计算机图形学小白入门

————从0开始实现OpenGL

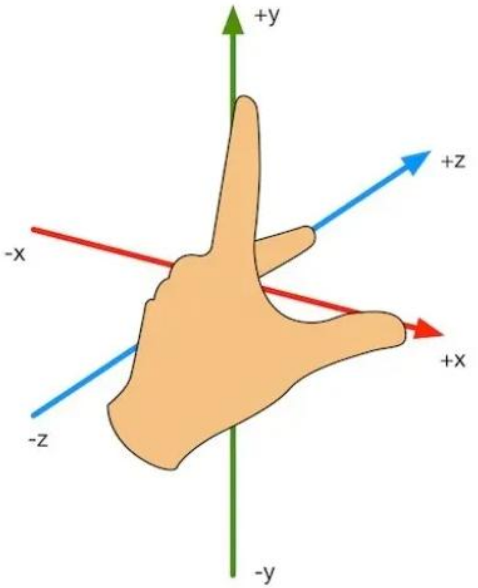
线性代数—三维空间变换

授课：赵新政
资深三维工程师

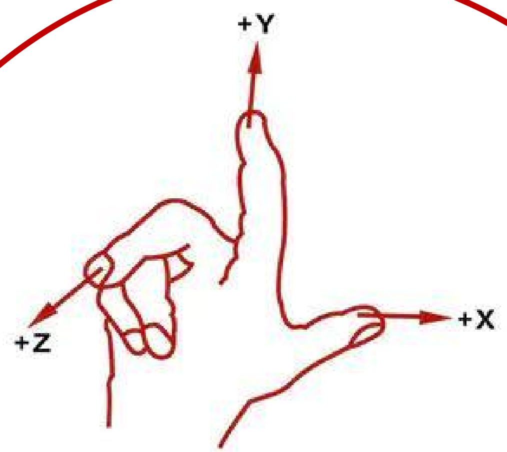
专注3D图形学技术
教育品牌

三维坐标系类型

- 三维坐标系的基向量（X/Y/Z）根据排列不同，分为左手坐标系与右手坐标系，课程统一采用**右手坐标系**



左手坐标系



右手坐标系

三维变换

- 三维空间变换是三维向量与3*3矩阵的关系，由于存在平移变换的需求，也需要增加一个维度，变为四维

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

平移矩阵与缩放矩阵

- 平移+缩放，二维与三维差距不大，只是增加了矩阵维度

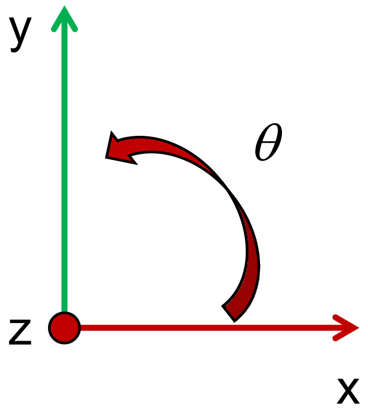
$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵

- 对于三维世界的旋转，并不是围绕一个点，而是围绕一个**旋转中心轴**
- 最简单的三维旋转，就是围绕三个基向量（即xyz轴）进行的旋转

旋转规则

- 对于绕某个轴旋转 θ 角，是指逆着当前轴看过去，逆时针旋转 θ 角度



思考：

如图所示，从逆z轴看出去，会得到xy构成的平面，则矩阵

可以参考二维平面旋转进行构造

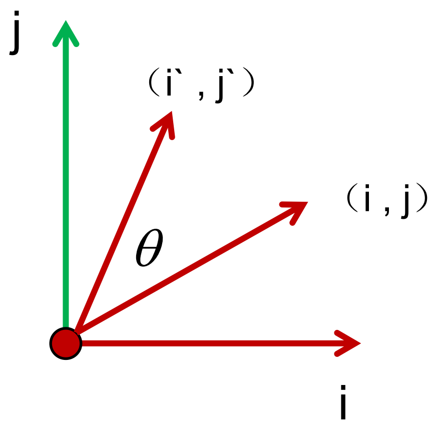
对照二维旋转

- 二维旋转可以理解为任意的两个互相垂直的向量作为坐标轴（基），逆时针旋转 θ 角度的结果

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i` \\ j` \end{pmatrix}$$

$$i` = \cos\theta . i - \sin\theta . j$$

$$j` = \sin\theta . i + \cos\theta . j$$



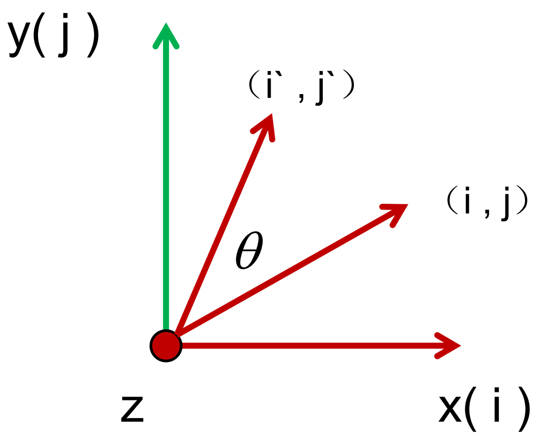
- 三维旋转按照X/Y/Z旋转，可以看作让某两个轴充当了 **i** 与 **j**

绕z轴旋转如下所示

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i` \\ j` \end{pmatrix}$$

$$i` = \cos\theta.i - \sin\theta.j$$

$$j` = \sin\theta.i + \cos\theta.j$$



- 可以构造如下旋转矩阵

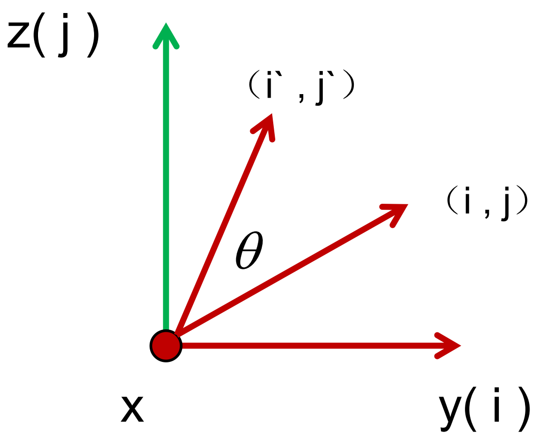
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta.i - \sin\theta.j \\ \sin\theta.i + \cos\theta.j \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

绕x轴旋转如下所示

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i` \\ j` \end{pmatrix}$$

$$i` = \cos\theta . i - \sin\theta . j$$

$$j` = \sin\theta . i + \cos\theta . j$$



- 可以构造如下旋转矩阵

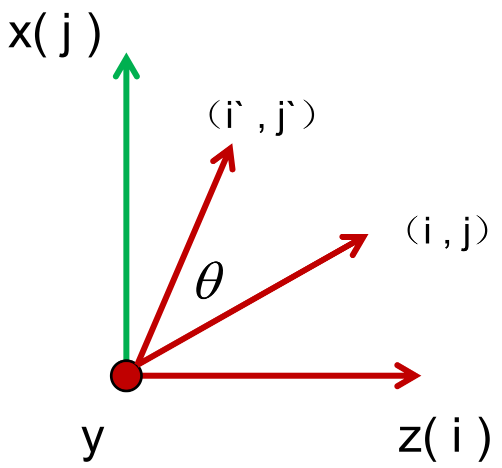
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ i \\ j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \cos\theta . i - \sin\theta . j \\ \sin\theta . i + \cos\theta . j \\ 1 \end{pmatrix}$$

绕y轴旋转比较特殊，如下所示

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i` \\ j` \end{pmatrix}$$

$$i` = \cos\theta . i - \sin\theta . j$$

$$j` = \sin\theta . i + \cos\theta . j$$



- 可以构造如下旋转矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ y \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta . i + \cos\theta . j \\ y \\ \cos\theta . i - \sin\theta . j \\ 1 \end{pmatrix}$$

总结

围绕z轴逆时针旋转：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

围绕z轴逆时针旋转：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

围绕y轴逆时针旋转：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$