!!!! Defying Gravity!!!!

Elphaba

2024 年 7 月 18 日

摘要

这是我个人的学习的笔记，主要讲述关于广义相对论的内容！

本 note 之中的内容主要是自己的思路而不是抄写教科书。因此，如果有教材有着比较系统和清晰的讲解，可以见我的读书笔记。然而同时有的专题我认为教材都没有明确的讲解，或者哪怕有明确的讲解也需要很多额外知识进行补充的，会列成本 note 之中专题，专门讨论。

ps. Finding neverland 是我心目中的 top one!!!

目录

1 广义相对论之中的张量

1.1 固定一个点上的特定张量

目前我的一个基本的理解就是：广相之中定义的张量其实就是一个在流形上面某一个点定义的量，一切讨论都不包括“自变量”或者“场函数”，这个量真的就是一个矢量空间的量，而并不是一个变量或者函数！

但问题是，我们研究的广义相对论定义还是存在矢量场的，什么样的矢量放在一起组成的矢量场是什么样子的还是需要讨论的，但是这个讨论就不在这个 subsection 的范畴里面。

这里我们需要澄清很多很重要的概念！：

1. **随着坐标系变化不变，我们限制在张量是写在一个 tensor product 构成的坐标系之中**。而不是坐标基矢量神奇组合（例如：wedge product 的基矢量 $(e^{\mu_1\cdots\mu_n})_{a_1\ldots a_n} = (dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\ldots\wedge(dx^{\mu_n})_{a_n}$，这种情况下只有全反对称张量是张量，其他的张量写在这个基之下都会发生变化，因此体元是一个张量密度而不是张量）也就是说，只有写成

$$T = T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\ldots\nu_n}(dx^{\nu_1})\ldots(dx^{\nu_n})(\partial_{\mu_1})\ldots(\partial_{\mu_n}) \tag{1}$$

这样的形式我们才能够合理的讨论张量。

2. 我们为了表述张量是什么，我们需要明确张量空间的基之间的关系，我们定义张量空间的基满足下面的关系：

> **Definition 1.** 张量空间的基
>
> 坐标系 *tensor product* 生成的基满足下方定义的基的变换的 *tensor product* 写成的样子是*:*
>
> $$dx^\mu = \left.\frac{\partial x^\mu(x^{\mu'})}{\partial x^{\mu'}}\right|_p dx^{\mu'} \quad \partial_\mu = \left.\frac{\partial x^{\mu'}(x^\mu)}{\partial x^\mu}\right|_p \partial_{\mu'} \tag{2}$$

根据我们定义，我们分别在两个坐标标架里面展开我们的某个张量，出于简单我们就写一个（1，1）rank 张量：

$$T = T^\mu_\nu(\partial_\mu)(dx^\nu) = T^{\mu'}_{\nu'}(\partial_{\mu'})(dx^{\nu'}) \tag{3}$$

怎么认定这个量是一个张量呢？下面我们写一个抽象的张量的定义：

> **Definition 2.** 抽象定义的张量
>
> 某个量在两个坐标系下对于 ***tensor product*** **的基矢量进行展开**之后的分量形式之间是否满足和基矢量同样的变换形式也就是说这个量在两个坐标之下展开分量正好满足*:*
>
> $$T^\mu_\nu = T^{\mu'}_{\nu'}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \tag{4}$$

这里我们使用一个简单的例子来说明，我们看看全反对称算子是不是张量，首先我们定义：全反对称算子在所有的坐标基下面都满足全反对称且取长度为 1. 显然我们发现：因为左边是一个算符，右面是一个矩阵的行列式乘以这个算符。

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n} \neq \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}\left.\frac{\partial x^{\mu_1}(x^{\mu_1'})}{\partial x^{\mu_1'}}\right|_p \cdots \left.\frac{\partial x^{\mu_n}(x^{\mu_n'})}{\partial x^{\mu_n'}}\right|_p \tag{5}$$

所以全反对称算符在不同的基下面展开并不满足张量的变换关系。所以并不是张量。

当然我们判断一个量是不是张量必然提前知道这个量在不同基下展开的分量的定义，否则，我们也不能判断这是不是张量。

3. **在我看来讨论坐标系的基，也就是 ∂_μ 和 dx^μ 是不是张量是没有任何意义的。**

因为，张量定义必然涉及坐标系基的变化。而基的变化之后，基已经不再是坐标系的基了。所以，我认为这个是不能讨论的。但有的时候我们会说，体元是一个张量密度，我认为这个说法只能说是形式化的定义。通过形式化的定义保证和欧几里得空间的微积分的定义相符合即可，而不要讨论，体元是不是张量!

当然，对于这个问题还有一种理解就是，认为体元是一个对于 levi-civita 算符作为分量的张量，显然 levi-civita 算符是一个张量密度，所以体元可以理解为张量密度！但是单纯讨论 dx^μ 或者 ∂_μ 是不是张量其实是没有意义的!

4. 广义相对论里面讨论的张量和量子场论里面讨论的张量的意义不太一样。

- **主动和被动的观点:**

  广义相对论里面认为协变是，对于"坐标基"的变化下，分量满足一定特殊的变化。我们认为广相的坐标基在变换，但是场论之中我们讨论完全不涉及坐标基，基并没有变换而是场在变换。

  但是其实从群论的角度来说两者是有对应的，坐标基的改变而张量并不改变和张量场自己发生改变在数学形式上存在着意义映射。但是我们不认为两者物理是统一的，我更愿意分开两种看法看问题。

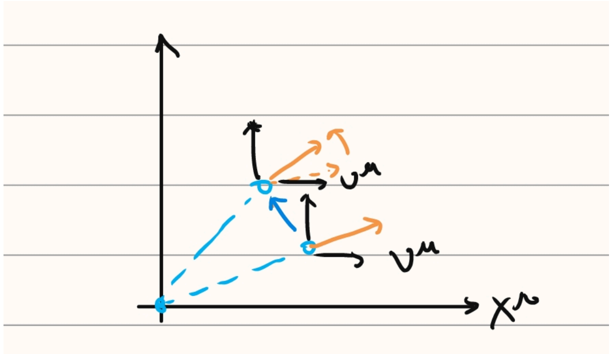
- **对于任意坐标基变化协变:**

  广相坐标基变化我们是对于任意变化而言的，并没有考虑群。因为，这根本不是场在变化，而是选用了不同的参考系。但是，场在变化可以用选用不同参考系来理解。所以，广相是考虑的对于任意变化都有一个变化矩阵协变的。当然，我们上面讨论的是某一个点上的，而不是场，所以对于场会更加负责

  因为广义相对论的理论认为是对于任何坐标变换我们都是协变的；但是量子场论我们会规定一个群 G，我们认为张量是对于这个群 G 协变的量，并且我们可以定义流行上面的张量场 $T^\mu(x^\mu)$ 如果这是个张量场，那么应该满足对于群 G 的协变条件：

  $$T^{\mu'}(x^{\mu'}) = R(g)^{\mu'}_{\mu} T^\mu(x^\mu) \tag{6}$$

  其中 R 是我们使用的群变换的群元素的表示!! 这个概念是超级自然的。也就相当于，当坐标被一个变换变到另一个坐标点，函数被变换变到另一个函数。新坐标点上的新函数形状应该跟旧坐标点上的旧函数形状"一样"。一个图片来解释就是:



- **声明**：我们到现在讨论的都是某一个点上的，不涉及场!!

但其实，我们上面讨论的某一点张量空间也可以进行推广，推广到流形上面的张量场。但是相关协变性是什么的讨论我们可以在"流形上的张量场"一节进行讨论。

> **注释:**
>
> 我们在上文一直用到了坐标变换的矩阵 $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$ 其实这个是一个缩写。这不是一个矢量场或者什么意义上的东西。他就是一个普通到不能再普通的矩阵！一个问题就是怎么计算这个矩阵，我认为我们之前都是在进行抽象的讨论，如果上来直接用定义给出计算的方法，我觉得我会让人困惑。所以在此存疑，我们下文介绍具体的计算。
>
> 其实我们的所有的讨论都是，一个矢量，乘一个矩阵，变成另一个矢量的讨论，全都是 concrete 的"数"的计算，而不涉及"场"。但是下一节我希望能够从"场"的角度重新澄清这个事实!

上方我们讲述的张量都是抽象定义的数学结构，其中很多很多定义和计算都显得很奇怪，以为我们只是"定义了要这么算"。我们并没有给定一个具体的张量的形式，给定一个具体的体系，告诉你很自然的满足这些数学结构并且能够进行 concrete 的计算。

但是，在微分几何里面我们可以通过一些流形上面的参数化明确的给出一个具体的张量的定义。并且这样的参数化的定义自然满足所有张量的性质。而且更重要的是，这样的体系可以做具体的计算

我最开始不提及这个具体的定义，但是一直在使用相关的符号，就像是 ∂_μ 作为基底。是因为我认为具体的定义的张量有太多太多的性质但是大家会因此忽略掉张量最本质的性质，也就是在坐标架改变的时候的协变性!

接下来我们通过流形定义其上面的张量:

- **坐标系**:我们定义坐标系是 $\mathcal{R}^n$ 到 n-dim 流形的一个映射 ψ ,使得流形上面的点有:$p = \psi(x^1, ..., x^n)$
  很显然我们可以有很多个坐标系，那么他们之间的关系我也可以通过一个函数进行表达:

$$\begin{cases} x^{1\prime} = x^{1\prime}(x^1, ..., x^n) \\ ... \\ x^{n\prime} = x^{n\prime}(x^1, ..., x^n) \end{cases} \tag{7}$$

- **标量场**：我们赋予流形上每一个点一个数，我们称之为标量场，计作 $f : M \to \mathcal{R}$

- **结合标量场和坐标系**：我们可以定义一个函数 $f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$ 可以写成 $f(x^1, ..., x^n) = k$

Definition 3. 矢量

我们定义我认为是从所有流形上的标量场生活的空间到实数的映射 $v:\mathcal{F}_M \to \mathcal{R}$ 。

给定一个 v 我们可以给出一个映射 $v(f) = m \in \mathcal{R}$

- **矢量空间的维度：** n-dim 流形上面的一个点的矢量场，维数是 $dim(V) = n$
- **基矢量：** 如果在流形我们考虑的点的附近引入一个坐标系 $\psi(x^1, ..., x^n)$ 我们改写任意标量场是这样的：$f(x^1, ..., x^n)$ （也就是结合标量场和坐标系）

  接下来我们定义这个**【坐标系下，某个点 p 上的】**基矢量为 ∂_μ

  $$\partial_\mu(f(x^1, ..., x^n)) = \frac{\partial f(x^1, ...x^n)}{\partial x^\mu}\bigg|_p \tag{8}$$

  显然我们认为一切矢量都可以用依赖于坐标系的基矢量展开：

  $$v = v^\mu \partial_\mu \tag{9}$$

  其中我们认为 v^μ 是矢量在某个坐标系下的分量。这里我们虽然根据坐标基矢量的定义很容易我们可以知道基矢量的变换矩阵正好是：

  $$\partial_\mu = \frac{\partial x^{\mu'}(x^\mu)}{\partial x^\mu}\bigg|_p \partial_{\mu'} \tag{10}$$

  所以我们认为这样具体的求导操作定义的基矢量是一个合理的基矢量的"表示"，其中使用了之前提及的坐标系变换的函数在 p 点的导数：

  $$\begin{cases} x^{1\prime} = x^{1\prime}(x^1, ..., x^n) \\ ... \\ x^{n\prime} = x^{n\prime}(x^1, ..., x^n) \end{cases} \tag{11}$$

  进一步我们根据 v 矢量的定义（Definition）里面的内容完全不涉及坐标系，我们可以知道，在坐标系变换前后 v 是完全一样的东西，根据这个我们可以推导出结论：

  $$v^{\mu\prime} = \frac{\partial x^{\mu\prime}(x^\nu)}{\partial x^\nu}\bigg|_p v^\nu \tag{12}$$

  我们会发现这个正好满足前文对于张量的定义。所以我们说这样根据映射定义的矢量是一个合理的矢量的"表示";
- **切矢量：**

  Theorem 1. *流形上的点 p 的矢量空间的**【每一个矢量都可以用一种特殊的形式表示】**，也就是写成"切矢量"。也就是存在一个函数: $C(t) = \{x^1(t), ..., x^n(t)\}$*

  $$v = \partial_t = \frac{\partial C^\mu(t)}{\partial t}\bigg|_p \partial_\mu \tag{13}$$

- **对偶矢量：** 很遗憾的是，对偶矢量我们不能够通过一个直观的求导来定义，但是目前有了矢量的定义，我们可以通过直观的定义出矢量计算出矢量，再根据矢量计算出对偶矢量。

  但是对于一些特殊的对偶矢量，比如全反对称的对偶矢量，我们可以赋予一些意义，详情见下方对于微分形式的讨论

  我们定义为：

Definition 4. 对偶矢量

对偶矢量是一个矢量空间到实数的映射。$\omega : V \to \mathcal{R}$

- **对偶矢量基:**

  我们可以通过基矢量定义一个对偶矢量的基 $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$ 同样的我们可以验证这些都满足最开始对于抽象的张量的定义。位了保证表述清楚我还是写成:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \tag{14}$$

1.2 用矩阵表达各种矢量分量的运算

1.3 流形上的张量场

顾名思义，我们只要在流形上面每一个点引入一个张量，那么我们就可以得到一个张量场。显然，张量场是一个流形上面每一个点到这个张量空间的映射 $M \to T$ 我们考虑这个映射的很多性质。

我准备介绍一个特殊的张量场，这个张量场能够描述流形很多本质的性质，但同时也有自己的自由度: **metric tensor field**。我们给出定义:

2 微分形式与流形上微积分

对于任意流行上面定义微积分是一件很困难的事情。并不是每一个流行都可以定义矢量场的微积分。因此，人们发明了微分形式的数学语言来描述流行上面的场。并且正因为这样的数学语言的出现我们才能够很顺利的在奇奇怪怪的流形上面定义微积分。

我们可以研究我们熟悉的三维的微积分，我们可以定义矢量的积分：

$$\int_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{15}$$

这两种二型微积分都是表示的是矢量场在三维空间中的积分，这两种积分存在一些问题：

- 都是定义在 embed 在三维空间之中的两种流形上面的，但是对于一般的流形我们不一定可以 embed 一个更高维度的空间

- 这两个流行都有定向，虽然在我们的积分写法之中这个定向表达的并不是很显然。但是推广到更高维度的流形就很奇怪

因此我们为了定义一般流形上的微积分就不再使用这样的二型矢量微积分的语言，因为这样的语言过于复杂。此时我们选用微分形式的语言，并且我们定义只包含标量积分的推广（也就是说 p-dim 流形上面只能定义 p-form 的微积分）这样子我们再也不用在奇怪的流形上“特殊定义矢量微积分”同时还能很顺利的“计算矢量微积分”。

2.1 微分形式的微分语言

首先，我们定义微分形式

Definition 5. *n-dim 流形上面的一组全反对称的（0，p）张量被称为 p-form*

$$\omega_{a_1,a_2...a_p} = \omega_{[a_1,a_2...a_p]} \tag{16}$$

注释：

关于什么是全反对称，我们注意，张量指标的前后顺序是固定的，从左数第几个指标代表着固定的有物理意义的指标！

不固定的东西是上面使用的字母，字母代表着分量，代表着这个指标和哪个指标进行缩并。所以字母并不代表着指标！！

反对称的定义是交换字母，也就是交换指标上面的取值，而不是交换指标！也就是说交换取值之后得到的张量输出正好相差-1

由于是一个张量，所以他满足所有张量应该有的性质，再由于反对称的性质，某个流形上面的点 x 上的 p-form 生活的空间必然是（0，p）张量生活的空间上面的子空间，这个子空间的维度是。

$$dim(\Lambda_x^p) = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{17}$$

我们注意，我们为什么要定义微分形式，是因为 p-form 是可以定义在 p-dim 流形上面积分的张量！！这个定义。那么事关微积分首先我们关心的问题是，怎么对 form 进行：

- **微分：**

$$d\omega_{a_1...a_p} = (p+1)\partial_{[\mu}\omega_{a_1...a_p]} \tag{18}$$

注意这里我们用的偏导数算符我们并没有定义是什么，可以根据我们的使用的语境进行定义。以及根据反对称的性质，显然我们有:

$$dd = 0 \tag{19}$$

- **张量积**: 关于我们怎么把一个 n-form 和 m-form 进行张量积再进行变换成为一个 m+n-form。很简单只需要反对称化即可。

$$(\omega \wedge \mu)_{a_a...a_m,b_1...b_n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}\omega_{[a_1...a_m}\mu_{b_1...b_n]} \tag{20}$$

> **注释:**
>
> 需要注意的是我们这里使用的是抽象指标。$\omega_{a_1...a_p}$ 代表的并不是某一个张量的分量，而代表的就是一个（0，p）rank 的张量用某一个确定的坐标架展开应该写成:
>
> $$\omega_{a_1...a_p} = \omega_{\mu_1...\mu_p}(dx^{\mu_1})_{a_1}...(dx^{\mu_p})_{a_p} \tag{21}$$
>
> 同样的这里面使用的 $(dx^{\mu_i})_{a_i}$ 表示的也是某个张量空间的基，是一个有（0，1）rank 的张量。而不是什么分量，更不是（1，0）rank 张量的分量!!!

同时很显然我们有一些性质:

$$A \wedge B = (-1)^{mn} B \wedge A \tag{22}$$

对于 p-form ω 还有 q-form μ 我们可以有恒等式:

$$d(\omega \wedge \mu) = \ d\omega \ \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge (d\mu) \tag{23}$$

- **展开**: 选定一个坐标系 ψ 之后一个 n-dim 流形上某个点 x 上面的 p-form 可以展开成:

$$\omega_{a_1...a_p} = \omega_{\mu_1...\mu_p}(dx^{\mu_1})_{a_1}...(dx^{\mu_p})_{a_p} \tag{24}$$

但是，这个坐标基并不好，因为没有通过坐标直接体现出反对称的特性，这个时候我们会用另外一组坐标基矢量进行展开，我们使用一个组全反对称基矢量进行展开:

$$\omega_{a_1...a_p} = \omega_{\mu_1...\mu_p}(dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge ... \wedge (dx^{\mu_p})_{a_p} \tag{25}$$

注意有 wedge product 的定义，相当是把坐标基矢量全部全反对称化!

根据之前 wedge product 导数的性质，展开后的分量的导数我们有:

$$(d\omega)_{ba_1...a_n} = (d\omega_{\mu_1...\mu_n})_b \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge ... \wedge (dx^{\mu_n})_{a_n} \tag{26}$$

注意上面的式子等好友面第一项是一个标量场 $\omega_{\mu_1...\mu_n}$ 的 1-form，所以也是 1-form!

2.2 微分形式定义流形上的积分

我们推广最基础的黎曼 n 维实数空间上面的积分!

> **Definition 6.** *n-dim 流形上面只能对于 n-form 进行积分，并且积分数值为，选定一定的 n-dim 流形上的坐标系之后*
>
> $$\int_\Omega (a_{0...n-1}(x^\mu))(dx^0) \wedge ... \wedge (dx^{n-1}) = \int_{R^n(not\ all)} d^n x \ a_{0...n-1}(x^\mu) \tag{27}$$
>
> *等式左边是一个 n 形式的展开形式在 n 维流形上面的积分，又面是展开函数在对应的欧式空间的积分（我们已经定义好的！并且可以很简单的计算的多重积分）*

接下来我们考虑函数在某个流形上的积分操作。由于函数是一个 0-form 所以我不能够直接在流形上面定义积分，而是应该把它变成一个 n-form 再进行积分。

Definition 7. 函数（或者说标量场）在流形上的积分可以分为两步：

step 1: 通过变换把标量场变成一个 *n-form*

$$\begin{aligned} f(x) \to f(x)\epsilon(x) = f(x)\sqrt{|g(x)|}\tilde{\epsilon}_{\mu_0\cdots\mu_{n-1}}(dx^{\mu_0})_{a_0} \wedge \ldots \wedge (dx^{\mu_{n-1}})_{a_{n-1}} \\ = f(x)\sqrt{|g(x)|}(dx^0) \wedge \ldots \wedge (dx^{n-1}) \end{aligned} \tag{28}$$

step 2: 对于 *n-form* 进行积分

$$\int_\Omega f(x)\sqrt{|g|}(dx^0) \wedge \ldots \wedge (dx^{n-1}) = \int_{R^n(not\ all)} d^n x\ f(x)\sqrt{|g(x)|} \tag{29}$$

注释：

正如前面提到的，dx^μ 我们不能理解是不是一个张量，这样讨论也没有意义。这也说明我们盲目讨论 $dx^{\mu_0} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{n-1}}$ 是不是张量很没有意义。

但是换一种思路其实我们可以认为它是一个张量密度。我们可以理解为是一个对于 levi-civita 算符作为分量的张量，其实很合理的！因为是 levi-civita 算符加上 weight 会变成全反对称张量，所以我们可以直接从 wedge 的空间变成 tensor product 的空间讨论它是不是张量（由于上面（12）（13）式子对于展开的描述，对于全反对称张量，分量并不发生变化）

最后我们推广曲面上的积分，我们会发现我们是在一个 n-p 维的流形上对于一个 p-form 进行积分。因此我们需要开发一个手段把一个 p-form 变成一个 n-p form 从而保证能在 n-p 维的流形上面进行积分。由此我们定义：

Definition 8. 我们定义 *hodge dual* 使得一个 *n* 维流形上的 *p-form* 变成一个 *n-p form*

$$\begin{aligned} &*\,\omega_{a_1\cdots a_{n-1}} := \frac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\varepsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}}, \\ &\text{其中}\quad \omega^{b_1\cdots b_l} = g^{b_1c_1}\cdots g^{b_lc_l}\omega_{c_1\cdots c_l}. \end{aligned} \tag{30}$$

关于 hodge dual 有一些常用的结论：

$$^{**}\omega = (-1)^{s+l(n-l)}\omega. \tag{31}$$

根据这样的定义我们可以进一步定义：

Definition 9. 推广的积分为对 *hodge dual* 的积分！

$$\int *\omega \tag{32}$$