计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数—矩阵行列式

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

什么是行列式

矩阵：矩阵的行列式，称之为**det**（determinant），是基于矩阵所包含的行列数据计算得到的标量；本质上是一个数；只有方阵拥有行列式。

举例：

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$$

二维方阵行列式：

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\times d - c\times b$$

行列式的由来

- 历史上做行列式是为了求解方程组

$$a.x + b.y = v$$
$$c.x + d.y = w$$

$$x = \frac{d.v - bw}{\boxed{a.d - c.b}}$$

$$y = \frac{a.w - c.v}{\boxed{a.d - c.b}}$$

- 方程的解，分母部分都是统一的；且形式上就是标准的二维行列式

- 同样的理解方式可以推广到三元一次方程组的解，三维矩阵的行列式即其解的分母

求行列式之前的工具——排列

- **排列：**由1，2，3，4....n组成的一个有序数组，叫做n级排列(**中间不能缺数**)
- **逆序**：大数排在了小数前面，即为一次逆序
- **逆序数**：一个排列中，逆序的总数；由符号N表示

举例： **(从第一个开始，数后面有几个比当前数小)**

N（1 2 3 4）——逆序数=0，即标准排列/自然排列

N（2 1 3 4）——逆序数=1+0+0+0=1

N（3 2 1 4）——逆序数=2+1+0+0=3

行列式的计算定义(一)

- 行列式**按行展开**定义：对于每一项连乘，所有元素**行标**按**标准排列**，**列标**取所有排列可能性；其正负号由**列标排列的逆序数奇偶性**决定

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots\cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_0 j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_0 j_1 \dots j_n)} a_{0 j_0} a_{1 j_1} \dots a_{n j_n}$$

行列式按行展开举例

- 以下是3阶矩阵，则行采用标准排列0 1 2，列有3 * 2 * 1=6种排列可能，其逆序数如下
- N(012)=0 N(021)=1 N(102)=1 N(120)=2 N(201)=2 N(210)=3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{N(012)} a_{00}a_{11}a_{22} = +1.1.1.3 = 3 \\ (-1)^{N(021)} a_{00}a_{12}a_{21} = -1.1.0.2 = 0 \\ (-1)^{N(102)} a_{01}a_{10}a_{22} = -1.1.2.3 = \text{-}6 \\ (-1)^{N(120)} a_{01}a_{12}a_{20} = +1.1.0.1 = 0 \\ (-1)^{N(201)} a_{02}a_{10}a_{21} = +1.2.2.2 = 8 \\ (-1)^{N(210)} a_{02}a_{11}a_{20} = -1.2.1.1 = -2 \end{array} \right. = 3 + 0 - 6 + 0 + 8 - 2 = 3$$

行列式的计算定义(二)

- 行列式**按列展开**定义：对于每一项连乘，所有元素**列标**按**标准排列**，**行标**取所有排列可能性；其正负号由**行标排列的逆序数奇偶性**决定

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots\cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_0 j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_0 j_1 \dots j_n)} a_{j_0 0} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$$