计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

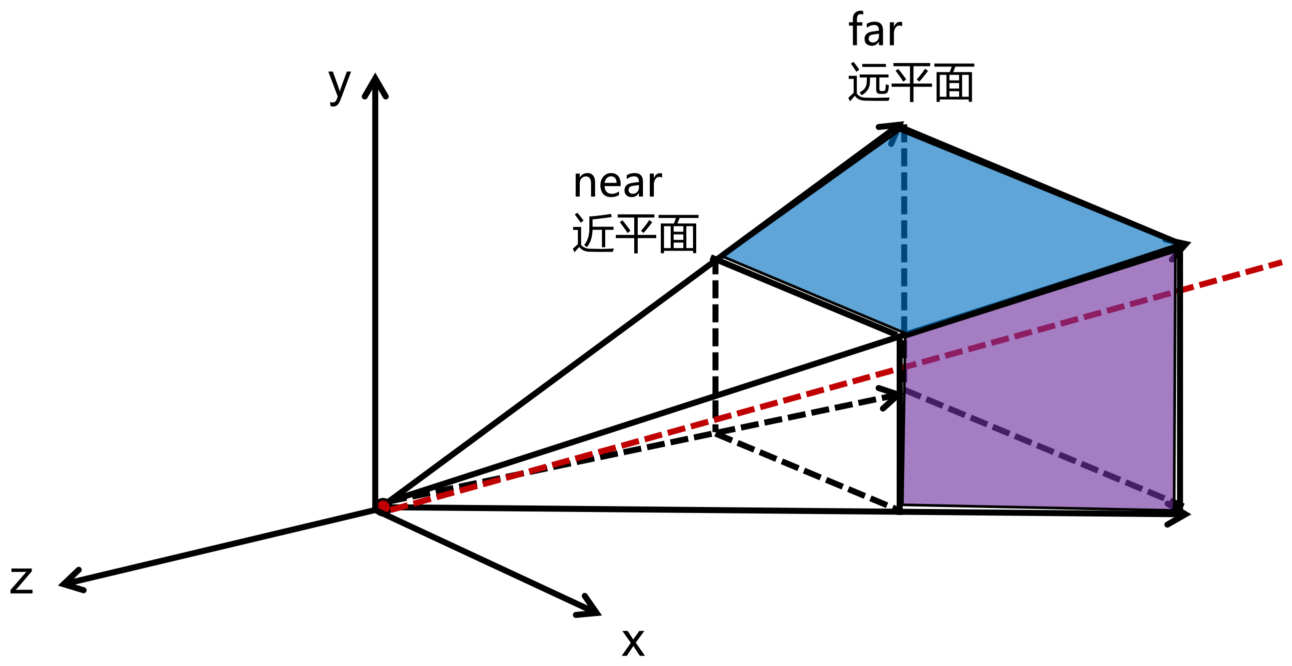
线性代数—透视投影变换

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

透视投影

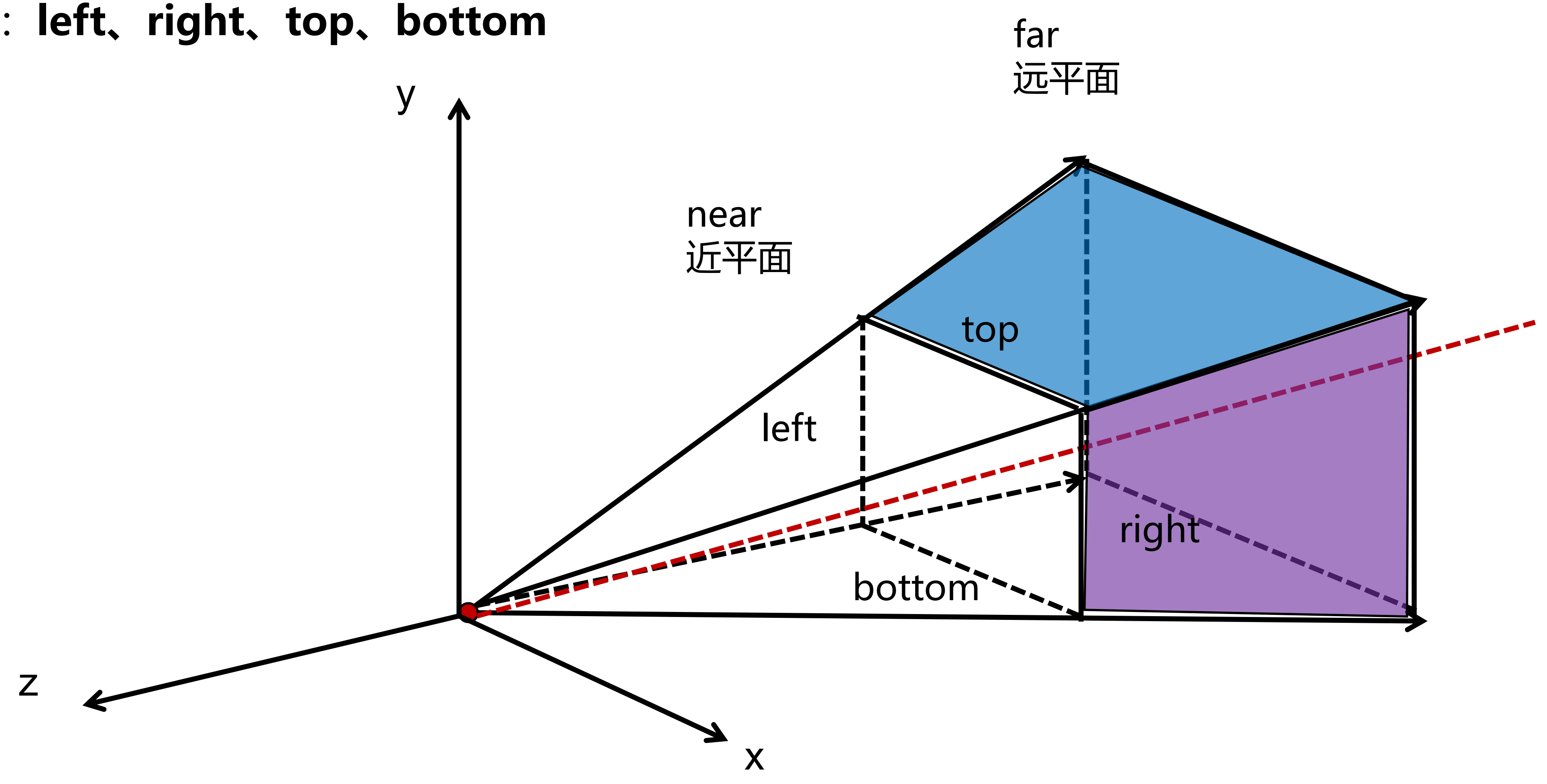
视线从**摄像机位置出发**，看向**-z方向**，可视范围是**near到far之间**的区域，形成一个视锥体；所有物体都会被投影在**近平面near上**；其特点是有**近大远小的效果**



透视投影定义数据

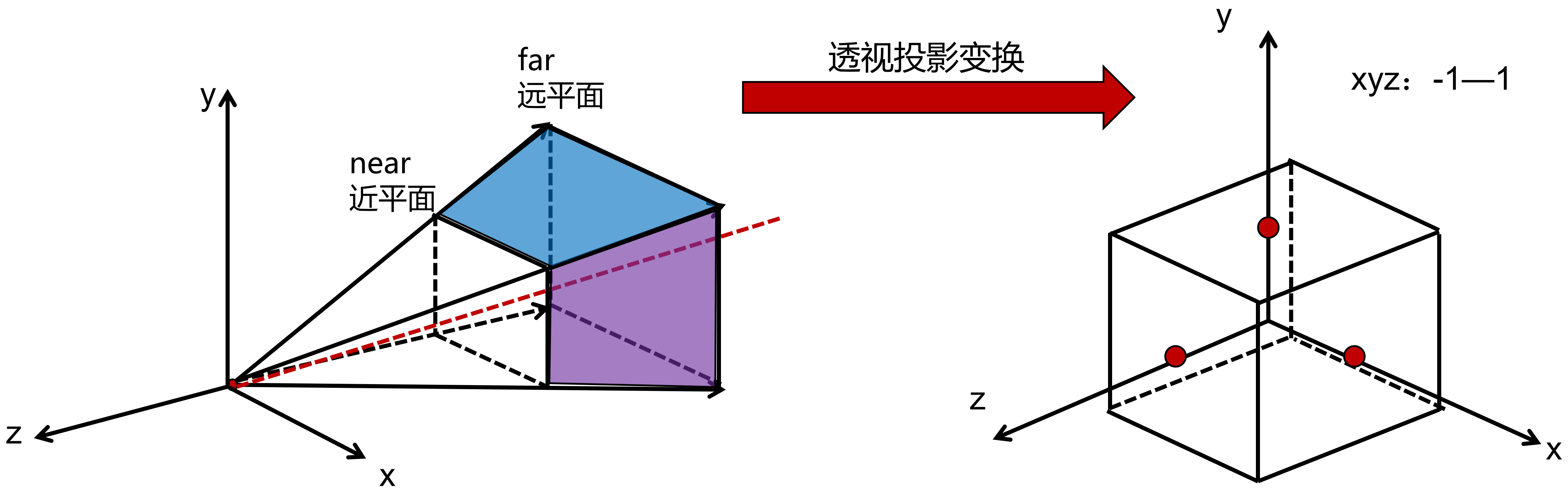
可视范围：**near、far**

近平面范围：**left、right、top、bottom**



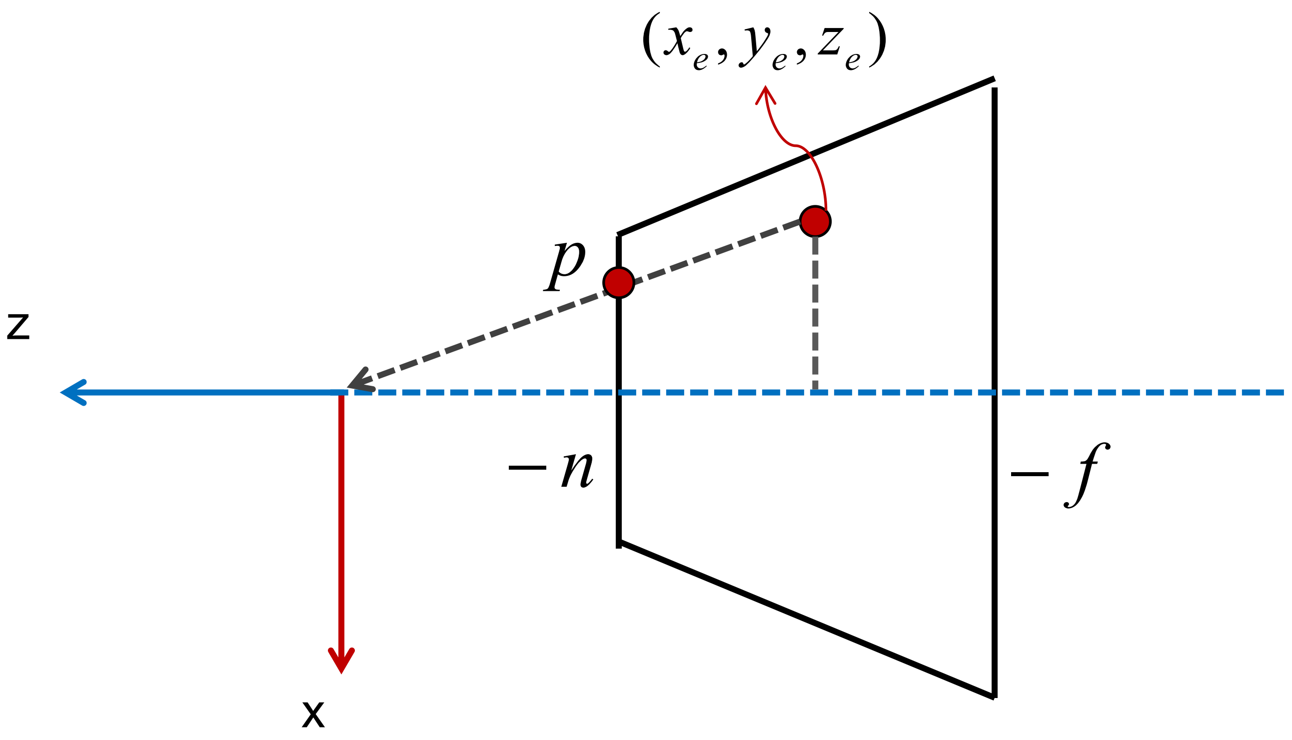
透视投影盒空间

透视投影变换最终目的，是将视锥体内部的物体压缩到一个xyz为**-1到1的盒体内**，即物体坐标化为NDC坐标，从而与正交投影统一后续计算



投影坐标计算

数据定义：**e**(eye)**坐标**，即视图变换后的坐标；逆y轴看下去，得到如下图像，可知：

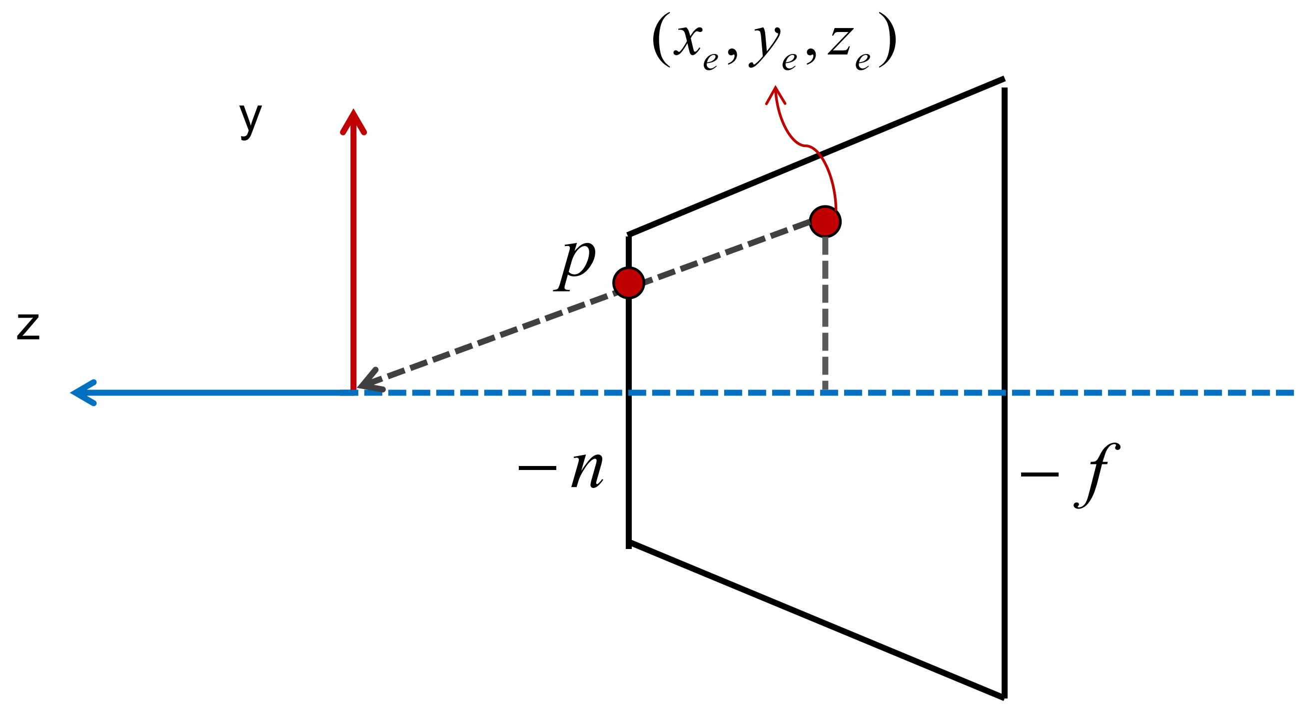


$$\frac{x_p}{x_e} = \frac{-n}{z_e}$$

$$x_p = \frac{-n.x_e}{z_e} = \frac{n.x_e}{-z_e}$$

投影坐标计算

逆x轴看下去，得到如下图像，可知：



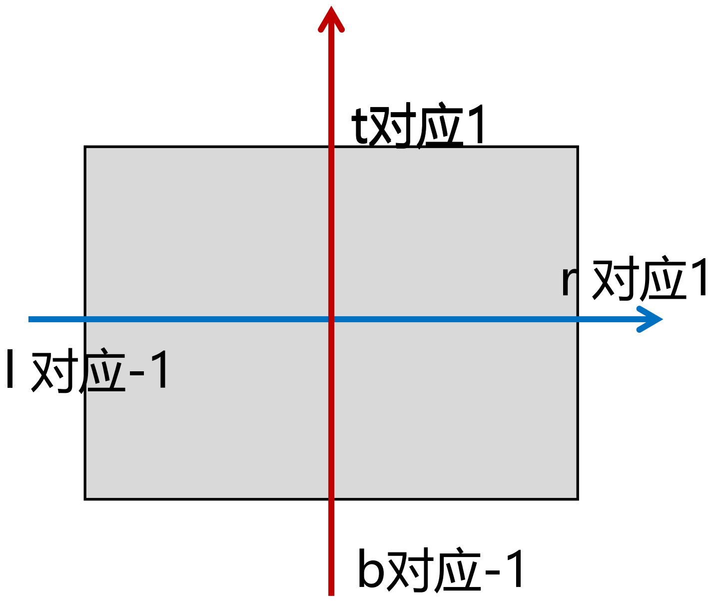
$$z_e \neq 0$$

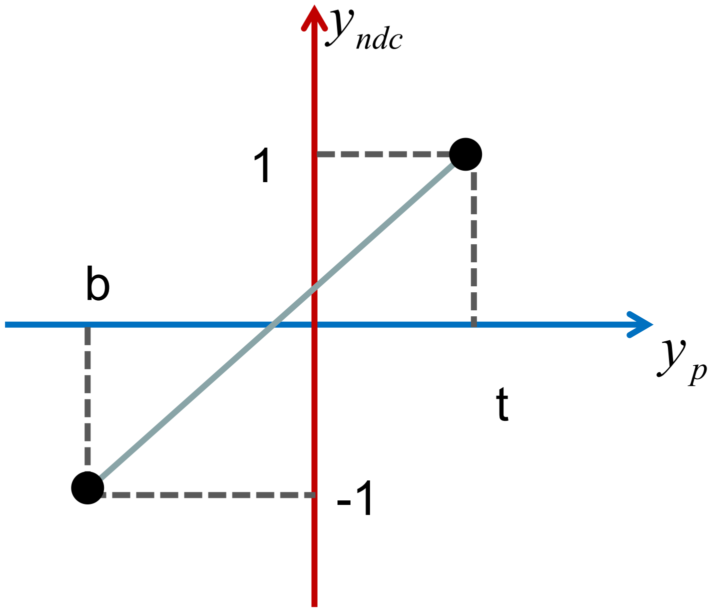
$$\frac{y_p}{y_e} = \frac{-n}{z_e}$$

$$y_p = \frac{-n.y_e}{z_e} = \frac{n.y_e}{-z_e}$$

投影平面与NDC

- 目前已知投影在近平面的P点**X/Y/Z坐标值**，下面需要把其缩放为**-1到1**的NDC坐标内
- 近平面上点坐标与NDC坐标的对应关系如下，即线性关系，**y坐标举例**





$$y_{ndc} = \frac{1-(-1)}{t-b}.y_p + \beta$$

$$1 = \frac{2t}{t-b} + \beta$$

$$\beta = -\frac{t+b}{t-b}$$

$$y_{ndc} = \frac{2}{t-b}.y_p - \frac{t+b}{t-b}$$

NDC与e坐标

- 已知条件如下：

$$x_{ndc} = \frac{2}{r-l}.x_p - \frac{r+l}{r-l}$$

$$y_{ndc} = \frac{2}{t-b}.y_p - \frac{t+b}{t-b}$$

- 使用下列等式替换：

$$x_p = \frac{n.x_e}{-z_e}$$

$$y_p = \frac{n.y_e}{-z_e}$$

- 在 $z_e \neq 0$ 的条件下，可以得到：

$$x_{ndc} = \frac{2}{r-l}.\left(\frac{n.x_e}{-z_e}\right) - \frac{r+l}{r-l}$$

$$x_{ndc} = (\frac{2n}{r-l}.x_e + \frac{r+l}{r-l}z_e).\frac{1}{-z_e}$$

$$y_{ndc} = \frac{2}{t-b}.(\frac{n.y_e}{-z_e}) - \frac{t+b}{t-b}$$

$$y_{ndc} = (\frac{2n}{t-b}.y_e + \frac{t+b}{t-b}.z_e).\frac{1}{-z_e}$$

NDC与e坐标—剪裁空间坐标

- 小总结：$z_e \neq 0$ 情况下

$$x_{ndc} = (\frac{2n}{r-l}.x_e + \frac{r+l}{r-l}z_e).\frac{1}{-z_e}$$

$$y_{ndc} = (\frac{2n}{t-b}.y_e + \frac{t+b}{t-b}.z_e).\frac{1}{-z_e}$$

$$p_c(x) = \frac{2n}{r-l}.x_e + \frac{r+l}{r-l}z_e$$

$$p_c(y) = \frac{2n}{t-b}.y_e + \frac{t+b}{t-b}.z_e$$

$$p_c(z) = ?$$

$$p_c(w) = -z_e$$

- z_{ndc} 的表达式还没有计算出来
- 考虑到兼容 $z_e = 0$ 的情况，使用齐次坐标表达：

$$p_c = (x_{ndc}.(-z_e), y_{ndc}.(-z_e), z_{ndc}.(-z_e), -z_e)$$

注意！ze为0，pc的xyz不一定为0

理解Pc坐标的含义

1 她是一个齐次坐标，三维数据需要除以w

2 她的出现是为了兼容ze=0情况下的表达

3 其中c的含义是clip，以后她会被用于**剪裁空间剪裁**

构建从视图空间坐标到剪裁空间坐标变换矩阵

- 首先可以写作如下形式，因为最终结果一定满足：$w = -z_e$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$

- 观察pc的x/y/z坐标公式，可以得到如下矩阵：（**此时只剩下跟z相关的第三行数据未知**）

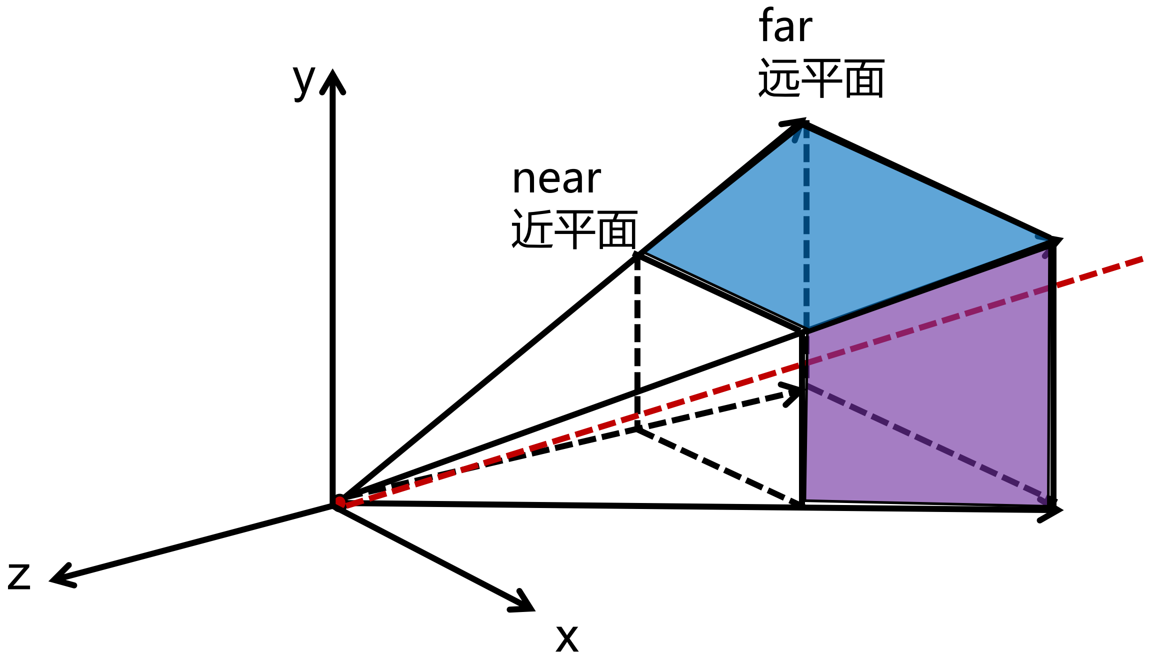
$$p_c(x) = \frac{2n}{r-l}.x_e + \frac{r+l}{r-l}z_e$$
$$p_c(y) = \frac{2n}{t-b}.y_e + \frac{t+b}{t-b}.z_e$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$

构建从视图空间坐标到剪裁空间坐标变换矩阵

- 假设视图变换后的坐标，位于近平面上，即 $z_e = -n$ ；
- 此时x/y可以取任意平面内值，而z最终得到的 ndc 坐标永远是**-1**
- 可以得到如下矩阵：

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$



构建从视图空间坐标到剪裁空间坐标变换矩阵

- 任取近平面上的点，可知 $z_e = -n \quad z_{ndc} = -1$
- 任取远平面上的点，可知 $z_e = -f \quad z_{ndc} = 1$
- 带入矩阵乘法可知：

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{求NDC}} \begin{aligned} \frac{-n.A+B}{n} &= -1 \\ \frac{-f.A+B}{f} &= 1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{f+n}{f-n} \\ B &= \frac{-2fn}{f-n} \end{aligned}$$

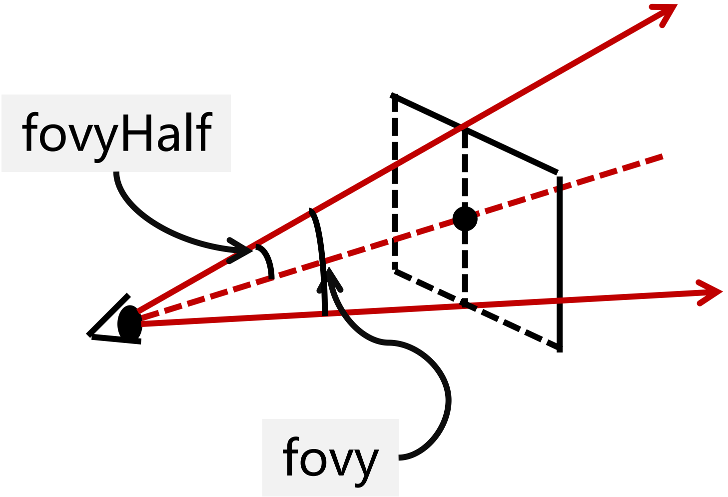
透视投影矩阵

- 最终透视投影矩阵如下（**转换到剪裁空间，没有做除以w的操作，即没有做透视除法**）

$$
PerspectiveMatrix = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

参数代换

- 一般情况下，构造透视投影矩阵需要如下参数及条件：
    - 近平面n，远平面f
    - y方向视张角fovy
    - 近平面**横/纵**的百分比aspect
    - 近平面相对y轴左右对称，相对x轴上下对称



- 替换 t-b

$$t - b = 2.\tan(\ fovyHalf\ ).n$$

- 替换 r-l，使用横纵比

$$\frac{r-l}{t-b} = aspect$$

$$r - l = aspect.(t-b) = 2.aspect.\tan(fovyHalf).n$$

- 替换矩阵当中的元素

$$\frac{2n}{r-l} = \frac{2n}{2.aspect.\tan(fovyHalf).n} = \frac{1}{aspect.\tan(fovyHalf)}$$

$$\frac{2n}{t-b} = \frac{2n}{2..\tan(fovyHalf).n} = \frac{1}{\tan(fovyHalf)}$$

$$\frac{r+l}{r-l} = 0$$

$$\frac{t+b}{t-b} = 0$$

最终形态

- 已知视锥体参数，得到其**透视投影矩阵（到剪裁空间/无透视除法）**：
  - 近平面n，远平面f
  - y方向视张角fovy
  - 近平面横/纵的百分比aspect

$$PerspectiveMatrix = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{aspect.\tan(fovyHalf)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\tan(fovyHalf)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{f+n}{f-n} & \dfrac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$