计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数—矩阵行列式性质

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术教育品牌

行列式基本性质（一）

对于矩阵A，其行列式满足：

$$\det(A) = \det(A^T)$$

即矩阵转置后，其行列式不变；

思考：

转置就是行变列，列变行；转置前用按列展开求行列式，相当于转置后按行展开求行列式

行列式基本性质（二）

对于矩阵A，其行列式满足：更换两行数据位置，行列式绝对值不变，符号变号

引理：

对于一个排列S，更换排列中两个数字，S的逆序数**改变奇偶性**

举例：

N(2341)=3　　　　N(1342)=2

使用**按列展开**，如果更换两行，相当于每个连乘元素中有两个更换了位置，乘积不变，但是逆序数**奇偶性改变**，则变号

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots\cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_0 j_1 \ldots j_n} (-1)^{N(j_0 j_1 \ldots j_n)} a_{j_0 0} a_{j_1 1} \ldots a_{j_n n}$$

行列式基本性质（三）

对于矩阵A，A中如果由两行（列）数据相同，则det(A)=0

假设A当中第i行与第j行**数据相同**，那么两行数据互换后得到A`，矩阵不发生变化，行列式不变

det(A)=det(A`)

又知:

更换两行数据位置，行列式绝对值不变，符号变号（**基本性质二**）

det(A)=-det(A`)

所以:

det(A)=0

行列式基本性质（四）

对于矩阵A，任何一行数据，共同乘以c，则行列式为**det(A)*c**

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots\cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_0 j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_0 j_1 \cdots j_n)} a_{j_0 0} a_{j_1 1} \ldots a_{j_n n}$$

使用按列展开，某一行数据乘以c，则每个连乘项当中都会包含一个本行数据，则都会共同乘c，可提到外部

行列式基本性质（五）

对于矩阵A，某一行数据加到另一行数据上，得到A`，**det(A)=det(A`)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行加到第三行上}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2+0 & 1+1 & 2+1 \end{bmatrix}$$

如果使用按列展开，观察其中一项（主对角线）： 1 * 1*（2+1）=**1*1*2**+**1*1*1**，其行列式可以拆成如下视图：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2+0 & 1+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

第二项两行相同为0，所以与原行列式相同

行列式基本性质（六）

对于矩阵A，某一行数据乘以某一数字c，加到其他行上，得到A`，**det(A)=det(A`)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行乘以3，加到第三行上}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2+0*3 & 1+1*3 & 2+1*3 \end{bmatrix}$$

如果使用按列展开，观察其中一项（主对角线）： 1 * 1*（2+1*3）=**1*1*2+1*1*(1*3)**，其行列式可以拆成如下视图：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2+0*3 & 1+1*3 & 2+1*3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0*3 & 1*3 & 1*3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3*\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行公因子提出

第二项两行相同为0，所以与原行列式相同

行列式——补充性质

对于同阶矩阵A、B，其行列式满足：

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

本性质作为补充性质，在学习矩阵的空间变换理解后，可以更好地解决这个性质的原理

行列式重要性值提炼

对于矩阵A，其行列式满足：

- 任何一行数据，共同乘以c，则行列式为det(A)*c
- 更换两行数据位置，行列式绝对值不变，符号变号
- 单位矩阵的行列式为1
- 某一行数据乘以某一数字c，加到其他行上，行列式不变

行列式计算另一种定义方式

对于矩阵A，定义一种运算F(A)，满足：

- 任何一行数据，共同乘以c得到A`，则F(A`)=F(A)*c
- 更换两行数据位置，得到A`，则F(A`)=-F(A)
- 如果A是单位矩阵，则F(A)=1
- 某一行数据乘以某一数字c，加到其他行上，得到A`，则F(A`)=F(A)

如果存在本运算F，则运算得到的结果即为矩阵A的行列式

思考题：

本运算对于矩阵A是否唯一呢？即是否存在两个或更多运算F，满足上述性质？