3-j Symbol & 6-j Symbol的讨论

#QM #李代数 #量子群

这里我希望以三个角动量耦合讨论一下6-j symbol到底是什么以及怎么计算出来的。这里的例子计算是主要fol “2.4 Quantum 6j-symbols”（Gabai 等, 2025, p. 11）（pdf）里面举出来的 spin-1/2 三个角动量耦合的例子。

- 一些量子力学语言里面的计算也可以参考 《高等量子力学（喀兴林）(Z-Library).pdf》

对于三个角动量耦合，我们会发现和两个角动量耦合成为一个角动量有着比较本质的区别。

- 两个角动量耦合成为一个角动量，那一个角动量的某一个态唯一的对应着两个角动量的张量积空间的一个态！
- 三个角动量耦合成为一个角动量。却并不是对应着三个角动量的一个态而是对应着一个两个角动量耦合的线性空间。
  所以本质上其实，三个表示的张量积空间按照某种规则对应一个表示的空间其实并不一定是一一对应的。而是那一个表示的空间之中的某一个向量对应着三个表示张量积的空间的一个子空间。

具体计算三个角动量耦合

我们知道三个 spin-1/2 的角动量可以耦合成为 spin-1/2 以及 spin-3/2 的两种表示。但是，问题是，其实并不是那么简单，准确的说，是可以耦合成两个spin-1/2表示直和一个 spin-3/2 表示。用表示论的语言写出来就是：

$$(\mathrm{V}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{V}_{\frac{1}{2}}) \otimes \mathrm{V}_{\frac{1}{2}} = \mathrm{V}_{\frac{1}{2}} \otimes (\mathrm{V}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{V}_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{V}_{\frac{3}{2}} \oplus \mathrm{V}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathrm{V}_{\frac{1}{2}}$$

我们具体看每一个表示的展开，或者说我们研究所有右方的线性空间里面的适量是怎么对应左边的。

角动量耦合计算

$\mathrm{V}_{\frac{3}{2}}$ 表示

对于这个表示我们会发现有两个态：

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

第二个是：

$$|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{2}{3}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{3}|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

我们会发现这两个都是一个态对应着一个三个表示`tensor product`之后的态。十分的正常。

> ⚠ **两种计算**
>
> 值得注意的是虽然着对应的同样的一个量子态。但是我们依旧有先耦合前两个和先耦合后两个的区别。但是计算出来结果是一样的。查CG系数表的时候一定注意，张量积前后的表示对于一个CG系数表示固定的。张量积前后是不能互换的。

$V_{\frac{1}{2}}$ 表示

这里是讨论的重点，这个空间能够组合成为的态只有一个就是 $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ 但我们会发现对于这个态我们有两种的产生方式。我们为了区分这一个态的两种方式所以使用 v_1 以及v_2 的记号。我们下面采用的方法就是先对前两个表示进行耦合，然后再对最后的一个表示进行耦合。

v_1 是由0表示和1/2表示的方法产生的态：

$$v_1 = |0,0\rangle \otimes |+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |+\rangle$$

v_2 是由1表示和1/2表示的方法产生的态：

$$\begin{aligned} v_2 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q |1,1\rangle \otimes |-\rangle + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q |1,0\rangle \otimes |+\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |+\rangle \end{aligned}$$

所以我们会发现，其实这样的同样的一个量子态其实是有两份的。所以，我们这样的`fusion` 空间并不是一般的一维的，而是一个二维的线性空间。而上面的两个向量分别构成了两个$V_{\frac{1}{2}}$ 的基。

但问题是，我们会发现我们的构造并非唯一的。还可以有另一套构建，也就是先对后两个表示进行耦合，然后再对前两个进行耦合。得到另外的一组基：

$$w_1 = |+\rangle \otimes |0,0\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle$$

以及：

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q |-\rangle \otimes |1,1\rangle + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |1,0\rangle \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |+\rangle + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle \\
&\quad + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_q |+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle
\end{aligned}
$$

`Racah-Wigner Symbol`

对于这两个基之间可以很简单的找到基变换的关系是：

$$
w_1 = \frac{-q}{1+q^2} v_1 + \frac{\sqrt{1+q^2+q^4}}{1+q^2} v_2, \quad w_2 = \frac{\sqrt{1+q^2+q^4}}{1+q^2} v_1 + \frac{q}{1+q^2} v_1,
$$

于是我们就可以计算出对于这个理论我们的 `Racah-Wigner Symbol` 是：

$$
\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Bmatrix} = \frac{-q}{1+q^2}, \qquad \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix} = \frac{q}{1+q^2},
$$

$$
\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{1+q^2+q^4}}{1+q^2}.
$$