计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数学习——向量

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

什么是向量

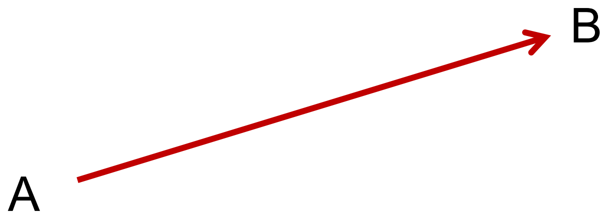
- **标量（数量）**：比如质量/温度/颜色等，没有方向，只有大小的量，称为标量
- **向量**：拥有方向跟大小的物理量/数学量为向量，比如力/速度

向量特性：

1 向量有方向，没有位置

2 向量有大小，比如力的大小/速度的快慢

一根向量如下图所示：



写作方式： $\vec{a}$

向量程序表达（x, y, z），类似一个点的表示，根据**应用场景不同，表示的含义不同**

写作方式： $\overrightarrow{AB} = B - A$

在计算当中，通常给出一个**起点A**和一个**终点B**，则两个点的**x/y/z**坐标对应相减即可得到一个向量

- 其表示的是从A指向B的向量
- 其长度为A与B之间的距离

向量长度（模）： $length = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

写作: $\|\vec{a}\|$

单位向量:

-1 长度为1的向量

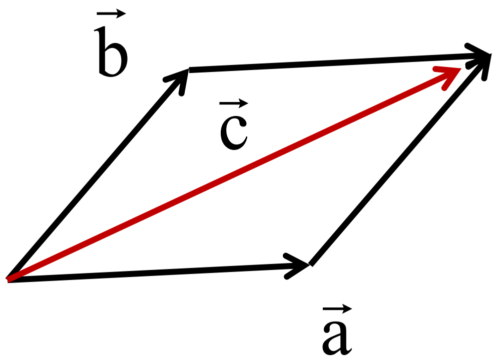
-2 归一化，将普通向量方向不变，长度变为1: $\hat{a} = \vec{a} / \|\vec{a}\|$

-3 通常用于表示纯粹的方向计算

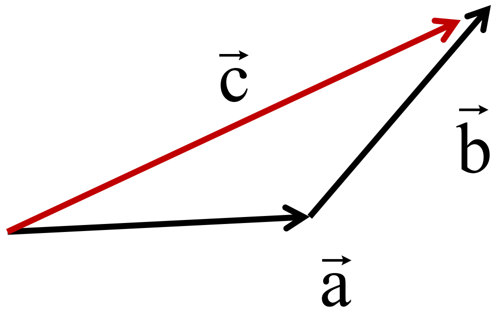
向量加法

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

- **代数解释**：两个向量坐标，x/y/z分别两两相加
- **几何解释:**
- ——两个向量移动到统一起点，构成平行四边形，其**副对角线**即为加和结果
- ——把b向量移动到a向量的末尾，从**a起点连接b终点**，得到的向量即为加和结果



①

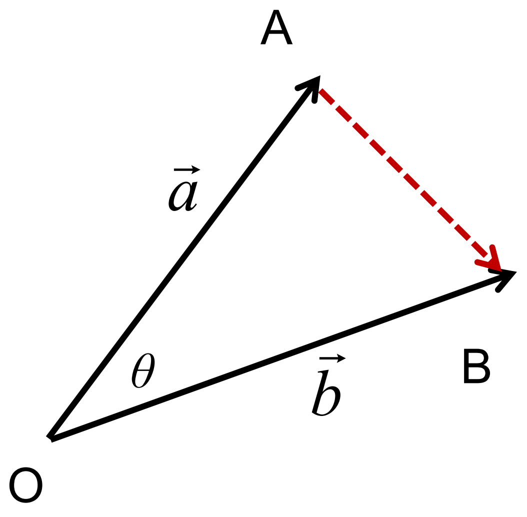


②

向量点乘

- 向量的点乘，也叫内积，是对两个向量对应位（x/y/z），**两两相乘之后求和的操作**，点乘的结果是一个**标量**
- 向量点乘也可以使用**长度**与**夹角**进行表示：$\vec{a}.\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|.\cos\theta$
- 点乘通常对应程序当中的函数：dot（a, b）
- 这**两种求点乘**的方法，如何证明等价？

向量点乘定义一致性证明



证明：$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta = x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b$

由余弦定理可知：

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2.\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta$$

$$\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta = \frac{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2}{2}$$

带入坐标表示：

$$\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta = \frac{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2 + x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2 - [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2]}{2}$$

$$\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta = x_a.x_b + y_a.y_b + z_a.z_b$$

从而我们可以统一代数与几何解释的关系

向量点乘运算性值

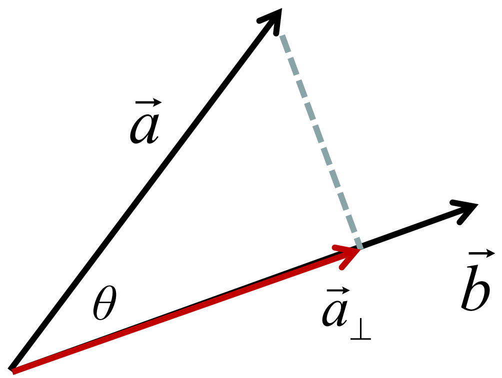
交换律： $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

结合律： $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

分配律： $(k\vec{a}).\vec{b}=\vec{a}.(k\vec{b})=k(\vec{a}.\vec{b})$

向量点乘应用举例（一）

- 计算向量a在b上的投影向量 $\vec{a}_{\perp}$



首先表示 $\vec{a}_{\perp}$ 的长度：

$$length = \|\vec{a}\|.\cos\theta$$

由前文结论：$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|}$$

将其表示为向量：

$$\vec{a}_{\perp} = \|\vec{a}\|.\cos\theta.\hat{b}$$

向量点乘应用举例（二）

- 判断两个向量是否同向，两个向量夹角小于90度，则表示同样的**方向趋势**