计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数—行列式几何意义

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

基向量

- 描述一个三维空间中所有的点，就需要一个**基础的坐标系**，比如xyz三个轴，由(1,0,0)/(0,1,0)/(0,0,1)三个向量代表，构成了三维空间的一组基
- 空间中所有点坐标都可以表示为这一组基向量的线性组合
- 比如（3，1，2）这个点可以表示为：

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.\vec{x} + \vec{y} + 2.\vec{z}$$

- 三维空间也可以存在其他的基向量组的选择，比如(1,1,0)/(0,1,1)/(1,0,1)
- **一个三维矩阵的列向量，也按序构成了一组基向量**

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{a_0} & \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2} \end{pmatrix}$$

行列式几何意义

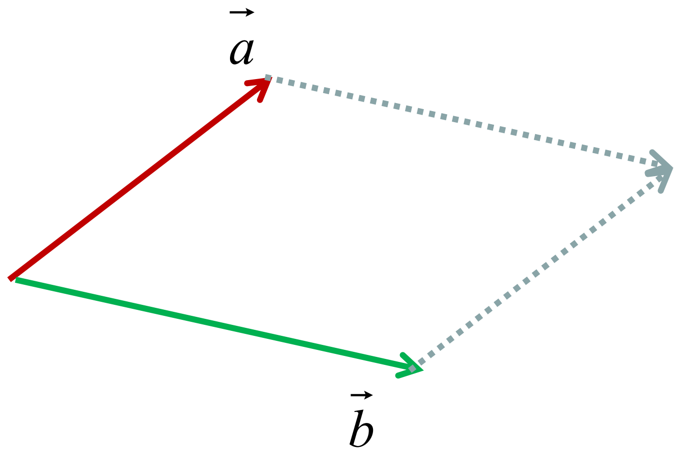
一个矩阵，可以看作多个**列（行）向量**的组合

只考虑二维跟三维行列式：

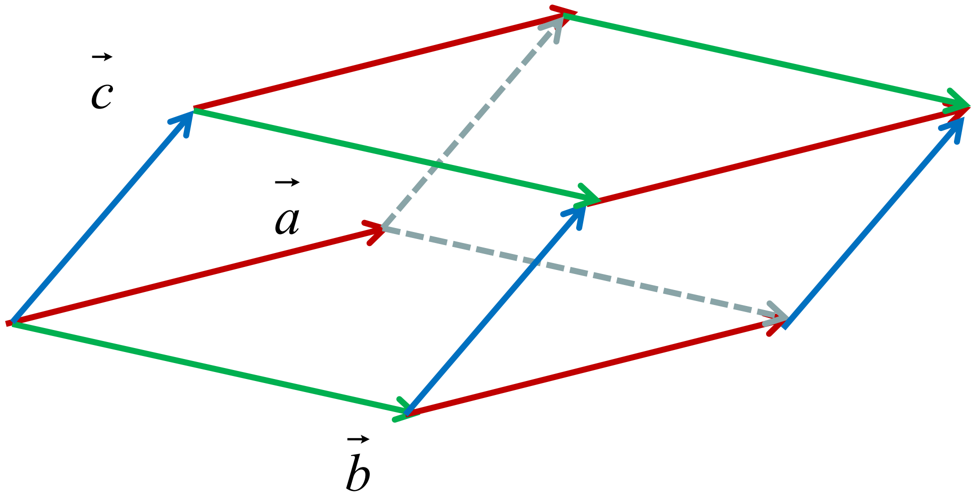
- 二维矩阵行列式是列（行）向量张成的平行四边形的**有符号**面积
- 三维矩阵行列式是列（行）向量张成的平行六面体的**有符号**体积

如下图所示：

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$$



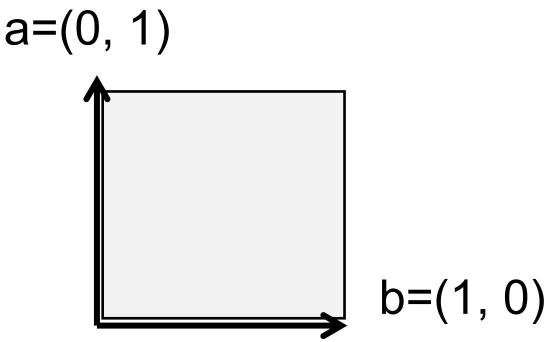
$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$



有向面积

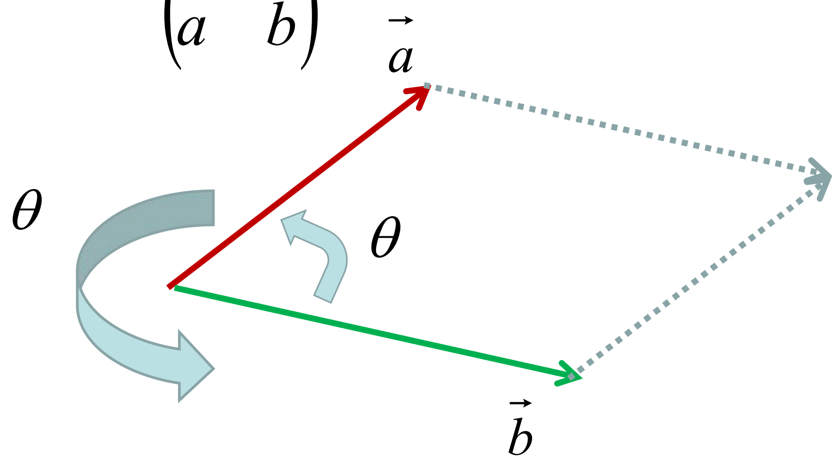
- 当我们的矩阵列是a与b两个向量构成，如下图所示；需要计算其面积，就可以使用向量的叉乘（二维情况下与叉乘算法一致），即如下公式：

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.|\sin\theta|$$



- 如果是b与a顺序的叉乘(逆时针)，则角度 θ在180度以内，sin值为正
- 如果是a与b顺序的叉乘(顺时针)，则角度 θ在180度以外，sin值为负

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}$$



$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\times d - c\times b$$

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\times 0 - 1\times 1 = -1$$

$$\det(\vec{b},\vec{a}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\times 1 - 0\times 0 = 1$$

有向体积

- 矩阵由三个向量构成，且按照图1排放（逆时针），则行列式为正，即**正体积，此时为右手坐标系**
- 矩阵由三个向量构成，且按照图2排放（顺时针），则行列式为负，即**负体积，此时为左手坐标系**

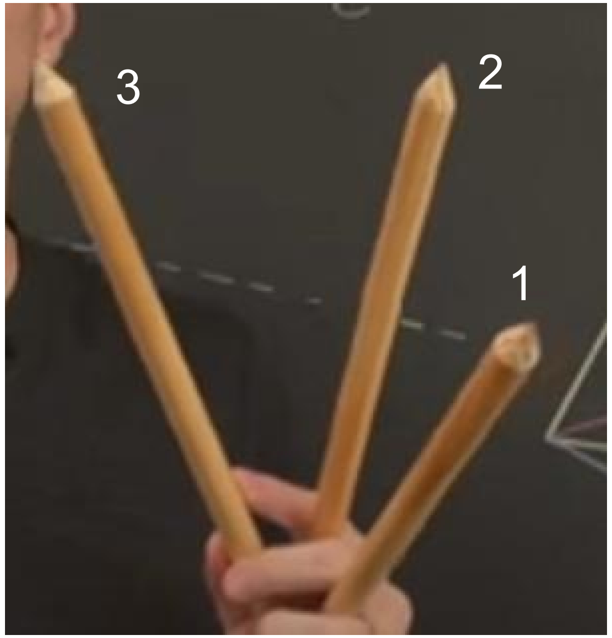


图1-来自油管

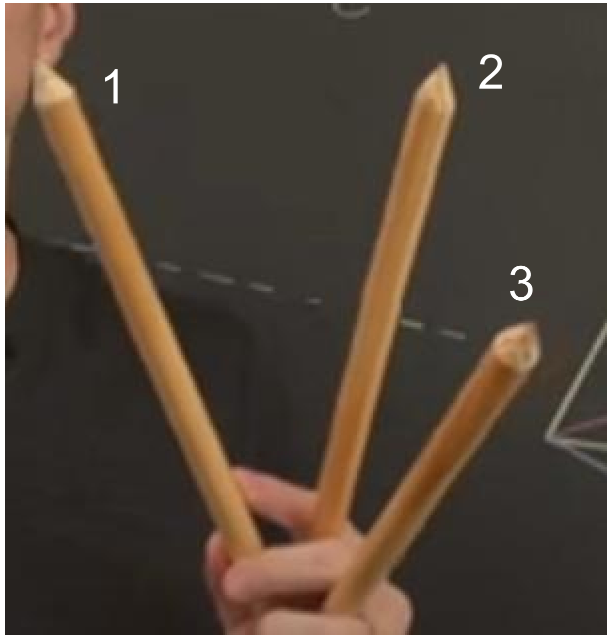


图2-来自油管

证明行列式与有向体积相等

目标：对于矩阵A，其列（行）向量张成的**平行六面体有向体积**与A的**行列式**相等

证明思路——由《行列式性质与矩阵简化》课程中，我们知道如下结论：

对于矩阵A，定义一种运算F(A)，满足：

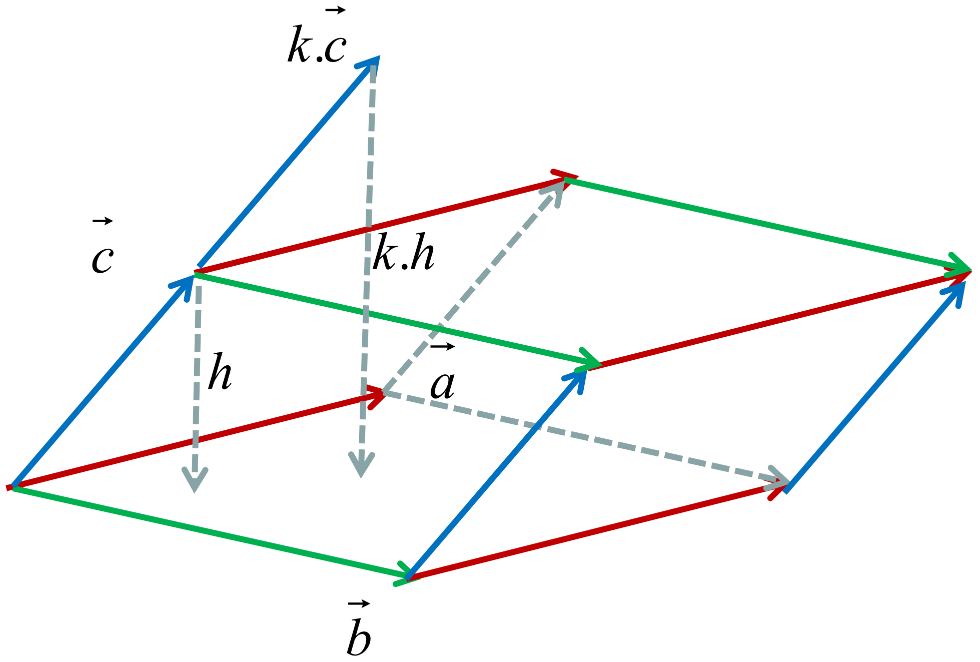
- 任何一行数据，共同乘以c得到A`，则F(A`)=F(A)*c
- 更换两行数据位置，得到A`，则F(A`)=-F(A)
- 如果A是单位矩阵，则F(A)=1
- 某一行数据乘以某一数字c，加到其他行上，得到A`，则F(A`)=F(A)

运算F(A)具有唯一性

如果能够证明**体积的计算**也满足上述性质，则可以确定**体积的计算**与**行列式计算**完全等同

证明性质（一）

- 任何一行数据，共同乘以k得到A`，则F(A`)=F(A)*k

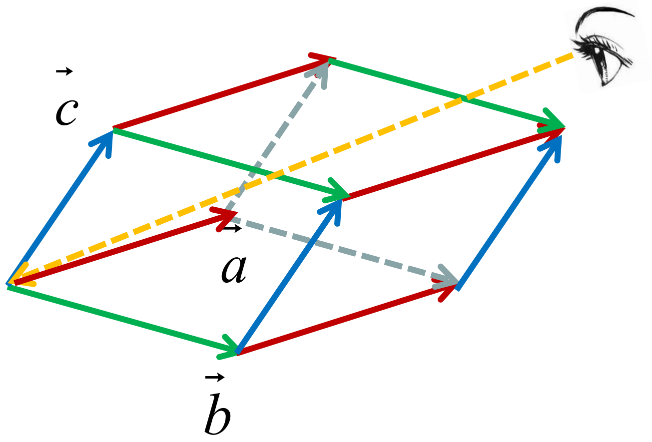


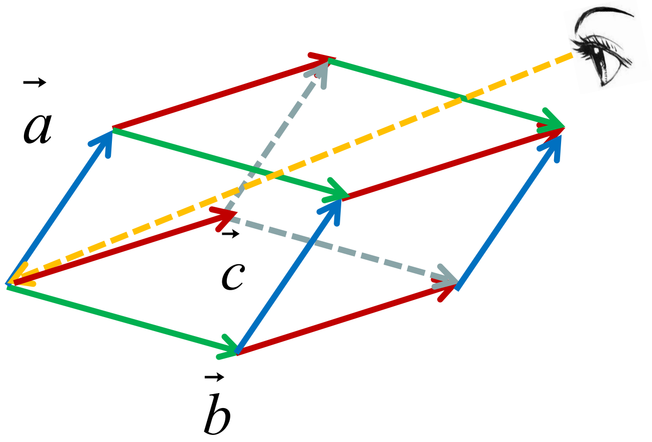
- 把a与b向量张成的平面当作底面，c向其做高
- 当c向量乘以k得到kc向量
- kc产生的高为k.h
- 所以得到的体积为原来的k倍

对于其他a跟b向量，可以做同样操作证明

证明性质（二）

- 更换两行数据位置，得到A`，则F(A`)=-F(A)



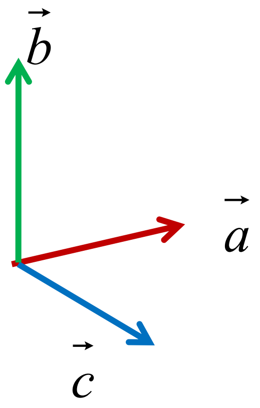


- 假设当前矩阵中向量排列顺序为a-b-c
- 从图示角度看去，顺序为**顺时针**
- 当我们随意交换两个向量在矩阵中的排列位置
- 从图示角度看去，顺序为**逆时针**

所以改变矩阵中向量排列，会改变有向体积符号

证明性质（三）

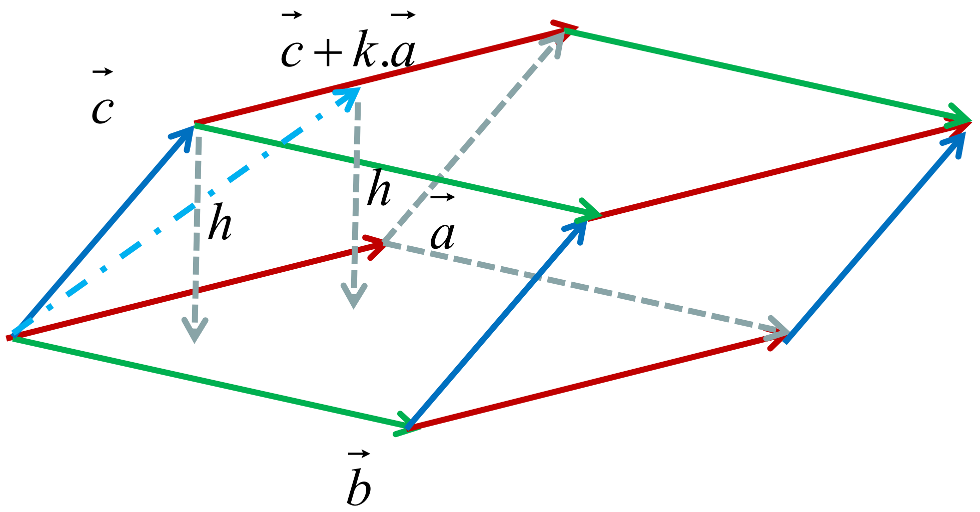
- 如果A是单位矩阵，则F(A)=1



- 当A为单位阵，abc按顺序排列为笛卡尔坐标系的xyz轴
- abc长度为1，且两两垂直，其张成一个正方体，体积为1

证明性质（四）

- 某一行数据乘以某一数字k，加到其他行上，得到A`，则F(A`)=F(A)



- 假设把a（或者b）乘以某一数字k，加到c上
- 向量c会产生如图所示的变化
- 新构成的平行六面体底面积不变（ab构成）
- 由于c沿着与ab构成的平面平行方向移动，所以到底面的高h不变
- 故本操作后，整体体积不变

结论

- 以上过程，证明计算本平行六面体体积的函数F(A)满足初等变换性质
- 由F(A)的唯一性可知:
- 矩阵列（行）向量按序排列构成平行六面体的有向体积计算与其行列式计算等价