Liouville理论与量子群的关系

#CFT #Liouville理论 #量子群 #毕设

这个note主要fol Teichner的文章“LIOUVILLE BOOTSTRAP VIA HARMONIC ANALYSIS ON A NONCOMPACT QUANTUM GROUP”（Ponsot和Teschner, 1999, p. 1）（pdf）
里面集中讨论了量子群的Racah-Wigner系数怎么联系上的。

- 对于量子群的一些基础内容我们可以看数学笔记 $U_q(sl_{2})$ 量子群基础介绍
- 其中对于CFT boostrap的特殊函数信息都可以找 CFT bootstrap 常用特殊函数

Abstract

这篇文章主要就是指出了一个量子群的一个特殊的表示的数学结构和Liouville理论完全相似。所以可以使用量子群表示，已经研究透的内容直接复制粘贴到Liouville理论里面给出Bootstrap的结果

基础Liouville理论

我们回顾一些下面内容需要掌握的比较关键的内容。

Hilbert空间构建

对于一个CFT显然就是两个Vir代数凑起来的。我们这里使用下面的notation。

- Vir代数的表示是 $\mathcal{V}_\alpha$ 其中 α 是表示的一个label
- 对于每一个表示的label由于理论是diag的所以可以对应一个weight是：$h=\alpha(Q-\alpha)$
- 其中Q的数值是 $Q=b+\frac{1}{b}$ 并且central charge是：$c=1+6Q^2$
  在这些的基础上我们可以定义Liouville理论的谱是：

$$\mathcal{H}=\int_{\mathbb{S}}^{\oplus} d\alpha \mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{V}_\alpha. \quad \mathbb{S}=\frac{Q}{2}+i\mathbb{R}^+$$

关联函数构造

对于关联函数我们可以通过插入一组正交基进行一个求和。我们可以定义每一个observable的一个特征的矩阵元素是（d是某一个表示α的一个方向）：

$$\langle \alpha_3, d_3 | V_{\alpha_2}(z) | \alpha_1, d_1 \rangle.$$

对于heighest weight state就是

$$C(Q-\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)\equiv\langle\alpha_3|V_{\alpha_2}(1)|\alpha_1\rangle$$

这样我们插入正交基之后对于四点函数的求和结果是：

$$\langle 0|V_{\alpha_4}(z_4)\ldots V_{\alpha_1}(z_1)|0\rangle=\int_{\mathbb{S}_{43|21}}d\alpha_{21}C(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_{21})C(\bar\alpha_{21},\alpha_2,\alpha_1)\left|\mathcal{F}^s_{\alpha_{21}}[\alpha_3\alpha_2](\mathfrak{z})\right|^2$$

注意这个结果之中我们的$\bar\alpha=Q-\alpha$ 所以对于S之中的取值相当于对于complex conjugate。相当于我们把spectrum进行了一个解析延拓的结果。这个积分是对于解析延拓之后的结果进行积分的。我们得到这个结果其实是在这样的两个量子态中间插入一组基然后进行三点函数的求的结果，分别是$V_{\alpha_2}V_{\alpha_1}|0\rangle$以及$\langle 0|V_{\alpha_4}V_{\alpha_3}$。如果习惯用动量进行表达则是：

$$\begin{aligned}&\langle 0|V_{\alpha_4}(z_4,\bar z_4)V_{\alpha_3}(z_3,\bar z_3)V_{\alpha_2}(z_2,\bar z_2)V_{\alpha_1}(z_1,\bar z_1)|0\rangle\\&=\int_0^\infty dPC(\alpha_4,\alpha_3,Q/2-iP)C(Q/2+iP,\alpha_2,\alpha_1)|\mathcal{F}^s(\Delta_{\alpha_i},\Delta,z_i)|^2\end{aligned}$$

其中的函数conformal block是一个长下面这个样子的函数：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^s_{\alpha_{21}}[\begin{matrix}\alpha_3&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1\end{matrix}](\mathfrak{z})=z_{43}^{h_2+h_1-h_4-h_3}z_{42}^{-2h_2}z_{41}^{h_3+h_2-h_4-h_1}z_{31}^{h_4-h_1-h_2-h_3}\cdot\\\cdot z^{h(\alpha_{21})-h_2-h_1}\sum_{n=0}^\infty z^n\mathcal{F}^s_{\alpha_{21},n}[\begin{matrix}\alpha_3&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1\end{matrix}],\end{aligned}$$

其中z就是crossing ratio具体的数值就是 $z=\frac{z_{43}z_{21}}{z_{42}z_{31}}$.其余都很自然。
下面我们强调一下关于这个理论的一些细节：

- 对于积分区间 $\mathbb{S}_{43|21}$ 并不一定是spectrum，但是两者相同的情况下性质十分好。我们考虑这样的情况。在这个条件下面，我们需要上面缩并的两个量子态$V_{\alpha_2}V_{\alpha_1}|0\rangle$以及$\langle 0|V_{\alpha_4}V_{\alpha_3}$在spectrum下面应该是可以有内积的而不是内积等于无穷的。这就需要满足下面的条件：

$$\begin{aligned}2|\mathrm{Re}(\alpha_1+\alpha_2-Q)|<Q,\quad 2|\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)|<Q,\\2|\mathrm{Re}(\alpha_3+\alpha_4-Q)|<Q,\quad 2|\mathrm{Re}(\alpha_3-\alpha_4)|<Q.\end{aligned}$$

- 并且我们认为我们可以解析延拓配分函数满足mutual locality的性质：
$[V_\alpha(z),V_\beta(w)]=0\text{ for }z\neq w$ 所以我们的理论可以有不同的channel t channel:

$$\langle 0|V_{\alpha_4}(z_4)\ldots V_{\alpha_1}(z_1)|0\rangle=\int_{\mathbb{S}_{43|21}}d\alpha_{21}C(\alpha_4,\alpha_{32},\alpha_1)C(\bar\alpha_{32},\alpha_3,\alpha_2)\left|\mathcal{F}^t_{\alpha_{21}}[\alpha_3\alpha_2](\mathfrak{z})\right|^2$$

并且共形对称性告诉我们t channel的conformal block其实就是相当于s channel换了一下一些场的顺序。也就是说：

$$\mathcal{F}^{(t)}_{\Delta_t}(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4|z_1,z_2,z_3,z_4)=\mathcal{F}^{(s)}_{\Delta_t}(\Delta_1,\Delta_4,\Delta_3,\Delta_2|z_1,z_4,z_3,z_2)\,.$$

所以考虑ratio相关的term其实就是[1]

$$\mathcal{F}^{(t)}_{\Delta_t}(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4|x)=\mathcal{F}^{(s)}_{\Delta_t}(\Delta_1,\Delta_4,\Delta_3,\Delta_2|1-x)\,.$$

所以s和t channel的两种写法给出了对于结构常数也就是C的很多约束方程。这一系列约束方程的一部分方程的解是：

$$C(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)=\left[\pi\mu\frac{\Gamma(b^2)}{\Gamma(1-b^2)}b^{2-2b^2}\right]^{b^{-1}(Q-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}\cdot \\ \cdot\frac{\Upsilon_0\Upsilon_b(2\alpha_1)\Upsilon_b(2\alpha_2)\Upsilon_b(2\alpha_3)}{\Upsilon_b(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-Q)\Upsilon_b(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\Upsilon_b(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2)\Upsilon_b(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)}$$

这个解是通过Teichner根据Teichner's trick完全得到的。具体见文章「Teschner,《On the Liouville three-point function》.」或者「“4.3 Teschner’s Trick” (Nakayama, 2004, p. 53)」。这个结论和DOZZ公式是等价的！但是这仅仅是部分约束条件得到的结果，**我们需要证明这个三点函数的解满足所有的crossing symmetry**。

下面我们引入我们的证明的一些基本假设：

> **基本假设1**
>
> 首先我们认为s和t channel之间存在着可逆的一个fusion transformation：
>
> $$\mathcal{F}^s_{\alpha_{21}}[\begin{matrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{matrix}](\mathfrak{z})=\int_{\mathbb{S}}d\alpha_{32}F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{bmatrix}\mathcal{F}^t_{\alpha_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{bmatrix}(\mathfrak{z}).$$

- 注意：这是我们的一个假设，但是在对于特殊的四个边界的点1234，我们其实可以explicitly给出这个F矩阵的。
- 注意：这个构建很像是Racah-Wigner coefficient for Vir Algebra

特别注意的是这里的 α_{12}并不一定是spectrum里面的数值，但是我们现在的讨论可以约束，只考虑是spectrum里面的数值的情况。但有的时候需要对更广的空间积分才能够正好收敛。上面存在可逆的F矩阵其实等价于是在说，有着这样的一个结构：

$$\left(F_{\alpha_{21}\beta_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{bmatrix}\right)^*$$

满足下面的公式：

$$\int d\alpha_{21}C(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_{21})C(\bar{\alpha}_{21},\alpha_2,\alpha_1)F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{bmatrix}\left(F_{\alpha_{21}\beta_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{bmatrix}\right)^* \\ =\delta(\alpha_{32}-\beta_{32})C(\alpha_4,\alpha_{32},\alpha_1)C(\bar{\alpha}_{32},\alpha_3,\alpha_2).$$

这个结构对于s t channel的变换公式。我们可以两边乘以F^*这个结构，然后积分就可以给出一个逆矩阵了。下面我们需要的一个操作就是修订一下我们的conformal block的归

一化系数，把一些奇奇怪怪的特殊函数融入到conformal block之中，让我们的公式更加简洁一点点：

This may be brought into a more suggestive form by absorbing (part of) the factors $C(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$ by a change of normalisation of the conformal blocks (which is in fact a change of normalisation of the chiral vertex operators): Let

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^s_{\alpha_{21}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right](\mathfrak{z}) =& N(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_{21})N(\alpha_{21},\alpha_2,\alpha_1)\mathcal{G}^s_{\alpha}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right](\mathfrak{z})\\
\mathcal{F}^t_{\alpha}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right](\mathfrak{z}) =& N(\alpha_4,\alpha_{32},\alpha_1)N(\alpha_{32},\alpha_3,\alpha_2)\mathcal{G}^t_{\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right](\mathfrak{z}),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

where the following choice of $N(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$ will turn out to be convenient:

$$
\begin{aligned}
&N(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1) =\\
&=\frac{\Gamma_b(2\alpha_1)\Gamma_b(2\alpha_2)\Gamma_b(2Q-2\alpha_3)}{\Gamma_b(2Q-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\Gamma_b(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\Gamma_b(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2)\Gamma_b(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

where $\Gamma_b(x)$ is essentially the double Gamma function of Barnes [22], see the Appendix. The blocks $\mathcal{G}^s_\alpha$ and $\mathcal{G}^t_\alpha$ will then be related by an equation of the form (7) with $F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}$ replaced by

$$
G_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right] = \frac{N(\alpha_4,\alpha_{32},\alpha_1)N(\alpha_{32},\alpha_3,\alpha_2)}{N(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_{21})N(\alpha_{21},\alpha_2,\alpha_1)}\,F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right].
\tag{11}
$$

The locality condition now takes the form

$$
\int_{\mathbb{S}} d\alpha_{21}\;|M_b(\alpha_{21})|^2\;G_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right]\left(G_{\alpha_{21}\beta_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right]\right)^*\;=\;|M_b(\alpha_{32})|^2\;\delta(\alpha_{32}-\beta_{32}),
\tag{12}
$$

where $M_b(\alpha) = -4\sin(\pi b(2\alpha-Q))\sin(\pi b^{-1}(2\alpha-Q))$. Equation (12) expresses *unitarity* of the change of basis (7) when the space of conformal blocks spanned by $\{\mathcal{F}^s_{\alpha_{21}};\alpha_{21}\in\mathbb{S}\}$ is equipped with the Hilbert-space structure $\langle\mathcal{F}^s_{\alpha_{21}},\mathcal{F}^s_{\beta_{21}}\rangle = |M_b(\alpha_{21})|^{-2}\delta(\alpha_{21}-\beta_{21})$.

在这样一波操作之后我希望能够证明这个能够和量子群的一些东西对应上。此外，我门可以意识到这个相当入发现我们的conformal block其实构成了一个hilbert space，并且在其上可以定义内积就是上面的这个（12）公式。

下文目的

这个文章主要目的就是证明，我们归一化后的F矩阵，其实正好对应了量子群 $U_q(sl_2\mathbb{R})$ 的Wigner-Racah系数。并且推导了正交性

Fusion Coefficient的约束

- 这一部分讨论论涉及大量degenerate field的内容，希望在基础Liouville理论 之中补充完整。

我们假设我们的Conformal Block可以根据Chiral Vertex Operator构建出来。
根据Moore-Seiberg的原始文章我们知道，Fusion Symbol需要满足pentagon和

hexigon equation的。我们主要是用下面的pentagon方程：

$$\int_{\mathbb{S}} d\delta_1 F_{\beta_1\delta_1}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \gamma_2 & \alpha_1\end{bmatrix} F_{\beta_2\gamma_2}\begin{bmatrix}\alpha_4 & \delta_1\\ \alpha_5 & \alpha_1\end{bmatrix} F_{\delta_1\gamma_1}\begin{bmatrix}\alpha_4 & \alpha_3\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{bmatrix} = F_{\beta_2\gamma_1}\begin{bmatrix}\alpha_4 & \alpha_3\\ \alpha_5 & \beta_1\end{bmatrix} F_{\beta_1\gamma_2}\begin{bmatrix}\alpha_5 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}$$

分析解析性

下面我们分析一下我们conformal block对于所有指标 α 的解析性情况。我们会发现：

- 对于 $\alpha_4, \ldots, \alpha_1$ 取之永远是解析的
- 但是对于系数，$F^s_{\alpha,n}$ 我们知道对于 α 来说其实是有pole的出现在下面的两种情况
  - $2\alpha = \alpha_{m,n} = -mb - nb^{-1}$ and $Q - \alpha = \alpha_{m,n}$.

  然后我们根据这些讨论外加上四点函数的积分区间真的是S 这些约束条件最终我们可以推测出来 F symbol在下面的区间是holomorphic的：

  Conjecture 2. The fusion coefficients $F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right]$ are holomorphic in

$$\begin{aligned}
&0 < \mathrm{Re}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_{23}-Q) < Q \qquad && 0 < \mathrm{Re}(\alpha_4+\alpha_1+\alpha_{23}-Q) < Q\\
&0 < \mathrm{Re}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_{23}) < Q && 0 < \mathrm{Re}(\alpha_4+\alpha_1-\alpha_{23}) < Q\\
&0 < \mathrm{Re}(\alpha_{23}+\alpha_3-\alpha_2) < Q && 0 < \mathrm{Re}(\alpha_{23}+\alpha_4-\alpha_1) < Q\\
&0 < \mathrm{Re}(\alpha_{23}+\alpha_2-\alpha_3) < Q && 0 < \mathrm{Re}(\alpha_{23}+\alpha_1-\alpha_4) < Q
\end{aligned} \tag{14}$$

Degenerate Field Correlator

我们再考虑如果这个Fusion Transformation周围的四个点有一个是degenerate的表示，那么我们的conformal block仅仅对于有限个中间的 α_{21} 是非0的。这个是BPZ最开始就证明的结论。我们会发现 **crossing equation** 对于特殊的degenerate field的情况下会变得异常简单。

对于 $\alpha_2 = -b$ or $-b^{-1}$ 的情况下我们知道我们中间的那个指标仅仅对于下面的情况成立：

$$\alpha = \alpha_1 - sb, s = -, 0, +$$

这个是对于s channel成立的。同样对于t channel我们有：

$$\alpha = \alpha_3 - sb, s = -, 0, +$$

所以我们这个时候的fusion矩阵其实就是一个2 x 2的矩阵：

$$F_{s,s'}(a_4, a_3, a_1) \equiv F_{\alpha_1 - s\frac{b}{2}, \alpha_3 - s'\frac{b}{2}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}_{\alpha_2 = -\frac{b}{2}}, \quad \text{where} \quad s, s' = +, -$$

这个在BPZ是有具体计算的，如果我们对于其进行上面G的归一化，那么我们其实可以具体写出这些矩阵元（这个在BPZ原始文章以及很多讲义都有讲过）。我们这里结论是：

$$\begin{aligned}
G_{++} &= \frac{[\alpha_4+\alpha_3-\alpha_1-\frac{b}{2}]}{[2\alpha_3-b]} \qquad & G_{+-} &= \frac{[\alpha_4+\alpha_3+\alpha_1-\frac{3b}{2}]}{[2\alpha_3-b]} \qquad & [x] \equiv \frac{\sin(\pi b x)}{\sin(\pi b^2)}.\\
G_{-+} &= \frac{[\alpha_3+\alpha_1-\alpha_4-\frac{b}{2}]}{[2\alpha_3-b]} & G_{--} &= -\frac{[\alpha_4+\alpha_1-\alpha_3-\frac{b}{2}]}{[2\alpha_3-b]}
\end{aligned} \tag{16}$$

Degenerate field 的 pentagon equation

在上面的准备的基础上，我们考虑一种特殊的pentagon equation。也就是选择 $\alpha_5,\ldots,\alpha_1$ 这个五边形的有一个边是有一个是 $\alpha=-b$ 的情况下，会发现方程可以简化成为下面的两种形式之一。我们先复制一下原始方程是：

$$\int_{\mathbb{S}} d\delta_1 F_{\beta_1\delta_1}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \gamma_2 & \alpha_1\end{bmatrix} F_{\beta_2\gamma_2}\begin{bmatrix}\alpha_4 & \delta_1\\ \alpha_5 & \alpha_1\end{bmatrix} F_{\delta_1\gamma_1}\begin{bmatrix}\alpha_4 & \alpha_3\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{bmatrix} = F_{\beta_2\gamma_1}\begin{bmatrix}\alpha_4 & \alpha_3\\ \alpha_5 & \beta_1\end{bmatrix} F_{\beta_1\gamma_2}\begin{bmatrix}\alpha_5 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}$$

- 如果取 $\alpha_1,\ldots,\alpha_4$ 之中的一个是 $-b$ 那么方程会变成下面的形式（注意右手边对于特殊的 γ 或者δ 的选取并不是0，但是一般情况下基本是0）。

$$\sum_{s=-,0,+} C_s\left(\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{32}\end{matrix}\right) F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1-sb\end{bmatrix} = 0.$$

- 如果正好取上面的 α_5 是 -b 那么结果会变成：

$$\sum_{s=-,0,+} D_{r,s}\left(\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{32}\end{matrix}\right) F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1-sb\end{bmatrix} = F_{\alpha_{21}+rb,\alpha_{32}}\begin{bmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1-sb\end{bmatrix}\quad \text{where } r=+,$$

对于这个方程的解我们有下面的讨论，我觉得不重要但是我截图copy了一波：

$$\sum_{s=-,0,+} D_{r,s}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{32}\end{smallmatrix}\right) F_{\alpha_{21}\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1-sb\end{smallmatrix}\right] = F_{\alpha_{21}+rb,\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1-sb\end{smallmatrix}\right]\quad \text{where } r=+,-,$$

and a similar equation with shifts of α_{32} on the right hand side. Furthermore, each of these equations has a "dual" partner obtained by $b\to b^{-1}$. Finally, one has equations that reflect the fact that all the fusion coefficients $F_{\beta_1,\beta_2}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right]$ are functions of the conformal dimensions only, so must be unchanged under $\alpha_i\to Q-\alpha_i$, $i=1,2,3,4$ and $\beta_j\to Q-\beta_j$, $j=1,2$.

In the case of real irrational b it is possible to show (details will appear in [18]) uniqueness of a solution to this system of functional equations, taking into account the analytic properties of the fusion coefficients. In fact, the equations (17) are second order homogeneous finite difference equations. It can be shown that the second order equations of the form (17) together with their $b\to b^{-1}$ duals can have at most two linearly independent solutions with the required analytic properties. Taking into account the symmetry $\alpha_i\to Q-\alpha_i$, $i=1,\ldots,4$ will determine the dependence w.r.t. α_i, $i=1,\ldots,4$ up to a factor that depends on α_{21} and α_{32}. The remaining freedom is then fixed by considering equations (18) and its counterpart with shifts of α_{32}.

Remark 3. Loosely speaking the message is the following: If there exist fusion transformations of conformal blocks that are compatible with the expectations from other approaches (encoded in Conjectures 1 and 2; cf. Remark 1) then they are unique for real, irrational b.

Remark 4. One might also be interested in the possibility of having fusion transformations of the form (7) but with coefficients $F_{\alpha_{21},\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right]$ only required to be defined for real $\alpha_4,\ldots,\alpha_1$ *and* α_{21},α_{32}. But if one then only requires e.g. continuity in some interval such as (14) one still has the above result on uniqueness, which together with the results to be discussed below put one back precisely into the situation considered here.

量子群表示的 Tensor Category

- 这里有一些对于量子群的基本介绍 $U_q(sl_{2})$ 量子群基础介绍

我们知道我们可以通过量子群 $U_q(sl(2,\mathbb{R}))$ 的一系列无穷维度的表示P_α可以通过下面这个线性空间上面的特殊代数算符构建出来。

- 我们考虑的是 $L^2(\mathbb{R})$ 线性空间，就是一实轴为自变量的所有平方可积的函数
- 这些函数构成的hilbert 空间可以定义一个乘法然后积分的内积：

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

- 在这个Hilbert 空间作为表示空间上面，我们可以构造一些算符，保证这些算符满足量子群的关系，也就是表示，其中我们很自然能先构造一个 Weyl-Algebra 的表示：

$$\hat{x}f(x) = xf(x)$$
$$\hat{p}f(x) = -i\frac{d}{dx}f(x)$$

这个自然满足Weyl代数的关系：$[x,p]=i$ 。在这两个算符的基础上可以构建下面的两个基础算符：

$$U = e^{2\pi bx} \text{ and } V = e^{-\frac{b}{2}p}$$

对于这两个算符为基础我们可以构建下面三个算符，以及其满足的对易关系：

$$E = U^{+1}\frac{e^{\pi ib(Q-\alpha)}V - e^{-\pi ib(Q-\alpha)}V^{-1}}{e^{\pi ib^2} - e^{-\pi ib^2}} \qquad (19) \qquad K = V$$
$$F = U^{-1}\frac{e^{-\pi ib(Q-\alpha)}V - e^{\pi ib(Q-\alpha)}V^{-1}}{e^{\pi ib^2} - e^{-\pi ib^2}}$$

These generators satisfy the relations

$$KE = qEK \qquad KF = q^{-1}FK \qquad [E,F] = -\frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}} \qquad (20)$$

- 表示是由 α 作为label的，体现在对于不同的E和F的构造的区别。
  - 特别重要的是当这个表示label正好取的是Liouville理论的spectrum的时候 $\alpha \in \mathbb{S}$ 的时候对应着一组性质特别好的表示。
- 并且注意我们这些算符并不一定严格定义在实轴上的函数，其实定义在可以解析延拓到：$\{x\in\mathbb{C}; |\mathrm{Im}(x)| < \frac{b}{2}\}$ 区间上面的函数。

这个表示我们由于需要有张量积的表示的结构，也希望分定义一个coproduct的结构。我们现在使用的表示空间的coproduct的形式是：

$$\Delta(K) = K\otimes K \qquad \Delta(E) = E\otimes K^{-1} + K\otimes E \qquad \Delta(F) = F\otimes K^{-1} + K\otimes F$$

也就是作用在两个张量积之后的空间上面的表示。

我们下面只考虑这样的一组表示使得 $\alpha \in \mathbb{S}$ 。这一组量子群表示有着特别特别特别好的性质，可以和Liouville理论能够一一对应的。

CG系数

下面我们给出一个量子群里面的定理：

> **Theorem**
>
> 对于量子群的 $U_q(sl(2,\mathbb{R}))$ 的表示 $P_{\alpha_1} \otimes P_{\alpha_2}$ 来说（注意，这个表示是定义在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的线性空间上面的），我们会发现在作用一个上面的 Δ 函数的意义下，我们理论满足：
>
> $$\mathcal{P}_{\alpha_2} \otimes \mathcal{P}_{\alpha_1} \simeq \int_{\mathbb{S}}^{\oplus} d\alpha \mathcal{P}_{\alpha},$$
>
> 也就是说这一组表示在张量积下面是封闭的，张量积之后也可以用自己的直和进行理解。**并且，这个定理告诉我们直和每一个表示仅能出现一次！！真是一个并不显然的结论。**

> **角动量理解**
>
> 为了理解这个理论我们可以思考角动量耦合。比如：我们知道对于两个 `spin-1/2` 的表示空间张量积构成的空间可以通过一个 `spin-1` 的表示空间和一个 `spin-0` 的表示空间直和起来表示。其中，每一个 $R_{\frac{1}{2}} \otimes R_{\frac{1}{2}}$ 之中的向量其实等价于一堆其他向量的直和。
>
> 并且由于我们考虑的空间性质特别好，S^z生成元在这个表示空间其实是对角化的。我们对应张量积表示空间之中的向量与直和表示空间之中的向量，其实看的是 $S^z = S_1^z \otimes I + I \otimes S_2^z$ 以及 $S^z = S^z \otimes I + I \otimes S^z$ 这个其实就是一个 Δ 映射co-product的关系。
>
> 所以我们的这些表示相等其实就是在某个co-product下相等的意义下的。我们不可能说两个不同的表示空间之中的两个态是相等的。但是我们可以说，他们在确定的co-product的意义下面是等价的！！！
>
> 所以co-product其实才是构建，张量积表示和原本表示之间的联系的核心。

所以说我们可以考虑这些表示的Clebsch-Gordan映射的情况。也就是把这个张量积的表示空间的向量，可以映射到一个单一的表示向量的线性组合：

$$C(\alpha_3|\alpha_2,\alpha_1) : f(x_2,x_1) \longrightarrow F[f](\alpha_3|x_3) \equiv \int_{\mathbb{R}} dx_2 dx_1 \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} f(x_2,x_1).$$

在这个表示里面这个CG映射的本质其实是对于 $\mathbb{R}^2$ 这个流形的空间进行积分，得到另外一个 $\mathbb{R}$ 上面的函数，这个函数正好是之前的向量耦合的一个对应。（大脑里面请想角动量耦合！！）并且其中的积分系数我们称之为CG系数可以explicitly写出来：

The distributional kernel [...] (the "Clebsch-Gordan coefficients") is given by the expression

$$\left[\begin{smallmatrix} Q-\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{smallmatrix}\right] = S_b(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)e^{\pi i \alpha_1\alpha_2}\; e^{2\pi(x_3(\alpha_2-\alpha_1)-\alpha_2 x_2+\alpha_1 x_1)}\cdot \\ \cdot D_b(x_{32},\alpha_{32})D_b(x_{31},\alpha_{31})D_b(x_{21},\alpha_{21}) \tag{25}$$

where the distribution $D_b(x,\alpha)$ is defined in terms of the Double Sine function $S_b(x)$ (cf. Appendix) as

$$D_b(x,\alpha) = e^{-\frac{\pi i}{2}a(a-Q)}e^{\pi a x}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{S_b(ix+\epsilon)}{S_b(ix+\alpha)} \tag{26}$$

and the coefficients x_{ji}, α_{ji}, $j>i\in\{1,2,3\}$ are given by

$$\begin{aligned} x_{32} &= x_3-x_2+\tfrac{i}{2}(\alpha_3+\alpha_2-Q) & \alpha_{32} &= \alpha_2+\alpha_3-\alpha_1 \\ x_{31} &= x_3-x_1+\tfrac{i}{2}(\alpha_3+\alpha_1-Q) & \alpha_{31} &= \alpha_3+\alpha_1-\alpha_2 \\ x_{21} &= x_3-x_2+\tfrac{i}{2}(\alpha_2+\alpha_1-2\alpha_3) & \alpha_{21} &= \alpha_2+\alpha_3-\alpha_1. \end{aligned} \tag{27}$$

并且CG系数作为函数，存在着一些归一化因子，可以被确定：

The orthogonality relations for the Clebsch-Gordan coefficients (25) can be determined by explicit calculation:

$$\int_{\mathbb{R}} dx_1 dx_2 \left[\begin{smallmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{smallmatrix}\right]^* \left[\begin{smallmatrix} \beta_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ y_3 & x_2 & x_1 \end{smallmatrix}\right] = |S_b(2\alpha_3)|^{-2}\delta(\alpha_3-\beta_3)\delta(x_3-y_3). \tag{28}$$

Together with Theorem 1 one obtains the corresponding completeness relations

$$\int_{\mathbb{S}} d\alpha_3\, |S_b(2\alpha_3)|^2 \int_{\mathbb{R}} dx_3 \left[\begin{smallmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{smallmatrix}\right]^* \left[\begin{smallmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ x_3 & y_2 & y_1 \end{smallmatrix}\right] = \delta(x_2-y_2)\delta(x_1-y_1). \tag{29}$$

Braiding Operator

对于表示我们可以进行一个Braiding的映射，因为张量积并不是能互换的所以两个表示的张量积有两种前后。这两种应该对应着一个映射，毕竟都可以写作第三种表示的一堆直和。所以我们可以构建：

$$B:\mathcal{P}_{\alpha_2}\otimes\mathcal{P}_{\alpha_1}\to\mathcal{P}_{\alpha_1}\otimes\mathcal{P}_{\alpha_2}$$

并且，我们可以通过上面的CG映射以及一些特殊映射构造出来：

$$B_{21} = \int_{\mathbb{S}} d\alpha_3\, |S_b(2\alpha_3)|^2\; C^\dagger(\alpha_1,\alpha_2|\alpha_3)\,\Omega\left(\begin{smallmatrix} & \alpha_3 & \\ \alpha_2 & & \alpha_1 \end{smallmatrix}\right) C(\alpha_3|\alpha_2,\alpha_1), \tag{30}$$

where $C^\dagger(\alpha_1,\alpha_2|\alpha_3):\mathcal{P}_{\alpha_3}\to\mathcal{S}'_{21}$ is the adjoint of $C(\alpha_3|\alpha_2,\alpha_1)$ for any Gelfand-triple $\mathcal{S}_{21}\subset\mathcal{P}_{\alpha_2}\otimes\mathcal{P}_{\alpha_1}\subset\mathcal{S}'_{21}$, and

$$\Omega\left(\begin{smallmatrix} & \alpha_3 & \\ \alpha_2 & & \alpha_1 \end{smallmatrix}\right) = e^{\pi i(\alpha_3(Q-\alpha_3)-\alpha_2(Q-\alpha_2)-\alpha_1(Q-\alpha_1))}. \tag{31}$$

Fusion Operator

- 这段内容比较抽象但是其实对于角动量有一一对应的analogue（其实角动量也可以当是一个没有deform的量子群）毕竟CG系数还有Racah-Wigner系数在角动量里面有明确的定义。3-j Symbol & 6-j Symbol的讨论

下面我们考虑三个表示空间张量积 $\mathcal{P}_{\alpha_3} \otimes \mathcal{P}_{\alpha_2} \otimes \mathcal{P}_{\alpha_1}$ 之后的表示。由于我们coproduct必须是合法的，所以必然满足下面的性质：

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta.$$

对于从三个表示到一个表示的co-product，我们其实有两种定义方法，并且两种定义方式必须是等价的才合理。我们知道，确定一个co-product的形式，我们就可以做出一个从三个表示空间张量积起来的空间到一个表示空间的CG映射，保证这个co-product前后的generator作用在表示空间上结构是等价的。

我们考虑这个映射的推广的CG映射的CG系数。我们会发现如果需要确定一个具体的变换的数，我们需要确定五个表示，一个最初的单一表示，三个张量积的表示空间，还有一个中间过渡的时候作用一个Δ
的表示空间。所以CG系数复合有两种复合的方式，如果是作用在一个三个表示张量积的空间上面的向量，应该会给出一个和过渡过程表示 α_{21} 或者 α_{23} 相关的一个向量。这个显然并不是最终结果而是对于向量要进行一个求和。我们具体写出这个复合CG系数的形式是：

$$\begin{aligned} \Phi^s_{\alpha_{21}}\left[\begin{smallmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 \end{smallmatrix}\right](\mathfrak{x}) &= \int_{\mathbb{R}} dx_{21} \left[\begin{smallmatrix} \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_{21} \\ x_4 & x_3 & x_{21} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} \alpha_{21} & \alpha_2 & \alpha_1 \\ x_{21} & x_2 & x_1 \end{smallmatrix}\right] \quad \alpha_4, \alpha_{21} \in \mathbb{S}, x_4 \in \mathbb{R} \\ \Phi^t_{\alpha_{32}}\left[\begin{smallmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 \end{smallmatrix}\right](\mathfrak{x}) &= \int_{\mathbb{R}} dx_{32} \left[\begin{smallmatrix} \alpha_4 & \alpha_{32} & \alpha_1 \\ x_4 & x_{32} & x_1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} \alpha_{32} & \alpha_3 & \alpha_2 \\ x_{32} & x_3 & x_2 \end{smallmatrix}\right]. \quad \alpha_4, \alpha_{32} \in \mathbb{S}, x_4 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{32}$$

这个其实构造出来了张量积表示空间的两组基。这两个函数其实就相当于一个表示之中的向量，对应着三个表示之中的子向量空间。其中α_{12} 给出了这个向量空间的基的label！！

这个类似conformal block的东西是什么

上面我们写出了两个函数，这两个其实是3-j symbol的推广。对于两个表示耦合来说，耦合后的态每个表示只会出现一次（这个是上面的theorem）但是如果推广到是三个表示fuse到一个，那么直和的表示每一个表示并不一定出现一次。考虑直和一端的表示之中向量对应tensor product一端的就不一定是一个向量，而是一个线性空间啦！！

而对于不同方式构建出来的线性空间，可以自然的构建这个线性空间的一组基。这组基通过中间过渡的表示label。因为，会出现线性空间的现象正是因为中间有多个过渡的表示

这个线性空间不同基的变换矩阵被我们称之为Wigner-Racah系数。

下面我们考虑这两组基之间的变换矩阵也就是：b-Racah-Wigner symbols

$$\Phi^{s}_{\alpha_{21}}\left[\begin{matrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{matrix}\right](\mathfrak{x}) = \int_{\mathbb{S}} d\alpha_{32} \left\{\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{32}\end{matrix}\right\}_b \Phi^{t}_{\alpha_{32}}\left[\begin{matrix}\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1\end{matrix}\right](\mathfrak{x})$$

构建了这么多量子群的结论，现在有一个特别强的claim。就是Racah Symbol和Braiding里面用到的Symbol应该自然满足 Moore-Seiberg 的约束条件。因为同样的道理，正因如此我们的量子群的表示论才能够是合理的，然后证明工作交给数学家就好了（((。并且自然满足正交性：

$$\int_{\mathbb{S}} d\alpha_{21}\, |S_b(2\alpha_{21})|^2 \left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{32}\end{smallmatrix}\right\}_b \left(\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\alpha_{21}\\ \beta_{32}\end{smallmatrix}\right\}_b\right)^* = |S_b(2\alpha_{32})|^2\, \delta(\alpha_{32}-\beta_{32}). \tag{35}$$

并且我们有意识到：$|S_b(2\alpha)|^2 = |M_b(\alpha)|^2$ 这也是为什么我们在前面使用那个G的归一化，因为这样G正好就是b-Racah-Wigner Symbol。

结论

所以我们给出了一个数学结构，这个数学结构十分完美的满足了所以对于Liouville Bootstrap的约束方程。那么自然就是正好正比于Liouville的各种理论之中的参数。

计算Racah系数

我们既然已经知道，量子群的Racah系数正比于Liouville的Fusion矩阵。但问题是，我们需要一个好用的方法计算出来这样的Racah系数。显然他的定义式并不方便计算。我们使用一种对于考虑可积性的方法给出一个Racah系数：
“6. Calculation of Racah coefficients”（Ponsot和Teschner，1999，p. 11）（pdf）

一些特殊问题

Question

就是量子群量子化出来的Liouville conformal block和Teichmuller space量子化搞出来的Liouville conformal block到底是什么关系？？？

---

1. 这里我们使用文章「Ribault, 《Conformal Field Theory on the Plane》.」P55 之中的内容。↩