计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

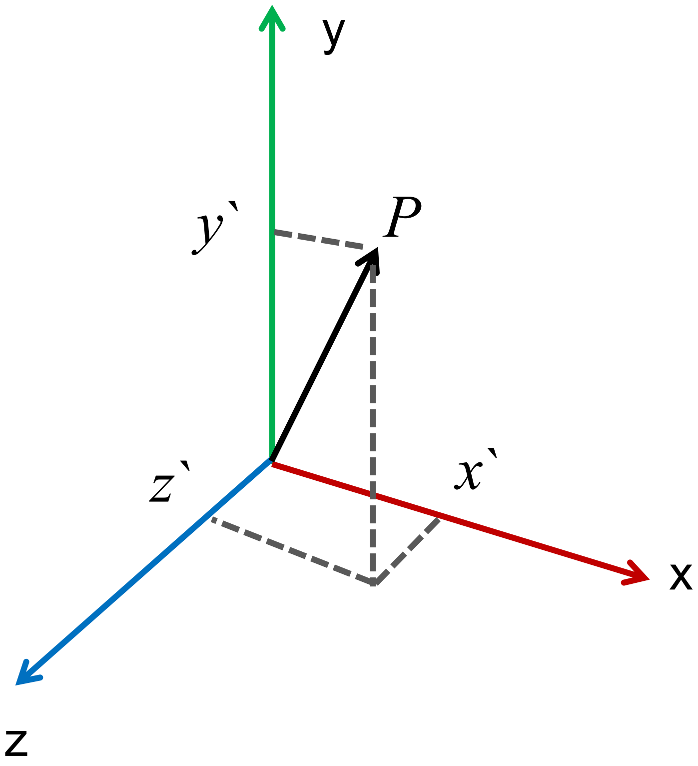
线性代数—绕任意轴旋转矩阵

授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

旋转的几何理解

- 一个点的坐标，可以理解为对**三个基向量的权重比例**，可以写作如下形式：



$$\vec{P} = x`.\hat{x} + y`.\hat{y} + z`.\hat{z}$$

$$\begin{pmatrix} x` \\ y` \\ z` \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x` \\ y` \\ z` \end{pmatrix}$$

- 上述理解，可以联系到矩阵知识库中的**列视图**
- **即：矩阵与向量相乘，是按照向量给出的x/y/z作为权重因子，对矩阵的三个向量进行加权相加**

旋转的几何理解

对于任意的旋转操作矩阵，我们假设有一个计算如下：

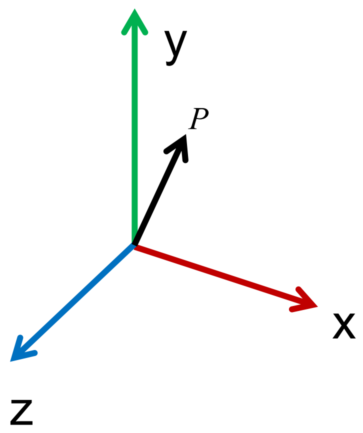
$$R=\begin{pmatrix}\vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2}\end{pmatrix}$$

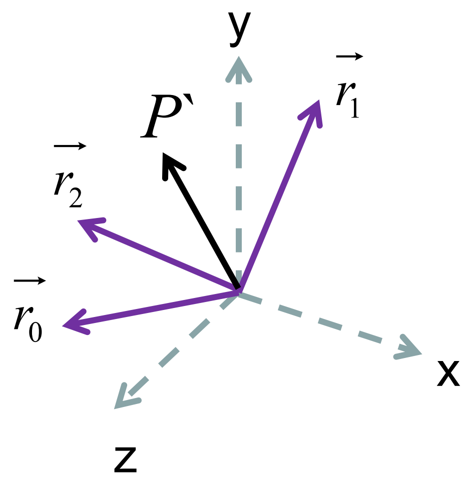
$$\begin{pmatrix}\vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x`\\ y`\\ z`\end{pmatrix}$$

- 由矩阵的列视图理解方法，可以看作：

$$\begin{pmatrix}x`\\ y`\\ z`\end{pmatrix}=x.\vec{r_0}+y.\vec{r_1}+z.\vec{r_2}$$

- 可知：旋转矩阵的三个列向量，即**新坐标系**
- **的三个基向量**





理解

旋转变换矩阵，内部的三个列向量就是**新坐标系R**的三个基向量，按序对应于新的X/Y/Z轴

P相对于**新坐标系R**的位置不变，通过对R的基向量进行加权加和，就可以计算变动后的P在原坐标系的位置

也可以理解为把原来的坐标系进行旋转得到新的坐标系R，P跟着一起旋转，但是相对于R位置不变

旋转的几何理解—延伸

- 如果已知一个旋转矩阵A，可以通过与基向量相乘，求出每一列

$$R = \begin{pmatrix} \vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2} \end{pmatrix}$$

- 令其与x/y/z轴基向量分别相乘，即可求出对应列：

$$\begin{pmatrix} \vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r_0}$$

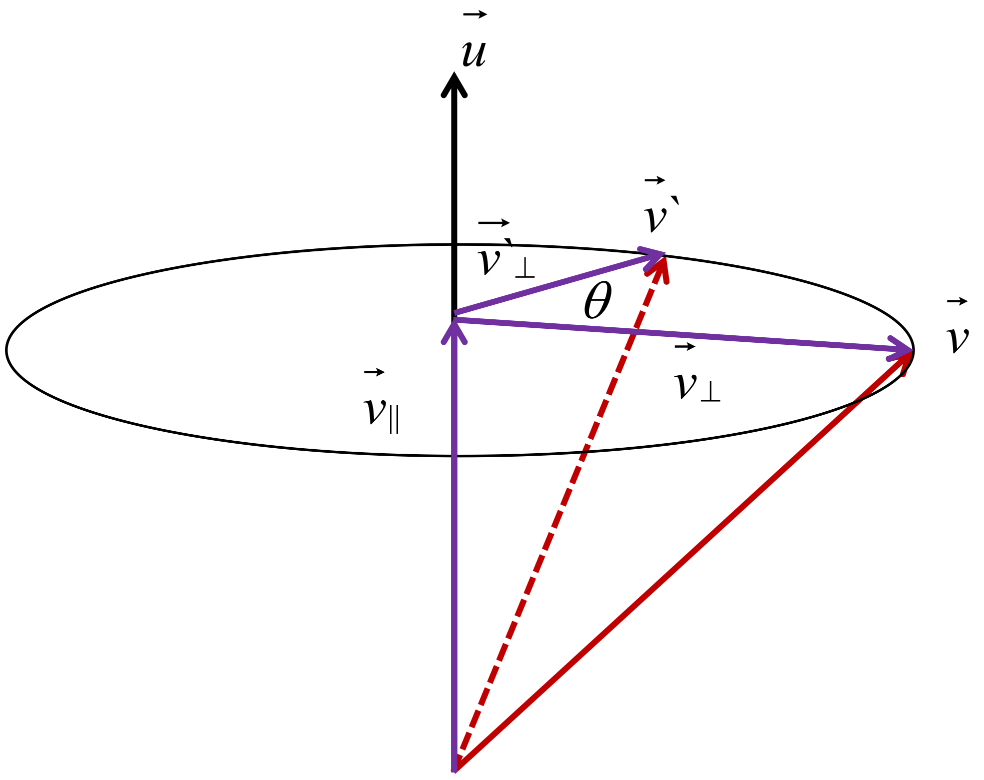
$$\begin{pmatrix} \vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r_1}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r_2}$$

请记住本结论

绕任意轴旋转推导

- 已知旋转轴为u，v围绕其旋转 θ 角，得到v`，求v`的坐标表示

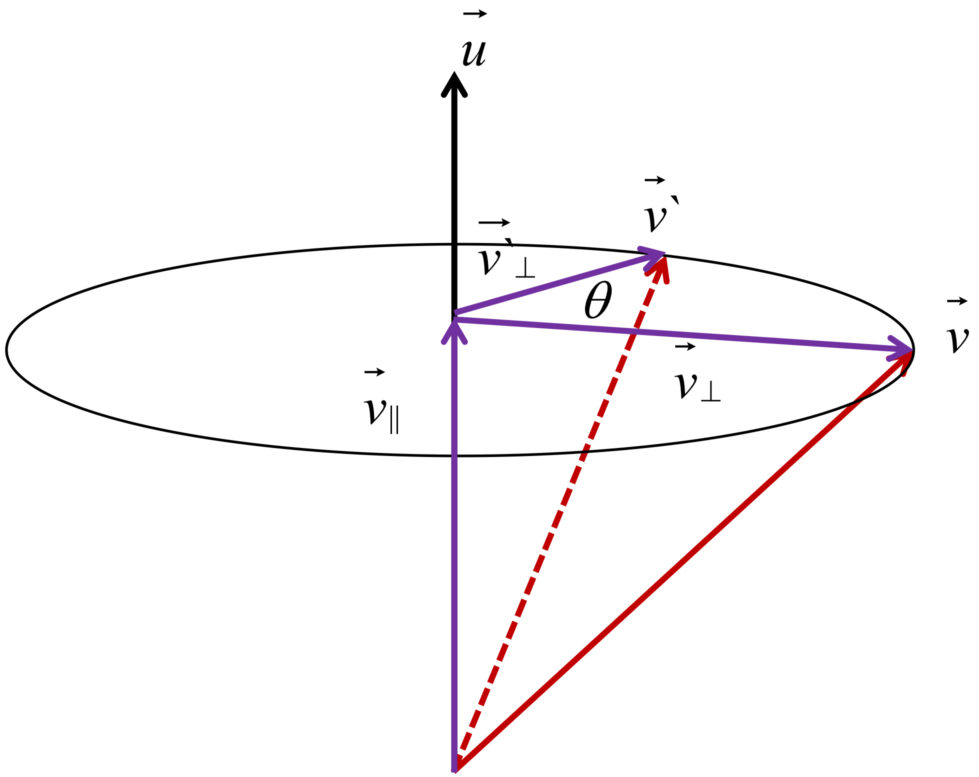


思路：

前提：首先保证 $\vec{u}$ 是归一化后的单位向量

1. 把 $\vec{v}$ 分解为平行于 $\vec{u}$ 的向量 $\vec{v}_{\parallel}$ 及垂直于 $\vec{u}$ 的向量 $\vec{v}_{\perp}$
2. 计算 $\vec{v}_{\perp}$ 围绕 $\vec{u}$ 旋转 θ 角后的向量 $\vec{v}`_{\perp}$
3. 将 $\vec{v}`_{\perp}$ 与 $\vec{v}_{\parallel}$ 相加，得到最后结果 $\vec{v}`$

绕任意轴旋转推导



- 求 $\vec{v}$ 在 $\vec{u}$ 上的投影向量 $\vec{v}_{\parallel}$

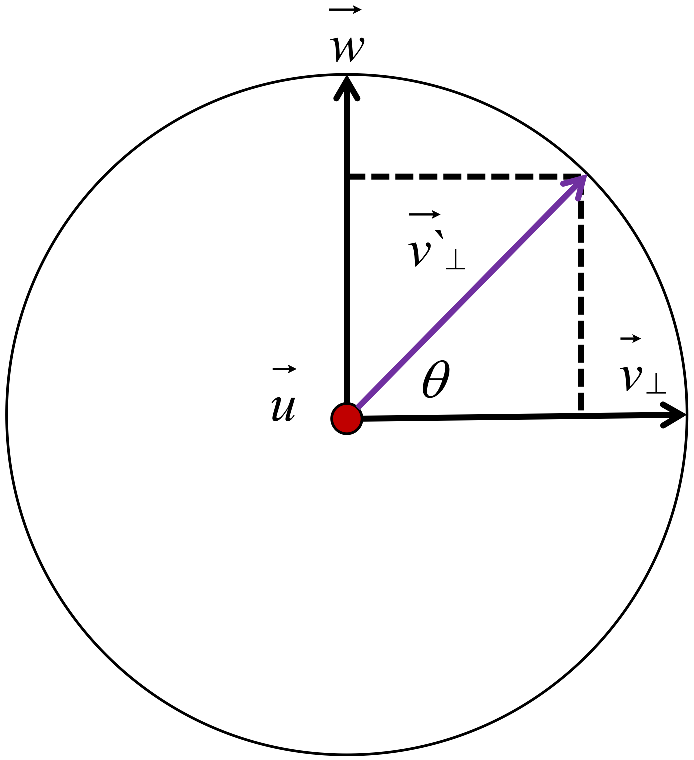
$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$$

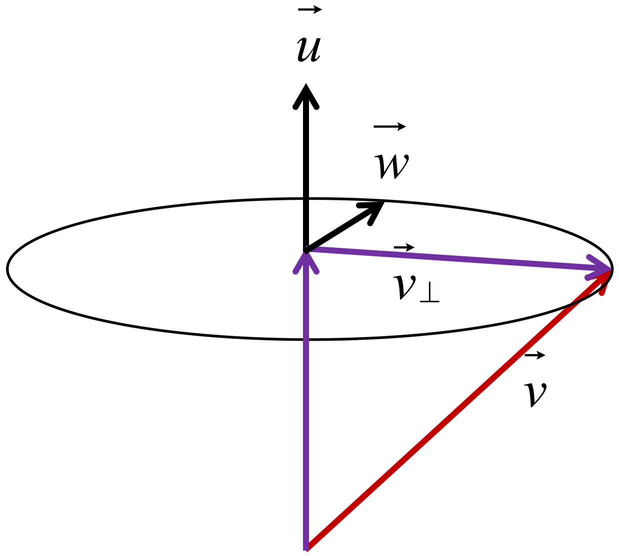
- 求向量 $\vec{v}_{\perp}$，可以得到:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$$

绕任意轴旋转推导

- 观察顶部截面，需要求 $\vec{v}`_{\perp}$ 还需要构造纵坐标向量 $\vec{w}$





右手坐标系法则

- 旋转是**逆向**旋转轴看，**逆时针旋转**
- 看向旋转轴时，其余两轴**向上/右延伸为正**
- 依据上述右手坐标系规则，可以得到其计算方法：
- $\vec{w}$ 长度与 $\vec{v}_{\perp}$ 相同

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}_{\perp}$$

求 $\vec{v}`_{\perp}$：

$$\vec{v}`_{\perp} = \cos\theta . \vec{v}_{\perp} + \sin\theta . \vec{w}$$

$$\vec{v}`_{\perp} = \cos\theta . \vec{v}_{\perp} + \sin\theta . (\vec{u} \times \vec{v}_{\perp})$$

绕任意轴旋转公式

- 对前方公式进行整理可得：

$$\vec{v}`_{\perp} = \cos.\vec{v}_{\perp} + \sin\theta.(\vec{u}\times\vec{v}_{\perp})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}_{\perp} = \vec{u}\times(\vec{v}-\vec{v}_{\parallel}) = \vec{u}\times\vec{v}-\vec{u}\times\vec{v}_{\parallel} = \vec{u}\times\vec{v}$$

- 最终公式带入：

$$\vec{v}` = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}`_{\perp}$$

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$$

$$\vec{v}` = (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u} + \cos.\vec{v}_{\perp} + \sin\theta.(\vec{u}\times\vec{v})$$

- 由于：

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}-(\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$$

- 可知：

$$\vec{v}` = \cos\theta.(\vec{v}-(\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}) + \sin\theta.(\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$$

求取矩阵形式

$$\vec{v}` = \cos\theta.(\vec{v} - (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}) + \sin\theta.(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$$

- 令v=（1，0，0）
- 可以得到矩阵的第一列
- 令v=（0，1，0）
- 可以得到矩阵的第二列
- 令v=（0，0，1）
- 可以得到矩阵的第三列

举例：

$$\vec{v}` = \cos\theta.\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}\right) + \sin\theta.\left(\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}$$

$$\vec{v}` = \begin{bmatrix}u_x{}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta\\ u_xu_y(1-\cos\theta)+u_z.\sin\theta\\ u_xu_z(1-\cos\theta)-u_y.\sin\theta\end{bmatrix}$$

旋转矩阵最终貌

- 已知旋转轴为u，v围绕其旋转 θ 角，求旋转矩阵

$$R_\theta = \begin{pmatrix} {u_x}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_x u_y(1-\cos\theta)-u_z.\sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta)+u_y.\sin\theta \\ u_x u_y(1-\cos\theta)+u_z.\sin\theta & {u_y}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_y u_z(1-\cos\theta)-u_x.\sin\theta \\ u_x u_z(1-\cos\theta)-u_y.\sin\theta & u_y u_z(1-\cos\theta)+u_x.\sin\theta & {u_z}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}$$