



计算机图形学小白入门

——从0开始实现OpenGL

线性代数—二维空间变换



授课：赵新政
资深三维工程师

专注3D图形学技术
教育品牌

矩阵与向量相乘

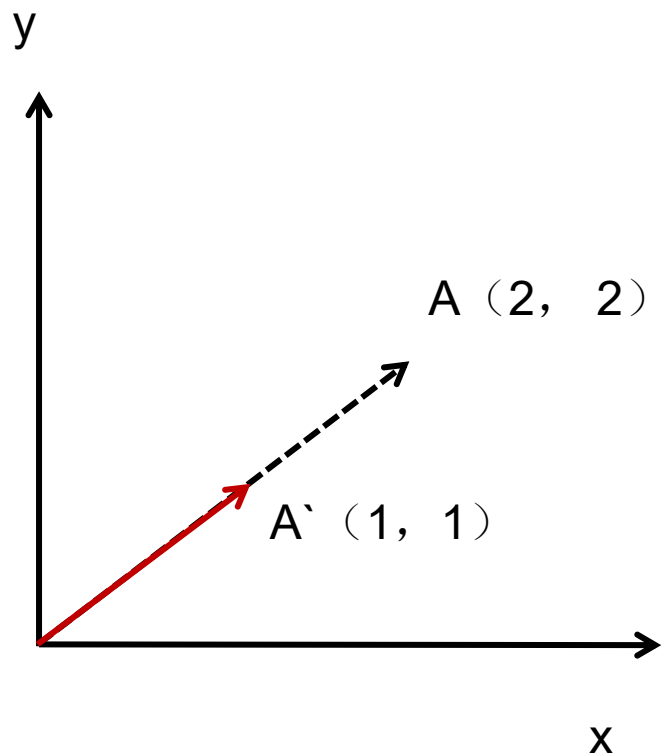
二维矩阵与二维向量相乘：

$$M \times \vec{P} = \vec{P}'$$

向量有自己的坐标 (x, y)，也可以理解成为一个点的位置坐标

对于点P，与M相乘后，得到的新坐标表示的是什么呢？这个乘法代表了什么呢？

二维缩放



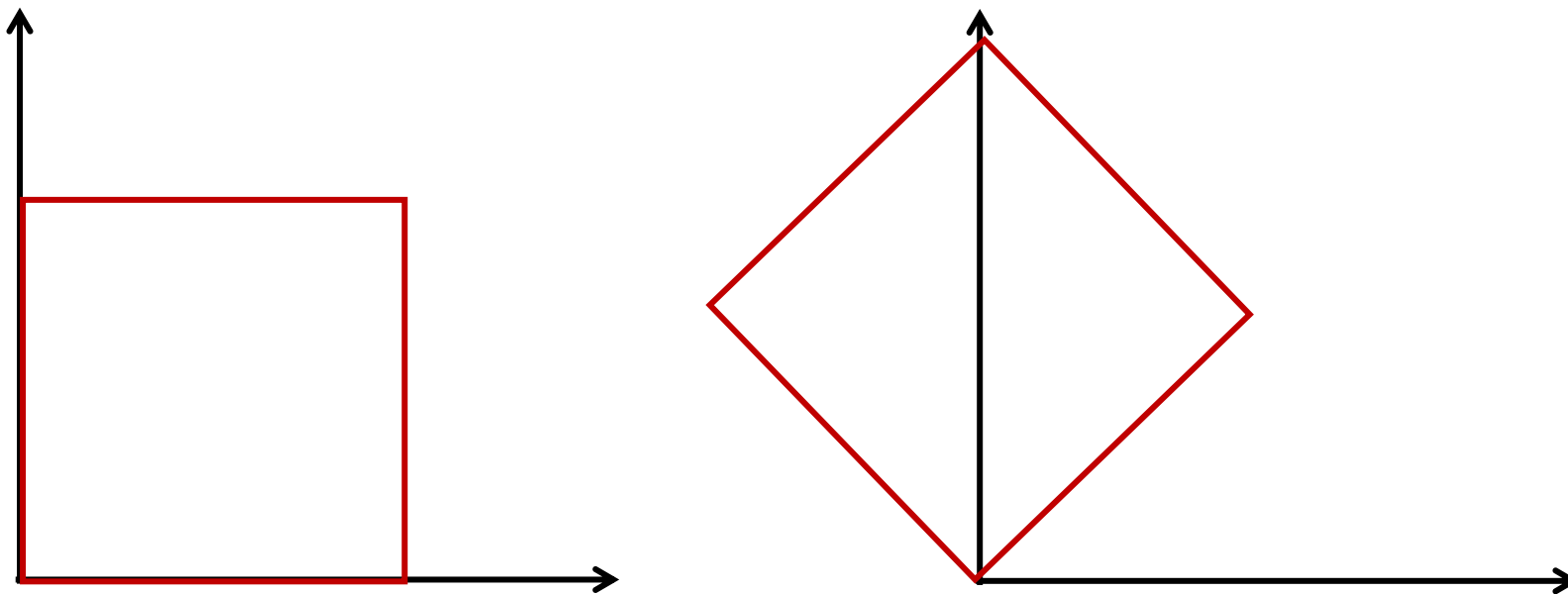
给出一个向量（或者点）A，如果左乘一个矩阵M，得到A'，如何给出这个矩阵呢？

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

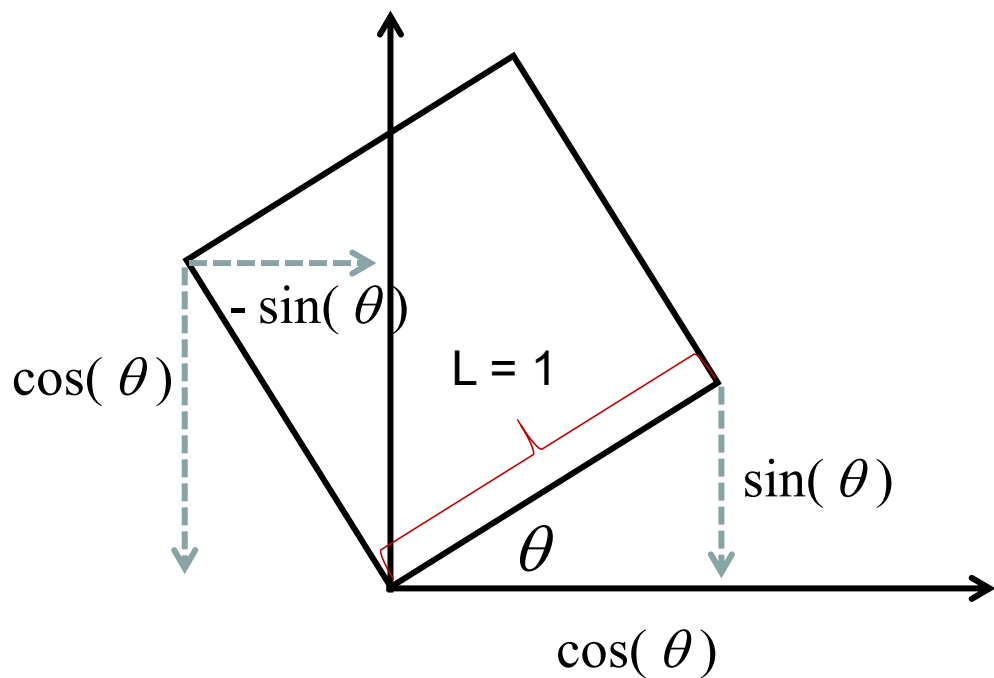
结论：用矩阵可以对坐标进行变换，从而得到缩放后的坐标，那可否绕某个点旋转，有可否平移呢？

二维旋转

- 给出下图矩形，如何让它绕远点旋转45度呢？
- 可否构造一个矩阵，让每个顶点都与该矩阵相乘，得到旋转后的结果即目标矩形



二维旋转



$$\begin{pmatrix} \text{new_x} \\ \text{new_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

使用原来 (1,0) 的点可以得到 **A C**

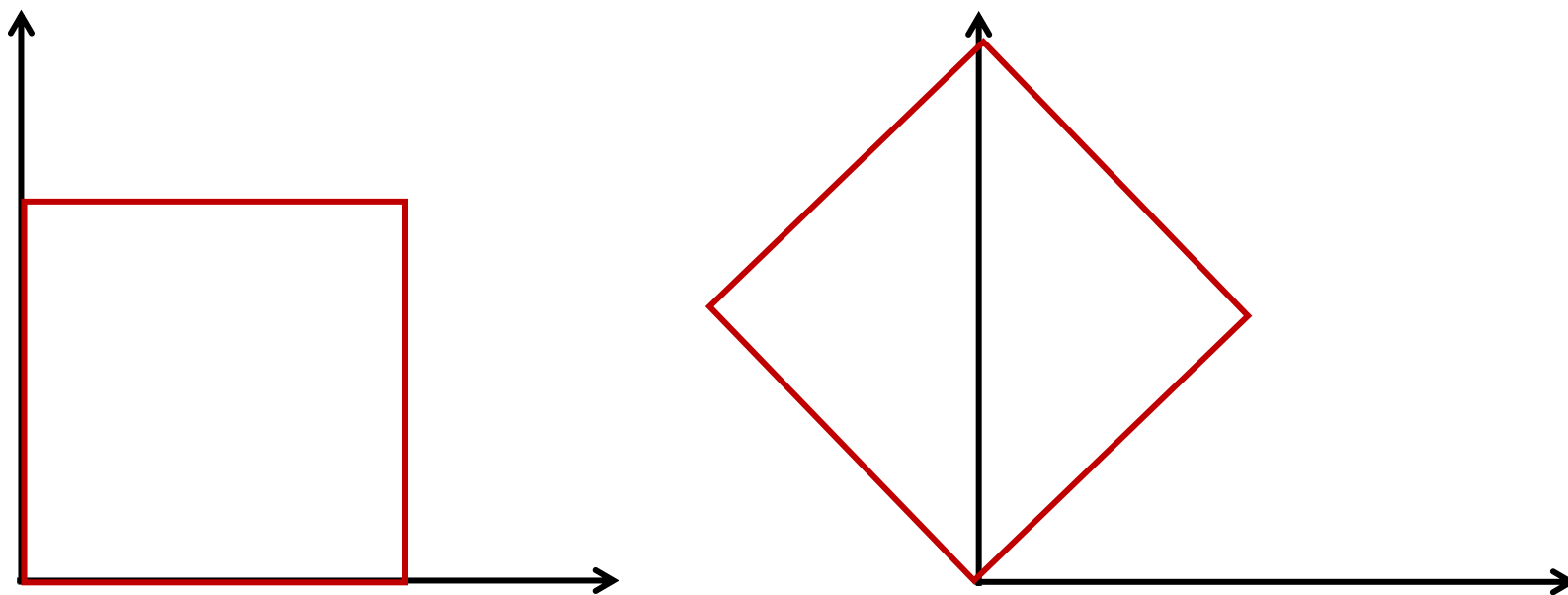
$$A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = \cos(\theta)$$

$$C \cdot 1 + D \cdot 0 = C = \sin(\theta)$$

使用原来 (0,1) 的点可以得到 **B D**

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 = B = -\sin(\theta)$$

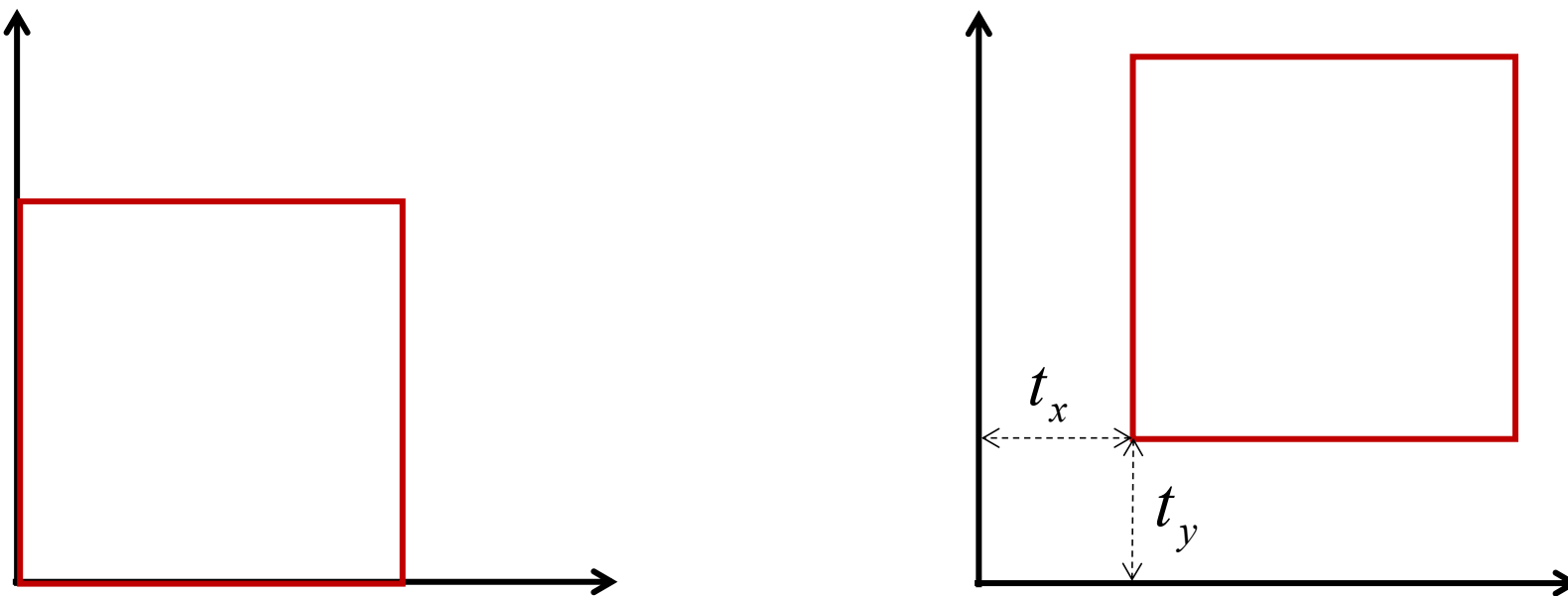
$$C \cdot 0 + D \cdot 1 = D = \cos(\theta)$$



$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

二维平移

- 所有顶点共同增加x、y方向的偏移，则会得到一个平移后的矩形



$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

二维平移

存在的问题

如果写成了向量计算的形式，会变成**加法形式**，并不是一个**乘法形式**，所以没办法写成矩阵与向量的相乘！

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

诉求：

我们的诉求是一站式解决方案，依然要寻求矩阵向量乘积的方案

二维平移

齐次坐标

为了迎合平移变换，且能相乘的形式。我们为每一个顶点或向量坐标加一个维度，让二维向量升为三维向量

$$position = (x, y, 1)^T$$

$$vector = (x, y, 0)^T$$

事情就变成了下面的样子：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

位置点

向量

二维变换

缩放矩阵:

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

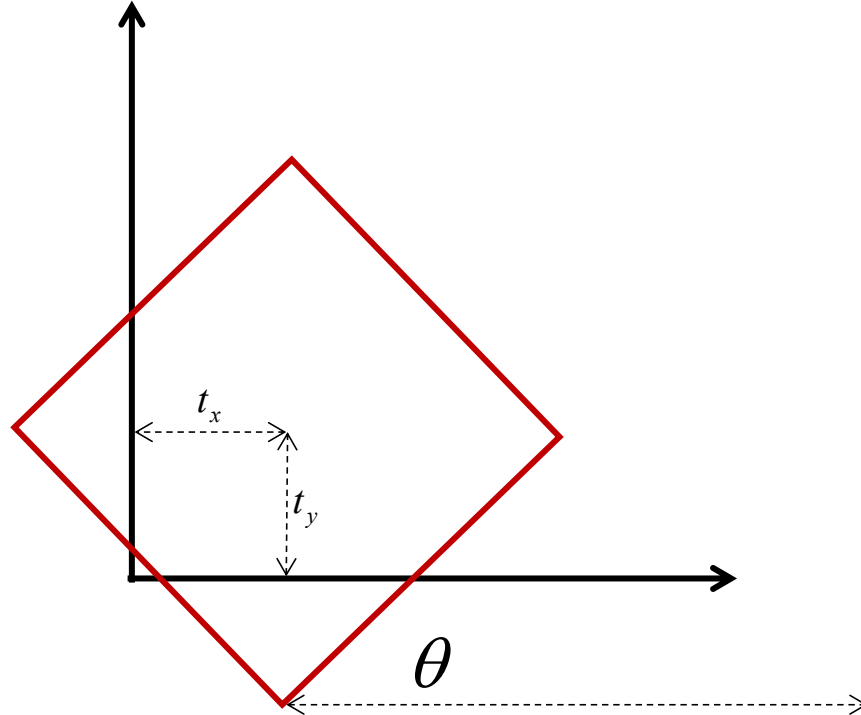
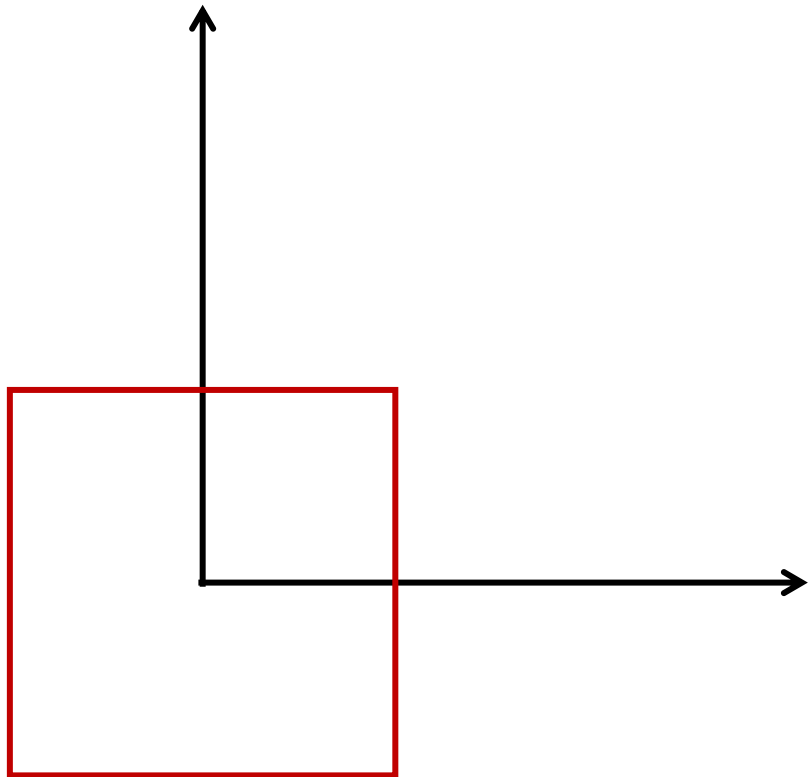
旋转矩阵:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

平移矩阵:

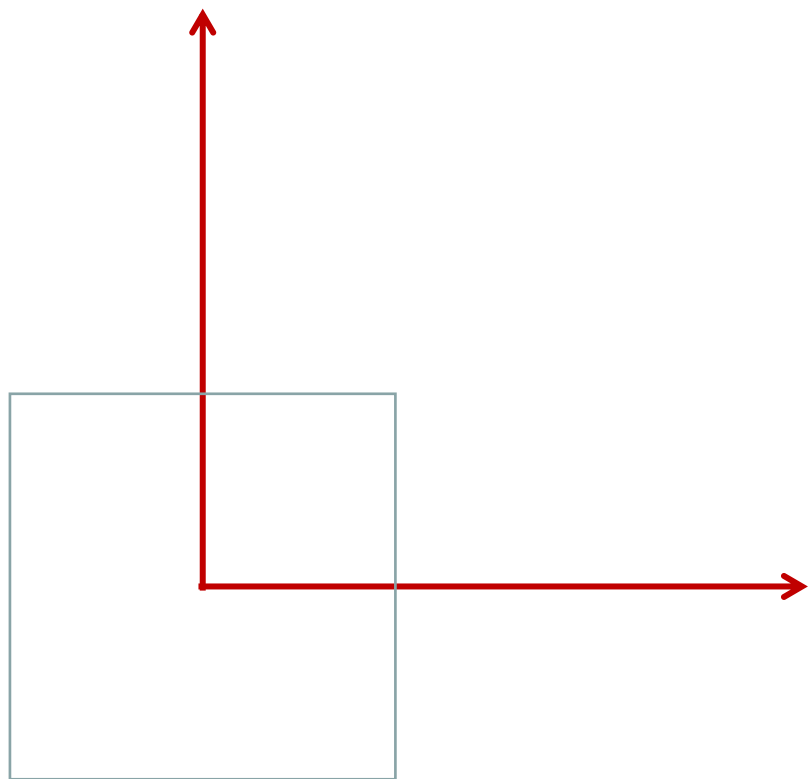
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

变换思考题

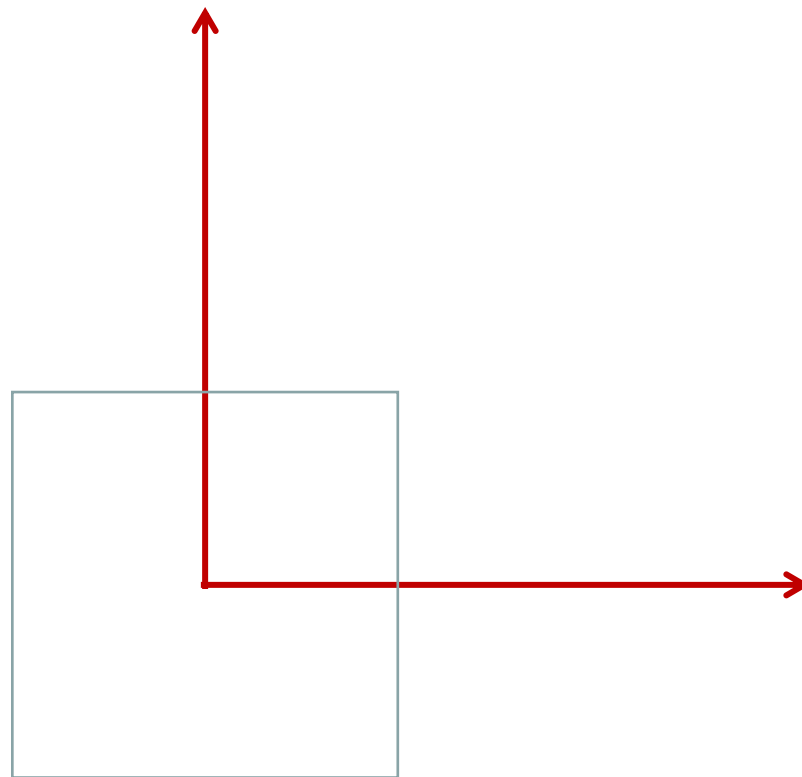
**问题：**

如图所示的变换，有没有矩阵相乘的**顺序**问题呢？如果有，平移跟旋转，谁先谁后？

变换思考题



示例：
先旋转，再平移



示例：
先平移，再旋转

结论：

变换矩阵之间的相乘，是有顺序的，从右往左，依次对顶点(向量) 进行加工

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$