计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数—矩阵

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

什么是矩阵

矩阵：矩阵就是一堆排序好的数字，m行 * n列

$$\begin{pmatrix} 12 & 43 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 94 & 123 \end{pmatrix}$$

元素：矩阵当中的每一个数字

元素表示：第i行，第j列，a_{ij}

方阵：当m=n时，本矩阵为方阵

单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

记作 I_n

- 必须为N * N矩阵
- 主对角线上的每个元素都是1
- 除了主对角线元素外，其他元素都为0

矩阵加法

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+33 & 0+1 & 6+2 \\ 3+3 & 1+1 & 0+5 \\ 0+0 & 0+8 & 1+1 \end{pmatrix}$$

- **可加规则:** 两个可以相加的矩阵，必须行列数相同
- **相加规则**：对应元素，两两相加，放到同样的位置

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = ?$$

举例:

$$\mathrm{c}_{21} = \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{20}.b_{01} + a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21}$$

1 相乘条件：两个按照相乘顺序的矩阵，必须满足：M*N N*X

2 相乘算法：

$$\mathrm{c}_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{0j} \\ b_{1j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

矩阵乘法规则

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

$$(A+B).C = A.C + B.C$$

$$\boxed{A.B \neq / = B.A}$$

矩阵与向量乘法

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ?$$

$$result = \begin{pmatrix} a_{00}.x + a_{01}.y + a_{02}.z \\ a_{10}.x + a_{11}.y + a_{12}.z \\ a_{20}.x + a_{21}.y + a_{22}.z \end{pmatrix}$$

相乘理解：理解为**m*n 、 n*1**的矩阵相乘，得到的是m*1的矩阵，即m维向量

矩阵转置

定义: 设矩阵A为m * n阶矩阵，则 i 行 j 列的元素为 a_{ij}

其转置阵中，i 行 j 列的元素为A中的 a_{ji} ，并且为n * m阶矩阵

记为 A^T

$$\begin{pmatrix} 12 & 34 & 45 \\ 66 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 12 & 66 \\ 34 & 0 \\ 45 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵转置性质

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(I_n)^T = I_n$$

矩阵的逆矩阵

定义： 设矩阵A为n阶方阵，若存在另一个n阶方阵B， 使得

$$AB = BA = I_n$$

则称B为A的逆矩阵，当然，A也是B的逆矩阵，记作：

$$A^{-1} = B$$

逆矩阵运算性质

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$