

QFT Weinberg 学习笔记

X. D. H.

2025 年 7 月 14 日

摘要

这是一个 Weinberg 的 QFT 的阅读学习笔记。也希望其中能够给出 Weinberg 的习题的答案!!

目录

1	Relativistic QM	2
1.1	量子力学基本概念	2
1.2	对称性变换 Symmetry	4
1.2.1	对称性变换算符	4
1.2.2	对称性变换和群表示	5
1.2.3	Connected Lie Group	6
1.3	量子 Lorentz 变换	9
1.3.1	洛伦兹变换和群	10
1.3.2	洛伦兹变换的子群	11
1.4	Poincare 代数	13
1.4.1	J, P 算符性质与代数	14
1.4.2	对易关系与守恒量讨论	15
1.4.3	Galilean 代数	16
1.5	单粒子态	18
1.5.1	单粒子态的分类 & Wigner Little Group 方法	18
1.5.2	归一化讨论	21
1.5.3	关于具体旋转变化	24
1.5.4	正质量粒子	25
1.5.5	无质量粒子	27
1.6	时间和空间反演变换	32
2	Scattering Theory	33
3	Scratch Book	34

Chapter 1

Relativistic QM

Weinberg 第二章，讲述相对论性的量子力学！这一章，我们的核心就是说明，量子场论是唯一合理的融合相对论和量子力学的方法。因而我们从量子力学开始进行讨论。

1.1 量子力学基本概念

量子力学是由下面几个公理体系进行构建的：

1. 量子态由 Hilbert 空间的 ray 描述

Definition 1. 我们定义 Hilbert 空间：

- 复线性空间「也就是线性组合的系数是复数」
- 并且其上可以定义一个 norm，满足：

$$\begin{aligned}(\Phi, \Psi) &= (\Psi, \Phi)^*, \\(\Phi, \xi_1 \Psi_1 + \xi_2 \Psi_2) &= \xi_1 (\Phi, \Psi_1) + \xi_2 (\Phi, \Psi_2), \\(\eta_1 \Phi_1 + \eta_2 \Phi_2, \Psi) &= \eta_1^* (\Phi_1, \Psi) + \eta_2^* (\Phi_2, \Psi).\end{aligned}\tag{1.1}$$

- 这个 norm 是有正定条件： $\langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0$ ，并且当且仅当 $\Psi = 0$ 取等

在这个空间上我们可以定义 ray：

- 自己内积为 1 的向量集合 $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$
- 同时模去所有 $\Psi' = \xi \Psi$ 其中 ξ 是模长为 1 的复数

2. 可观测量由 Hermite 算符描述

所有客观测量都可以理解为一个 Hilbert 空间到自己的映射，需要满足下面条件：

- 映射是线性的： $A(\xi \Psi + \eta \Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi$

- 映射是 *Hermite* 的，也就是对于内积结构需要满足 $A^\dagger = A$ 。其中 *Hermite* 共轭定义为： $(\Phi, A^\dagger \Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^*$ 。

Remark:

注意 *Hermite* 这个特性是基于内积结构的。只有定义了合理的线性空间的内积结构我们才能定义 *Hermite* 的映射

对于一个量子态来说，如果这个量子态对应的 ray 里面所有向量都是客观测量算符 A 的本征向量，我们可以得到 A 的对于一个态的具体数值：

$$A\Psi = \alpha\Psi \quad \text{for } \Psi \text{ in } \mathcal{R}. \quad (1.2)$$

同时根据 *Hermite* 的算符的特性：

- 得到的数值 α 是实数
- 不同的特征值对应的特征向量都是正交的，也就是对于内积结构是 0。

3. 实验结果

对于一个 ray R 所代表的量子态。实验意味着检测这个态在不在某一组正交的 $\{R_1, R_2, R_3, \dots\}$ 中的某一个量子态上。并且发现这个量子态在另外一个量子态上面的概率是：

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2, \quad (1.3)$$

其中 Ψ 和 Ψ_n 是这个量子态的 ray 上面的任意两个矢量。注意，这也是为什么我们要最后取模长平方，因为我们要消除 ray 的香味的的影响。

如果我们有一组不仅仅是正交而且是完备的 ray 的基，进行测量「也就是对于 Hilbert 空间能够 span 整个空间」，那么我们测量得到不同结果的概率应该满足：

$$\sum_n P(\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n) = 1 \quad (1.4)$$

Tip: 没有薛定谔方程

我们发现我们这里根本没有在量子力学的公理里面提及薛定谔方程。因为这个那本不是本质的内容。

时间演化也还是一种对称性变换。对于相对论量子力学应该在考虑量子力学的对称性变化的时候考虑。

1.2 对称性变换 Symmetry

1.2.1 对称性变换算符

Important: 对称性变换是什么

所谓对称性变换, 就是我们改变观察者的状态, 这并不会影响实验结果。比如: 我们认为, 跑着和站着观察, 实验结果是一模一样的。

所有我们认为不改变物理规律本身的变换其实都是对称性变换。比如: 观察者的移动 emmm

我们考虑不同观察者进行同样的一组测量「物理意义上的【同样】, 就是干一样的事情」。

- 对于观察者 O 来说, 这个系统使用 R 量子态描述, 我们希望进行测量于 $\{R_1, R_2, \dots\}$ 量子态上
- 对于观察者 O' 来说, 这个系统使用 R' 量子态描述, 我们希望进行测量于 $\{R'_1, R'_2, \dots\}$ 量子态上

那么测量给出的概率一定是相通的:

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n). \quad (1.5)$$

Remark:

注意这个仅仅是是对称性变换的必要条件, 也就是满足这个性质的变换必然是对称性变换, 但是对称性变换还有其它种。

Theorem 1. 对称性变换在 Hilbert 空间的表示 (Wigner)

对于对称性变换来说, 对应 Hilbert 空间上的算符 U , 将 Hilbert 空间上所有向量 Ψ 变换为: $U\Psi$ 。这个算符只能是两种可能:

- 线性并且 Unitary

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi), \quad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi \quad (1.6)$$

- 反线性且 antiunitary

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^*, \quad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi \quad (1.7)$$

我觉得有两种情况是因为, 我们的概率是模长平方, 所以可能会有问题。

Remark:

我们定义的可观测量都是线性算符, 但是对称性变换的算符可以是线性的也可以是反线性的。并且一个需要时 Hermite 的, 另一个需要的是 Unitary! 这是两个不一样的条件。

Remark:

注意，反线性其实说的就是常数和算符在交换的时候会变成复共轭，所以我们一定不要默认常数和算符永远是对易的，如果是反线性的算符会出现复共轭的问题

我们注意到我们上面使用的定义没有使用 U^\dagger 进行定义，因为线性和反线性的算符的共轭的定义是不同的。我们需要给出两者的定义才能使用这个符号

- 对于线性算符，我们定义 Hermite 共轭是： $(\Phi, L^\dagger \Psi) \equiv (L\Phi, \Psi)$ 。
- 对于反线性算符，我们不能这么定义，我们如果用两个态展开 Φ 就会推出矛盾。所以对于反线性算符我们定义为： $(\Phi, A^\dagger \Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi)$

在此基础上，我们知道 Unitary 条件可以对于线性和反线性算符使用同样的一个表达式写出：

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (1.8)$$

但是，下面我们知道，由于 Identity 算符显然是一个对称性变换的算符，并且对称性变换我们要求是连续的。所以所有的算符都应该是 Identity 算符连续变换得到的。所以我们认为：

Important: 对称性变换

所有的对称性变换可以通过线性并且是 Unitary 的算符描述。

Remark:

所有反线性的变换算符，也可以描述对称性变换，但是，他们一般描述的变换都存在时间反演的变换。

无限小对称性变换

都可以使用下面这样的形式进行描述：

$$U = 1 + i\epsilon t \quad (1.9)$$

其中 t 需要是一个 Hermite 的算符才能保证 U 是一个 Unitary 的算符。而 ϵ 是一个无限小的实数。

1.2.2 对称性变换和群表示

一般所有的对称性变换存在群结构。我们可以定义 Unitary 矩阵的乘法「群元素的乘法」；Unitary 矩阵的逆「群元素的逆元」；Identity「群的 Identity」。

但是一个特别注意的事实是，由于我们表示量子态是一个 ray。所以我们群乘法来说，可能会有一个相位的 ambiguity，也就是对于两个对称性变换 T_1, T_2 ，他们对应的对称性变换 Unitary 算符的乘法，和他们的复合对应的对称性算符可能差了相位：

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi_n(T_2, T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n. \quad (1.10) \quad \text{eq:phas}$$

Lemma 1. 相位与量子态无关

除了一种重要的特殊情况，由于算符的线性性，这个相位和作用的态没有关系，仅仅和对称性变换本身有关。

证明：

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)(\Psi_A + \Psi_B) &= U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B) \\ &= U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B \\ &= e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B. \end{aligned} \quad (1.11)$$

我们在等式两边乘上， U 的逆，我们就可以得到：

$$e^{\pm i\phi_{AB}}(\Psi_A + \Psi_B) = e^{\pm i\phi_A}\Psi_A + e^{\pm i\phi_B}\Psi_B, \quad (1.12)$$

因此之后相位和量子态无关的时候才能成立。所以我们才能写作 eq. (1.10) 的形式。

讨论 1: 并非严格群表示而是 projective rep

所以其实 U 并不是严格满足群的变换关系，只是 $\phi = 0$ 的时候才严格作为一个对称性变换群的表示。数学上，差个相位被称为：projective representation。一般的李群的结构能够告诉我们这个群是否有 projective rep。所以我们就知道他对应的对称性变换算符会不会是 projective 的。

讨论 2: 上方证明的例外

例外的情况是，有的时候两个态是不能够进行叠加的。

Remark:

原则上 Hilbert 空间上的向量都是可以进行叠加的。但是有一些叠加的方式我们认为非物理的。

一个重要的例子就是，整数和半整数自旋的态是不能够进行叠加的。同样的，对于一个表示如果我们计算出来相位和某一个物理量有关，那么，我们知道，这个物理量不同的量子态是不能够进行叠加的。

这样的话，对于不能互相叠加的态，我们可以分成很多类，每一类可以有自己一个独特的相位。但是我们也知道，对于一个有 projective rep 的李群来说，这个群可以进行扩展成为一个所有表示都可以是 non-projective 的群。所以我们目前可以只考虑 $\phi = 0$ 的情况。

1.2.3 Connected Lie Group

存在一系列群，联通李群，对于物理十分重要。这个群存在两个特别特殊的性质：

- 这个群的元素可以用一组有限多个实数进行描述 θ^a 。并且每一个元素都和 Identity 是道路联通的。

- 这个群的复合可以使用这样的函数进行描述： $T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta))$ ，其中函数满足，当一个 θ 是 0 的情况下： $f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = 0^a$ 。对于联通李群我们可以定义复合关系 $f(\bar{\theta}, \theta)$

Important: 复合规则

对于一个联通李群来说，由于我们已经很熟悉 \mathbb{R}^n ，我们这个群的【复合规则】实际上给出了一个从 \mathbb{R}^n 到群的映射。所以复合规则描述了群的所有结构。

Remark:

这里需要提示： f 是一个从 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 到 \mathbb{R}^n 的映射，其中 n 的取值就是 α 有多少个！！

并且注意对于复合规则这件事： $f(\bar{\theta}, \theta)$ 的映射可以定义是因为这个群元素是由 \mathbb{R}^n 空间进行描述的。所以，后面讨论这个 f 的都是对于由这样复合规则的群来说的。

对于一个联通李群来说，我们可以对于对称性变换算符进行展开：

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots, \quad (1.13) \quad \text{f eq: expa}$$

其中 t_a 和 $t_{bc} = t_{cb}$ 都是由几个指标标定的 Hermite 的算符，并且这个算符是一个常数，相当于展开的系数。当我们认为这个对称性算符给出了李群的表示（而不是 projective rep）的时候， $U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta}, \theta)))$ 。我们假设 $f(\bar{\theta}, \theta)$ 函数可以进行下面的展开：

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c + \dots \quad (1.14)$$

注意，我们这个展开没有 θ^2 项，否则就不能满足第二个条件了。我们对比左右两边的式子：

$$\begin{aligned} U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) &= \left[1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \dots\right] \times \left[1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots\right] \\ &= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c + \dots)t_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \dots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \dots)t_{bc} + \dots \\ &= U(T(f(\bar{\theta}, \theta))) \end{aligned} \quad (1.15)$$

我们给出：

$$\begin{aligned} (2.2.20) \\ \text{LHS} &= \bar{\theta}^a \theta^b t_a t_b + \dots \\ \text{RHS} &= f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b \bar{\theta}^c t_{bc} + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} \\ \Rightarrow &= \bar{\theta}^a \theta^b t_{ab} = f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c t_a + \bar{\theta}^b \theta^c t_{bc} \\ \Rightarrow &= t_{bc} = -f_{bc}^a t_a + t_{bc} \end{aligned}$$

因此有一个 nontrivial 的结论就是：

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f_{bc}^a t_a. \quad (1.16) \quad \text{f eq: nont}$$

也就是说，我们的 f_{bc}^a 给定，也就是给定李群的结构，二阶的展开的 Hermite 矩阵 t_{bc} 完全由一阶的矩阵 t_a 决定。

此外，有一个 consistency 的条件也就是， t_{bc} 对于两者指标必须是对称的，因为这个相当于二阶的泰勒展开的导数，需要时对称的。所以我们根据 eq. (1.16) 之中 $t_{bc} = t_{cb}$ 得到我们的一阶的 Hermite 矩阵需要满足下面的关系：

$$[t_b, t_c] = iC^a_{bc}t_a, \quad (1.17) \quad \text{eq:alge}$$

其中， C^a_{bc} 被称为结构常数，可以被下面求出来：

$$C^a_{bc} \equiv -f^u_{bc} + f^u_{cb}. \quad (1.18)$$

像是这样的对易关系 eq. (1.17) 我们称之为李代数。

Important: 李代数结构

下面我们将会知道，存在一系列类似于 eq. (1.16) 的恒等式，让我们可以通过李代数的生成元 t_a 得到所有的展开系数。

注意，我们并不是得到所有 θ 取值下面的 $U(T(\theta))$ ，而是，这个算符在 Identity 附近的一个临域内的展开。

Abelian group

存在一种特殊情况就是， $f^u(\theta, \bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a$. 线性的情况下，我们会发现， $f^a_{bc} = 0$ 并且同时也就满足： $[t_b, t_c] = 0$ 。这样的群我们称为 Abelian group。对于这样的群，我们知道 f 复合只是单纯的相加，所以我们可以把很多很小的 θ 加在一起。并对于这些很小的加和取极限，给出：

$$U(T(\theta)) = \left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right) \right]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{i}{N} \theta^a t_a \right]^N \quad (1.19) \quad \text{eq:dede}$$

根据指数函数的定义，我们会发现，对于 Abelian 的群来说，对应的所有对称性算符都需要满足下面的形式：

$$U(T(\theta)) = \exp(it_a \theta^a). \quad (1.20) \quad \text{eq:abli}$$

Remark:

这里我们学到了什么呢？

- 一系列对称性变换是通过联通李群进行描述的，是联通李群的表示
- 联通李群存在李代数结构，并且其行为可以很大程度在 Identity 附近被李代数描述。

Tip: 指数算符关系

其实算符写作 $U(T(\theta)) = \exp(it_a \theta^a)$ 的形式并不一定是要求整个完整的群是 Abelian 的。

而是，当群有一个 Abelian 的子群「并且包含 Identity」那么就是可以写作这个形式。

一般的常见的群其实都能够进行这个操作。比如：对于旋转群，虽然不是 Abelian 的，但是存在「绕固定轴旋转」这个子群，所以我们对于旋转群的元素对应的算符依旧可以写作这个形式。

1.3 量子 Lorentz 变换

狭义相对论告诉我们不同惯性系之间存在着一个特殊的坐标变换

Important: 惯性系坐标变换

惯性系之间坐标变换需要满足，对于不同的惯性系我们可以赋予直角坐标系，其坐标分量需要满足：

$$\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.21) \quad \text{eq:lorentz}$$

这里我们使用的记号 $\eta_{\mu\nu}$ 是一个矩阵，这个矩阵是对角的且满足：

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1, \quad \eta_{00} = -1 \quad (1.22)$$

这样的坐标变换保证了光速在所有的坐标系都是不变的。并且光速是 1。

Remark:

上面的式子很让人困惑，因为这是一个记号。我们有两种理解这个微元的方式：

1. 积分起来的结果：

我们把两边积分起来就是 $x^2 - t^2$ 。所以这个变换定义的是任意两个事件的时空间隔是不变的。

2. 求导的结果：

坐标变换矩阵保持 lorentz signature 的存在，也就是：

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.23)$$

其中， $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}$ 就是坐标变换的求导。

Tip: 为什么狭义相对论应该用洛伦兹变换

因为满足上面的变换关系： $\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ 的变换方式能够满足光速不变。这个式子积分起来就是：

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 \quad (1.24)$$

我们定义“光的传播”，是所有时空间隔为 0 的运动。因为我们选择的自然单位制度，所以光速为 1。因此光的时空间隔： $x^2 - t^2 = t^2(1 - 1) = 0$ 。所以不同参考系的光子的运动速度都是 1。

如果粒子运动比光速慢所以 $x^2 - t^2 = -m = x'^2 - t'^2$ 这样的话粒子的运动速度就并非是一个固定的数值。

Tip: 求和记号

我们的求和规则要求：1. 指标出现两次 2. 指标必须一个上一个下

Important: 洛伦兹变换条件

所有满足关系 eq. (1.21) 的坐标变换都会呈现下面的形式：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (1.25)$$

其中矩阵 Λ^{μ}_{ν} 是一个与空间位置无关的常数矩阵，需要满足【洛伦兹变换定义关系】：

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.26) \quad \text{eq:lorentz}$$

此外我们还有另外一种书写洛伦兹变换的方式。我们定义矩阵， $\eta^{\mu\nu}$ 是矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 的逆矩阵。这也是一个对角矩阵，并且：

$$\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1, \quad \eta^{00} = -1 \quad (1.27)$$

Remark:

我们对于一个矩阵来说，指标是有顺序的，因为这个对应了指标的基的张量积，张量积是不能换顺序的。所以我们写 Λ^{μ}_{ρ} 的时候上下两个指标务必错开。我们一般认为第一个指标是横向的，第二个是纵向的。

我们把洛伦兹变换定义关系 eq. (1.26) 两边同时乘以： $\eta^{\rho\tau} \Lambda^{\kappa}_{\tau}$ 我们有：

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} (\Lambda^{\nu}_{\sigma} \Lambda^{\kappa}_{\tau} \eta^{\sigma\tau}) = \Lambda^{\kappa}_{\rho} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\kappa} \Lambda^{\mu}_{\rho} \quad (1.28)$$

所以我们有【另一个洛伦兹定义变换关系】：

$$\Lambda^{\nu}_{\sigma} \Lambda^{\kappa}_{\tau} \eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa}. \quad (1.29)$$

1.3.1 洛伦兹变换和群

所有的洛伦兹变换构成一个群。一个洛伦兹变换可以写作： $T(\Lambda, a)$ 。不同洛伦兹变换的复合规则可以写作：

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a}) T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda} \Lambda, \bar{\Lambda} a + \bar{a}). \quad (1.30)$$

并且根据规则 eq. (1.26) 我们对于两边取行列式，我们有：

$$(\text{Det} \Lambda)^2 = 1 \quad (1.31)$$

这个矩阵存在逆元，我们把 eq. (1.26) 两边同时作用 $\eta^{\rho\sigma}$ ，等式右边是 Identity，左边是：
 $\eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\sigma\Lambda^\nu_\rho = 1$ 所以我们知道这个矩阵的逆元可以写作：

$$(\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \Lambda^\rho_\nu \equiv \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\sigma \quad (1.32) \quad \text{eq:invl}$$

Remark:

这里我们引入了一个升降指标的记号。我们特殊规定了两个上下指标的矩阵， $\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 下面，我们通过矩阵的乘法定义升降指标的其他张量。

并且注意，我们的求和是只能上指标和下指标进行求和的，由于我们的位置永远是上指标 x^μ 所以当作用洛伦兹变换的时候一定要和路韵伦子变换的矩阵的下指标进行求和的。

由于张量积是不能换顺序的，所以原则上 Λ_ν^ρ 和 Λ^ρ_ν 是两个不一样的矩阵。张量积的换顺序可以理解为矩阵的转置，所以这两个矩阵的元素其实差了一个转置。同时指标的上下位置也不同，说明还差了升降算符。

我们总结一下洛伦兹变换构成的群：

Important: 洛伦兹变换构成群

- 这个群的复合关系是： $T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$.
- 群的逆元是： $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ ，其中，矩阵 $(\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \Lambda^\rho_\nu \equiv \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\sigma$
- 群的单位元是： $T(Identity, 0)$

下面我们知道，洛伦兹变换作用在 Hilbert 空间上面的向量应该是一个线性的 Unitary 的算符： $U(\Lambda, a)$ 。我们认为复合过程是：

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) . \quad (1.33) \quad \text{eq:quantum}$$

同时我们会知道逆元是：

$$U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a) = U(Identity, 0) \quad (1.34)$$

当然为了保证没有一个相位的差距，我们需要 enlarge 这个洛伦兹变换的群，我们之后再进行讨论。这里我们默认已经做了这个操作。

1.3.2 洛伦兹变换的子群

inhomogeneous Lorentz group

对于这个群我们成为 Poincare 群，对于 $a^\mu = 0$ 的群我们称之为洛伦兹群，有着： $T(\bar{\Lambda}, 0)T(\Lambda, 0) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, 0)$ ，是一个子群，我们称之为 homogeneous Lorentz group；

根据行列式的大小，我们还可以区分更小的子群： $\text{Det} = +1$ or $\text{Det} = -1$ 这会给出两种不同的子群；

我们会发现，由于 eq. (1.26) 我们把求和完全写开「显然只有对角项进行求和」给出：

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 = 1 + \Lambda^0_i \Lambda^0_i. \quad (1.35) \quad \text{eq: dete}$$

所以我们会发现其实 $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ 。所以我们可以按照变换矩阵的 (Λ^0_0) 是大于 1 还是小于 -1 对于这个群元素进行分类。并且我们可以证明，两个大于 1 的 (Λ^0_0) 的洛伦兹变换矩阵的乘法依旧是大于 1 的。证明如下：

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 + \bar{\Lambda}^0_1 \Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^0_2 \Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^0_3 \Lambda^3_0; \quad (1.36)$$

同时我们知道 $\bar{\Lambda}^0_1 \Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^0_2 \Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^0_3 \Lambda^3_0$ 相当于 $(\Lambda^0_1, \Lambda^0_2, \Lambda^0_3)$ 矢量和 $(\bar{\Lambda}^0_1, \bar{\Lambda}^0_2, \bar{\Lambda}^0_3)$ 的内积，并且这两个矢量应该自身和自身的内积有 eq. (1.35) 决定，所以我们可以进行放缩：

$$|\bar{\Lambda}^0_1 \Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^0_2 \Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^0_3 \Lambda^3_0| \leq \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}, \quad (1.37)$$

所以我们有：

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 - \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1} \geq 1. \quad (1.38)$$

第二步的缩放使用了简单的 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 。

Important: proper orthochronous Lorentz group

所有满足 $\text{Det}(\Lambda) = 1$ 并且 $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ 的洛伦兹变换我们给一个名字。

我们知道有两个重要的性质：

- 所有的可以从 Identity 连续变换得到的洛伦兹变换都是 proper orthochronous 的
- 所有的洛伦兹变换都是 proper orthochronous 的或者可以通过 proper orthochronous 的洛伦兹变换成上一些离散变换得到。离散变换有两个，一个是 \mathcal{P} 空间反演变换；

$$\mathcal{P}^0_0 = 1, \mathcal{P}^1_1 = \mathcal{P}^2_2 = \mathcal{P}^3_3 = -1, \quad (1.39)$$

另一个是 \mathcal{T} 是时间反演变换：

$$\mathcal{T}^0_0 = -1, \mathcal{T}^1_1 = \mathcal{T}^2_2 = \mathcal{T}^3_3 = 1. \quad (1.40)$$

所以一般我们只考虑：proper orthochronous Lorentz group

Tip: 洛伦兹变换和一般 connected lie group 对应

我们的洛伦兹变换的矩阵其实仿佛一个参数矩阵，给出一个洛伦兹变换的 label，也就是联通李群的 θ^a 。

但是这个矩阵存在着一个约束方程，我们对于这个方程的分析告诉我们其实并不是每一个参数都是独立的。真正独立的参数是一个反对称矩阵 $\omega_{\mu\nu}$ 这里面的六个参数决定了洛伦兹变换。

我们注意所谓的 Λ 和 a 其实都是洛伦兹变换的「参数」，而不是「变换本身」。因为

变换本身是群元素或者群表示, 这个是「抽象的符号」而参数是「具体的数字」。

1.4 Poincare 代数

我们考虑 Identity 附近的无限小的 Lorentz 变换。我们可以有：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \alpha^\mu = \epsilon^\mu, \quad (1.41)$$

显然 $\omega^\mu{}_\nu$ 需要满足一定条件才能是洛伦兹变换。我们带入 eq. (1.26) 的公式

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu} (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho) (\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) \\ &= \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2). \end{aligned} \quad (1.42)$$

同样的升降指标我们使用 $\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 进行定义。所以, 我们得出：

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (1.43) \quad \text{\texttt{eq:rest}}$$

这是一个四阶反对称矩阵, 所以我们有 6 个独立的自由度 (对角项是 0, 其他只有一半是自由的)。所以洛伦兹变换其实是有 10 个独立的坐标的。我们意识到, 洛伦兹变换描述的参数空间似乎是 \mathbb{R}^{10} 的。作为联通的代数, 我们可以仿照之前 eq. (1.13) 的操作对于 $U(\Lambda, a)$ 进行展开, 显然应该对于所有的参数 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ϵ^μ 进行展开：

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (1.44) \quad \text{\texttt{eq:expa}}$$

展开得到下面的形式, 其中 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 是展开的 1 算符。同样的我们知道, 由于前面有 i 系数, 这两个算符必须是 Hermite 的才能保证 U 是一个 Unitary 的算符： $J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma}$, $P^{\rho\dagger} = P^\rho$ 。并且由于 $\omega_{\mu\nu}$ 是一个反对称矩阵, 所以 $J^{\rho\sigma}$ 必须也是对于两个指标是反对称的。

Remark:

我们这里角动量有个 1/2 是因为角动量我们求和, 因为是反对称的, 所以我们同意个 θ 的转动需要求和两次, 那么就需要 convention 有个 1/2 方便抵消了出现的 2 系数。

Remark:

后面我们会知道这些算符就是角动量, 动量算符以及哈密顿量。

Remark:

按理来说, 作为一个正常的洛伦兹变换对于参数进行展开应该写作：

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2} \delta_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (1.45)$$

但是 delta 函数的部分和反对称的特质保证了这个部分是 0。所以我们就手动删除了 delta 函数的项。但这不代表着这个项没有意义, 完整的展开要多写这一步的。

1.4.1 J, P 算符性质与代数

我们现在讨论这两个算符在洛伦兹变换下面的性质。我们计算：

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a), \quad (1.46)$$

计算方法就是使用 eq. (1.33) 的关系进行带入，将算符的运算变成矩阵的运算，然后就矩阵系数对于 P 和 J 算符进行展开。我们知道：

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \quad (1.47)$$

接下来有：

$$U(\Lambda, \alpha) \left[\frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho \right] U^{-1}(\Lambda, \alpha) = \frac{1}{2} (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu. \quad (1.48)$$

这里面涉及一个指标计算我们详细说明：

$$(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu} = (\Lambda\omega\Lambda^{-1})^\gamma{}_\nu \eta_{\gamma\mu} = \Lambda^\gamma{}_\rho \omega^\rho{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \eta_{\gamma\mu} \quad (1.49)$$

$$= \Lambda_\mu{}^\rho \omega_{\rho\sigma} \Lambda_\nu{}^\sigma \quad (1.50)$$

Tip: 求和记号仔细说明

1. 对于指标写法求和：

我们的求和规则要求：1. 指标出现两次 2. 指标必须一个上一个下

2. 升降指标的可能：

按理来说，指标本身上下位置就是固定的。位置和规范场就是 x^μ 上方指标，洛伦兹变换就是第一个上第二个下 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 。但是 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $\eta^{\mu\nu}$ 让我们可以形式化的定义升降指标，如果最后计算结果指标对不上，我们就升降一下。

3. 对于矩阵写法理解：

所有矩阵乘法要求的是，前一个矩阵的第二个指标和后一个矩阵的第一个指标进行求和。如果能写成矩阵写法，前后指标的升降应该是匹配的，如果不是匹配的，隐含的我们需要使用升降指标进行操作。两个相同指标同时升降并不影响

通过这样的方法，我们进行一个计算可以对比同样 $\omega_{\mu\nu}$ 系数的算符和 ϵ_μ 系数的算符的大小给出：

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu), \quad (1.51) \quad \text{eq:tran}$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu.$$

我们首先意识到 P 的算符指标就是一个 Tensor，因为这个算符的变换正好按照【指标的洛伦兹变换的逆变换】进行变换「我们注意 $\Lambda_\mu{}^\rho = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$ 」。而对于 J 来说，它并不是一个 tensor，它只有在 homogeneous lorentz transformation 也就是 $a^\mu = 0$ 的情况下是一个 tensor。

Remark:

对于一个矩阵，两个指标都是上或者下是一个很奇怪的事情。所以写成矩阵乘法的时候要小心，我们永远记住：矩阵乘法是前一个矩阵的第二个指标和后一个矩阵的第一个指标进行求和。

我们带入 eq. (1.44) 到公式 eq. (1.51) 里面之后 women 可以得到对易关系：

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} J^{\mu\sigma} + \omega_{\nu}^{\sigma} J^{\rho\nu} - \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho}, i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, P^{\rho} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu}. \quad (1.52)$$

如果我们对比所有系数之外的部分那么就有：

Important: Poincare 代数

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}, \quad (1.53) \quad \text{eq:poincar}$$

$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho}, \quad (1.54) \quad \text{eq:poincar}$$

$$[P^{\mu}, P^{\rho}] = 0. \quad (1.55)$$

这个是 Poincare 群的李代数。

Remark:

所以我们现在发现，对于洛伦兹变换给出的群的生成元之间的对易关系正好是 Poincare 群的李代数。就像是我们在 connected Lie Algebra 里面讨论的一样。

1.4.2 对易关系与守恒量讨论

物理里面，我们一般会关注守恒的物理量。对于量子力学来说就是和 Hamiltonian 对易的所有量。

我们会发现，对于我们洛伦兹变换的这些生成元来说，存在着六个守恒量。

$$\mathcal{P} = \{P^1, P^2, P^3\} \quad (1.56)$$

$$\mathcal{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \quad (1.57)$$

Remark:

注意角动量，并不是在矩阵的右上三角的，而是左下一个 (3, 1) 其他都是右上的。

在此之外的三个生成元 (除了 P_0 本身就是 Hamiltonian)，我们成为 boost 的生成元并

不是守恒量，我们直接给出这些生成元的对易关系是：

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, \\
[J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k, \\
[K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k, \\
[J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k, \\
[K_i, P_j] &= iH\delta_{ij}, \\
[J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = 0, \\
[K_i, H] &= iP_i.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

其中 ϵ_{ijk} 是 Levi-Civita 记号，保证 $\epsilon_{123} = 1$ 。

纯粹的平移构成了一个子群。也就是平移群，其复合关系是：

$$T(1, \bar{a})T(1, a) = T(1, \bar{a} + a). \tag{1.59}$$

我们会发现这个群的复合关系是 $f(\bar{a}, a) = \bar{a} + a$ 所以这个群是一个 Abelian 的。根据 eq. (1.20) 的结论我们会知道对于时空平移的洛伦兹变换，我们给出的结果是：

$$U(1, a) = \exp(-iP^\mu a_\mu). \tag{1.60}$$

同时对于转动，虽然转动并不是 Abelian 的。但是，我们知道绕着一个固定的方向进行转动是 Abelian 的。当我们确定一个方向之后，我们可以不断叠加绕着这个方向的转动，所以依旧可以使用 eq. (1.19) 里面的推导得到类似 eq. (1.20) 的结论：

$$U(R_\theta, 0) = \exp(iJ \cdot \theta). \tag{1.61}$$

1.4.3 Galilean 代数

我们已经讨论了洛伦兹变换构成了群，这个群存在李代数是 Poincare 代数。但同时，我们也知道，经典力学的 Galilean 变换也构成群。我们希望了解这个群的代数。显然我们可以从 Galilean 变换一步步推导：

Important: 从变换到代数推导

从一个对称性变换给出的群到代数的推导可以总结成为下面的步骤：

- 第一步：列出对称性变换，使用抽象的群符号表达，并且写出【复合规则】如 eq. (1.33)。得知群的全部结构「注意，所有复合规则的参数必须是独立的，我们一定要摸去约束，如 eq. (1.43)」。
- 第二步，由于代数生成元是联通李群对于参数的一阶展开，所以我们在 Identity 附近进行一阶展开，如 eq. (1.44)
- 第三步，研究假设的生成元在李代数下面变换的方法，给出对易子，eq. (1.53)

对易子也就告诉了我们代数的全部信息。

此外, 但是对于 Galilean 代数, 我们知道 Galilean 变换是 Lorentz 变换当光速趋近于无穷的极限。所以我们还有 Inonu-Wigner Contraction 的方法进行计算。这个方法分为下面步骤:

- 第一步: 把缺失的光速在算符上面补充出来。比如: 我们洛伦兹变换的四矢量有些在单独作用的时候会出现 c 的系数, 比如 $P^0 = H/c$ 我们只是取 $c = 1$ 才忽略的。现在我们在算符之中把这个补回来, 其实等价于我们最开始进行洛伦兹变换的计算的时候系数带着 c 但是, 我们把 c 不算在系数里面算在算符里面。
- 第二步, 对于每一个算符运算取 $c \rightarrow \infty$ 的极限。

等价的, 我们也可以使用 $v = v_0/c$ 作为标记, 因为我们的选择自然单位制所以我们写下的速度都是 v 下面我们使用 v_0/c 进行替换: $P \sim mv$, $J \sim 1$, $H = W + M$ 其中动能项 $W \sim mv^2$, 然后作为 boost 的变换, 我们观察洛伦兹变换存在 $\gamma \sim 1/v$ 所以 $K \sim 1/v$ 综上我们趋近于 $v = v_0/c \rightarrow 0$ 可以得到下面的结果:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, & [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k, & [K_i, K_j] &= 0, \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k, & [K_i, P_j] &= iM\delta_{ij}, \\ [J_i, W] &= [P_i, W] = 0, & [K_i, W] &= iP_i, \\ [J_i, M] &= [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0, \end{aligned} \quad (1.62)$$

对于 Galilean 群来说 Boost 存在「朝着同一方向加速」这个子群是 Abelian 的, 所以我们可以把 Boost 写成指数的形式: $\exp(iK \cdot v)$ 。我们研究一个体系先进行平移再进行加速:

$$\exp(iK \cdot v) \exp(-iP \cdot a) = \exp(iMa \cdot v/2) \exp(i(K \cdot v - P \cdot a)). \quad (1.63)$$

这里的推导使用了下面的 BCH 恒等式:

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots\right) \quad (1.64)$$

我们会发现, 根据对易关系。上面的 Galilean 群的表示是一个 projective rep。其中系数是: $\exp(iMa \cdot v/2)$ 除了群元素本身还跟所作用的量子态的质量相关。所以, 我们意识到, 对于 Galilean 变换, 不同质量的量子态是不能够进行叠加的。但是我们会发现, 其实如果在 Galilean 代数再添加一个生成元, 我们的理论会没有 projective rep。

Important: 动量角动量算符与展开

我们之前一直认为 J , P 什么的都是洛伦兹变换对应算符的展开一阶项, 甚至引入光速也是因为从系数放过去而已。但是问题上, 其实这些算符作为 Hermite 算符很可能是客观测量。

实际上他们就是客观测量, 并且严格对应的动量和角动量算符。为什么可以确定说呢? 因为所有李代数的关系由对易关系完全决定, 可以发现, 我们所有的量子力学计算都是基于对易关系的。哪怕是具体表示的计算也是选择一个正好满足这个对易关系的数学结构。

当我们发现两个算符对易关系完全一致的时候那么我们可以认为是同样的算符。当然, 为了确信这一点, 我们可以使用一个单粒子态计算平移后的样子。以及注意: $x_\mu =$

$\{-t, x_i\}$ 所以时间方向会有个负号嗷!!!

1.5 单粒子态

1.5.1 单粒子态的分类 & Wigner Little Group 方法

我们对于单粒子态进行分类。我们可以以对于洛伦兹变换的不同变换方式对于量子态进行分类。我们知道能动量四矢量是互相对易的, 所以我们一般定义一个粒子处于动量算符本征态「由于确定动量本征态就不能测量其他叫动量算符的本征态的, 所以我们不考虑」:

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma}. \quad (1.65)$$

Important: 测不准原理

显然根据测不准原理, 只能选择一组互相对易的算符表征量子态。很好的一些选择是, 位置算符, 角动量算符, 动量算符。我们选择动量算符是因为, 位置算符和 Hamiltonian 并不对易, 角动量算符虽然对易但是自身并不对易。所以, 只有动量是最自然的选择。当我们说单粒子态, 我们指的是确定动量的单粒子态。

我们定义 σ label 的其他量子数都是离散的。下面, 我们考虑洛伦兹群作用在一个单粒子态上面会发生什么。对于平移算符十分显然:

$$U(1, a) \Psi_{p,\sigma} = e^{-ip \cdot a} \Psi_{p,\sigma} \quad (1.66)$$

只会让这个态多出一个相位捏。如果作用洛伦兹变换矩阵算符:

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda) [U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)] \Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda) ((\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho P^\rho) \Psi_{p,\sigma} \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

中间我们使用了洛伦兹变换的逆矩阵的记号 eq. (1.32)。其中 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho = \Lambda^\mu{}_\rho$ 。所以, 作用洛伦兹转动算符, 相当于把粒子的动量进行一个洛伦兹变换的转动。这就十分的物理了!! 但问题是, 我们现在知道 $U(\Lambda)$ 对于 p 指标的作用, 可是不知道对于 σ 指标的作用是什么样子, 我们不妨认为是对于所有离散的 σ 指标进行叠加, 我们下面有 ansatz:

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (1.68)$$

显然, 我们可以选择一系列的 $\Psi_{\Lambda p, \sigma'}$ 保证是对于洛伦兹变换是 block diagonal 的「其实就是找到一组不可约不等价表示捏」。所以我们不如就考虑洛伦兹群的离散不等价不可约表示有哪些吧! 而这些表示的表示空间一定程度直和可以构建出一个单粒子的其他自由度!!

我们意识到, 洛伦兹变换根据约束 eq. (1.26) 并不会改变四矢量的模长, 也就是动量的大小, 并且对于 proper orthochronous lorentz transformation 在 $p^2 \leq 0$ 的情况也不会改变 p^0 的符号。所以我们似乎可以定义标准四矢量动量。为每一个确定的模长以及 p^0 负号, 规定

一个标准四矢量 k^μ 然后我们使用一个和洛伦兹变换算符表征 p 「也就是 p 是从 k 变过去的」：

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}, \quad (1.69)$$

Remark:

注意： $L(p)$ 不是一个一般的洛伦兹变换，而是一个【仅仅作用在 p 指标的洛伦兹变换】而不作用在 σ 指标上面。是一个抽象的符号！！

但是！！当我们写成 L^μ_ν 的时候，意思是， $L(p)$ 仅仅考虑这个抽象的符号在动量空间上面的表示，那么就是洛伦兹变换的 Λ^μ_ν 的一个元素，这个元素保证：

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu \quad (1.70)$$

L^μ_ν 就是矩阵系列 Λ^μ_ν 的一个元素。同样的 W 也是，就是写作符号是一个 little group 的抽象元素，但是写成 W^μ_ν 就是一个正常的洛伦兹变换的矩阵！

其中 $N(p)$ 是一个归一化系数。下面我们进行一个等价推导：

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (1.71) \quad \text{eq:sepa}$$

我们意识到洛伦兹变换 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 其实就是把 k 变换到自己。 $W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$ 。所以，洛伦兹变换存在一个子群，让所有 k 都变换回自己，这个子群我们称之为 little group。讨论这个的意义是，little group 的元素其实并不对 k 有作用只对于 p 有作用。

Important: Little Group

Wigner 的 Little Group Method 十分的重要。其中 Little Group 是一个洛伦兹群的子群。这个子群保证了对于 k^μ 不变。
这个群的意思其实是保证不改变粒子种类的洛伦兹变换。也就是不从一个质量的粒子映射到另一个质量的。所以

Remark:

式子 eq. (1.71) 的意义是，我们把算符 $U(\Lambda)$ 分成了两个部分。第一个部分我们只作用于动量指标；第二个部分我们纯粹作用于 σ 指标。

于是我们定义 little group 的部分的作用是：

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}. \quad (1.72)$$

系数 $D_{\sigma'\sigma}(W)$ 构成了这个 little group 的一个表示。我们下面证明，至少复合关系是对的：

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma'} = U(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma} = U(\bar{W})U(W)\Psi_{k,\sigma} \quad (1.73)$$

$$= U(\bar{W}) \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''} = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})\Psi_{k,\sigma'} \quad (1.74)$$

所以我们有：

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W}) D_{\sigma''\sigma}(W). \quad (1.75) \quad \text{\texttt{eq:little}}$$

我们前面知道 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 变换构成了 little group 的一个元素，这样的元素，我们可以 label 为 $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 所以公式 eq. (1.71) 可以写成：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) U(L(\Lambda p)) \Psi_{k,\sigma'}, \quad (1.76)$$

也就是：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (1.77) \quad \text{\texttt{eq:transform}}$$

Tip: method of induced representations

我们进行了一个转化。我们原本计划是找 Poincare 群或者 Lorentz 群对应 σ 表示空间的表示。

我们现在根据 k 进行了一个分类。我们确定 k 的粒子，我们需要找的是这个 k 对应的 little group 的不等价不可约表示。这个表示就是我们的系数 D 。对于不同的 k 可能对应不同的 little group，于是找到不同的不等价不可约表示。

这个操作技巧就是：method of induced representations

下面就是不同的 little group 的样子：只有第一个第三个和最后一个是物理的「也就是

	Standard k^μ	Little Group
(a) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 > 0$	$(0, 0, 0, M)$	$SO(3)$
(b) $p^2 = -M^2 < 0, p^0 < 0$	$(0, 0, 0, -M)$	$SO(3)$
(c) $p^2 = 0, p^0 > 0$	$(0, 0, \kappa, \kappa)$	$ISO(2)$
(d) $p^2 = 0, p^0 < 0$	$(0, 0, \kappa, -\kappa)$	$ISO(2)$
(e) $p^2 = N^2 > 0$	$(0, 0, N, 0)$	$SO(2, 1)$
(f) $p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$SO(3, 1)$

物理上我们找到有这样的粒子」。第一个是有质量的粒子；第三个是光子；最后一个是真空。

1.5.2 归一化讨论

一般量子力学里面我们选择下面的归一化，对于标准 k 矢量来说是【正交归一的】：

$$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(k' - k) \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (1.78)$$

Remark:

注意，对于动量的本征态来说，所有的态必须是正交的。因为动量算符是 *Hermite* 的，所以所有本征态都应该是正交态。但是并不一定是归一的。所以我们这里讨论的就是归一化问题，因为正交性是 *Trivial* 的。

这个归一化选择的直接结果是我们的 D 矩阵是 *Unitary* 的矩阵：

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W). \quad (1.79)$$

并且考虑两个不同的单粒子态这里是一般的 p 矢量进行内积，我们有：

$$\begin{aligned} (\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) &= N(p) (U^{-1}(L(p)) \Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) \\ &= N(p) N^*(p') D(W(L^{-1}(p), p'))_{\sigma\sigma'}^* \delta^3(k' - k) \end{aligned} \quad (1.80)$$

第二步骤我们用式子 eq. (1.93) 进行代数，其中求和因为 δ 符号所以没了「这里使用了不同动量本征态的正交性」。注意！我们这里 $k' = L^{-1}(p)p'$ 是一个特别奇怪的矢量。所以我们的归一化系数 $N(p')$ 其实也是相对于 k' 来说的。

我们注意到，当 $k' = k$ 的时候自然有 $p' = p$ 。而当 $p' = p$ 的时候，我们会发现讨论 $D(W(L^{-1}(p), p))_{\sigma\sigma'}$ 相当于讨论 $L(p)$ 变换对于 σ 的影响，但是问题是所有 L 变换从定义上不影响 σ 。所以我们的 D 矩阵必须是 *trivial* 的。所以一般两个单粒子态的内积就是：

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(k' - k). \quad (1.81) \quad \text{eq:inne}$$

下面我们要考虑 $\delta^3(k' - k)$ 以及 $\delta^3(p' - p)$ 的关系。为此 δ 函数其实是通过积分定义的，我们先需要说怎么在动量空间上面进行积分。

Important: 物理的动量空间积分

物理上，我们对于动量空间进行积分的时候不能够积分完整的动量空间。因为动量空间有一些部分是非物理的，如果进行积分的话是没有任何意义的。所以我们仅仅对【可能是粒子的动量进行积分】这需要满足三个条件：

- 粒子是 *on shell* 的也就是 $-p^2 = M^2 \geq 0$
- 我们只对【同一种粒子考虑积分】也就是我们积分的时候【固定粒子的质量 M 】
- 粒子的能量大于 0 也就是 $p^0 \geq 0$

所以我们限制自己在这个区间内部进行积分：

$$\begin{aligned}
 & \int d^4p \delta(p^2 + M^2) \theta(p^0) f(p) \\
 &= \int d^3p dp^0 \delta((p^0)^2 - p^2 - M^2) \theta(p^0) f(p, p^0) \\
 &= \int d^3p \frac{f(p, \sqrt{p^2 + M^2})}{2\sqrt{p^2 + M^2}}
 \end{aligned} \tag{1.82}$$

这个积分第二部我们使用了 delta 函数的性质：

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad \text{where } g(x_i) = 0 \tag{1.83}$$

我们会发现，这个要求不仅仅是我们需要限制我们的积分函数是 on shell 的。我们还需要有一个 on shell 的体积元：

$$d^3p / 2\sqrt{p^2 + M^2}. \tag{1.84}$$

这就是为什么我们量子场论使用的积分测度是：

$$\int \frac{d^3p}{E_p} \tag{1.85}$$

这个样子的，因为要在 on shell 的情况下进行积分。并且这个积分测度我们认为是【洛伦兹不变积分测度】因为：

- 首先， d^4p 这个积分测度应该是洛伦兹不变的。因为进行洛伦兹变换的时候变换矩阵是 Λ^μ_ν ，这是一个行列式为 1 的矩阵所有 Jacobi 行列式是 1。因此是洛伦兹不变的
- 下面我们考虑 $\delta(p^2 + M^2)\theta(p^0)$ 这两个函数是洛伦兹不变的。这是显然的。
- 根据这几个洛伦兹不变函数变换出来的积分体积元应该也是洛伦兹不变的。

Tip: 上面的测度告诉我们什么

我们在相对论里，on shell 的四维的积分其实可以等价于一个三维的约束下的积分。对于一个四维的标量函数的积分其实可以等价于一个三维标量函数的积分。

这意味着所有 on shell 的积分呐我们需要有这样的一个 weight 才能合理的进行积分。对于全空间的积分我们可以定义 delta 函数是：

$$F(p) = \int F(p') \delta^3(p - p') d^3p' \tag{1.86}$$

下面我们想定义一个 delta 函数，让其在洛伦兹变换下形式不变【协变】。

由于 delta 函数积分结果不论任何洛伦兹变换都是 1。所以 delta 函数积分结果永远是一个洛伦兹不变量。但问题是，积分测度 d^3p 在洛伦兹变换下会进行改变的。所以我们需

要一个洛伦兹不变的积分测度，因此我们形式化这么写：

$$\begin{aligned} F(p) &= \int F(p') \delta^3(p - p') d^3 p' \\ &= \int F(p') \left[\sqrt{p'^2 + M^2} \delta^3(p' - p) \right] \frac{d^3 p'}{\sqrt{p'^2 + M^2}} \end{aligned} \quad (1.87)$$

最后构造出来的洛伦兹不变 delta 函数是：

$$\sqrt{p'^2 + M^2} \delta^3(p' - p) = p^0 \delta^3(p' - p). \quad (1.88)$$

因此，根据这个函数的洛伦兹不变性我们了解到：

$$\sqrt{p'^2 + M^2} \delta^3(p' - p) = p^0 \delta^3(p' - p). \quad (1.89) \quad \text{eq:tran}$$

所以我们将其带入之前对于任意动量的态内积的结果的定义 eq. (1.81) 我们就会发现，归一化系数呈现下面的形式：

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \left(\frac{p^0}{k^0} \right) \delta^3(p' - p). \quad (1.90)$$

如果我们希望归一化关系是洛伦兹不变的。那么我们可以设置归一化系数为：

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0} \quad (1.91)$$

这样子任意两个单粒子态进行内积的结果是：

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(p' - p). \quad (1.92)$$

Tip: 归一化为何不唯一

量子力学之中，我们的归一化方式是可以自行选取的。只要保证单粒子态在量子数不同的时候都是正交的「这是客观测量 Hermite 的性质决定的」。但是这个之外，我们其实有很大程度的操作自由度。因为 Hilbert 空间的内积其实并不一定是良好唯一定义的。

我觉得这个值得思考慢慢讨论。

Remark:

注意我们的 convension 记号：

- 当我们使用加粗的 p 的时候，其实说的都是三维度的向量
- 当我们写 p_i 而不是用 p^μ 的时候我们考虑的都是前三个维度，并且前三个维度上下指标的数值一样 !!! 所以我们不区分上下指标 !!

1.5.3 关于具体旋转变化

之前我们讨论洛伦兹变换的时候 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$ 当我们写下这个部分的时候我们使用的就是一个抽象的变换矩阵的记号。并没有给出一个具体的形式。我们考虑的是给一个合理的 Λ^{μ}_{ν} 矩阵我们都可以给出一个量子态的变换关系。

一个抽象的矩阵变换关系是没有物理意义的。物理意义是人看到赋予的。比如，我们给定洛伦兹变换矩阵是一个旋转矩阵。那么，我可以翻译成这个变换【对应着观察者转动角度看到的样子】。也或许对应着物体往反向旋转看到的样子!!!

这些话都是人为翻译的。我们需要的是，把他们翻译成合理的洛伦兹变换的矩阵。那么我们现在就来看看：「物体转动 θ 角度对应的洛伦兹变换矩阵是什么样子的！」

Tip: 旋转矩阵具体形式

学习一下呃呃呃，我真的不知道 Θ_{ij} 是个什么东西???

对于一般旋转来说，数学上我们的旋转矩阵的 convention 是这样的【注意：Weinberg 用的不是这个 convention】。对于绕 x 轴的旋转我们有：

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

对于绕 y 轴的旋转有：

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

【注意我们右手系的顺序是，123，所以看看 $-\sin \theta$ 在哪个位置!!】对于绕 z 轴的旋转有：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于一般旋转就是这样的三个旋转的组合所以就是：Rodrigues 公式（绕单位轴 $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 旋转角度 θ ）：

$$R(\hat{n}, \theta) = I + \sin \theta K + (1 - \cos \theta) K^2$$

其中 K 是 \hat{n} 的反对称张量形式：

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

对于无穷小的转动，我们有将 $\theta \rightarrow 0$ 在这样的极限下面我们有：

$$R(\boldsymbol{\theta}) \approx I + \theta^i J_i + \mathcal{O}(\theta^2)$$

这就是无穷小旋转矩阵。其中：

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Weinberg 的 convention 和这个相差了一个转置。但这没有什么意义，就是写一个矩阵而已。这么写矩阵有个好处，就是作一阶展开的时候，下面定义的 Θ_{ij} 都是正的，也就是 $\Theta_{ij} = \theta_k \epsilon_{ijk}$ 其中 θ 是以顺时针为正方向「也就是转置之后」的变化角度 θ 。

1.5.4 正质量粒子

对于正质量的粒子来说 little group 是 $SO(3)$ 群，也就是我们的三维的旋转群「这很合理，因为三个维度怎么转必然不影响第四个维度的 M ，也就是没有 Boost 的纯转动群」。所以当我们考虑单粒子态的 Hilbert 空间的矢量在 Lorentz 变换下面的运动的时候，如果我们具体写出来：

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (1.93) \quad \text{\texttt{eq:tran}}$$

其中归一化我们选择 $N(p) = \sqrt{k^0/p^0}$ 。我们知道： $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))$ 是 $SO(3)$ 群的有限维不等价不可约表示。

为了计算 $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))$ 我们需要解决两个问题：

- 这个样子的洛伦兹变换到底对应了什么量子矩阵 $U(W)$
- 哪一个 W 的元素对应了 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 也就是， $W(\Lambda, p)$ 洛伦兹变换呈现什么样子？

Important: 回答第一个问题， $SO(3)$ 群表示

数学上的研究告诉我们， $SO(3)$ 群的表示可以用 $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ 进行 label，并且表示是 $d = 2j + 1$ 的。对于一个无限小的转动 R ，显然这个是 W 群的元素也是洛伦兹群的一个元素，我们的 D 矩阵可以写出具体的数值。旋转矩阵： $R_{ij} = \delta_{ij} + \Theta_{ij}$ 其中 $\Theta_{ij} = -\Theta_{ji}$ 。这个矩阵应该是一个合理的洛伦兹变换的矩阵之中空间旋转的某一个。表示满足下面的关系：

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(1 + \Theta) = \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2} \Theta_{ik} (J_{ik}^{(j)})_{\sigma'\sigma}, \quad (1.94) \quad \text{\texttt{eq:Dtrans}}$$

这里面，我们使用了一个 J 算符定义是：

$$(J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_1^{(j)} \pm iJ_2^{(j)})_{\sigma'\sigma} \quad (1.95)$$

$$= \delta_{\sigma', \sigma \pm 1} \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}, \quad (1.96)$$

$$(J_{12}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sigma \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (1.97)$$

其中 σ 的取值是 $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ 。

Remark:

上面给出的是无限小的变换，但是，我们知道，绕某一个方向转动都是 Abelian 的，所以都可以写成 $U(R_i(\Theta_{jk})) = e^{(i/2)\Theta_{jk}J_{jk}^m}$ 的形式。然后根据 D 矩阵的复合关系 eq. (1.75) 我们可以知道，任何转动其实都是绕 x 轴转动和 z 轴转动的复合。所以就可以求出来一般的转动的结果了。

Important: 回答第二个问题

STEP 1: 首先，我们必须 fix 一个 standard momentum。对于有质量的粒子，我们一般选择 $k^\mu = (0, 0, 0, M)$ 这个向量。

STEP 2: 下面我们给出一个标准的 $L(p)$ Boost 形式。显然 $L(p)$ 并不是唯一选取的，我们需要进行一个合理规定：

$$\begin{aligned} L^i_k(p) &= \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k, \\ L^i_0(p) &= L^0_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1}, \\ L^0_0(p) &= \gamma, \end{aligned} \quad (1.98)$$

其中参数是：

$$\hat{p}_i \equiv p_i/|p|, \quad \gamma \equiv \sqrt{p^2 + M^2}/M \quad (1.99)$$

有了这些规则，我们可以从定义计算出每一个 Λ 以及 p 对应的 Little Group 了！

STEP 2(exception): 我们进行一个观察，发现，对于三维度的空间旋转变换也就是 Λ^μ ，是仅仅有三维空间旋转变换，我们记作 \mathcal{R} 。Little group 的元素本身就是对应的 $W = \mathcal{R}$ 。就是这两个矩阵是一模一样的：

$$W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R} \quad (1.100)$$

【证明请回去看 Weinberg pg 69】

Remark:

所有 W 的元素其实都是三维度转动的元素之一，不论 $W(\Lambda, p)$ 里面的 Λ 是什么洛伦兹变换。但是，如果刚好 Λ 没有 boost 就是一个三位的旋转变换，那么无论 p 的取值

是多少都满足： $W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R}$ 。

因此，相对论的有质量的粒子的旋转变换下的变换关系和 *naively* 我们规定的量子力学的 $SO(3)$ 群表示的变换关系是一模一样的。我们可以直接从非相对论的量子力学的东西挪过去。

所以我们知道对于一个质量 $M > 0$ 并且 $spin\ j$ 的粒子来说，洛伦兹变换作用在量子态上面呈现为：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}, \quad (1.101)$$

【我们这里使用之前的那个归一化！】并且注意 *little group* 的元素定义是：

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p). \quad (1.102)$$

1.5.5 无质量粒子

同样的我们需要研究这个 *Little Group* 是个什么。我们一般选择的标准 4 动量是： $k^\mu = (0, 0, 1, 1)$ ，所以根据 *Little Group* 的定义就是那些满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ 的洛伦兹变换矩阵。我们考虑这样的矩阵需要满足什么性质。数学上我们意识到这样的矩阵作用在另外的一个向量 $t^\mu = (0, 0, 0, 1)$ 上面需要满足下面的性质：

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1, \quad (1.103)$$

$$(Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1. \quad (1.104)$$

满足第二个条件的矩阵我们知道可以写作下面形式：

$$(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1 + \zeta) \quad (1.105)$$

然后我们把这个 *ansatz* 带入第一个式子，我们得到： $\zeta = (\alpha^2 + \beta^2)/2$ 所以我们会发现，满足下面两个条件 1. 是一个 *lorentz transformation* 矩阵；2. 作用在 $(0, 0, 0, 1)$ 和 $(0, 0, 1, 1)$ 向量上面结果是对的。这完全决定了一个矩阵的形式是：

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix}. \quad (1.106) \quad \text{\texttt{\{eq: Smat}}}$$

但这并不意味着 S 就是 W 。这仅仅告诉我们，将 $S^{-1}W$ 作用在 k^μ 以及 t^μ 向量上面会使其不变。所以，我们会发现 W 其实有更多的自由度，就是绕着第三个维度进行旋转的自由度，由于洛伦兹变换的要求，所以只能是旋转矩阵：

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta), \quad (1.107)$$

其中旋转矩阵的样子大概是：

$$R^\mu{}_\nu(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.108) \quad \text{\texttt{\{eq:Rmat}}$$

Important: 无质量粒子的 Wigner Little Group 元素

因此，我们可以定义无质量粒子的 Wigner Little Group 的形式就是：

$$W(\theta, x, \beta) = S(x, \beta)R(\theta). \quad (1.109)$$

其中涉及的两个洛伦兹变换矩阵是：eqs. (1.106) and (1.108)。我们分析这个群的结构。我们意识到：

- S 和 R 矩阵，独立的构成的都是 Abelian 的群。也就是说独立的复合关系是：

$$S(\bar{\alpha}, \bar{\beta})S(\alpha, \beta) = S(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta), \quad (1.110) \quad \text{\texttt{\{eq:compose}}$$

$$R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\bar{\theta} + \theta). \quad (1.111) \quad \text{\texttt{\{eq:compose}}$$

- 仅仅有 S 构成的群是一个不变子群，也就是整个大的群任意元素变换 S 子群的元素结果都是 S 子群的元素。具体的写出来就是：

$$R(\theta)S(\alpha, \beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta). \quad (1.112) \quad \text{\texttt{\{eq:invaria}}$$

根据这个性质，我们可以计算出所有群元素的乘积的复合关系。这个群正是 $ISO(2)$ 群。

从群论的视角，所有没有 Invariant (不变的) Abelian Subgroup 的群都是半单的。所以我们知道， $ISO(2)$ 群显然比较复杂。我们考虑这个群的李代数。由于这个群是洛伦兹群的子群，所以我们显然可以进行一个无限小的展开：

$$W(\theta, \alpha, \beta)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.113) \quad \text{\texttt{\{eq:inva}}$$

我们之前定义的洛伦兹变换如果写成上面式子这样的形式，那么量子的洛伦兹变换的展开应该呈现：eq. (1.44)。所以我们自然知道这个群的量子的洛伦兹变换呈现：

$$U(W(\theta, x, \beta)) = 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3 \quad (1.114)$$

其中：

$$A = -J^{13} + J^{10} = J_2 + K_1, \quad (1.115)$$

$$B = -J^{23} + J^{20} = -J_1 + K_2, \quad (1.116)$$

其中，我们知道三维的两个反对称指标可以使用一个指标进行表示。我们的 convention 是 $J_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k$ 。根据我们之前推出的洛伦兹变换生成元的对易关系：eq. (1.58) 我们知道：

$$\begin{aligned} [J_3, A] &= +iB, \\ [J_3, B] &= -iA, \\ [A, B] &= 0. \end{aligned} \quad (1.117)$$

我们会发现原来 A, B 是两个互相对易的算符，所以我们可以用这两个算符的一组共同本征值作为量子态的 label, $\Psi_{k,a,b}$ ：

$$A\Psi_{k,a,b} = a\Psi_{k,a,b}, \quad (1.118)$$

$$B\Psi_{k,a,b} = b\Psi_{k,a,b}. \quad (1.119)$$

但是同时根据 eq. (1.112) 我们知道，如果对于算符 A, B 作用上量子的转动变换我们可以得到：

$$\begin{aligned} U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)] &= A \cos \theta - B \sin \theta, \\ U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)] &= A \sin \theta + B \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.120)$$

所以说，对于任意的一个非 0 的 A, B 本征态的量子态。我们其实是可以通过转动生成无限多个本征态的，我们标记为 $\Psi_{k,a,b}^\theta$ 。注意：这个量子态并不是转动的 J 的本征态仅仅是拿一个转动角度标记的量子态。这一系列量子态的本征值是：

$$A\Psi_{k,a,b}^\theta = (a \cos \theta - b \sin \theta)\Psi_{k,a,b}^\theta, \quad (1.121)$$

$$B\Psi_{k,a,b}^\theta = (a \sin \theta + b \cos \theta)\Psi_{k,a,b}^\theta, \quad (1.122)$$

并且和原本的量子态的关系是：

$$\Psi_{k,a,b}^0 \equiv U^{-1}(R(\theta)) \Psi_{k,a,b}. \quad (1.123)$$

但问题是我们在实验上面并没有发现没有质量的粒子存在这样连续的量子态。所以我们下面给出真正的物理的 Hilbert 空间：

Important: 无质量粒子的 Hilbert 空间

无质量的粒子所在 Hilbert 空间是 A, B 算符本征值为 0 的 Hilbert 子空间。由于对于这个空间来说， A, B 从算符退化为了一个具体的数字 0。所以对于这个空间来说 J_3 其实和 A, B 算符是对易的，可以有共同本征值，我们记为 $\Psi_{k,\sigma}$ 这个空间之中的向量满足：

$$A\Psi_{k,\sigma} = B\Psi_{k,\sigma} = 0. \quad (1.124)$$

$$J_3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}. \quad (1.125)$$

注意，我们之前定义的标准的是 $(0,0,1,1)$ ，所以， σ 是绕着 k 方向的转动。也就是绕着运动方向转动的角动量，被称为 Helicity！

我们上面确认了无质量粒子的 Hilbert 空间是什么。下面，我们计算一般的 Lorentz 变换下面无质量粒子是怎么变换的。对于 Little Group 之外的变换就是 eq. (1.71) 里面这样使用 L 直接对于动量进行变换。还是那两个问题：为了计算 $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))$ 我们需要解决两个问题：

- 这个样子的洛伦兹变换到底对应了什么量子矩阵 $U(W)$
- 哪一个 W 的元素对应了 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 也就是， $W(\Lambda, p)$ 洛伦兹变换呈现什么样子？

Important: 回答第一个问题，两个子群的表示

首先，作为 Abelian 的子群我们可以写作：

$$U(S(\alpha, \beta)) = \exp(i\alpha A + i\beta B) \quad (1.126)$$

$$U(R(\theta)) = \exp(iJ_3\theta) . \quad (1.127)$$

所以对于一个洛伦兹变换可以写成这两个变换的复合，然而根据 eq. (1.75) 我们的 little group 的元素的乘法体现在 U 表示上也是直接乘法。

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\beta B) \exp(i\theta J_3)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k,\sigma} \quad (1.128)$$

因此我们的 D 矩阵形式化的可以表达为：

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma}, \quad (1.129)$$

整体写出变换规则就是：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p,\sigma} \quad (1.130)$$

这下我们回答了第一个问题。

Important: 回答第二个问题

而对于第一个问题，我们讨论 $\theta(\Lambda, p)$ 到底怎么求解。就是反向解这个方程：

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \equiv S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)) R(\theta(\Lambda, p)) . \quad (1.131)$$

注意，我们这里是规定 convention 的。所有的 S, R 矩阵需要是和上面对应：eqs. (1.106) and (1.108)。

Remark:

我们之后意识到 α, β 和规范对称性有关系。然后，这里看起来 σ 的取值应该是连续实数的，后面我们会意识到这个只能去正整数或者半正整数。

为了能够反解决这个方程我们依旧需要一个标准的 $L(p)$ 洛伦兹变换，把 $k^\mu =$

$(0, 0, \kappa, \kappa)$ 变换成任意的四矢量 p^μ 。就像有质量的粒子一样，但是这里我们使用的是：

$$L(p) = R(\hat{p})B(|p|/\kappa) \quad (1.132)$$

其中矩阵 B 是：

$$B(u) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2 + 1)/2u & (u^2 - 1)/2u \\ 0 & 0 & (u^2 - 1)/2u & (u^2 + 1)/2u \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

Remark:

再次提醒我们的 convention，对于 p 我们的意思是只考虑空间的三维的情况!!! p_i 也是!!

其中矩阵 R 是一个纯粹的转动矩阵，把第三个坐标轴 $(0, 0, 1)$ 转动到 p 的运动的方向。我们假设粒子 p 的方向是 $\hat{p} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ 。然后，我们可以知道，把一个 $(0, 0, 1)$ 向量变成这个样子分为两个步骤：

- 绕着第二个轴转 θ 角度
- 绕着第三个轴再转 ϕ 角度

所以这一波操作对应的洛伦兹变换【注意是洛伦兹变换，毕竟 R 也是个洛伦兹变换矩阵。并不是 Little Group 的表示】是：

$$U(R(\hat{p})) = \exp(i\phi J_3) \exp(i\theta J_2), \quad (1.134)$$

讨论一下关于 helicity，显然不同 helicity 的粒子应该是不同的粒子。因为 helicity 并不会因为洛伦兹变换而改变。但是，我们之后会发现，相反 helicity 的粒子是可以通过空间反向对称性相关联的。但是 beta 辐射之中产生的 neutrinos 和 antineutrinos 似乎是两种不同的粒子。

由于相反 Helicity 的粒子被认为是同样的粒子。所以我们可以进行一波叠加，才能形成一个一般的单粒子态。比如对于一个单光子态来说：

$$\Psi_{p,\alpha} = \alpha_+ \Psi_{p,+1} + 2\alpha_- \Psi_{p,-1}, \quad (1.135)$$

其中系数需要满足 $|x_+|^2 + |x_-|^2 = 1$ 。所以我们的光存在圆偏振和椭圆偏振的现象。

Tip: 总结怎么计算量子洛伦兹变换

整个计算分为两步：

- **第一步** 计算洛伦兹变换对应的 Little Group 【写成矩阵，洛伦兹群的子群】的元素是什么

- 第二步 根据 Little Group 的元素，带入量子洛伦兹变换的公式计算 D 矩阵。
- 最后整体写开就好了 !!

1.6 时间和空间反演变换

我们上面讨论的都是一个小小的 1 附近的 (proper and orthochronous) 洛伦兹群。下面我们考虑两个大大的变换带来的影响。一切其他的洛伦兹群都可以通过 \mathcal{P} 以及 \mathcal{T} 或者组合的 \mathcal{PT} 变换得到。这两个变换的矩阵是：

$$\mathcal{P}_\nu^\mu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_\nu^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.136)$$

根据洛伦兹变换的复合关系 eq. (1.33)，我们可以知道，包含 TP 作用的洛伦兹群也应该满足这个关系。我们假设 TP 也有自己对应的作用在 Hilbert 空间上面的算符：

$$P \equiv U(\mathcal{P}, 0) \quad T \equiv U(\mathcal{T}, 0) \quad (1.137)$$

似的这个算符的作用满足类似于 eq. (1.33) 的关系，我们定义 TP 算符作用在洛伦兹群对应的算符上面的结果是：

$$\begin{aligned} PU(\Lambda, a)P^{-1} &= U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \\ TU(\Lambda, a)T^{-1} &= U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a) \end{aligned} \quad (1.138)$$

注意，上面的式子是“定义式”，但是是“合理的”。考虑到 Lorentz 群本身的复合关系。

Chapter 2

Scattering Theory

这里我们讨论第三章的散射理论。

Chapter 3

Scratch Book

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!~~

真的吗???

~~这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 哈哈哈哈哈!!!~~

的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!! 这里会放一些写的很混沌，但懒得扔掉的东西呜呜呜呜!!!