda^a{}_c (d\Lambda^{-1})^c{}_b. \tag{8.9}$$

熟悉规范场的我们会一眼发现，这基本上就是规范场进行规范变换的时候的变换法则!!**【其实我完全不懂这个记号到底是什么玩意】**

下面我们可以通过 minkovski 度规定义升降指标：

$$\omega_{ab} = \eta_{ac} \omega^c{}_b. \tag{8.10}$$

由于我们会发现，$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ 等价于 $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$。所以我们认为 spin connection，其实是一个 3×3 的反对称矩阵，每一个矩阵元素都是一个 1-form。

在三维时空我们对于反对称矩阵有一个特征，就是所有反对称矩阵都可以用一个矢量表示。(很显然，旋转矩阵就是可以用一个方向和旋转角度表示的) 所以我们不妨使用一矢量表示 spin connection。**(注意这个矢量不是微分几何意义的，就是三个空空，每一个空空里面都是一个微分形式。)**：

$$\omega^a \triangleq \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \omega_{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = -\varepsilon_{abc} \omega^c \tag{8.11}$$

我们就得到了，lorenzian 1-form。并且可以定义其对偶就是：

$$\omega_a = \eta_{ab} \omega^b. \tag{8.12}$$

> **Remark:**
>
> 我们需要注意的是 ω_a 和 ω^a 都是微分几何意义下的对偶矢量!! 1-form 只是不同的两族 1-form。
>
> 但是 e^a 是一个 1-form 而 e_a 是一个 vector!!!!(因为他们本质上就是基的坐标变换,但这么理解也挺怪的，毕竟基很难讨论是不是矢量，我们就当他是矢量(x)

接下来我们可以通过考虑一族 1-form ω_a 和一族 vector e^a 来构建我们的理论!!

8.0.2 Chern-Simons Action

我们会发现上面两个 1-form 的叠加其实就是一个 SO(2,1) 的规范场。就是流形上的一个场同时有另一个指标有着规范群的结构。我们这里的规范群是三维的洛伦兹群。这个很好理解因为我们的 e^a 本身定义的选取就是有一个洛伦兹的任意性，我们做一个洛伦兹变换依旧给出了一族 valid 的 e^a 同时我们的 ω^a 在三维的情况下，正好满足规范场的变换关系。

我个人强烈感觉这样的讲法讲的特别不通畅。所以准备放弃按照这个思路学习

The Theory of Mormon

The Theory of Mormon is a quantum theory constructed by **Jesus** and was explicitly written down by **Joseph Smith** using his f**kable AIDS frog.
the theory contains a Hilbert space labeled by a single parameter a, short for **Arnold**, with spin structure. The theory has a central charge c. Sometimes we use b to represent it.

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b} \tag{8.13}$$

Now we can write down the data for the theory:

- The Hilbert space $\mathcal{H}_a$
- Spin structure for the quantum states $\mathcal{S}_a$
- Measure for Path Integral $\mathcal{D}_i[g_a]$ the subscript i is short for "integral"
- Fields in the Theory
  - Energy density field $\mathcal{E}_e$
    note that we use b to label a theory with certain central charge
    and for generic fields we use $\mathcal{O}$ to label.
  - Twist field ω_a
  - Identity field I