计算机图形学小白入门

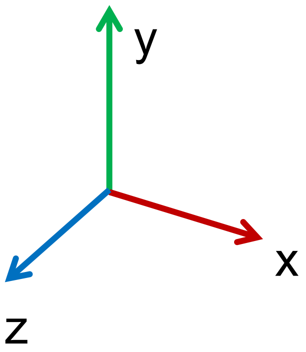
————从0开始实现OpenGL

线性代数—变换矩阵与坐标基

授课：赵新政
资深三维工程师
专注3D图形学技术
教育品牌

详解基向量

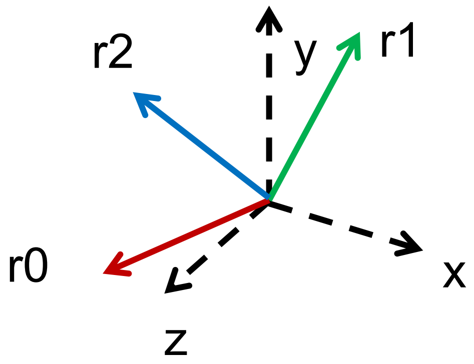
- 空间中一组线性无关的向量，即可构成一组基向量
- 点P的坐标只有放在某一个基向量构成的坐标系中才会有意义



$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R = \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

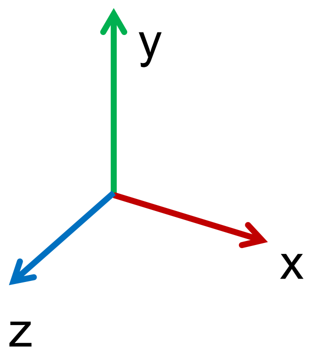
$$\vec{p} = a.\hat{x} + b.\hat{y} + c.\hat{z}$$

$$p` = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}` = a.\vec{r}_0 + b.\vec{r}_1 + c.\vec{r}_2$$

局部坐标与世界坐标

- **世界坐标系**：定义一组线性无关/模为1/互相垂直的向量，作为整个世界的中心坐标系（笛卡尔坐标系）
- **局部（模型）坐标系**：对世界坐标系的三个基向量进行变换后，得到的坐标系（**一开始与世界坐标系重合**）



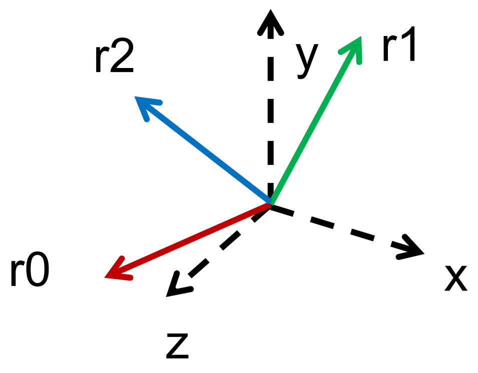
世界坐标系

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

施加旋转R



R即为局部坐标系

点P局部坐标与世界坐标

- **世界坐标**：点P在世界坐标系中的坐标
- **局部（模型）坐标**：点P在局部坐标系中的坐标

推而广之：任何变换矩阵都提供了一组新的基向量

- P初始状态下，其局部坐标系与世界坐标系重合
- P当前在世界/局部坐标系中的坐标为（a,b,c）

- P的局部坐标系跟随旋转，变成了旋转矩阵的三个列向量
- P在局部（模型）坐标系中的坐标仍是（a,b,c）
- P在世界坐标系中的坐标为：$a.\overrightarrow{r_0}+b.\overrightarrow{r_1}+c.\overrightarrow{r_2}$

变换矩阵互相作用

- 举例：先使用 S 矩阵对坐标进行缩放，再使用 R 对其进行旋转

$$\begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ?$$

- 思考：根据矩阵运算结合律，可以先把 S 与 R 相乘，再集体作用到目标点；二者相乘得到如下矩阵M

$$M = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

变换矩阵互相作用

$$M = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

- 根据列视图可知 S 矩阵的每一列，都会作为一组调配因子对 R 中列向量进行组合
- **坐标即调配因子**

$$m_0 = s_0.\vec{r_0} + 0.\vec{r_1} + 0.\vec{r_2}$$

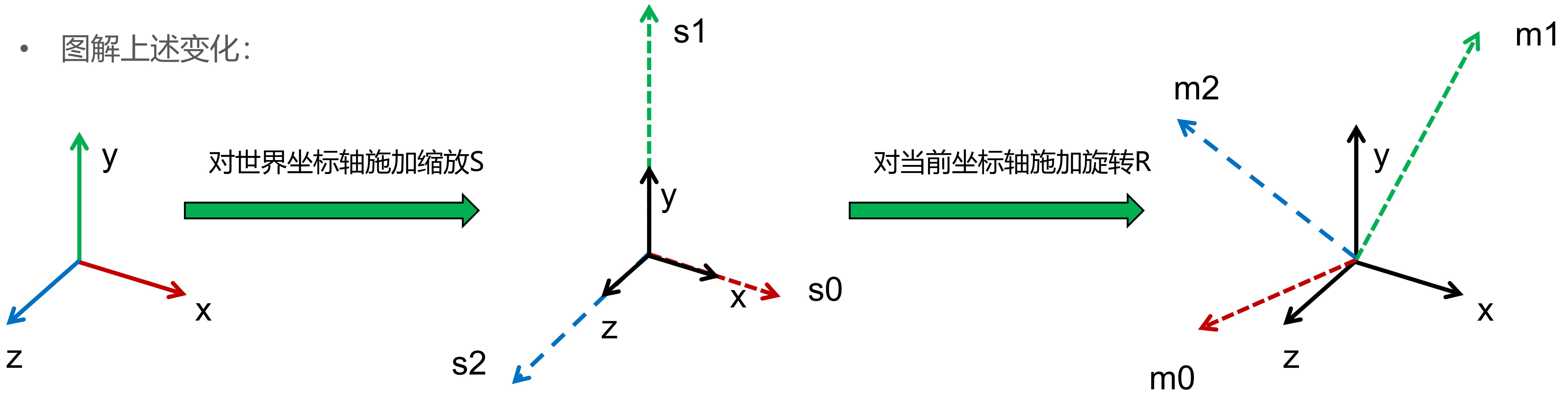
$$m_1 = 0.\vec{r_0} + s_1.\vec{r_1} + 0.\vec{r_2}$$

$$m_2 = 0.\vec{r_0} + 0.\vec{r_1} + s_2.\vec{r_2}$$

- S 的三个基向量构成一个局部坐标系
- 把 S 的三个基向量按照 R 进行旋转得到的就是M
- 讨论：
  - S的三个基向量在 R 张成的坐标系中，坐标不变
  - S的三个基向量在世界坐标系中发生了改变
  - （**下页图解**）

变换矩阵互相作用

- 图解上述变化:



- p`在局部坐标系的坐标仍然是（a,b,c)
- p`在世界坐标系下的坐标为:

$$p` = a.\overrightarrow{m_0} + b.\overrightarrow{m_1} + c.\overrightarrow{m_2}$$

延申理解

- 对于如下连续矩阵变换：

$$p` = M_n M_{n-1} \ldots\ldots M_2 M_1 . p$$

- 抽出所有变换矩阵，如下表达：

$$F = M_{n-1} \ldots\ldots M_2 M_1$$
$$M = M_n F$$

- 相当于前方**n-1个矩阵**相乘，组成了一组基向量

- 最后 M_n 对F的每个基向量进行变换，形成最终 M 矩阵每个列向量，从而形成新的局部坐标系

结论

- 对一个矩阵A做变换 B；
- 相当于把A矩阵的每个列向量做了 B 变换；
- 形成一组新的基向量，按列排列形成M矩阵；
- 最终用M的列向量为基，计算p点的世界坐标
- **多变换相乘，即从右往左，逐步变更基向量的过程**