Fundamental 2D Gravity

X. D. H.

2025 年 7 月 22 日

摘要

这个是二维的引力的基础学习笔记

目录

Chapter 1

基础知识

本章节我们主要 follow Turiaci 的讲义学习基本的二维引力。讲义是“Les Houches lectures on two-dimensional gravity and holography”。这里面主要介绍了二维度的 JT Gravity 是什么，以及和 Matrix Model 之间的关系。我们这个讲义也会基本上 fol 这个思路，并用自己的理解讲述。

1.1 JT Gravity Basic

1.1.1 JT Gravity Definition

对于二维引力来说我们的 EH action 是完全被考虑的流形的拓扑结构决定的：

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\left(\int_M \sqrt{g}R + 2\oint_{\partial M}\sqrt{h}K\right) = 2 - 2g - n \tag{1.1}$$

但是, 世界并不是 trivial 的, 我们为了研究这个问题可以引入一个标量场称为”Dilaton”。我们考虑 couple Dilaton 之后的维引力：

$$I = \underbrace{-\frac{S_0}{4\pi}\left(\int_M \sqrt{g}R + 2\oint_{\partial M}\sqrt{h}K\right)}_{\text{topological}} \underbrace{-\frac{1}{2}\int_M \sqrt{g}(\Phi R + U(\Phi)) - \oint_{\partial M}\sqrt{h}\Phi K}_{\text{dynamical}} \tag{1.2}$$

对于 Dynamical Term 我们发现，做用量基本上完全被一个函数决定 $U(\Phi)$ 也就是我们定义的 dilation Potential。

对于 JT 引力我们使用:

$$U(\Phi) = -\Lambda\Phi + U_0. \tag{1.3}$$

- 当 Λ 不等于 0 的时候，我们可以 shiftΦ 的零点 (也就是让 $U_0 = 0$ 这个是我们可以任意操作的 !! 我们之后也会默认 $U(\Phi)$ 是一个线性函数对于 JT 引力), 修订 S_0 的数值让 action 变为：

  $$I_{JT} = -\frac{S_0}{4\pi}\int_M \sqrt{g}R - \frac{1}{2}\int_M \sqrt{g}\Phi(R-\Lambda) + I_{\text{bdy}}. \tag{1.4}$$

  这个时候经典引力解就是：

  $$R = \Lambda \tag{1.5}$$

  本文之中我们考虑 $\Lambda = -2$ 的 AdS 的情况。

- 当 Λ 等于 0 的时候，模型变成了：CGHS model。

1.1.2 First order model

JT Gravity 和其他的引力理论一样我们可以给出其 first order 的理论。为此我们进行一个简化。我们定义下面两个 1-form 进行描述：

- 我们定义 frame field: $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab}$,
- 我们定义 spin-connection：$\omega^{ab} = \omega_\mu^{[ab]} dx^\mu$, 并且需要满足条件:$de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0$

在这个定义的基础上面我们有下面两个等式。为了复习微分流形的计算我们很细致的写出了证明细节：

$$d^2x\sqrt{g} = e^0 \wedge e^1, \quad d^2x\sqrt{g}R = 2d\omega. \tag{1.6}$$

我们知道，$d^2x\sqrt{g}$ 实际上代表着微分形式 $\sqrt{g}dx^0 \wedge dx^1$ 我们计算 g 的数值。根据定义 $g = \det g_{\mu\nu}$。通过矩阵行列式计算我们可以得到：

$$g = \left(e_1^0 e_0^1 - e_0^0 e_1^1\right)^2 \tag{1.7}$$

同时对于 $e^0 \wedge e^1$ 我们通过 wedge 的定义也可以得到：

$$e^0 \wedge e^1 = (e_0^0 e_1^1 - e_1^0 e_0^1) dx^0 \wedge dx^1 \tag{1.8}$$

对比一下我们可以发现第一个等式成立。对于第二个等式，我也不到为啥成立（((

带入公式我们不难发现：

$$\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{g}\Phi(R+2) = \int_M \Phi(\mathrm{d}\omega + e^1 \wedge e^2) \tag{1.9}$$

但是这个式子是有约束的因为 ω 存在着约束。由于我们的理论是一个量子理论，或者说我们的理论是一个追求最小作用量的理论。所以我们可以放入一个拉格朗日乘子。理论等价于:

$$\int_M \left[\Phi(\mathrm{d}\omega + e^1 \wedge e^2) + X_a(\mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b)\right]. \tag{1.10}$$

$$\int_M \left[\Phi(\mathrm{d}\omega + e^1 \wedge e^2) + X_a(\mathrm{d}e^a + \omega^a_{\ b} \wedge e^b)\right]. \tag{2.7}$$

We can now define the following quantities

$$A = e^1\lambda^1 + e^2\lambda^2 + \omega\lambda^3,$$
$$B = 2\mathrm{i}(X^1\lambda^1 + X^2\lambda^2 + \Phi\lambda^3),$$

where $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\}$ are 2×2 matrices that generate the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, chosen with the normalization condition $\mathrm{Tr}\,\lambda^i\lambda^j = \eta^{ij}/2$ with $\eta = \mathrm{diag}(1,1,-1)$. The signature of η reflects the fact that $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is a non-compact group. In terms of these adjoint-valued one-form A and zero-form B, the JT gravity action, including the torsion constraint, can be written in the suggestive form

$$I = -\mathrm{i}\int \mathrm{Tr}\, BF, \qquad F = \mathrm{d}A + A \wedge A. \tag{2.8}$$

This is the action of a BF theory [26] with gauge group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The path integral of this

对于这样的一个理论我们发现其实是一个 connection 为 0 理论因为这个理论的解是：

$$\int \mathrm{d}B\ e^{-I} = \int \mathrm{d}B\ e^{\mathrm{i}\int \mathrm{Tr}BF} = \delta(F). \tag{1.11}$$

由于没有积分 F 的配分函数是一个 δ 函数。所以，只有 $F = 0$ 的时候存在量子力学的解。

Remark:

我们能进行上面这个操作是因为我们的理论的作用量写成：

$$I = -\mathrm{i}\int \mathrm{Tr}\, BF, \tag{1.12}$$

这个虚数单位的存在保证我们的理论可以积分出一个 delta 函数。这本质上其实是要求我们的 B 是实数，也就是 imaginary dilaton 的情况。

1.1.3 Classical Solution & Boundary Condition

我们列出集中让下方的 JT Gravity 的作用量最小的方式。我们称之为经典解。（我先 copy 一波 JT Gravity 的作用量，同时提醒写出这个作用量的时候，我们默认 $U_0 = 0$ 以及 $U(\Phi)$ 是一个线性函数）

$$I_{JT} = -\frac{S_0}{4\pi}\int_M \sqrt{g}R - \frac{1}{2}\int_M \sqrt{g}\Phi(R-\Lambda) + I_{\mathrm{bdy}}. \tag{1.13}$$

以及我们取 $\Lambda = -2$ 作为宇宙学常数。

首先，如果我们认为 Dilaton 是一个常数的话。

Chapter 2

知识补充！

这里记录一些补充的知识！！！

Chapter 3

Scratch Book

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!!~~

真的吗 ???

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜 !!!~~ 哈哈哈哈 !!!