计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数—矩阵代数余子式与逆矩阵

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

矩阵代数余子式

余子式：指定矩阵A当中某一个元素a，去掉a所在行列的所有元素，剩余元素的行列式；举例所示，元素 a_{10} 的余子式如下。用符号 M_{10} 表示

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

代数余子式：在余子式前方，加上符号项；假设当前余子式为 M_{ij}，则代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

矩阵代数余子式

代数余子式应用

- 矩阵行列式使用代数余子式按行（列）展开
- 假设有方阵A，其按行展开的行列式如下：（选取一行，每个元素与自己的代数余子式相乘，再相加）

$$\det(A) = a_{i0}A_{i0} + a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

余子式求行列式举例：

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{0+0}\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{0+1}\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{0+2}\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

矩阵代数余子式

异乘变零定理

- 某一行元素与另一行元素的代数余子式分别相乘并且相加，结果为0
- 举例证明：
  - 假设有如下方阵，如果使用第四行的数据与第一行的代数余子式相乘，就会得到左式结果；
  - 如果构造新的矩阵，并使用其第一行的代数余子式求行列式，会得到右式结果；
  - 发现二者结果相等，而右方行列式为0，故异乘变零定理成立

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \boxed{9 \quad 9 \quad 9 \quad 10} \\ 0 \quad 0 \quad 8 \quad 9 \\ 2 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \\ \boxed{9 \quad 9 \quad 9 \quad 10} \end{vmatrix}$$

$$9 \times A_{00} + 9 \times A_{01} + 9 \times A_{02} + 10 \times A_{03} \xrightarrow{\text{等价}} 9 \times A_{00} + 9 \times A_{01} + 9 \times A_{02} + 10 \times A_{03}$$

矩阵的逆

定义： 设矩阵A为n阶方阵，若存在另一个n阶方阵B， 使得

$$AB = BA = I_{\mathrm{n}}$$

则称B为A的逆矩阵，当然，A也是B的逆矩阵，记作：

$$A^{-1} = B$$

- 未必所有方阵均可逆
- 若可逆，逆矩阵唯一

$AB = E \qquad AC = E$

$B = B.E = B.(A.C) = (B.A).C = E.C = C$

伴随矩阵

- 只有方阵才有伴随矩阵
- 求所有元素的代数余子式
- 按行求的代数余子式按列放，从而构成的矩阵为伴随矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{求所有元素的代数余子式}} \begin{matrix} A_{00}=1 & A_{01}=-5 & A_{02}=1 \\ A_{10}=-3 & A_{11}=3 & A_{12}=0 \\ A_{20}=2 & A_{21}=-1 & A_{22}=-1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{按行求按列放}} A^*=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -5 & 3 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

- 通用写法为：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{00} & A_{10} & \cdots & A_{n0}\\ A_{01} & A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{0n} & A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

定理：

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

证明：

$$AA^* = \begin{pmatrix} \boxed{a_{00} & a_{01} & \cdots\cdots & a_{0n}} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & A_{10} & \cdots & A_{n0} \\ A_{01} & A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{0n} & A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{|A|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

定理：

方阵A可逆的充分必要条件为：$|A| \neq 0$ 且 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

证明：

假设矩阵A满足 $|A| \neq 0$

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E$$

$$AB = I_n$$

$$|AB| = |A|.|B| = |E| = 1$$

只有A与B的行列式同时不为0，才能够得到1

所以A可逆充要条件为其行列式不为0