计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数学习——向量叉乘

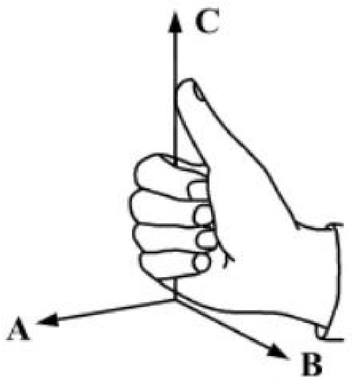
授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

什么是向量叉乘

- 代数解释（二维）：$(x_a, y_a) \times (x_b, y_b) = x_a . y_b - y_a . x_b$ ，生成一个**标量**
- 代数解释（三维）：$\begin{matrix}(x_a, y_a, z_a) \\ \times \\ (x_b, y_b, z_b)\end{matrix} \begin{pmatrix} y_a . z_b - y_b . z_a \\ z_a . x_b - x_a . z_b \\ x_a . y_b - y_a . x_b \end{pmatrix}$ ，生成一个**向量** $\begin{matrix}(x_a, y_a, z_a) & (x_a, y_a, z_a) \\ \times & \times \\ (x_b, y_b, z_b) & (x_b, y_b, z_b)\end{matrix}$
- 几何意义（三维）：产生一个与两个原向量都垂直的向量（垂直于二者构成平面）
- 几何意义（三维）：产生向量的模等于二者模的乘积与夹角正弦值的乘积 $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \| . \sin\theta$

三维向量几何意义（一）



- 两个向量叉乘可以产生垂直于二者的**法向量**，方向满足右手法则：
- 证明：

  测试叉乘结果与向量a的点乘，如果为0则垂直

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=(y_a.z_b-y_b.z_a,z_a.x_b-x_a.z_b,x_a.y_b-y_a.x_b).(x_a,y_a,z_a)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=y_a.z_b.x_a-y_b.z_a.x_a+z_a.x_b.y_a-x_a.z_b.y_a+x_a.y_b.z_a-y_a.x_b.z_a$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=(y_a.z_b.x_a-x_a.z_b.y_a)+(z_a.x_b.y_a-y_a.x_b.z_a)+(x_a.y_b.z_a-y_b.z_a.x_a)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=0$$

对于向量b，同样采用如上测试，也可得到0；证明二者均与叉乘结果垂直

Why right hand?

查阅资料得知，可能是实验得到的结论或者前人得到的习惯判定方式

三维向量几何意义（二）

- 产生向量的模等于二者模的乘积与夹角正弦值的乘积 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.abs(\sin\theta)$
- 证明:

  叉乘结果取模，进行平方操作

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(y_a.z_b-y_b.z_a,z_a.x_b-x_a.z_b,x_a.y_b-y_a.x_b).(y_a.z_b-y_b.z_a,z_a.x_b-x_a.z_b,x_a.y_b-y_a.x_b)$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(y_a.z_b-y_b.z_a)^2+(z_a.x_b-x_a.z_b)^2+(x_a.y_b-y_a.x_b)^2$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(y_a{}^2.z_b{}^2+y_b{}^2.z_a{}^2-2.y_a.z_b.y_b.z_a)+(z_a{}^2.x_b{}^2+x_a{}^2.z_b{}^2-2.z_a.x_b.x_a.z_b)+(x_a{}^2.y_b{}^2+y_a{}^2.x_b{}^2-2.x_a.y_b.y_a.x_b)$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(y_a{}^2.z_b{}^2+y_b{}^2.z_a{}^2+z_a{}^2.x_b{}^2+x_a{}^2.z_b{}^2+x_a{}^2.y_b{}^2+y_a{}^2.x_b{}^2)-(2.y_a.z_b.y_b.z_a+2.z_a.x_b.x_a.z_b+2.x_a.y_b.y_a.x_b)$$

三维向量几何意义（二）

“魔法操作”：等式右侧加上，再减去 $x_a{}^2.x_b{}^2+y_a{}^2.y_b{}^2+z_a{}^2.z_b{}^2$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(y_a{}^2.z_b{}^2+y_b{}^2.z_a{}^2+z_a{}^2.x_b{}^2+x_a{}^2.z_b{}^2+x_a{}^2.y_b{}^2+y_a{}^2.x_b{}^2+\boxed{x_a{}^2.x_b{}^2+y_a{}^2.y_b{}^2+z_a{}^2.z_b{}^2})$$

$$-(\boxed{x_a{}^2.x_b{}^2+y_a{}^2.y_b{}^2+z_a{}^2.z_b{}^2}+2.y_a.z_b.y_b.z_a+2.z_a.x_b.z_b.x_a+2.x_a.y_b.x_b.y_a)$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=(x_a{}^2+y_a{}^2+z_a{}^2)(x_b{}^2+y_b{}^2+z_b{}^2)-(x_a.x_b+y_a.y_b+z_a.z_b)^2$$

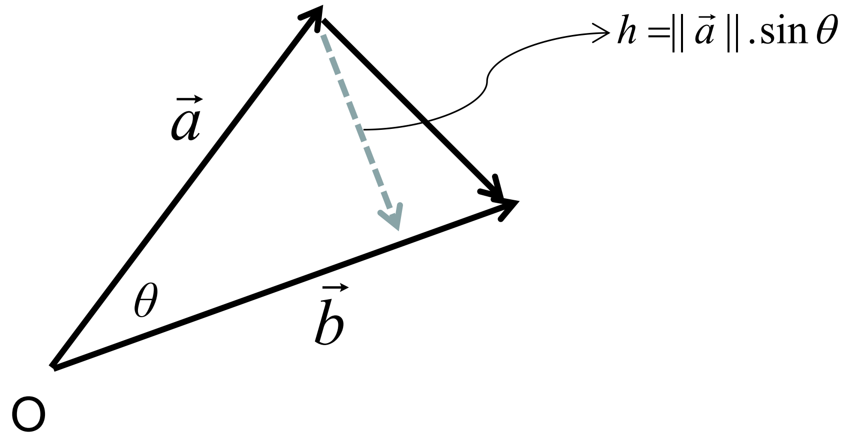
$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2.\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2$$

由向量点乘知: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2.\|\vec{b}\|^2-(\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta)^2$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2.\|\vec{b}\|^2(1-\cos\theta^2)=\|\vec{a}\|^2.\|\vec{b}\|^2.\sin\theta^2 \Longrightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.abs(\sin\theta)$$

几何意义应用——三角形面积



- 三角形面积表达式为：$$s = \frac{\| \vec{b} \| . h}{2}$$
- 带入h的表达式：$$s = \frac{\| \vec{b} \| . \| \vec{a} \| . \sin\theta}{2} = \frac{\| \vec{a} \times \vec{b} \|}{2}$$

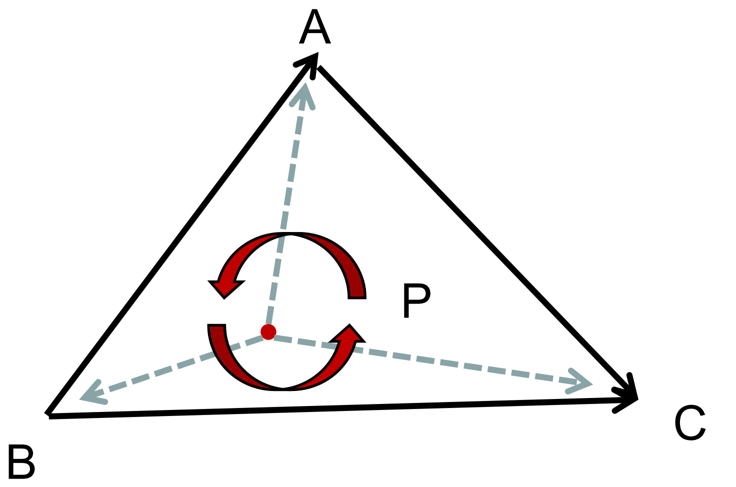
几何意义应用——判断点是否再三角形内部

- 只需判定如下三个叉乘所得向量是否方向一致

$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$(朝外）

$\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}$(朝外）

$\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PA}$(朝外）



$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$(朝内）

$\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}$(朝外）

$\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PA}$(朝外）