3D Gravity

Everyone Deserves a Chance to Study Gravity

X. D. H.

2025 年 11 月 4 日

摘要

这是我对于 3D Gravity 方向很多文章阅读汇总的一个巨大的笔记。希望记录到 200 页左右。主要内容进行 3D Gravity 的基础到 modern 的各种研究。

- 本 note 以文章作为主线进行分类！！而非内容！但是 sup 部分是对于独立内容的补充捏!!

目录

3D Gravity Reading Project 2025-2026

我预计于 2025 年 9 月开始进行一个为期 6 个月左右的 3D Gravity 方向的 Reading Project。我的主要目的是从最初始的地方开始逐步研究到更现代的 3D Gravity 的内容。我的计划是列出一个下面的主线大纲。但是会根据实际情况添加很多支线任务辅助我的阅读！下面是我的阅读主线计划：

- 第一部分：Fundamentals
  - Geometric Quantization 理论学习 - 参考 Blau 的讲义
    - 支线 1: 辛几何基础学习
    - 支线 2: 复几何基础学习「参考 Topology 的书」
  - 2D Gravity 学习
    - Turiaci 的 2D Gravity 综述「后半部分是重点」
  - Verlinde 原始经典论文阅读
    - 「Verlinde 以及数学人的经典论文」不需要很细
- 第二部分：近代 3D Gravity 的 Preliminary 阅读
  - AdS3 gravity and random CFT Cotler 的文章【学习 3D Gravity 基础方法】
- 第三部分：Virasoro TQFT 以及更多
  - Virasoro TQFT 基础文章【Eberhardt 的文章学习】

阅读支线任务 1: CFT & TQFT 基础学习

阅读支线任务 2: 几何基础学习

Chapter 1

Geometric Quantization

{chap:Ge

第一步 Fundamental 的内容，Geometric Quantization 理论学习!

1.1 Fundamental Sympletic Geometry

{sec:Fun

1.1.1 基础 sympletic geometry concept

1.1.2 Sympletic Structure and Hamiltonian Mechanics

1.1.3 Questions and thought

Question 1.1.0 Basis on Manifold 是否自然的给出 TM 以及 T^*M 的 Basis?

是的!!

对于一个 Manifold $\mathcal{M}$，我们可以给出一个 coordinate system $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ 这样的系统给出了每一个点 p 上面的 tangent space 自然的基 $\partial_\mu(*) = \partial_\mu(* \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)}$

同时一个点上面的 $T_p\mathcal{M}$ 也给出了这个点的 cotangent space 的自然基 $d\psi^\mu$。满足 $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$ □

Question 1.1.1 Cartan Magic Formula 是什么，怎么证明捏!

见我的数学学习笔记

Question 1.1.2 $i([X, Y]) = L(X)i(Y) - i(Y)L(X)$, 为何成立，怎么证明呢??

见我的数学学习笔记

Question 1.1.3 一个 submanifold 上面我们怎么定义 induced form?? 或者 induced 的任何张量场!!!

见我的数学学习笔记【以及上面的讨论】

Chapter 2

Quantization of Teichmuller Theory and CFT

这里我想主要 fol Verlinde 的文章捏！！我希望给出的思路就是量子化 Teichmuller 空间然后把量子化之后的结果和 CFT 的理论对应上！！

2.0.1 如何量子化 Teichmuller 空间

Teichmuller 空间一个定义可以理解为一个度规的空间：

$$\frac{\text{metrics on } \Sigma}{\text{Weyl}(\Sigma) \times \text{Diff}_0(\Sigma)} \tag{2.1}$$

也就是所有的可能的度规矩阵，但是模掉 identical sector 的线性变换和 weyl transformation。对于度规来说，我们可以使用 zweibein 的公理体系来进行描述：

$$\mathrm{d}s^2 = e^+ \otimes e^-. \tag{2.2}$$

这里我们使用 Lightcone coordinate。对于正常的 zweibein 就是 $e^+ = e^0 + e^1$ 以及 $e^+ = e^0 - e^1$。对于一般的这样的理论我们可以有一个 $U(1)$ 的规范场 ω （因为二维的洛伦兹变换其实就是 U(1) 的，我们使用这个是因为我们希望有一个方法求曲率）。我们可以使用 cartan，发现我们的理论满足这样子的关系：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ e^- &\equiv \mathsf{d}e^- + \omega \wedge e^- = 0, \\ \mathcal{D}^- e^+ &\equiv \mathsf{d}e^+ - \omega \wedge e^+ = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

然后其中 curvature 的形式是：

$$R \equiv \mathrm{d}\,\omega = \Lambda e^+ \wedge e^-, \tag{2.4}$$

这个式子让我们意识到如果曲率 R 是一个固定的量，其实我们确定的是一个 weyl transformation。下面我们就可以通过 zweibein 的理论定义一个 teichmuller 空间：

Important: Teichmuller space from zweibein

空间可以定义为:

$$\mathscr{T} = \mathscr{E}_{\mathrm{cc}}/\mathscr{G}, \quad \mathscr{S} = \mathrm{Diff}_0 \times \mathrm{LL}, \tag{2.5}$$

其中 $\mathscr{E}_{\mathrm{cc}}$ 是 curvature 恒定的 zweibein; Diff_0 是小的 identity component of 2D diffeo group; LL local lorentz transformation，也就是消除，选择一个 zweibein 的自由度!!

定义了空间之后我们需要找到一个 symplectic form on $\mathscr{T}$

Chapter 3

Sup: Complex Geometry

{chap:Su

3.1 基础的复几何的概念

3.1.1 黎曼曲面基础

对于二维曲面，我们指的是一个二维的流形。我们通常认为这个流形有下面的说法：

- 1. 曲面是 closed 当我们的曲面没有边界
- 2. 曲面是 finite type 如果我们可以通过把 close 的曲面移除有限个点或者 open disk 得到的
- 3. 我们默认考虑有定向的曲面

Definition 1. *connected sum*

我们可以对于两个有定向的曲面定义 *connected sum* $S = S_1 \# S_2$。我们才用下面的步骤：分别从两个曲面上选取一个 *close disk*，数学表达就是：$D_1 \subset S_1$ 和 $D_2 \subset S_2$。

$$\varphi_i : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \to D_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

然后我们可以定义：

$$S_1 \# S_2 = \left(S_1 \setminus \mathring{D}_1 \sqcup S_2 \setminus \mathring{D}_2 \right) / \sim \tag{3.2}$$

这个模掉的等价类是：

$$\varphi_1(x, y) \sim \varphi_2(x, y) \quad \textit{for all } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ with } x^2 + y^2 = 1. \tag{3.3}$$

图像就是：

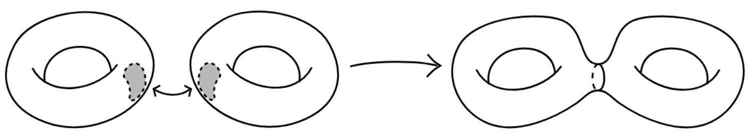


Figure 1. A connected sum of two tori.

给出了粘贴的严格定义之后，我们会给出戏 amain 的一个定义，就是怎么分类所有 close 2-surface：

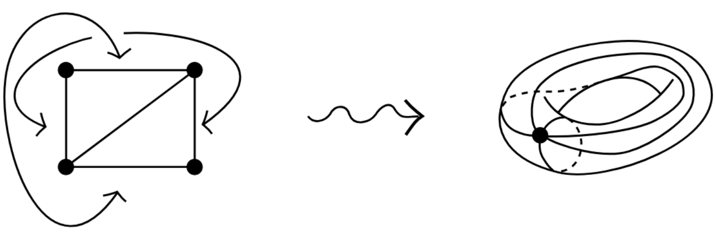
> **Theorem 1.** 二维 *close* 流形分类定理
>
> 所有的 *2-d*，*close*，有定向的流形都微分同胚于 *2-sphere* 和有限个 *torus* 的 *connected sum*。

为此我们可以构建一些数字来 character 一个 finite type 曲面 (g,b,n)：

> **Definition 2.** *Signature of surface*
>
> 对于一个二维曲面，我们可以用三个数来描述，被称为 *signature*。
>
> - g 是 *connected sum* 之中使用的 *tori* 的数量，被称为 *genus*
> - b 是 *finite type* 流形移除的 *disk* 的数量，被称为 *number of boundary components*
> - n 是 *finite type* 流形上移除的点的个数，被称为 *punctures*
>
> 任何一个流形我们可以写成 $\Sigma_{g,b,n}$ 或者 $\Sigma_g = \Sigma_{g,0,0}$

下面我们介绍一个二维流形上重要的拓扑不变量 Euler characteristic。
我们的二维流形可以进行三角刨分，我们可以把它分成三部分：$\mathcal{T} = (V, E, F)$。

- 也就是在流形上选择有限的点 $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$
- 并且给出有限个边 $E = \{e_1, \ldots, e_l\}$ 保证连接两个点。
- 剩下的面 F，必须有三个 edge 作为边界。

> **Remark:**
>
> 我们需要注意 triangulation 并不是代数拓扑里面的 simplical complex 的概念。比如，下面的图就不是一个 simplical complex（具体看看代数拓扑的书）
>
> 
>
> FIGURE 2. A torus with a triangulation

我们根据 triangulation 可以为流形赋予一个数字，我们可以定义这个 Euler Characteristic。

Definition 3. *Euler characteristic*

对于一个 *close manifold* 我们给出的定义是：（注意我们的这个计算只能）

$$\chi(S) = |V| - |E| + |F|. \tag{3.4}$$

根据代数拓扑里面的 singular homology，我们可以发现这个数是同伦不变的。为此我们可以给出下面的定理：

Theorem 2. *Euler Characteristic* 的具体数

- 对于一个 *close* 的 *surface* 来说：$\chi(S) = 2 - 2g$
- 对于一个 *open* 的 *surface* 来说：$\chi(\Sigma_{g,b,n}) = 2 - 2g - b - n.$

注意，我们本身的 triangulation 并不能够在一个有 puncture 的曲面上定义。但是我们可以修订定义，认为 puncture 就是一个 vertex，那么就可以给出上面的第二个式子。

黎曼曲面的概念

下面我们定义一个很重要的概念，也就是黎曼曲面：

Important: 黎曼曲面

Riemann surface X 是一个连续的 Hausdorff 的拓扑空间 X。并且这个空间上面需要有两个结构：open cover $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ； maps $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ 这两个结构需要满足下面的关系：

- $\phi_\alpha(U_\alpha)$ 是一个开集，并且 ϕ_α 是一个 homeo（也就是连续的双射）
- 对于 $\alpha, \beta \in A$ 我们对于 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 我们下面的映射是全纯的：

$$\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{3.5}$$

我们的 $((U_\alpha, \phi_\alpha))_{\alpha\in A}$ 被称为 atlas。

对于这个群面我们有两个性质，是可以通过定义证明出来的：

- Riemann surface 是 second countable
- Riemann surface 是自动是有一个定向的

下面我们给出一些黎曼曲面的例子，$\mathbb{C}$ 是最经典的例子，而如果我们算上无穷远点我们称之为 projective line $\mathbb{P}^1$ 或者有的时候我们使用 $\hat{\mathbb{C}}$ 进行描述，也是，被称为 Riemann sphere。所有 Riemann Sphere 的连通开集都是黎曼曲面。

Definition 4. *Domain*

也就是 *Riemann Sphere* 的连通开集!! 所有的 *domain* 都是黎曼曲面，从 $\mathbb{P}^1$ 里面继承了黎曼曲面的结构!!!

黎曼曲面的自同态

首先我们定义什么是全纯的 holomorphic 的映射：

Definition 5. *holomorphic map*

首先我们与两个黎曼曲面，$X = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ，$Y = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ 。我们有一个两个曲面之间的映射：$f : X \to Y$。如果是全纯的需要满足下面的函数是一个全纯函数：

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \tag{3.6}$$

- 如果 f 是一个 *bijection*，那么我们称之为是一个 *biholomorphism* 或者 *conformal*
- $AuT(X)$ 表示 X 的自同态群，也就是所有的 *biholo* 构成的群

一个重要的例子就是 Riemann Sphere 这个面的 autholo 群是：

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} : \lambda \neq 0\right\}. \tag{3.7}$$

同时这个群也同构于：

$$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C},\quad ad-bc=1\right\}\Big/\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \tag{3.8}$$

黎曼群面的 Quotient

Important: Quotient of Riemann Surface

THEOREM 1.2.4. *Let $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ be a domain and let $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ such that*

(1) $g(D) = D$ for all $g \in G$

(2) If $g \in G \setminus \{e\}$ then the fixed points of g lie ourside of D.

(3) For each compact subset $K \subset D$, the set

$$\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

is finite.

Then the quotient space

$$D/G$$

has the structure of a Riemann surface.

这个定理告诉我们，如果一个 Domain 进行 quotient。只有对 freely,properly discontinuously 的子群的 quotient 才是一个 Riemann Surface。

这个定理告诉我们什么呢？就是给定一个 domain，我们可以通过 quotient 这个 domain 得到一个黎曼曲面。一个很重要的例子就是构造 Torus。

对于 $\mathbb{C}$ 作为 Riemann Sphere 的一个 Domain。我们可以模去下面的矩阵 generate 的群：

$$g_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_\tau := \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}), \tag{3.9}$$

并且我们定义这个群作用在二维平面上面是这样定义的：

$$g_1(z) = z + 1 \quad \text{and} \quad g_\tau(z) = z + \tau \tag{3.10}$$

我们可以证明这个群满足上面很好的性质所以，Quotient 的结果依旧是一个黎曼曲面。这个黎曼曲面我们记作：$\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ 。然后我们会发现这个流形其实就是一个 torus。我们可以构建下面的 homeomorphism：$\mathbb{C}/\Lambda_\tau \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$$[x + y\tau] \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \tag{3.11}$$

我们还可以构建 Hyperbolic Surface 的 Quotient 出来的黎曼流形：

Definition 6. *Hyperbolic Surface*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} \tag{3.12}$$

也就是上半复平面。这个平面的 $AuT(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$。对于这个群我们也可以构建出一堆 quotient 出来的子黎曼曲面。

Remark:

$PSL(2, \mathbb{R})$ 的群，其实是保下面的这个度规的群：

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{3.13}$$

这个度规其实是曲率为-1 的时空的度规。

下面我们给出一个特别特别强的定理：

Important: Uniformization Theorem

X 是一个 simply connected Riemann surface。那么 X 必然 biholo 于下面的几个黎曼曲面之一：

$$\widehat{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{C} \quad or \quad \mathbb{H}^2. \tag{3.14}$$

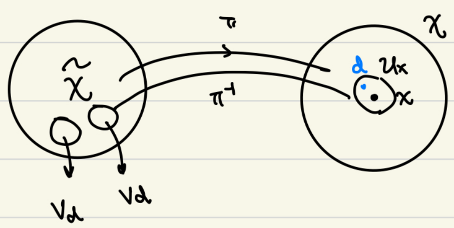
这意味着这三个黎曼曲面我们选任意一个进行 quotient 可以得到所有的黎曼曲面!!! 也就是说：

Corollary 1.3.3. *Let X be a Riemann surface. Then there exists a group $G < \mathrm{Aut}(D)$, where D is exactly one of $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ or $\mathbb{H}^2$ so that*

- *G acts freely and properly discontinuously on D and*
- *$X = D/G$ as a Riemann surface.*

为了一定程度说明这个定理我们需要定义下面的概念就是一个拓扑空间的 Universal Covering。

∘ $\tilde{X}$ is a Covering Space of X Exist $\pi : \tilde{X} \to X$



$$\begin{cases} * \ \pi^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{\alpha \in D_x} V_\alpha \\ * \ \pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_x \text{ is homeo } \quad \forall \alpha \in D_x \end{cases}$$

Eg. $\begin{cases} \text{1) Id Map is Covering} \\ \text{2) } r : \mathbb{R} \to S^1 \quad r(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad t \in \mathbb{R} \quad r(t) \in S^1 \end{cases}$

→ Covering is not Unique

∘ Universal Covering

$(p, \tilde{X})$ $\quad p : \tilde{X} \to X$ is a simple connected covering

(p, E) $\quad p : E \to X$ is a simple connected covering

⇒ ∃ uniquely determined homeo $\alpha : \tilde{X} \to E$ 使

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commute

⇒ p 为 Universal Covering

→ Universal Covering is Unique (But not always Exist)

Important: 解读上面的 Uniformization Thm

对于一个黎曼曲面来说，我们有定理保证可以构造一个 Universal Covering，并且这个 covering 是一个 simply connected 的 Riemann surface。

所以根据 UT，我们知道，任意黎曼曲面的 Universal covering 必然 biholo 于下面三个黎曼曲面之一：

$$\widehat{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{C} \quad or \quad \mathbb{H}^2. \tag{3.15}$$

也正因此，所有的黎曼曲面都可以通过被 Universal covering 进行 quotient。也就是被那三种黎曼曲面 quotient 得到。并且我们的 Universal Covering 的构造保证：

$$\widetilde{X}/\pi_1(X) = X. \tag{3.16}$$

我们的 quotient 选择的群就是这个黎曼曲面的基本群。所以我们，只要说这个黎曼曲面的基本群是某一个 Domain 的 aut 群的 free,properly discontinuously 的子群那么就说明这个曲面是哪一个 Domain Quotient 出来的。

那么为了研究怎么进行 Quotient，下面是这三个流形的 aut 群！

- $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{\varphi : z \mapsto az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$,
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

根据这个定理我们可以把所有黎曼曲面分成三类，那么现在，我们试试能不能再仔细的分类每一类里面的黎曼曲面。

Important: 三个基本的 Riemann Surface 能 quotient 出个啥?

- 如果一个黎曼曲面 X 的 Universal Covering biholo 于 $\widehat{\mathbb{C}}$，那么这个黎曼曲面自己 biholo 于 $\widehat{\mathbb{C}}$
- 如果一个黎曼曲面 X 的 Universal Covering biholo 于 $\mathbb{C}$，那么这个黎曼曲面自己 biholo 于下面三种情况之一：

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{C}/\{0\}, \quad \mathbb{C}/\left\langle \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{3.17}$$

- 如果一个黎曼曲面 X 的 Universal Covering biholo 于 $\mathbb{H}^2$，那么情况就会十分复杂，我们需要仔细研究 $Aut(\mathbb{H}^2)$ 的 FP 子群的结构从而得到，能够被 quotient 出来的黎曼曲面

为了研究什么黎曼曲面可以被 hyperbolic surface quotient 出来，我们下面讨论 $Aut(\mathbb{H}^2)$ 的子群结构。

Theorem 3. *$Aut(\mathbb{H}^2)$ 的特殊子群*

如果一个群 $G \subset PSL(2, \mathbb{R})$ 并且 act properly on $\mathbb{H}^2$ 并且是 Abelian 的。那么这个群只有两种情况：

- $G \sim \mathbb{Z}$
- *G 是一个有限群，并且 rank 1*

3.2 黎曼曲面的流形结构

3.2.1 黎曼曲面的曲率结构

由于黎曼曲面是一个流形，其实其上有一个很自然的 metric 结构的。对于 P^1 来说就是恒定的 1 curvature 的结构；对于 $\mathbb{C}$ 来说就是 0 curvature；对于 $\mathbb{H}$ 来说就是 -1 curvature。我们其实会发现，黎曼曲面的结构，会自动赋予所有的黎曼曲面一个等 curvature 的度规。我们可以通过一个定理看出来:

Theorem 4. *Killing-Hopf* 定理

任意一个有常曲率属于 $\{1, 0, -1\}$ 的黎曼曲面可以通过 *quotient* 一个有黎曼曲面结构的广义黎曼流形的 *orientation preserving isometry group* 的一个 *FP* 子群得到，并且 *quotient* 自下面三个有黎曼曲面结构的二维广义黎曼流形：

$$S^2 \textit{with round metric} \quad \mathbb{R}\textit{with Euclidean metric} \quad \mathbb{H}^2\textit{with hyperbolic metric} \tag{3.18}$$

这个定理出发我们其实可以还原上面三种基本的 Rienmann surface 能 quotient 出的东西。我们先定义有黎曼曲面结构的广义黎曼流形的 orientation preserving isometry group:

$$\mathrm{Isom}^+(M) = \{\varphi : M \to M : \varphi \text{ is an orientation preserving isometry }\}. \tag{3.19}$$

对于上面定理提到的三种流形来说:

- $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{S}^2) = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ 这个群的 FP 子群只有 trivial 的，所以 quotient 出来的黎曼曲面都同构于其自己
- $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 这个群的 FP 子群，有三种，一个是 trivial 的，另外两个正好是圆柱（$\mathbb{C}/0$ ）和 torus 上面的基本群，所以 quotient 出来就是我们之前讨论的三种黎曼曲面
- $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. 我们上面已经讨论了，这个的 FP 子群巨多无比，所以就 quotient 出来各种各样子的曲面

所以我们会发现，这些 quotient 出来的黎曼曲面都有一个 {0,1,-1} 的曲率结构。

Important: 所有黎曼曲面的度规结构

根据上面的定理我们其实可以构造一个一一映射，就是从所有没有边界的黎曼曲面的空间（quotient 掉 biholo）到曲率为 {0,-1,1} 的二维广义黎曼流形 (quotient 掉 isometry):

PROPOSITION 2.2.1. *Given an orientable surface Σ of finite type with $\partial\Sigma = \emptyset$, the identification described above gives a one-to-one correspondence of sets*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Riemann surface} \\ \textit{structures on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Complete Riemannian} \\ \textit{metrics of constant} \\ \textit{curvature } \{-1, 0, +1\} \\ \textit{on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \sim,$$

where the equivalence on the left is biholomorphism and the equivalence on the right is isometry (and homothety in the Euclidean case).

也就是说所有的黎曼曲面都可以赋予一个恒定曲率的度规结构!!!!

Remark:

这一定程度的意味着一件事情就是有两个东西是一模一样的:

- 黎曼曲面和 {0,-1,1} 度规的二维广义黎曼流形是对应的
- 其上的 biholo 一一对应于广义黎曼流形的 isometry

并且对于黎曼曲面来说，欧拉指标和曲率满足关系:

$$\kappa \cdot \mathrm{area}(X) = 2\pi\ \chi(X) \tag{3.20}$$

很自然的面积我们也可以求，通过欧拉指标，对于 $\Sigma_{g,b,n}$ 来说:

$$\mathrm{area}(X) = 2\pi(2g + n + b - 2). \tag{3.21}$$

黎曼曲面的共形结构

我们任意黎曼曲面都可以赋予一个常曲率的度规结构。同样的，我们的任意黎曼面其实还有一个共形结构。首先我们定义什么是共性等价的。

Definition 7. *conformally equivalent*

我们说同一个流形的两个度规是共形等价的，其实是说，对于其流形上存在一个映射: $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ 使得两个度规之间满足:

$$ds_1^2 = \rho \cdot ds_2^2. \tag{3.22}$$

满足这个等价关系的等价类我们称之为共形等价类。

下面我们可以给出一个类似的定理（我也懒得做出说明了呃呃呃呃呃）

PROPOSITION 2.3.1. *Given an orientable surface Σ of finite type with $\partial\Sigma = \emptyset$, the identification described above gives a one-to-one correspondence of sets*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Riemann surface} \\ \textit{structures on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \textit{biholom.} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Conformal classes} \\ \textit{of Riemannian} \\ \textit{metrics on } \Sigma \end{array} \right\} \Big/ \textit{diffeomorphism.}$$

3.3 Torus 上面的 Teichmuller Space

下面我们通过对黎曼曲面的理解引申出两个衍生的空间：Moduli Space 和 Teichmuller Space。首先我们可以通过一些具体例子入手进行研究。由于 Riemann Sphere 上面的 Moduli Space 和 Teichmuller Space 都是 Trivial 的。所以我们不妨先研究一个更有意思一点的，就是 Torus。Torus 的定义就是 $\mathbb{C}$ quotient 去两个变量给出的矩阵出来的黎曼曲面。

Torus 可以如下构造 biholo 等价类。$R_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$, 其中 $\tau \in \mathbb{H}^2$ 并且我们有：

$$\Lambda_\tau = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{3.23}$$

所有的 torus 可以 biholo 于用 τ 标记的。但是注意**同样的一个 torus 可以 biholo 于不止一个 τ 标记的 torus** 所以我们应该研究什么样子的 τ 才是真正的对应的 torus 的 biholo 等价类!!

Theorem 5. *Torus 的 Biholo 等价类*

对于两族 Torus R_τ 和 $R_{\tau'}$ 他们之间是 biholo 当且仅当：

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{3.24}$$

其中满足：$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ with $ad - bc = 1$.

这样看上去我们所有 Torus 的 biholo 等价类都可以用下面这个空间进行标定：

$$\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}^2/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \tag{3.25}$$

有一个 P 是因为如果把四个整数都进行变号其实结果是不变的。首先讨论这个 quotient 后的面是不是黎曼曲面，由于我们 quotient 的群 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 其实并不是 freely 的，所以 quotient 之后的结果并不是一个黎曼曲面。但是我们可以讨论就是这个 quotient 的 **fundamental domain**。也就是说，对于所有的 $\tau \in \mathbb{H}^2$，存在 $g \in PSL(2,\mathbb{Z})$ 使得 $g\tau \in \mathcal{F}$ 我们可以用下面的公式和图片表示：

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |z| \geq 1 \text{ and } -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \tfrac{1}{2} \right\}. \tag{3.26}$$

在上半平面里面画出来就是：

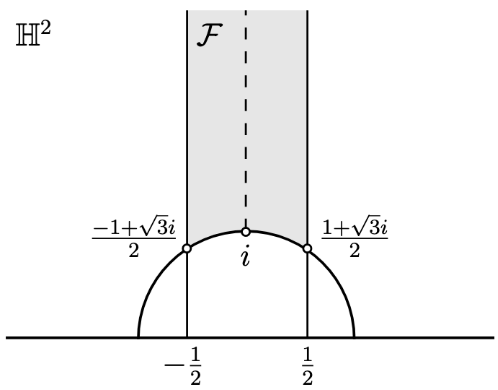


Figure 1. A fundamental domain for the action of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ on $\mathbb{H}^2$.

下面我们仔细分析这个灰色的区域每一个部分作用上 $p \in PSL(2,\mathbb{Z})$ 之后的结果！分析之后我们会发现，我们有基本的操作，就是左右平移 1；或者把中间的圆里面的点 map 到圆外面的!!! 所以灰色的空间其实左右的边界是站起来的下面的圆左右其实也是"粘起来的"。我们把这些边界粘起来其实这个流形应该长这个样子的；

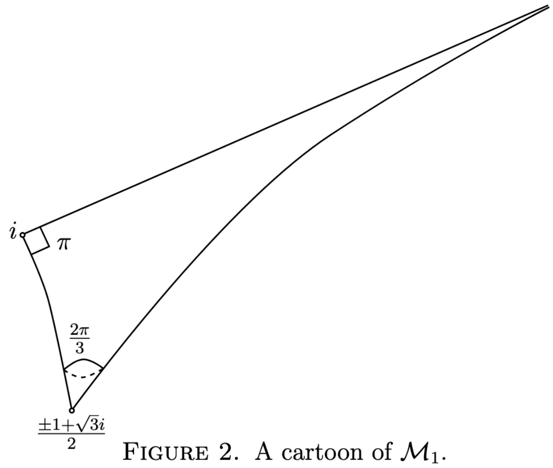


FIGURE 2. A cartoon of $\mathcal{M}_1$.

这个也就是 M_1 的形状!!! 这个形状的名字其实是 hyperbolic orbifold（像是两个流形但是把边界完全粘贴在一起一样所以我们叫 orbifold）。下面我们定义 torus 上面的两个衍生的空间：

- Moduli Space：也就是 $M_1 = \mathbb{H}^2/PSL(2,\mathbb{Z})$
- Teichmuller Space：也就是 $T_1 = \mathbb{H}^2$

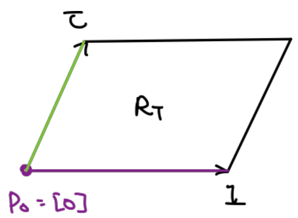
下面我们试图给出更加 general 的定义。下面我们会发现有两种定义 Torus 上面的 Teichmuller 空间的方法。一个是从定义 marking 和 marking 等价的角度；另一个是从定义微分同胚的角度。

从 Marking 的角度定义 Teichmuller 空间

我们定义什么是一个 Torus 的 marking。也就是 Torus 的某一个点上面的基本群的两个 generator。我们记作：

$$[A_\tau],[B_\tau] \in \pi_1(R_\tau, p_0). \tag{3.27}$$

我们发现可以给一个 Torus 上面赋予一个自然的 Marking 结构（也就是 1 和 τ 这两条线）（就是选取一个特殊的点，给出这个点上面的基本群的生成元）：



$\pi_1(R_T, P_0)$

$[A_T], [B_T] \in \pi_1(R_T, P_0)$

Natural Choice : $\begin{cases} [A_T] \to 1 \\ [B_T] \to \tau \end{cases}$

Induce $f : R_T \to R_T$ biholomorphism !

$f_* : \pi_1(R_{T'}, P_0) \to \pi_1(R_T, P_0)$

Defi : R is Riemann Surface $\overset{\text{Homeo}}{\sim} T^2$ (Torus)

* Marking on R is Generating Set $\Sigma_p \subset \pi_1(R, p)$ consist of 2 element

  e.g. 上面 $([A_T], [B_T]) = \Sigma_p$

(同一个 R)

* 2个 Marking $\Sigma_p \cong \Sigma'_{p'}$ $\underline{等价}$ $\Leftarrow$ 存在 continuous curve α from $p \to p'$

  存在 Isomorphism $T_\alpha : \pi_1(R, p) \to \pi_1(R, p')$ $T_\alpha(\Sigma_p) = \Sigma'_{p'}$

* 2个 Marked Riemann Surface homeo to T^2 are $\underline{等价}$

  若存在 : $h : R \to R'$ biholo. s.t. $h_*(\Sigma) \cong \Sigma'$

所以我们可以定义 Teichmuller 空间:

Definition 8. 从 *Marking* 角度定义 *Teichmuller space*

我们认为两个有 marking 结构的 Torus 是 equivalent 的。如果存在一个 biholo $f : R \to R'$ 使得这个 biholo induce 出来的自然 marking 结构是同构的:

$$h_*(\Sigma) \simeq \Sigma'. \tag{3.28}$$

我们定义

Theorem 3.3.2. *Let $\tau, \tau' \in \mathcal{T}_1$. Then the marked Riemann surfaces*

$$(R_\tau, \{[A_\tau], [B_\tau]\}) \quad \textit{and} \quad (R_{\tau'}, \{[A_{\tau'}], [B_{\tau'}]\})$$

are equivalent if and only if $\tau' = \tau$. Moreover, we have an identification

$$\mathcal{T}_1 = \left\{ (R, \Sigma_p) : \begin{array}{c} R \textit{ a Riemann surface homemorphic to } \mathbb{T}^2 \\ p \in R,\ \Sigma_p \textit{ a marking on } R \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

Remark:

这个定义的方式的本质其实就是选择一种方式，让我们构造 Riemann 曲面的等价类的时候，并不考虑不同 τ 之间的同构的关系。通过引入一种特殊的数学结构，保证不同 τ 的选择之中没有 equivalent 了!!!（也就是不能再用 biholo 了!!）

从微分同胚的角度定义 Teichmuller 空间

首先我们选用一个固定的唯一的（但是比较任取的）surface S 并且保证这个曲面微分同胚于 $\mathbb{T}^2$。也就是选择一个 universal 的独特的 torus。下面我们定义，赋予"微分同胚"结构的等价：

> **Definition 9.** 微分同胚结构等价关系
>
> 我们令 R 和 R' 是两个 *torus*。这个时候定义一个 *orientation preserving diffeomorphism*
>
> $$f : S \to R \quad \text{and} \quad f' : S \to R' \tag{3.29}$$
>
> 这样我们就可以赋予一个黎曼曲面一个微分同胚结构，我们记作 (R, f) 和 (R', f')。
>
> 如果这两个黎曼曲面等价，就是说存在一个 *biholo* $h : R \to R'$ 保证：
>
> $$(f')^{-1} \circ h \circ f : S \to S \tag{3.30}$$
>
> 这个函数是 *homotopy* 于 *identity* 的（而不是基本群里面其他的，像是转一圈回去那种。）

下面，我们给出这个微分同胚等价和赋予 marking 结构等价之间的关系。如果我们赋予 S 这个 universal 的 torus 一个 marking 的结构，我们可以证明我们的 f 微分同胚可以赋予流形 (R, f) 一个 marking 的结构。这个样子，赋予微分同胚结构和赋予 marking 结构其实是可以一一映射的。并且 marking 等价和微分同胚等价是一毛一样的。

Note that if we pick a generating set $\{[A], [B]\}$ for the fundamental group $\pi_1(S, p)$ then every pair (R, f) as above defines a point

$$(R, \{f_*([A]), f_*([B])\}) \in \mathcal{T}_1\,.$$

It turns out that this gives another description of the Teichmüller space of tori:

THEOREM 3.4.2. *Fix S and $[A], [B] \in \pi_1(S, p)$ as above. Then the map*

$$\left\{ (R, f) : \begin{array}{c} R \text{ a Riemann surface, } f : S \to R \\ \text{an orientation preserving diffeomorphism} \end{array} \right\} \Big/ \sim \quad \to \quad \mathcal{T}_1$$

given by

$$(R, f) \mapsto (R, \{f_*([A]). f_*([B])\}),$$

is a well-defined bijection.

3.4 Teichmuller theory 的基本定义

我们最后一般选择第二种方法定义 Teichmuller Space。我们严格的写下来：

Important: 定义 Teichmuller Space

Definition 3.5.1. Let S be a surface of finite type. Then the *Teichmüller space* of S is defined as

$$\mathcal{T}(S) = \left\{ (X, f) : \begin{array}{c} X \text{ a Riemann surface }, f : S \to X \\ \text{an orientation preserving diffeomorphism} \end{array} \right\} \Big/ \sim,$$

where

$$(X, f) \sim (Y, g)$$

if and only if there exists a biholomorphism $h : X \to Y$ so that the map

$$g^{-1} \circ h \circ f : S \to S$$

is homotopic to the identity.

We will often write

$$\mathcal{T}(\Sigma_{g,n}) = \mathcal{T}_{g,n} \quad \text{and} \quad \mathcal{T}(\Sigma_g) = \mathcal{T}_g .$$

当然对于任意的 finite type 的黎曼曲面我们其实也可以找到一个等价的第一种定义。上面我们仅仅是对于 finite type 的曲面进行定义。我们下面把这个定义推广到有 mark point 的 puncture 的情况。

Important: 定义有标记点的 Teichmuller Space

Proposition 4.1.4. *Let $n \geq 1$ and fix n distinct points $x_1, \ldots, x_n \in \Sigma_g$. There is a bijection*

$$\mathcal{T}(\Sigma_{g,n}) \longrightarrow \{ (X, f) : f : \Sigma_g \to X \text{ an orientation preserving diffeomorphism} \} \Big/ \sim,$$

where $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2)$ if and only if there exists a biholomorphism $h : X_1 \to X_2$ such that

$$f_2^{-1} \circ h \circ f_1(x_i) = x_i \quad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

and $f_2^{-1} \circ h \circ f_1 : \Sigma_g \to \Sigma_g$ is homotopic to the identity through maps fixing $x_1, \ldots x_n$.

Remark:

我想起来我们在画 conformal block 的时候我们一般使用流形上面 embed 一堆线。在想这些线其实可以理解成为 Teichmuller 空间上给出来的微分同胚 $f : S \to R$ 的结构。因为我们关心的是这个微分同胚在基本群里面的地位，所以我们只需要画一条线就好。

Question: 关于 braiding 和 mapping class group 的关系

似乎 mapping class group 只给出了一个 dehn twist 和 F move 的 generation 但是并没有给出 braiding 的产出呀!!!!

Answer：

下

面我们给出一个 Teichmuller theory 里面的一个很重要的基本概念。也就是 mapping class group。我们下面给出这个群的定义。

Important: Mapping Class Group

对于一个 compact finite type 的曲面 S_0 我们有其中的一个有限集合 $\Sigma \in S_0$。我们可以通过进行 quotient 给出一个更小一点的空间 S。我们下面定义 S 上面的 Mapping class group:

$$\mathrm{MCG}(S) = \mathrm{Diff}^+(S, \partial S, \Sigma)/\mathrm{Diff}_0^+(S, \partial S, \Sigma) \tag{3.31}$$

其中我们涉及两个微分同胚群，我们如下定义。

$$\mathrm{Diff}^+(S, \partial S, \Sigma) = \left\{ f : S_0 \to S_0 : \begin{array}{c} f \text{ an orientation preserving diffeomorphism that} \\ \text{acts as the identity on the boundary components} \\ \text{of } S_0 \text{ and preserves the elements of } \Sigma \text{ pointwise} \end{array} \right\}$$

and

$$\mathrm{Diff}_0^+(S, \partial S, \Sigma) = \left\{ f \in \mathrm{Diff}^+(S, \partial S, \Sigma) : \begin{array}{c} f \text{ homotopic to the identity} \\ \text{through a homotopy preserving} \\ \text{the elements of } \Sigma \text{ pointwise} \end{array} \right\}.$$

The group operation is induced by composition of functions.

注意，我们的 Diff 不仅仅是 orientation preserving 的并且还需要是保证映射先后 Σ 上面的点必须映射回自己的。

根据这个定义我们可以通过我们已经构造的 Teichmuller 空间给出 moduli space 的定义。

Definition 10. *Moduli Space*

我们定义这个空间就是 Teichmuller 空间对于 mapping class group 取一个模!

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)/\,\mathrm{MCG}(S). \tag{3.32}$$

一般是用这个记号:

$$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n}) = \mathcal{M}_{g,n} \quad \text{and} \quad \mathcal{M}(\Sigma_g) = \mathcal{M}_g. \tag{3.33}$$

给出了定义之后我们下面给出一些黎曼曲面给出的 Teichmuller 空间,mapping class group 还有 moduli 空间的例子。

3.5 Teichmuller theory

我希望继续讲一讲 Teichmuller 理论是什么?

Chapter 4

Sup: Chern-Simons of Classical Gravity

{chap:Su

我们知道经典的三维引力可以使用 TQFT 进行表达。也就是经典的三维引力和一个 $PSL(2,\mathbb{R})\times PSL(2,\mathbb{R})$ 的 Chern-Simons theory 有联系。具体的说就是:

Important: 经典三维引力

三维引力的 1st order formulism 可以进行 redefine 并使得其 EoM 和 action 对应一个 $SL(2,\mathbb{R})_k \times SL(2,\mathbb{R})_{-k}$ 的 Chern-Simons 理论。

4.1 Vielbein and spin connection Formalism

我们考虑的是 first-order formalism。也就是说我们并不会使用 metric $g_{\mu\nu}$ 作为一个基本的场，而是选择另外一个场 e^a_μ 作为一个基本的场，也就是 **frame field** 或者在三维里面我们成为 dreibein。

Important: Dreibein Formalism

我们定义一些矩阵称之为 dreibein，如下:

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x)\eta_{ab}e^b_\nu(x), \tag{4.1}$$

下面我们给出一些性质:

- e^a_μ 矩阵可以理解为一个坐标变换矩阵，是对偶矢量的基的坐标变换矩阵。$e^a = e^a_\mu dx^\mu$
- e 矩阵的行列式一定是非零的，因为这是行列式定义决定的，我们把定义式写成矩阵形式就是: $g = e^T\eta e$ 所以行列式的关系就是: $\det(g) = -\det(e)^2$ 我们可以如下进行定义:

$$e = \det(e) = \sqrt{-\det(g)} \tag{4.2}$$

- 由于横列式不为 0，我们可以定义逆矩阵，也就是 inverse frame field 满足下面关系：

$$e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b \text{ and } e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{4.3}$$

- 很容易发现对于 e^a_μ 的构造并不是唯一的。由于洛伦兹群并不改变 minkovski 度规，所以我们对 e^a_μ 进行一个洛伦兹变换其实完全也满足定义式子，所以我们会发现不同的 e^a_μ 满足下面关系:

$$e'^a_\mu = \Lambda_b^{-1a}(x) e^b_\mu(x) \text{ with } \Lambda \in SO(2,1) \tag{4.4}$$

下面我们希望做流形上的微积分，毕竟所有的 action 其实都是流行上的微积分的结果。为此，我们需要通过 dreibein 写出微分形式之中的重要组成部分。我们有下面的构造：

- **1-form**：首先很显然可以构造一个 1-form 就相当于新的坐标的基：

$$e^a \equiv e^a_\mu dx^\mu \tag{4.5}$$

- **levi-civita Symbol**: 这个可以显然通过 $e\epsilon_{\mu\nu\rho}$ 是一个张量，并进行坐标变换得到！

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \equiv e^{-1}\epsilon_{abc} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho, \tag{4.6}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \equiv e\,\epsilon^{abc}\, e^\mu_a e^\nu_b e^\rho_c. \tag{4.7}$$

注意，我们这里虽然都没有加帽子，这些 $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ 都是 symbol 并不是 tensor！！！！

下面我们定义新的坐标下面的协变导数（注意我们的 spin connection 在坐标变换下面并不是按照 tensor 变换的。）。我们可以定义 connection coefficient：

Definition 11. *connection coefficient*

对于某一个度规我们可以给出一个协变导数的 *connection coefficient*，也就是我们的 *Christoffel symbol* 在坐标变换下面的结果：*(注意我们这里的 a，b 是抽象指标，不是基矢量的指标！！)*

$$(e_\tau)^b\,\nabla_b(e_\mu)^a = \gamma^\sigma{}_{\mu\tau}(e_\sigma)^a \tag{4.8}$$

或者说：

$$\gamma^\nu{}_{\mu\tau} = (e^\nu)_a (e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a. \tag{4.9}$$

这个式子等价于 *Chirstoffel symbol* 的坐标变换关系，也就是说，$\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ 本质上就是新的基的联络：

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \tag{4.10}$$

还有另一套记号我觉得更方便一点点：（这里我们并不使用抽象指标，*a* 啥的都是基的指标!!） 我们定义 *connection coefficient* 满足下面的关系：

$$e^{\mu}_{a}\nabla_{\mu}e_{b} = \nabla_{a}e_{b} = e_{c}\omega^{c}_{ab} \tag{4.11}$$

或者说：

$$\omega^{c}{}_{ab} = e^{c}{}_{\nu}e_{a}{}^{\mu}(\partial_{\mu}e_{b}{}^{\nu} + e_{b}{}^{\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}) = e^{c}{}_{\nu}e_{a}{}^{\mu}\nabla_{\mu}e_{b}{}^{\nu}. \tag{4.12}$$

Important: Spin Connection

从 connection coefficient 出发我们可以定义一个 1-form，我们称之为 spin connection 1-form：

Definition 12. *spin connection*
我们定义一个 *1-form* 为：

$$\omega^{c}{}_{b} = \omega^{c}{}_{ab}e^{a} \tag{4.13}$$

注意!!! 对于 *Torsion Free* 的导数算符，我们的联络下面两个指标是 *Symmetric* 的!!!! 这个 *1-form* 和 *Dreibein* 的关系是：

$$\omega^{c}{}_{b} = e^{c}{}_{\nu}e_{a}{}^{\mu}(\nabla_{\mu}e_{b}{}^{\nu})e^{a}_{\eta}dx^{\eta} = e^{c}{}_{\nu}(\nabla_{\mu}e_{b}{}^{\nu})dx^{\mu} \tag{4.14}$$

我们会发现另外的一个性质，由于我们的 dreibein 有一个 lorenzian 的对称性，所以进行洛伦兹变换之后的 spin connection 也是可以求出来的。通过下面的推导我们会发现满足下面的变换关系：

$$\omega'^{a}{}_{b} = \Lambda^{a}{}_{c}\omega^{c}{}_{d}(\Lambda)^{d}{}_{b} + \Lambda^{a}{}_{c}(d\Lambda)^{c}{}_{b}. \tag{4.15}$$

推导过程如下：

L-T 之下 $e^{b} \to (\Lambda)^{l}_{g}\, e^{g} = e'^{l}$

$\omega^{c}_{ab} \to \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{a}_{n}\, e^{c}_{\nu}e^{\mu}_{a}(\nabla_{\mu}e^{\nu}_{b}\Lambda^{b}_{l}) = \omega'^{m}_{nl}$

变换后 $\omega^{m\prime}_{l} = \omega'^{m}_{nl} \times e'^{n}$

$= \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{a}_{n}\, e^{c}_{\nu}e^{\mu}_{a}(\nabla_{\mu}e^{\nu}_{b}\Lambda^{b}_{l})\Lambda^{n}_{g}e^{g}_{\eta}\,\boxed{dx^{\eta}}$ → 1-form

$= \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{a}_{n}\, \underbrace{e^{c}_{\nu}e^{\mu}_{a}(\nabla_{\mu}e^{\nu}_{b})}_{\omega^{c}_{ab}}\Lambda^{b}_{l}\, \underbrace{\Lambda^{n}_{g}}_{\delta^{a}_{g}} e^{g}_{\eta}\,\boxed{dx^{\eta}} + \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{a}_{n}\, \overbrace{e^{c}_{\nu}e^{\mu}_{a}(\nabla_{\mu}\Lambda^{b}_{l})e^{\nu}_{b}}^{\delta^{c}_{b}}\, \Lambda^{n}_{g}e^{g}_{\eta}\,\boxed{dx^{\eta}}$

$= \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{b}_{l}\,\omega^{c}_{ab}e^{a}_{\eta}dx^{\eta} + \Lambda^{m}_{c}\underbrace{\Lambda^{a}_{n}\Lambda^{n}_{g}}_{\delta^{a}_{g}}e^{\mu}_{a}(\nabla_{\mu}\Lambda^{c}_{l})e^{g}_{\eta}dx^{\eta}$

$= \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{b}_{l}\,\omega^{c}_{ab}e^{a}_{\eta}dx^{\eta} + \Lambda^{m}_{c}(\nabla_{\eta}\Lambda^{c}_{l})dx^{\eta}$

$= \Lambda^{m}_{c}\Lambda^{b}_{l}\,\omega^{c}_{b} + \Lambda^{m}_{c}\, d\Lambda^{c}_{l}$

这里提示一下，这个变换关系显然满足一个

下面我们给出两个 Cartan Structure 的结论，我们会发现 second cartan structure 其实和曲率张量有关系。我们下面进行说明：

Theorem 6. *first Cartan structure equation*

我们可以通过组合 spin connection 和 Dreibein 组合出来一个 2-form。并且可以证明这个 2-form:

$$T^a \equiv de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \ , \tag{4.16}$$

很容易发现这个式子满足下面的性质：

- *$T^a = 0$ 恒成立。这个就是第一 cartan 结构方程*
- *这个量按照 lorenzian 变换：*

$$T^a \to \Lambda^a{}_b T^b \tag{4.17}$$

下面一些证明：

定理 5-7-1 [嘉当(Cartan)第一结构方程]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^\nu = -\boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu . \tag{5-7-6}$$

证明 $-(e^\mu)_a \wedge \omega_\mu{}^\nu{}_b = -(e^\mu)_a \wedge [(e_\mu)^c \nabla_b (e^\nu)_c] = -2(e^\mu)_{[a}(e_\mu)^c \nabla_{b]}(e^\nu)_c$

$= -2\delta^c{}_{[a}\nabla_{b]}(e^\nu)_c = -2\nabla_{[b}(e^\nu)_{a]} = (\mathrm{d}e^\nu)_{ab}$. □

Theorem 7. *second Cartan structure equation*

使用一个特殊的 *notation*（*lcb*）

下面我们给出一个关系，成为 second cartan structure equation。这个方程告诉了我们曲率和 spin connection 之间的关系。(就可以类比，我们之前 Christolff symbol 和黎曼张亮起时有一个很好的关系，那么下面这个方程其实就是这个关系的一种推广。)

首先，我们可以从黎曼张量得到一个 2-form $(R_\mu{}^\nu)_{ab}$ 这个是一个用两个数 μ 和 ν 标记的对偶矢量场，并且是全反对称的对偶矢量是 2-form，我们定义为：

$$R_{ab\mu}{}^\nu \equiv R_{abc}{}^d (e_\mu)^c (e^\nu)_d, \quad R_\mu{}^\nu = \frac{1}{2} R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu e^\rho \wedge e^\sigma, \tag{4.18}$$

其中 $(e_\mu)^c$ 是一个用 μ 标记的矢量，我们用 c 作为矢量的抽象指标。这个是正向的变换，其实反向的变换也是可行的。我们可以有：

$$R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu = R_{ab\mu}{}^\nu (e_\rho)^a (e_\sigma)^b. \tag{4.19}$$

Second Cartan Structure equation 告诉我们下面的事实：

$$(R_\mu{}^\nu)_{ab} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^\nu{}_\mu + \boldsymbol{\omega}^\lambda{}_\mu \wedge \boldsymbol{\omega}^\nu{}_\lambda . \tag{4.20}$$

使用另一个 *notation*（和前面 *section* 统一）

其中 $\boldsymbol{\omega}_\mu^\nu$ 就是我们上面的定义的对偶矢量 $\omega^c{}_b$ 应该乘以一个*-1* 。只是这里我们使用了一些不太一样的 *notation*。我们一般会把 μ 指标升上去，也就是线性组合一波。$\omega^{ab} = \eta^{ac}\omega^b{}_c$，这样升上去可以证明这个 *1-form* 的两个指标是对称的。或者说相应的对于黎曼张量对应定义，但同时因为符号问题，可能还需要一个指标对称性的变换。这个 *notation* 下面定义是：

$$R^{ab} = \frac{1}{2}R^{ab}_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{4.21}$$

$$R^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu} = e^\lambda_a e^\sigma_b R^{ab}{}_{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

用的是升上去一个指标的黎曼张量定义的!!!

我们改写上面的公式有：

$$d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} = R^{ab}, \tag{4.23}$$

或者说用分量：

$$(R^{ab})_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^{ab}_\nu - \partial_\nu \omega^{ab}_\mu + \omega^{ac}_\mu \omega^b_{\nu c} - \omega^{ac}_\nu \omega^b_{\mu c} \tag{4.24}$$

Important: second Cartan structure equation

所以就是说公式是：

$$d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} = R^{ab}, \tag{4.25}$$

【上方的讨论是有问题的，因为了 *lcb* 书里的 $\omega^\mu{}_\nu$ 的定义其实多了个*-1*，但是，这个符号通过对于黎曼曲率张量的指标变换，消去了呃呃呃呃呃所以在反正必然是错了】

4.1.1 Einstein Hilbert Action

对于 E-H action（我们暂时并不考虑边界项）

$$S_{\mathrm{EH}}[g] \equiv \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + B, \tag{4.26}$$

我们可以用上面的 formalism 进行改写，变成：

$$S_{\mathrm{EH}}[e,\omega] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \epsilon_{abc}\left(e^a \wedge R^{bc}[\omega] - \frac{\Lambda}{3}e^a \wedge e^b \wedge e^c\right). \tag{4.27}$$

下面我们进行证明：

$$d^3x\sqrt{-g} = edx^0dx^1dx^2 = \frac{1}{3!}e\epsilon_{\mu\nu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \tag{4.28}$$

$$= \frac{1}{3!}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c; \tag{4.29}$$

以及

$$\epsilon_{abc}e^a \wedge R^{bc} = \frac{1}{2}e\epsilon_{\mu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\nu\rho}\epsilon^{\mu\nu\rho}d^3x \tag{4.30}$$

$$= d^3x\sqrt{-g}R. \tag{4.31}$$

□

在三维情况下我们有一个特殊的性质，就是任何一个二维的全反对称张量，我们可以使用一个一维的向量来进行描述。也就是 dual notation。下面就是定义：

$$R_a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}R^{bc} \leftrightarrow R^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}R_c, \quad \omega_a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^{bc} \leftrightarrow \omega^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}\omega_c. \tag{4.32}$$

使用 dual notation 我们的 EH action 可以写成：

$$S_{\mathrm{EH}}[e,\omega] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\left(2e^a \wedge R_a[\omega] - \frac{\Lambda}{3}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c\right). \tag{4.33}$$

4.1.2 Chern-Simons Theory

我们讨论一下 Chern Simons theory 到底是什么。

Important: Chern-Simons Theory

对于一个三维的流形上面我们可以赋予一个李群，并保证每一点赋予的李群都是一样的 G。这个群有个李代数称之为 g。我们可以写出下面的 action：

$$S_{\mathrm{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}}\mathrm{Tr}\left[A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right], \tag{4.34}$$

- k 被称为这个理论的 level
- A 是一个 1-form。但是这个 1-form 的系数 $A = A_\mu dx^\mu$ 中的 A_μ 是李代数 g 之中的一个元素。
- Tr 指的是这个李代数的一个合理的 non-degenerate bilinear form 结构。我们目前还没有定义，后面具体计算需要给出具体的定义。我们不妨作出这个假设，我们用李代数的基展开 $A_\mu = A_\mu^a T_a$。并且给李代数赋予一个 Tr，$d_{ab} = Tr(T_a T_b)$。那么这就相当于赋予李代数一个 g 的结构。当然这个可以任意赋予的。只有存在这样的结构的规范群，才能有 CS 理论

这个理论的运动方程是：

$$F \equiv dA + A \wedge A = 0, \tag{4.35}$$

这个运动方程意味着：

$$A = G^{-1}dG \tag{4.36}$$

也就是说这个 A 其实是规范等价于这个李群（规范群）的单位元的。这就意味着这个理论其实并没有有意义的解，是一个 topological 的解。

接下来我们给出一个重要的结论：

Important: CS & Einstein-Hilbert

对于三维引力来说，我们的 action 对偶于一些有特殊的规范群的 Chern-Simons 理论：

- AdS：SO(2,2)
- $\Lambda = 0$：ISO(2,1)
- dS：SO(3,1)

下面我们仔细考虑 AdS3 的情况进行证明。首先我们需要讨论 $SO(2,2)$ 群是什么。

Important: $SO(2,2)$ Group

这是一个有六个生成元（李代数元素）的李群。并且这六个生成元满足下面的对易关系：

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c, \quad [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c, \quad [P_a, P_b] = \epsilon_{abc}J^c, \tag{4.37}$$

其中 $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ 并且这些指标的升降我们可以用 minkovski 度规来定义。也就是说我们这个李群上的流形结构的度规赋予的是 minkovski 的。
也就是说他们的 Tr 的定义如下：

$$(J_a, P_b) = \eta_{ab}\ , \qquad (J_a, J_b) = 0 = (P_a, P_b). \tag{4.38}$$

并且三维的时候我们自然可以把二阶张量写成一阶的，我们会发现其实这个群就是三维的洛伦兹群：

$$J_a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}J^{bc} \leftrightarrow J^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}J_c, \tag{4.39}$$

J 是旋转，P 是 boost

下面我们构造一个 Gauge Field。通过我们之前定义的两个 1-form：

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\ell}e^a_\mu P_a + \omega^a_\mu J_a. \tag{4.40}$$

我们根据这个定义我们可以写出一个 SO(2,2)CS 理论也就是：

$$\mathrm{Tr}[A \wedge dA] = (\frac{1}{\ell}e^a P_a + \omega^a J_a, \frac{1}{\ell}de^b P_b + d\omega^b J_b) \tag{4.41}$$

$$= \frac{1}{\ell}\left(e^a \wedge d\omega^b + \omega^a \wedge de^b\right)\eta_{ab} = \frac{2}{\ell}e^a \wedge d\omega_a, \tag{4.42}$$

以及：

$$\frac{2}{3}\mathrm{Tr}[A \wedge A \wedge A] = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}[[A, A] \wedge A] \tag{4.43}$$

$$= \frac{1}{3\ell}\left(\frac{1}{\ell^2}e^a \wedge e^b \wedge e^c + 3\epsilon_{abc}e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c\right). \tag{4.44}$$

整体上我们就得到了 AdS3 的 Chern-Simons 理论。

$$S_{\mathrm{CS}}[e, \omega] = \frac{k}{4\pi\ell}\int_{\mathcal{M}}\left(2e^a \wedge R_a[\omega] + \frac{1}{3\ell^2}\epsilon_{abc}\, e^a \wedge e^b \wedge e^c\right), \tag{4.45}$$

其中：

$$R_a = d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c. \tag{4.46}$$

其 level 是：$k = \frac{l}{4G}$；$\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ 我们需要知道在 bulk 考虑下似乎这个理论就是 trivial 的但是，考虑到边界条件，我们会发现我们有无穷维度的自由度在边界上!! 并且边界条件其实并不是唯一的。边界上存在着对称性，我们称之为 global symmetry 或者 asymptotic symmetry。正是 boundary 上的 global symmetry 应该求和导致了有着无穷的自由度。

接下来一个比较重要的事实，就是 $SO(2,2)$ 是一个半单李代数，也就是他可以写成单李代数的直和：

$$so(2,2) \approx sl(2,\mathbb{R}) \oplus sl(2,\mathbb{R}) \tag{4.47}$$

我们可以定义另一套生成元：

$$J_a^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(J_a \pm P_a), \tag{4.48}$$

这些生成元满足下面的代数关系：

$$[J_a^+, J_b^+] = \epsilon_{abc}J^{+c}, \quad [J_a^-, J_b^-] = \epsilon_{abc}J^{-c}, \quad [J_a^+, J_b^-] = 0. \tag{4.49}$$

因此，我们可以构造两个 $SL(2,\mathbb{R})$ 的 Chern-Simons connection：

$$A = (e^a/\ell + \omega^a)T_a\ , \qquad \bar{A} = (e^a/\ell - \omega^a)T_a, \tag{4.50}$$

我们的 action 和运动方程是如下的：

$$A = (e^a/\ell + \omega^a)T_a\ , \qquad \bar{A} = (e^a/\ell - \omega^a)T_a, \tag{4.28}$$

with T_a now being the generators of $sl(2,\mathbb{R})$. One can show that the decomposition of the action then reads

$$S_{\mathrm{CS}}[\Gamma] = S_{\mathrm{CS}}[A] - S_{\mathrm{CS}}[\bar{A}] \equiv S_{\mathrm{CS}}[A,\bar{A}], \tag{4.29}$$

that is, can be rewritten as the difference of a chiral and anti-chiral Chern-Simons action.

Finally, let us mention that Einstein's equations of motion are equivalent to the ones in the Chern-Simons formalism, namely $F^a = 0$, $\bar{F}^a = 0$. More precisely, varying the action with respect to e^a gives the constant curvature equation

$$F^a + \bar{F}^a = 0 \ \Leftrightarrow\ R^{ab} + \frac{1}{\ell^2}e^a \wedge e^b = 0, \tag{4.30}$$

while varying with respect to ω^a leads to the torsion free equation

$$F^a - \bar{F}^a = 0 \ \Leftrightarrow\ T^a = de^a + {\omega^a}_b \wedge e^b = 0. \tag{4.31}$$

We thus verify that solving the equations of motion in the Chern-Simons formalism is considerably simpler than solving Einstein's equations.

最后，我们很显然有结论，就是经典的 Chern-Simons 理论给出了 AdS3 的作用量!!

Chapter 5

Scratch Book

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!~~