计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

线性代数—行列式性质与矩阵化简

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

行列式与矩阵化简

重新思考矩阵性质:

- 任何一行数据，共同乘以c，则行列式为det(A)*c
- 更换两行数据位置，行列式绝对值不变，符号变号
- 单位矩阵的行列式为1
- 某一行数据乘以某一数字c，加到其他行上，行列式不变

矩阵的上述性质，与解方程（**N元一次方程**）的时候化简步骤类似

观察解方程过程

$$\begin{cases} x+y+z=23 \\ x-y+0.z=1 \\ 2x+y-z=20 \end{cases} \xrightarrow{\text{行2+（-1）.行1}} \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0.x-2.y-1.z=-22 \\ 2x+y-z=20 \end{cases} \xrightarrow{\text{行3+（-2）.行1}} \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0.x-2.y-1.z=-22 \\ 0.x-y-3.z=-26 \end{cases} \xrightarrow{\text{行3+（-0.5）.行2}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=23 \\ 0.x-2.y-1.z=-22 \\ 0.x-0.y-2.5.z=-15 \end{cases} \xrightarrow{\text{行3乘以（-1/2.5）}} \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0.x-2.y-1.z=-22 \\ 0.x+0.y+1.z=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{行2+行3}} \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0.x-2.y+0.z=-16 \\ 0.x+0.y+1.z=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{行2乘以（-1/2）}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=23 \\ 0.x+1.y+0.z=8 \\ 0.x+0.y+1.z=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{行1+(-1).行3}} \begin{cases} x+y+0.z=17 \\ 0.x+1.y+0.z=8 \\ 0.x+0.y+1.z=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{行1+(-1).行2}} \begin{cases} x+0.y+0.z=9 \\ 0.x+1.y+0.z=8 \\ 0.x+0.y+1.z=6 \end{cases}$$

参数矩阵

- 对于方程组的参数矩阵，相当于应用了一系列初等变换，成为了一个单位阵

$$\begin{cases} x+y+z=23 \\ x-y+0.z=1 \\ 2x+y-z=20 \end{cases} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{cases} 1.x+0.y+0.z=9 \\ 0.x+1.y+0.z=8 \\ 0.x+0.y+1.z=6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考察**参数矩阵（A）**的行列式变化，应用矩阵行列式的性质，发现对行列式产生影响的操作如下：

- 行3乘以（-1/2.5）
- 行2乘以（-1/2）

应用行列式性质可知：

$$\det(A)=(-2.5)\times(-2)\times\det(I)=5$$

结论：行列式不为0的矩阵，都可以通过初等变换，化简为单位矩阵

行列式计算唯一性

对于矩阵A，定义一种运算F(A)，满足：

- 任何一行数据，共同乘以c得到A`，则F(A`)=F(A)*c
- 更换两行数据位置，得到A`，则F(A`)=-F(A)
- 如果A是单位矩阵，则F(A)=1
- 某一行数据乘以某一数字c，加到其他行上，得到A`，则F(A`)=F(A)

如果存在本运算F，则运算得到的结果即为矩阵A的行列式

思考题：

本运算对于矩阵A是否唯一呢？即是否存在两个或更多运算F，满足上述性质？

行列式计算唯一性

假设对于方阵A，存在两种运算F0，F1，都可以满足**行列式基本性质**，求证:

对于任意方阵A（**行列式不为0**），F0(A)=F1(A)

思路:

F0(A)与F1(A)都满足**行列式基本性质**

对A施加一系列初等变换，最终可以得到单位阵 I

初等变换过程中，对F0(A)及F1(A)值的影响是相同的，假设最终影响因子是c

可知:

F0(A)=c.F0(I) F1(A)=c.F1(I)

由于二者都满足性质（单位矩阵的行列式为1）

则F0(A)=F1(A)=c

结论
满足行列式性质的运算是唯一的