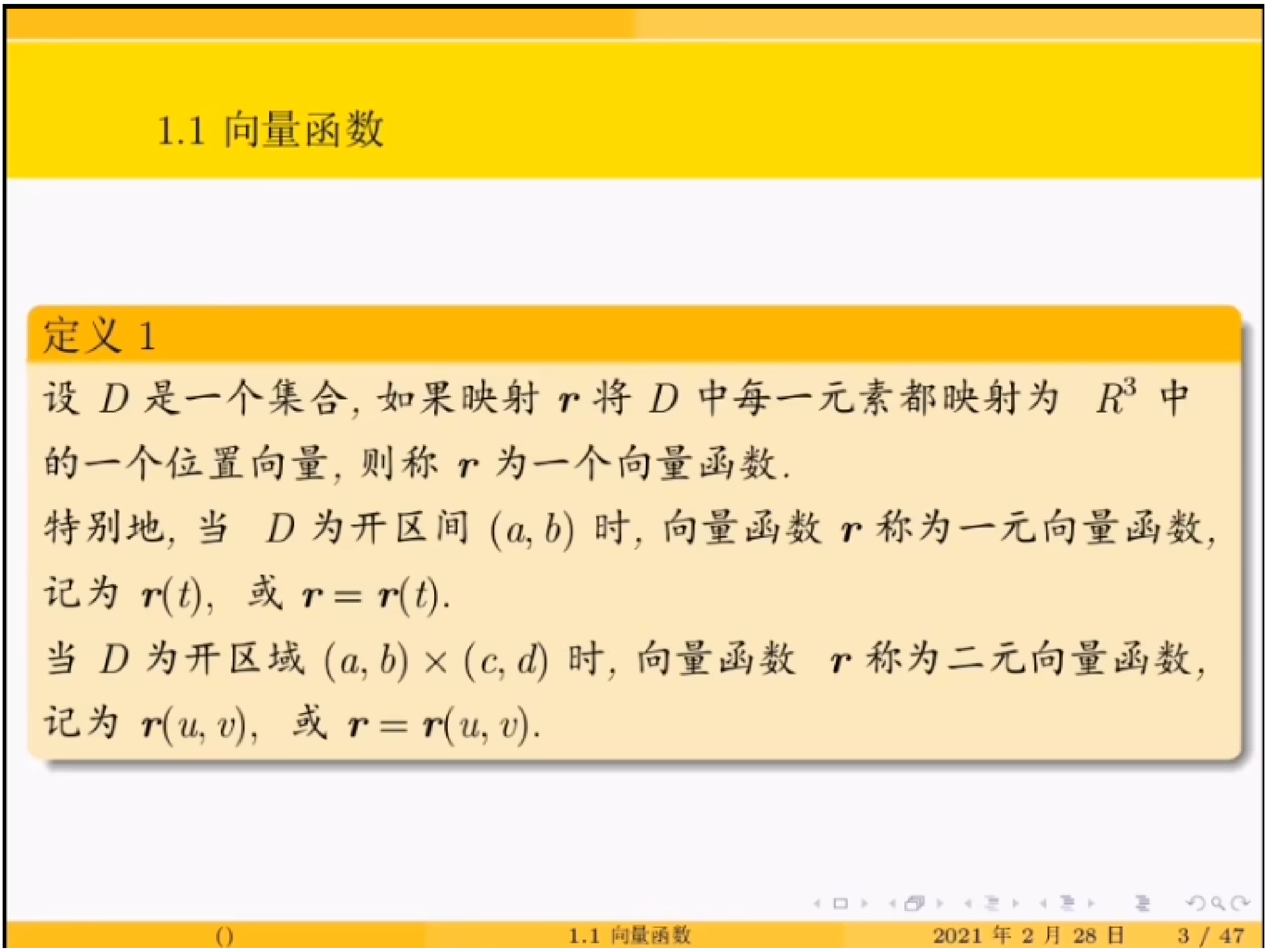
微分几何学习笔记（曲线论）

> 本笔记根据b站视频课程太过详细-学霸莫入-曲线论-梅向明<微分几何>第一章_哔哩哔哩_bilibili所整理

1-1-向量函数-1



- 物理学中，t通常为时间；几何学中，t通常为角度或长度
- 位置向量：给定直角坐标系后，起点与坐标原点重合的向量
- 随着t的变化，位置向量的终点会在空间中形成一条轨迹（曲线）；一元向量函数对应空间中的曲线（参数曲线）
- 二元向量函数对应空间中的曲面

1.1 向量函数

定义 2

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一个向量函数，$\boldsymbol{a}$ 是一个向量，$t_0 \in (a, b)$，如果对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|t - t_0| < \delta$ 时，有 $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$，则称当 $t \to t_0$ 时，向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的极限为 $\boldsymbol{a}$，记作 $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$,

或 $t \to t_0$ 时，$\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}$,

或 $t \to t_0$ 时，$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \to 0$.

() 1.1 向量函数 2021 年 2 月 28 日 4 / 47

- 加粗表示向量，不加粗表示标量
- 此处不是绝对值，而是取模

定理 1

设向量函数 $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, \boldsymbol{a} = \{x_0, y_0, z_0\}$，则

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

- 要算向量函数的极限，可以等价于算三个分量函数的极限，因此算向量函数的极限等价于算实函数的极限

证明

$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$ 当且仅当 $t \to t_0$ 时,

$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{(x(t)-x_0)^2 + (y(t)-y_0)^2 + (z(t)-z_0)^2} \to 0$,

这又当且仅当 $t \to t_0$ 时,

$|x(t)-x_0| \to 0, |y(t)-y_0| \to 0, |z(t)-z_0| \to 0$, 即

$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0$.

1-1-向量函数-2

- 向量函数极限的四则运算

1.1 向量函数

定理 2

设 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t)$ 为两个一元向量函数, $\lambda(t)$ 为一元实函数, 如果 $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \lambda(t) = m$, 则

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}(t) \pm \boldsymbol{s}(t)) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$$
$$\lim_{t\to t_0}(\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)) = m\boldsymbol{a}$$
$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t)) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$
$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{s}(t)) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

证明

只证第三式，其余留给读者. 由于 $t \to t_0$ 时,

$$|\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$$

$$= |\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|$$

$$= |(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{b})|$$

$$\leq |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}||\boldsymbol{s}(t)| + |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{b})| \to 0$$

所以有 $\lim_{t \to t_0}(\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t)) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

- 最后一步：极限零乘以有界量，还是极限零

定义 3

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一个向量函数, $t_0 \in (a, b)$ ，如果

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0),$$

则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处连续. 如果对于 $\forall\, t_0 \in (a, b)$ ， $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处都连续, 则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的.

定理 3

设向量函数 $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 连续当且仅当其分量函数 $x(t), y(t), z(t)$ 都连续.

- 判断一个向量函数是否连续，仅需判断其分量是否连续
- 利用定理1结论立即可得

定义 4

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一个向量函数, $t_0 \in (a, b)$ ，如果 $\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}$ 存在, 则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处可导（或可微）, 将这个极限记作 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 或 $\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\big|_{t=t_0}$ 如果对于 $\forall\, t_0 \in (a, b)$, $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处都可导, 则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是可导的. 也称向量函数 $\boldsymbol{r}'(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导数.

定理 4

设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$, 则 $\boldsymbol{r}(t)$ 可导当且仅当其分量函数, $x(t),y(t),z(t)$, 都可导. 即

$$\boldsymbol{r}'(t)=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}.$$

证明

$\forall\ t_0\in(a,b)$, $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 可导当且仅当

$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}$ 存在,

设这个极限为向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$. 即

$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}=\boldsymbol{a}$. 或者

$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{1}{t-t_0}\{x(t)-x(t_0),y(t)-y(t_0),z(t)-z(t_0)\}=\{a_1,a_2,a_3\}$.

证明

由定理 1, 这又当且仅当

$$\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}=a_1,\ \lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}=a_2,\ \lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=a_3$$

结果立即可得.

1-1-向量函数-3

注记

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导数 $\boldsymbol{r}'(t)$ 仍然存在处处连续的导数, 则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是二阶可导的, 其导数记为向量函数 $\boldsymbol{r}''(t)$. 完全类似, 还可以定义向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的三阶导数 $\boldsymbol{r}'''(t)$, 四阶导数 $\boldsymbol{r}^{(4)}(t)$, 直到 n 阶导数 $\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$ 的概念.

注记

如果一个函数具有直到 n 阶的连续的导数，则称这个函数为 C^n 类函数. C^0 类函数指连续函数，C^1 类函数是指具有连续的一阶导数的函数，C^∞ 函数指具有连续的任意阶导数的函数. 比如指数函数 e^x .

推论

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 是 C^n 类函数当且仅当其分量函数为 C^n 类函数，即

$$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)=\{x^{(n)}(t),y^{(n)}(t),z^{(n)}(t)\}.$$

定理 5 (导数的四则运算)

$$(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\pm\boldsymbol{s}'$$
$$(\rho\boldsymbol{r})'=\rho'\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{r}'$$
$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}'$$
$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}'$$
$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}')$$
$$(\frac{\boldsymbol{r}}{\rho})'=\frac{\boldsymbol{r}'\rho-\boldsymbol{r}\rho'}{\rho^2}$$

- ρ 是一个实函数，其余为一元向量函数
- 倒数第二个为混合积

混合积baike.baidu.com；向量积baike.baidu.com 向量积又称外积，叉积

证明

只证明第三式，其余的留给读者.

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t))' \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{h} \\
&= \\
&\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t+h)-\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{h}
\end{aligned}
$$

证明

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t+h)-\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{h}+ \\
&\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+h)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{h} \\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+h)-\boldsymbol{s}(t)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\boldsymbol{r}(t+h)+\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\boldsymbol{s}(t) \\
&=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t)
\end{aligned}
$$

定理 6

设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在点 t_0 具有直到 n 阶的连续的导数，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)(t-t_0)^2 \\
+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+\boldsymbol{o}((t-t_0)^n).
\end{aligned}
$$

这里 $\boldsymbol{o}((t-t_0)^n)$ 表示 $(t-t_0)^n$ 的高阶无穷小向量.

定理 7

设 $\boldsymbol{r}(u)$ 是一个可导的向量函数，$u=g(t)$ 是一个可导的实函数，那么它们的复合函数 $\boldsymbol{r}(g(t))$ (如果复合函数存在的话) 可导，且

$$
\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\frac{dg}{dt}\quad 或者\quad \boldsymbol{r}'(u)g'(t)
$$

1-1-向量函数-4

向量函数的积分的定义和实函数的情形相同, 即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

其中 $t_0 = a, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = b$ 表示区间 $[a, b]$ 的分点,ξ_i 是区间 (t_i, t_{i-1}) 中的任意一点, 当 $n \to \infty$ 时, $|t_i - t_{i-1}| \to 0$.

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3$ 是可积的, 则有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \int_a^b [x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3]\,dt$$

$$= \int_a^b x(t)\,dt\boldsymbol{e}_1 + \int_a^b y(t)\,dt\boldsymbol{e}_2 + \int_a^b z(t)\,dt\boldsymbol{e}_3$$

由此可以得出有关向量函数积分的命题.

命题 1

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt$$

存在, 并且

(1) $a < c < b$ 时, 有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \int_a^c \boldsymbol{r}(t)\,dt + \int_c^b \boldsymbol{r}(t)\,dt.$$

(2) 设 m 是常数, 有

$$\int_a^b m\boldsymbol{r}(t)\,dt = m\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt.$$

(3) 设 $\boldsymbol{m}$ 是常向量, 则有

$$\int_a^b \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{m} \cdot \int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt,$$

$$\int_a^b \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{m} \times \int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt.$$

(4)
$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x \boldsymbol{r}(t)\,dt\right] = \boldsymbol{r}(x).$$

证明

向量函数可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3. \tag{1.4}$$

根据向量函数连续性的性质, 已知 $\boldsymbol{r}(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $x(t), y(t), z(t)$ 也都是连续函数.

再由实函数的积分定理可知, 在区间 $[a, b]$ 上连续的实函数在该区间上是可积的, 即积分

$$\int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt$$

存在, 则由 (1.4) 式可知积分

证明

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt$$

存在且等于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{e}_1 \int_a^b x(t)\,dt + \boldsymbol{e}_2 \int_a^b y(t)\,dt + \boldsymbol{e}_3 \int_a^b z(t)\,dt.$$

以下我们只证明 (1), 其余的结果留作练习.

由于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,dt = \boldsymbol{e}_1 \int_a^b x(t)\,dt + \boldsymbol{e}_2 \int_a^b y(t)\,dt + \boldsymbol{e}_3 \int_a^b z(t)\,dt,$$

证明

当 $a < c < b$ 时, 根据实函数的积分性质可得

$$\boldsymbol{e}_1 \int_a^b x(t)\,dt + \boldsymbol{e}_2 \int_a^b y(t)\,dt + \boldsymbol{e}_3 \int_a^b z(t)\,dt$$

$$= \boldsymbol{e}_1 \left[\int_a^c x(t)\,dt + \int_c^b x(t)\,dt\right] + \boldsymbol{e}_2 \left[\int_a^c y(t)\,dt + \int_c^b y(t)\,dt\right]$$

$$+ \boldsymbol{e}_3 \left[\int_a^c z(t)\,dt + \int_c^b z(t)\,dt\right]$$

证明

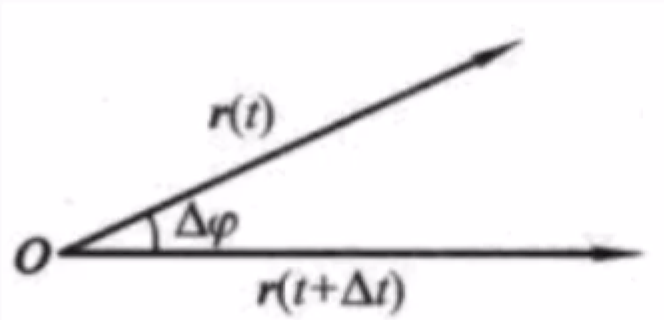
$$= \left[\boldsymbol{e}_1 \int_a^c x(t)\,dt + \boldsymbol{e}_2 \int_a^c y(t)\,dt + \boldsymbol{e}_3 \int_a^c z(t)\,dt\right]$$

$$+ \left[\boldsymbol{e}_1 \int_c^b x(t)\,dt + \boldsymbol{e}_2 \int_c^b y(t)\,dt + \boldsymbol{e}_3 \int_c^b z(t)\,dt\right]$$

$$= \int_a^c \boldsymbol{r}(t)\,dt + \int_c^b \boldsymbol{r}(t)\,dt$$

给 t 以增量 Δt, 用 $\Delta\varphi$ 表示由向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 所组成的角, 如图.

作比值 $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, 当 $\Delta t\to 0$ 时, 则 $\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ 的极限就叫做向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于它的变量 t 的**旋转速度**.



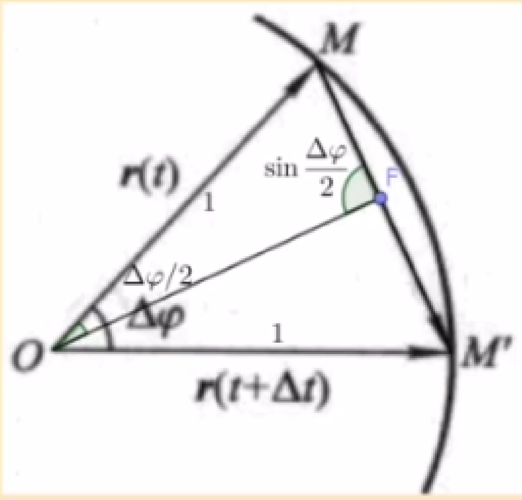
1-1-向量函数-5

例 1

单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ (即 $|\boldsymbol{r}(t)|=1$) 关于 t 的旋转速度等于其微商 (导数) 的模 $|\boldsymbol{r}'(t)|$.

证明

把 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 移动到同一个始点 O, 如图.



以 O 为圆心画单位圆, 它通过 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的终点 M, M', 则两个向量的夹角大小等于弧 MM' 的长度.

证明

于是有

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \frac{弧MM'}{|\Delta t|} = \frac{弧MM'}{|\overrightarrow{MM'}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|},$$

因为

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{MM'},$$

所以有

$$|\overrightarrow{MM'}| = |\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)|,$$

证明

于是

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \frac{弧MM'}{|\overrightarrow{MM'}|} \cdot \left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|.$$

由于当 $\Delta t \to 0$ 时, 有

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{弧MM'}{|\overrightarrow{MM'}|} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1.$$

因此

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \frac{弧MM'}{|\overrightarrow{MM'}|} \cdot \left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right| = |\boldsymbol{r}'(t)|.$$

例 2

利用向量函数的导数的定义, 证明常向量的导数为零向量.

证明

设常向量为 $\boldsymbol{r}(t) = \{a_1, a_2, a_3\}$, 则其导数为

那么 $\boldsymbol{r}'(t) = \{a_1', a_2', a_3'\} = \{0, 0, 0\}$.

向量函数导数的几何意义。设向量函数对应曲线为τ，t=t0时，τ上对应点M。则向量函数在t0处的导数为点M处的一个切向量（向量方向由正负），且永远指向t增加的方向。【前提：导函数值不为0】

1-1-向量函数-习题课

【线性代数】向量的乘法运算_向量a·b与axb公式-CSDN博客

例 3

可导向量函数有固定长当且仅当它与其导数在每一点处都正交.

证明

设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 可导.

一方面, 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 有固定长, 即 $|\boldsymbol{r}(t)| = C, C > 0$, 则

$(\boldsymbol{r}(t))^2 = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = C^2$.

对上式两边同时求导, 有 $\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$. 即向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 与其导数在每一点处都正交.

证明

另一方面, 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 与其导数在每一点处都正交, 即 $\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$.

那么 $(\boldsymbol{r}(t))^2 = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = C, C > 0$.

立即有 $|\boldsymbol{r}(t)| = \sqrt{C}$, 这说明向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 有固定长.

例 4

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 有固定方向当且仅当 $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) = \mathbf{0}$.

证明

(必要性) 因为向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 有固定方向, 所以可以设

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}\ (\ \boldsymbol{e}\ \text{为常单位向量}\ ),$$

即 $\boldsymbol{r}(t)$ 的方向由常向量 $\boldsymbol{e}$ 来确定, 因此它的方向是固定的, 模长由 $\lambda(t)$ 来控制.

上式两端分别对参数 t 求导, 有 $\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e}$,

所以

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=(\lambda(t)\boldsymbol{e})\times(\lambda'(t)\boldsymbol{e})=\mathbf{0}.$$

- 向量与自身叉乘，得到的是零向量

证明

(充分性) 设 $\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$, ($\boldsymbol{e}(t)$ 为单位向量函数).

即 $\boldsymbol{r}(t)$ 的方向由单位向量 $\boldsymbol{e}(t)$ 来控制, 模长由 $\lambda(t)$ 来控制.

下面我们只要证明 $\boldsymbol{e}(t)$ 是常向量即可.

对 $\boldsymbol{r}(t)$ 表达式两端同时求导, 有

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{e}'(t),$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)&=(\lambda(t)\boldsymbol{e}(t))\times[\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{e}'(t)]\\&=\lambda^2(t)[\mathbf{e}(t)\times\mathbf{e}'(t)].\end{aligned}$$

证明

首先, 我们要强调 $\lambda(t) \neq 0$, 否则就有 $\boldsymbol{r}(t) = \mathbf{0}$, 这与 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有固定方向矛盾.

因此结合已知条件 $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) = \mathbf{0}$ 立即可知,

$$\mathbf{e}(t) \times \mathbf{e}'(t) = \mathbf{0},$$

这说明 $\mathbf{e}(t) \parallel \mathbf{e}'(t)$.

但是因为已设 $|\mathbf{e}(t)| = 1$, 因此由上一例题, 这意味着

$$\mathbf{e}(t) \perp \mathbf{e}'(t).$$

证明

这说明向量 $\boldsymbol{e}'(t)$ 与非零向量 $\boldsymbol{e}(t)$ 既垂直又平行, 那么它就只能是零向量, 即

$$\boldsymbol{e}'(t) = \mathbf{0},$$

对上式积分有 $\boldsymbol{e}(t) =$ 常向量, 不妨设为 $\boldsymbol{e}$. 即有

$$\boldsymbol{r}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{e}$$

这说明 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有固定方向.

例 5

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于固定平面当且仅当 $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)) = 0.$

- 混合积的定义：前两个向量做向量积，再与第三个向量做数量积
- 三个向量混合积等于0，说明这三个向量共面

证明

(必要性) 设已知条件中的固定平面 π 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$.

则由已知条件可知 $\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{n}$, 即有

$$\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

上式两端同时对 t 求导, 有

$$\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ 和 } \quad \boldsymbol{r}''(t) \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

上面三式表明: $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ 均与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即三个向量 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ 共面,

由解析几何知识可知, $\quad (\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)) = 0.$

任找不含r中点的，法向量为n且垂直于e的平面pai

两个定语，把的先遮住，找一个平面

无尽沙砾

1.1 向量函数

证明

(充分性) 由已知 $(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)) = 0$, 这说明三个向量 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ 共面.

下面我们按 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t)$ 是否共线, 即 $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)$ 是否为零向量进行讨论.

(1) 若 $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{0}$,

所以由上一例题可知, $\boldsymbol{r}(t)$ 有固定方向, 不妨设这个方向平行于单位向量 $\boldsymbol{e}$.

任找不含 $\boldsymbol{r}(t)$ 上任意点的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 垂直的平面 π,

则 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于固定平面 π.

- 找一个固定平面，即其与参数t的选择无关

证明

(2) 若 $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t)$ 不共线，

则由 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ 共面可知，$\boldsymbol{r}''(t)$ 可以由 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t)$ 线性表示，

即存在实函数 $\lambda(t), \mu(t)$，有

$$\boldsymbol{r}''(t) = \lambda(t)\boldsymbol{r}(t) + \mu(t)\boldsymbol{r}'(t),$$

记 $\boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}'(t) &= [\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)]' = \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}''(t)\\ &= \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{r}(t) \times [\lambda(t)\boldsymbol{r}(t) + \mu(t)\boldsymbol{r}'(t)]\\ &= \mu(t)\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) = \mu(t)\boldsymbol{n}(t).\end{aligned}$$

证明

从而有

$$\boldsymbol{n}(t) \times \boldsymbol{n}'(t) = \boldsymbol{n}(t) \times [\mu(t)\boldsymbol{n}(t)] = \mathbf{0},$$

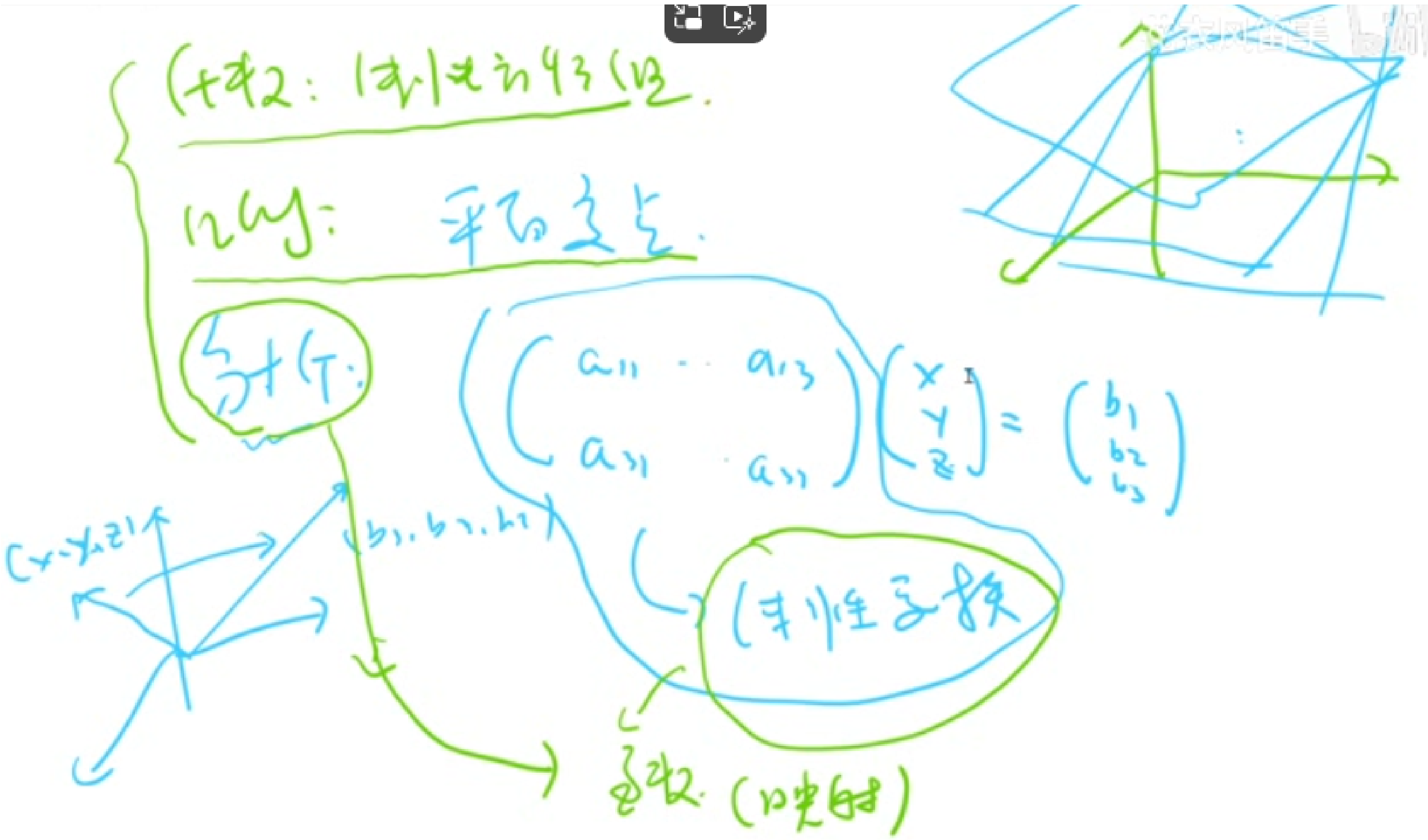
但是由已设 $\boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. 因此再次由上一例题可知，$\boldsymbol{n}(t)$ 有固定方向，设这个方向平行于单位向量 $\boldsymbol{n}$.

设 π' 是一个以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面. 则由 $\boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)$ 可知，$\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{n}(t)$，

因而 $\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{n}$. 进而 $\boldsymbol{r}(t) \parallel \pi'$.

这说明 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于固定平面.

从方程的角度定义曲线，那么求切线什么的会比较麻烦。用向量函数的形式，可以将分析的方法引入。



R3 到R3的一个映射 [导向量的几何意义——高等数学 多元微分学 第六节 几何应用（2）_哔哩哔哩_bilibili]

1-2-曲线的概念-1

本节的要点:

- 曲线的概念
- 光滑曲线和曲线的正常点
- 曲线的切线和法面
- 曲线的弧长和自然参数

- 梅向明教材中对曲线的定义是通过拓扑，同胚的概念严格定义的，此处用的定义比较简单，将向量函数叫做空间曲线

定义 1

称三维欧氏空间 R^3 中的向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},t\in(a,b)$ 为一条 空间参数曲线，简称 曲线，我们也把函数的自变量 t 称为是曲线的 参数.

注记

位置向量 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ 与位置向量的终点 $(x(t),y(t),z(t))$ 是一一对应的. 从而将向量函数表示的空间曲线看作空间质点随时间变动的轨迹是相当自然的, 在理论上也是十分必要的, 因为把曲线记作函数就可以使用微积分这个强大的工具了. 将曲线看成质点的运动轨迹的话, 曲线就是有方向的, 即可以规定随着参数 t 增加, 曲线上点运动的方向为曲线的正向.

- 参数曲线所刻画的曲线与方程所刻画的曲线，区别在于参数曲线所刻画曲线带有方向

定义 2

规定随着参数 t 增加, 曲线上点运动的方向为曲线的**正向**.

例 1

曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{t,t,t\},t\in\mathbb{R}$ 是一条空间直线.

解

事实上, 令 $x=t,y=t,z=t$, 可得方程

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}.$$

定

这是直线方程. 这条直线的方向为从斜下到斜上.

更一般地, 我们用向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$ 表示过~~顶~~点 $\boldsymbol{b}$, 方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 的直线.

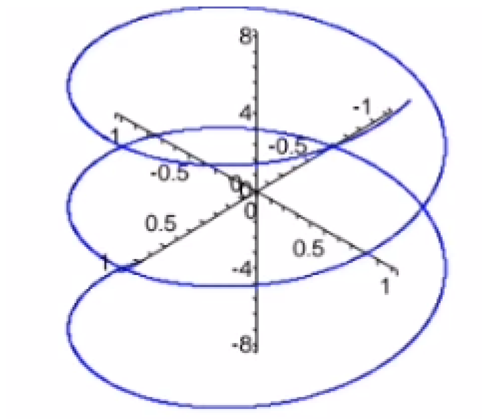
空间直线的几种方程_空间直线方程-CSDN博客

例 2

曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,0\},t\in\mathbb{R}$ 是 xOy 平面上的单位圆. 其方向为逆时针方向旋转.

例 3

曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\},t\in\mathbb{R}$ 表示圆柱螺线. 其方向上从下到上.



圆柱螺线

1-2-曲线的概念-2

定义 3

如果向量函数是 C^n 类的，即向量函数具有连续的 n 阶导数，则称对应的曲线为 **C^n 类曲线**. 特别地，C^0 类曲线称为 **连续曲线**，C^1 类曲线称为 **光滑曲线**. 向量函数具有任意阶导数的曲线叫做 **C^∞ 类曲线**.

例 4

因为函数

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

不连续，所以曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{f(t), t, t\}, t \in \mathbb{R}$ 不连续.

不是C0曲线的例子

例 5

设曲线 (C) 定义为

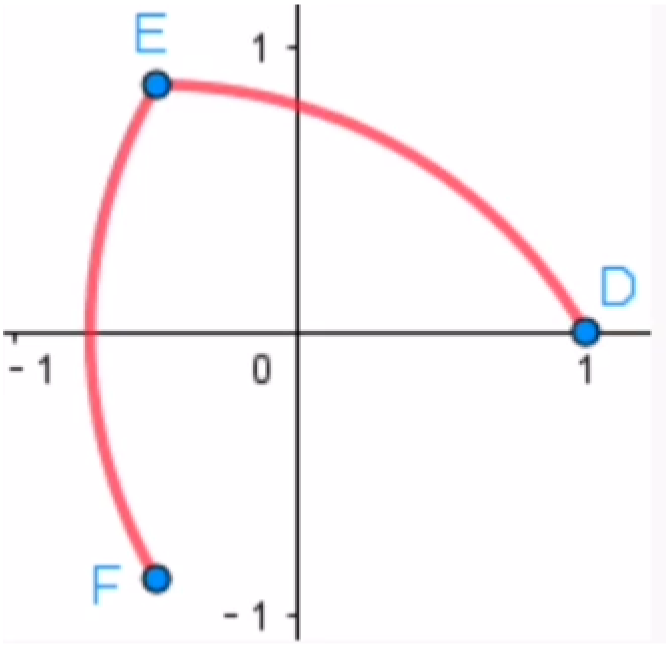
当 $0 \leq t < \frac{\pi}{3}$ 时,

$$\boldsymbol{r}(t) = \left\{ \sqrt{3}\cos(t+\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}, \sqrt{3}\sin(t+\frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

当 $\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{2\pi}{3}$ 时,

$$\boldsymbol{r}(t) = \left\{ -\sqrt{3}\sin t + 1, \sqrt{3}\cos t \right\},$$

则 (C) 是连续曲线, 但不是光滑曲线.



例5的不光滑图像的例子

证明

(1) 先来考察连续性.

显然曲线 (C) 在定义区间 $(0, \frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 都是连续曲线.

下面考查曲线 (C) 在点 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的连续性.

因为

$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^-} \boldsymbol{r}(t) =$

$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^-} \left\{\sqrt{3}\cos(t+\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}, \sqrt{3}\sin(t+\frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}/2\right\}$

$= \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

证明

$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^+} \boldsymbol{r}(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{3}^+} \{-\sqrt{3}\sin t + 1, \sqrt{3}\cos t\}$

$= \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

所以 $\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^-} \boldsymbol{r}(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{3}^+} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(\frac{\pi}{3})$,

故曲线 (C) 在 $t = \pi/3$ 处连续.

即曲线 (C) 整体连续.

证明

(2) 下面考察可导性. 因为

$$\boldsymbol{r}'(t)=\begin{cases}\left\{-\sqrt{3}\sin(t+\frac{\pi}{6}),\sqrt{3}\cos(t+\frac{\pi}{6})\right\}, & 0<t<\frac{\pi}{3}\\ \left\{-\sqrt{3}\cos t,-\sqrt{3}\sin t\right\}, & \frac{\pi}{3}<t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

所以曲线 (C) 在定义区间 $(0,\frac{\pi}{3}),(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 都具有连续的导数, 所以都可导.

下面考查曲线 (C) 在 $\frac{\pi}{3}$ 处的可导性.

证明

因为

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^-}\boldsymbol{r}'(t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^-}\left\{-\sqrt{3}\sin(t+\frac{\pi}{6}),\sqrt{3}\cos(t+\frac{\pi}{6})\right\}=\left\{-\sqrt{3},0\right\}$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^+}\boldsymbol{r}'(t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{3}^+}\left\{-\sqrt{3}\cos t,-\sqrt{3}\sin t\right\}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right\}$$

故 $\boldsymbol{r}'(t)$ 在 $t=\pi/3$ 处不连续. 因此曲线 (C) 不是光滑曲线.

1-2-曲线的概念-3

例 6

曲线 $C_1:\boldsymbol{r}(t)=\{t,t,t\}$, $C_2:\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,0\}$, $C_3:\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\}$ $t\in\mathbb{R}$, 都是 C^∞ 类曲线.

定义 4

设空间曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是至少 C^1 类的, 如果在 t_0 处有 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$ 则称曲线在 t_0 处正则, 点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 称为曲线 C 的 正则点 (或正常点); 否则称曲线在 t_0 处非正则, 点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 称为曲线 C 的 奇异点. 如果曲线上的每一点都是曲线的正则点, 则称该曲线是 正则曲线.

- 在微分几何中，处理的对象一般都是正则的

注记

重要约定：我们今后研究的曲线不作特殊说明均指至少 C^3 类的正则空间曲线.

曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处正则当且仅当 $|\boldsymbol{r}'(t_0)| \neq 0$.

- C3的特殊性，后面会讲

例 7

半立方抛物线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{t^3, t^2, 0\}$ 是 C^∞ 类曲线，不是正则曲线.

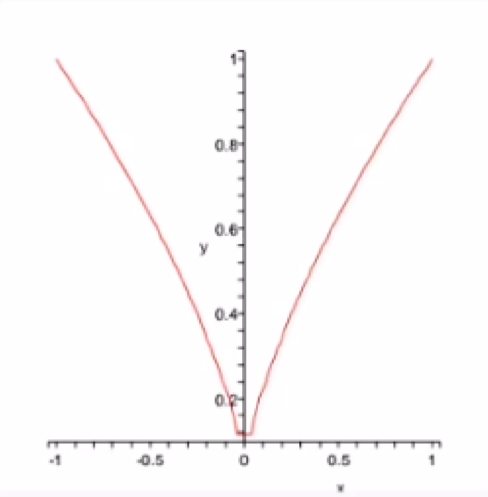


Figure: 半立方抛物线

证明

因为 $\boldsymbol{r}(t) = \{t^3, t^2, 0\}$ 具有任意阶导数，所以曲线是 C^∞ 类曲线，当然就是光滑曲线.

因为 $\boldsymbol{r}'(t) = \{3t^2, 2t, 0\}$，所以 $\boldsymbol{r}'(0) = \{0, 0, 0\}$，即此曲线在 $t = 0$ 处非正则，从而曲线不是正则曲线.

- 初等函数在其定义域内具有任意阶导数

例 8

曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{\cos t, \cos t, \cos t\}, t \in \mathbb{R}$ 是光滑曲线，但不是正则曲线.

证明

因为 $\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\cos t,\cos t\}$ 具有任意阶导数，所以曲线是 C^∞ 类曲线，当然就是光滑曲线.

因为 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t,-\sin t,-\sin t\}$，所以 $\boldsymbol{r}'(k\pi)=\{0,0,0\}$，即此曲线在 $t=k\pi$ 处非正则，从而曲线不是正则曲线.

例 9

圆柱螺线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\},t\in\mathbb{R}$ 是光滑曲线，也是正则曲线.

证明

因为 $\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\}$ 具有任意阶导数，所以曲线是 C^∞ 类曲线，因此是光滑曲线.

因为 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t,\cos t,1\}$，所以对于任意的 $t\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{r}'(t)\neq\{0,0,0\}$，即此曲线是正则曲线.

注记

从上述例子，对于曲线光滑性的要求，就是要排除曲线上比较“尖锐”的点；而正则性的要求，就是排除能够通过光滑性的要求，但是切向量变化不连续的特殊点（比如带尖点的曲线），即便这个点两侧曲线都是平滑过渡的.

- 自己理解：一个是排除极限不存在的情况，一个是排除极限存在但是导数为0的点。正则曲线，由于不存在导数为0的点，因此只能是单调递增或单调递减曲线。

1-2-曲线的概念-4

例 10

维维安尼曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\}, t \in (-2\pi, 2\pi)$ 是正则曲线.

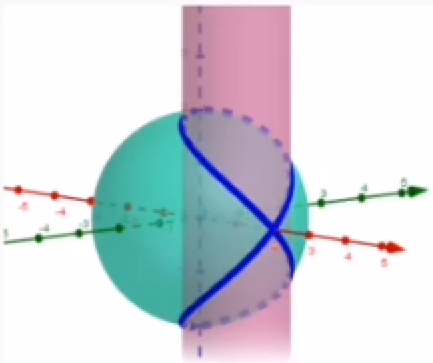


Figure: 维维安尼曲线

是一个球面和圆柱的交线

证明

因为 $\boldsymbol{r}'(t) = \{-\sin t, \cos t, \cos\frac{t}{2}\}$, 所以对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{1 + \cos^2\frac{t}{2}} \neq 0$, 即此曲线是正则曲线.

例 11

证明: 可微函数 $y = f(x)$ 的图像是正则曲线.

证明

可微函数 $y = f(x)$ 对应的向量函数为 $\boldsymbol{r}(x) = \{x, f(x), 0\}$,

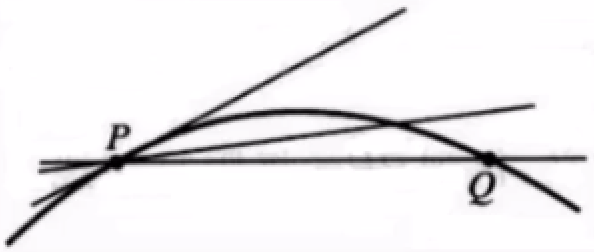
所以对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{r}'(x) = \{1, f'(x), 0\} \neq \boldsymbol{0}$,

即 $y = f(x)$ 的图像是正则曲线.

- 一元可导实函数是正则曲线

1-2-曲线的概念-5-切向量与弧长

给出曲线上一点 P, 点 Q 是 P 的邻近一点 (如图),



把割线 PQ 绕 P 点旋转, 使 Q 点沿曲线趋近于 P 点.

若割线 PQ 趋于一固定的位置, 则我们把这个割线 PQ 的极限位置称为曲线在 P 点的**切线**. 而定点 P 称为**切点**.

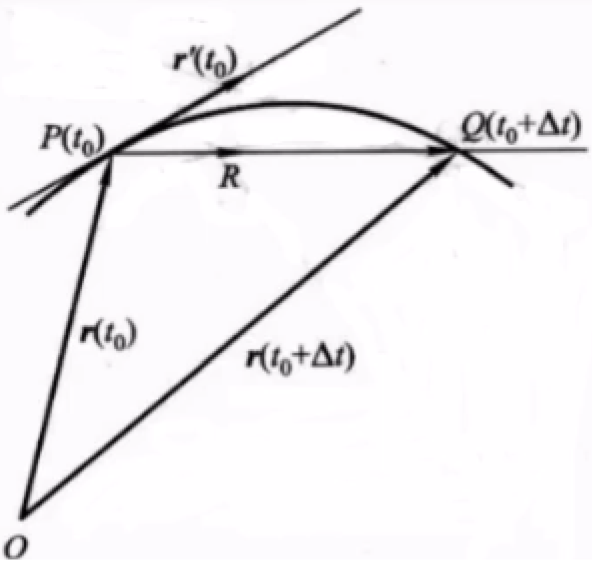
直观上看, 切线是通过切点的所有直线当中最贴近曲线的直线.

- 有了切线的定义之后，想要推导切线的方程。当已知P点后，要求切线方程还需要知道切线的方向向量

下面我们要引入一个概念, 切向量. 设曲线的向量函数为

$$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

切点 P 对应参数 t_0, Q 点对应参数 $t_0 + \Delta t$ 如图,



则有 $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)$.

在割线 PQ 上作向量 $\overrightarrow{PR}$, 使得

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

当 $Q \to P$(即 $\Delta t \to 0$) 时, 若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 可微, 则由向量函数的导数可得向量 $\overrightarrow{PR}$ 的极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} = \boldsymbol{r}'(t_0).$$

根据曲线的切线的定义, 得到 $\overrightarrow{PR}$ 的极限是切线上的一向量 $\boldsymbol{r}'(t)$, 它称为曲线上一点的**切向量.**

例 1

求曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{\cos t, \sin t, 0.5t\}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 和 π 处的切向量, 并求出切向量的起点和终点坐标.

解

因为 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{\cos t, \sin t, 0.5t\}$,

所以 $\boldsymbol{r}'(t) = \{-\sin t, \cos t, 0.5\}$. $\boldsymbol{r}'(\dfrac{\pi}{2}) = \{-1, 0, 0.5\}$,

起点 $(0, 1, \dfrac{\pi}{4})$, 终点 $(-1, 1, 0.5 + \dfrac{\pi}{4})$.

$\boldsymbol{r}'(\pi) = \{0, -1, 0.5\}$,

起点 $(-1, 0, 0.5\pi)$, 终点 $(-1, -1, 0.5 + \dfrac{\pi}{2})$.

注解

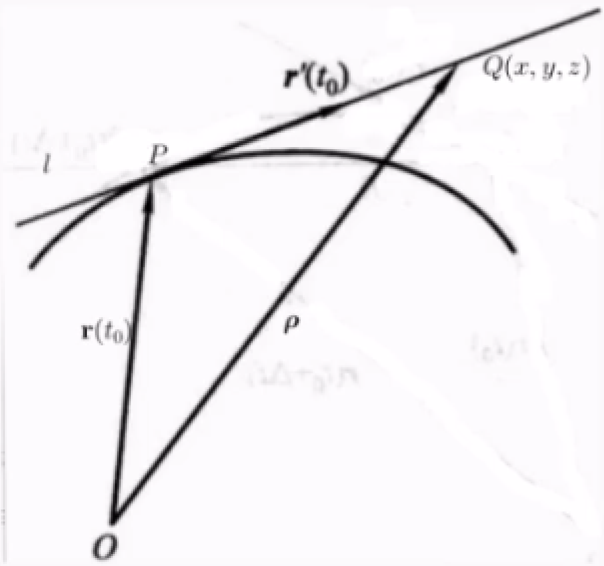
(1) 由切向量的定义, 它首先是一个有向线段, 其次切向量等于 $\boldsymbol{r}'(t_0)$, 而 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 是一个代数对象, 或者说至少是可以计算求值的. 因此切向量是具有代数和几何双重属性的数学对象. 在后文中它是一个贯穿始终的概念, 因此很是重要.

(2) 当曲线是正则曲线时, 曲线上的每一点都是正常点 $(\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0})$, 因此曲线在每一点的存在非零切向量. 而这个切向量就是切线上的一个非零向量, 因而就是切线的一个方向向量. 由以上的推导过程可以看出, 这个切向量的正向和曲线的参数 t 的增量方向是一致的.

- 当参数的增量delta始终大于0时，那么切向量的指向和曲线的方向保持一致（可参见极限表达式的那个定义）

1-2-曲线的概念-6-切向量与弧长

下面我们来推导切线的方程.



如图, 给定正则曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, P 是曲线上任一点, 对应的参数为 t_0, 则其坐标为 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$,

l 是曲线 C 的过定点 $P(t_0)$ 的切线,

$\boldsymbol{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 是 P 点对应的切向量, 它也是切线 l 的方向向量.

Q 点是切线 l 上一动点, 其坐标为 (x, y, z).

这样由解析几何知识可知, 切线 l 的标准方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

例 2

求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$ $(a > 0, b > 0)$ 在 $t = \pi/3$ 处的切线方程.

解

因为 $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{3}) = \{\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\pi b}{3}\}$

所以 $t = \frac{\pi}{3}$ 对应曲线上的定点坐标为 $(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\pi b}{3})$.

因为 $\boldsymbol{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$, 所以曲线在 $t = \frac{\pi}{3}$ 对应的切向量为 $\boldsymbol{r}'(\frac{\pi}{3}) = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, b\}$.

带入到切线方程中, 有

解

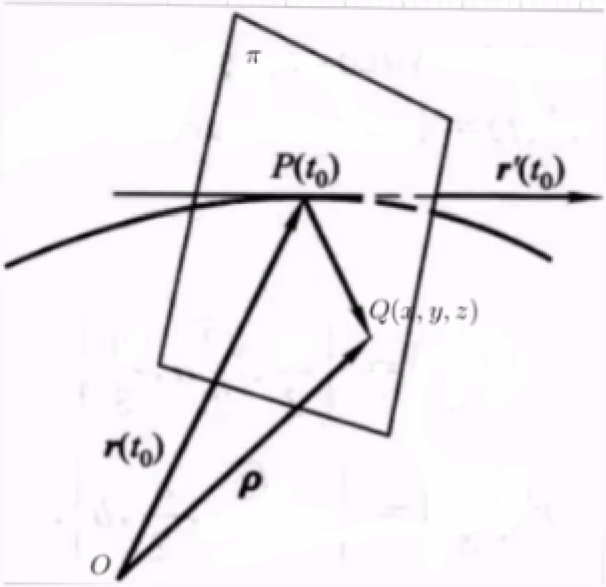
$$\frac{x-\dfrac{a}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}{\dfrac{a}{2}}=\frac{z-\dfrac{\pi b}{3}}{b}.$$

即

$$\frac{2x-a}{-\sqrt{3}a}=\frac{2y-\sqrt{3}a}{a}=\frac{z-\dfrac{\pi b}{3}}{b}.$$

经过切点而垂直于切线的平面称为曲线的**法平面**或**法面**.

下面我们来推法平面的方程.



如图, 给定正则曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, P 是曲线上任一点, 对应的参数为 t_0, 则其坐标为 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$,

π 是曲线 C 的过定点 $P(t_0)$ 的法平面,

$\boldsymbol{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 是 P 点对应的切向量, 因此它也是法平面 π 的一个法向量.

Q 点是法平面 π 上一动点, 其坐标为 (x, y, z).

这样由解析几何知识可知, 法平面 π 的点法式方程为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

例 3

求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$ $(a > 0, b > 0)$ 在 $t = \pi/6$ 处的法平面方程.

解

因为 $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{6}) = \{\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{\pi b}{6}\}$

所以 $t = \frac{\pi}{6}$ 对应曲线上的定点坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{\pi b}{6})$.

因为 $\boldsymbol{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$, 所以曲线在 $t = \frac{\pi}{6}$ 对应的切向量为 $\boldsymbol{r}'(\frac{\pi}{6}) = \{-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, b\}$, 它也是法平面的法向量.

带入到法平面方程中, 有

解

$$\left(-\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)\left(y - \frac{a}{2}\right) + b\left(z - \frac{\pi}{6}b\right) = 0.$$

即

$$ax - \sqrt{3}ay - 2bz + \frac{\pi}{3}b^2 = 0.$$

1-2-曲线的概念-7-切向量与弧长

对曲线的正则性要求，保证了曲线在每一点都存在切向量.

由数学分析的知识可知，这还保证了曲线是可求长.

事实上，利用微积分标准定义，曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的一段 (t_0, t_1) 进行分割得到其中的一份为

可求长：可以计算长度

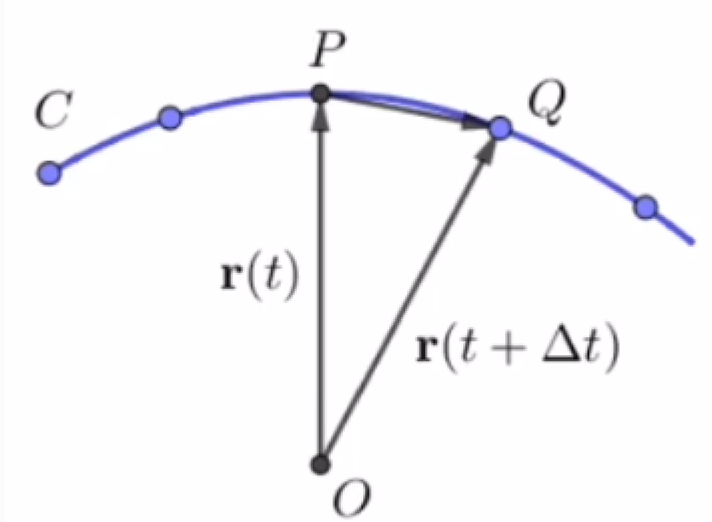


Figure: 弧长公式

$\Delta s =$ 弧PQ长 $\approx |\overrightarrow{PQ}| = |\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)|$,

或者

$$\Delta s \approx \frac{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)|}{\Delta t}\Delta t.$$

这里假设 $\Delta t > 0$.

因而这段弧长为

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum \left| \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \right| \Delta t = \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

这样我们就得出一个微分几何中的一个重要的结果.

定理 1 (弧长公式)

曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in (t_0, t_1)$ 的弧长为

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

注解

在弧长公式中, 取 $t = t_1$, 得到

$$s = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

则弧长可以理解为一个关于变量 t 的实函数.

下面的例子给出弧长公式的一个应用, 即证明圆的周长公式.

例 4

求曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = R\{\cos t, \sin t, 0\}$ 从 0 到 2π 的弧长.

解

因为 $|\boldsymbol{r}'(t)| = |R\{-\sin t, \cos t, 0\}| = R$, 所以曲线的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

例 5

求圆柱螺线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 是从 0 到 t $(t > 0)$ 的弧长.

解

因为 $|\boldsymbol{r}'(t)| = |\{-\sin t, \cos t, 1\}| = \sqrt{2}$, 所以曲线的弧长为

$$s = \int_0^{t} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t.$$

推论

函数 $y = f(x)$ 的图象从 x_0 到 x_1 的弧长为

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

注解

在计算圆的周长例子中, 我们也可以求出圆从 0 到 t 的弧长, 即

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = Rt,$$

这表明弧长 s 是 t 的正比例函数, 其反函数为 $t = s/R$.

我们把 $t = s/R$ 带入到圆的向量函数中, 有

$$C : \boldsymbol{r}(s) = R\{\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}, 0\}.$$

注解

在计算圆柱螺线的弧长例子中, 我们得到圆柱螺线从 0 到 t 的弧长, 即

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \sqrt{2}t,$$

这表明弧长 s 是 t 的正比例函数, 其反函数为 $t = s/\sqrt{2}$.

我们把 $t = s/\sqrt{2}$ 带入到圆柱螺线的向量函数中, 有

$$C : \boldsymbol{r}(s) = R\{\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\}.$$

注解

这两个例子表明利用弧长公式, 我们可以将一般参数表示的向量函数 “转化” 为弧长参数表示的向量函数.

我们将这件事情称为**弧长参数化**.

事实上, 从理论上看, 任何一条正则曲线都可以弧长参数化.

1-2-曲线的概念-8-切向量与弧长

定理 2

任何一条正则曲线都可以使用弧长作参数. (也称弧长参数为自然参数)

证明

由弧长公式容易得到曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 从 t_0 到 t 的弧长为

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

这样对于正则曲线弧长 s 总是关于 t 的函数. 而且由于

$$s'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|>0$$

所以函数 $s(t)$ 是 t 的单调递增函数, 所以函数 $s(t)$ 的反函数存在, 设此反函数为 $t=t(s)$,

将之带入曲线方程中有 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t(s))=\boldsymbol{r}(s)$.

即任何一条正则曲线总可以用弧长作参数.

注解

利用弧长公式, 我们可以得到

$$\frac{ds}{dt}=|\boldsymbol{r}'(t)| \quad \text{或} \quad \frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

这是两个常用的式子.

将一条曲线的参数换为弧长参数的过程也成为曲线的**弧长参数化**. 正则曲线可以弧长参数化是很要紧的一件事. 它是后面的许多理论的源泉.

后文中, 我们将逐渐看到弧长参数化在曲线研究中的好处.

定理 3

如果曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的参数为弧长，

则 $|\boldsymbol{r}'(s)| \equiv 1$，且 $\boldsymbol{r}'(s)$ 与 $\boldsymbol{r}''(s)$ 处处垂直.

(此时称 $\boldsymbol{r}'(s)$ 为曲线 C 的单位切向量，也记为 $\boldsymbol{\alpha}(s)$)

- 叫做单位切向量，一方面是因为它的模为1，另一方面是因为它是切向量

证明

(1) 由上述注解

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$$

两边平方并消去 dt 有

$$(ds)^2=(d\boldsymbol{r})^2$$

这表明 $|\boldsymbol{r}'(s)|^2=(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds})^2=1$，从而 $|\boldsymbol{r}'(s)|=1$

(2) 上式表明向量函数 $\boldsymbol{r}'(s)$ 有固定长. 由上节定理，这又当且仅当

$$\boldsymbol{r}'(s) \text{ 与 } \boldsymbol{r}''(s) \text{ 处处垂直.}$$

例 6

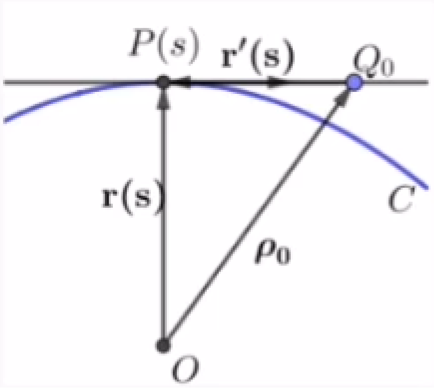
证明所有切线过定点的曲线为直线.

- 证明过程体现这门课的特征，根据已知条件找出向量方程，对向量方程求导，然后观察几何意义，反复这个过程就会证明我们要说的事情。
- 隐含条件是曲线为正则曲线

1-2-曲线的概念-9-切向量与弧长

证明

设 $P(s)$ 为曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 上任一点, 对应的向径和单位切向量分别为 $\boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{r}'(s)$. 过 $P(s)$ 的切线 l 过定点 Q_0 . Q_0 对应的向径为 $\boldsymbol{\rho}_0$.



证明

那么由题意有 $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0)=\lambda(s)\boldsymbol{r}'(s)$ 上式两端对 s 求导有

$$\boldsymbol{r}'(s)=\lambda'(s)\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(s)\boldsymbol{r}''(s) \text{ 或}$$

$$(\lambda'(s)-1)\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(s)\boldsymbol{r}''(s)=\mathbf{0}$$

我们断言 $\boldsymbol{r}''(s)\equiv\mathbf{0}$.

否则, 存在点 $P_0(s_0)$ 使得在该点处 $\boldsymbol{r}''(s_0)\neq\mathbf{0}$.

从而在 s_0 的某个邻域内有 $\boldsymbol{r}''(s)\neq\mathbf{0}$, 并且在此邻域内有

$$(\lambda'(s)-1)\boldsymbol{r}'(s)+\lambda(s)\boldsymbol{r}''(s)=\mathbf{0}$$

证明

由于 $|\boldsymbol{r}'(s)|=1$, 且 $\boldsymbol{r}''(s)\neq\mathbf{0}$, 所以必有 $\boldsymbol{r}'(s)$ 垂直于 $\boldsymbol{r}''(s)$, 从而 $\boldsymbol{r}'(s)$ 与 $\boldsymbol{r}''(s)$ 线性无关. 这样必有

$$\lambda'(s)=1 \quad \text{且} \quad \lambda(s)\equiv 0 \text{ 或者}$$

$\lambda(s)=s+s_0$ 且 $\lambda(s)\equiv 0$ 这是个矛盾.

对断言的式子求两次积分可得 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$. 这说明曲线是直线.

- r’ (s)的模=1，说明r’ (s)≠0
- 上述证明用到了线性无关

1-2-曲线的概念-10-习题课

习题 2.3

证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ ($a>0, b>0$ 是常数,$-\infty<\theta<\infty$) 的切线和 z 轴成固定角.

解

要说明曲线的切线和 z 轴成固定角, 只要说明曲线的任意点处的切向量与 z 轴的单位向量 $\boldsymbol{e}_3$ 成固定角即可.

而

$$\boldsymbol{r}'(\theta)=\{-a\sin\theta, a\cos\theta, b,\}\ \boldsymbol{e}_3=\{0,0,1\}.$$

因此

$$\cos\angle(\boldsymbol{r}'(\theta),\boldsymbol{e}_3)=\frac{\boldsymbol{r}'(\theta)\cdot\boldsymbol{e}_3}{|\boldsymbol{r}'(\theta)|\cdot|\boldsymbol{e}_3|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{常数}.$$

这说明切向量 $\boldsymbol{r}'(\theta)$ 与单位向量 $\boldsymbol{e}_3$ 成固定角.

习题 2.11

求用极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 给定的曲线的弧长表达式.

解

将极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 化为直角坐标方程, 得到

$$x=\rho(\theta)\cos\theta,\ \ y=\rho(\theta)\sin\theta.$$

因此得到曲线的向量函数为

$$\boldsymbol{r}(\theta)=\{\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta\}=\rho(\theta)\{\cos\theta,\sin\theta\}.$$

所以 $\boldsymbol{r}'(\theta)=\rho'(\theta)\{\cos\theta,\sin\theta\}+\rho(\theta)\{-\sin\theta,\cos\theta\}.$

故 $|\boldsymbol{r}'(\theta)|=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}.$

因此极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 的弧长公式为

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta.$$

1-3-1-曲率和伏雷内标架-1

我们将原本前三个子节

- 3.1 空间曲线的密切平面
- 3.2 空间曲线的基本三棱形
- 3.3 空间曲线曲率, 挠率和伏雷内公式

替换为

- 3.1 曲率与伏雷内标架
- 3.2 基本三棱形
- 3.3 挠率与伏雷内公式

基本内容不变, 讲授顺序有些变化. 另外, 本节提到曲线如果没有特别指出, 均指至少 C^3 类的正则曲线.

定义 1

设曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$($s$ 为弧长参数) 存在二阶导数, 则称 $|\boldsymbol{r}''(s)|$ 为曲线在 $P(s)$ 处的**曲率**, 记作 $\kappa(s)$. 即

$$\kappa(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|.$$

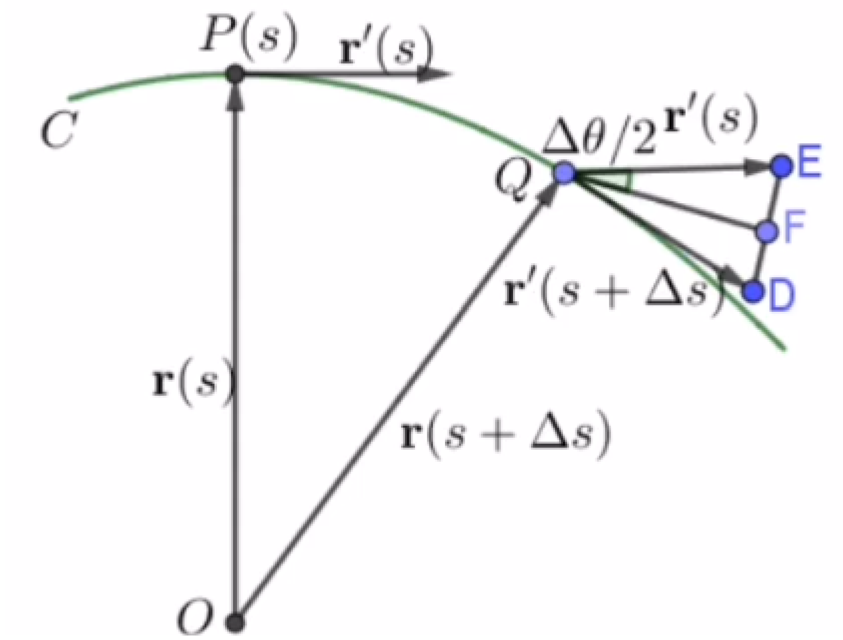
向量 $\boldsymbol{r}''(s)$ 也称为**曲率向量**.

定理 1

曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在一点处的曲率 $\kappa(s)$ 就是该点处单位切向量 $\boldsymbol{r}'(s)$ 改变的角度 φ 对弧长 s 的变化率的绝对值 (旋转速度), 即

$$\kappa(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

(这表明曲率是曲线弯曲情况的一种刻画方法.)



曲率的意义

- 曲线参数为弧长参数，那么r'(s)的模长是恒为1的，因此r'(s)是一个单位切向量

证明

由于

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= |\boldsymbol{r}''(s)| \\ &= \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}'(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}'(s)}{\Delta s}\right| \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\Delta s}\right| \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|\end{aligned}$$

（这里 $\Delta\varphi$ 是 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{r}(s)$ 的夹角）

上述定理说明曲率是描述曲线弯曲程度的一个量. 下面我们举两个比较直观的例子来再次验证这一点.

1-3-1-曲率和伏雷内标架-2

例 1

曲线为直线当且仅当其曲率恒为零.

证明

$\Rightarrow$ 设直线的方程为 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}|=1$, 即这条直线为过点 $\boldsymbol{b}$, 方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 的直线.

方程两边求导有 $\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 所以直线为正则曲线.

方程两边再求导, 有 $\boldsymbol{r}''(s)=\boldsymbol{0}$, 故

$\kappa=|\boldsymbol{r}''(s)|=0.$

证明

$\Leftarrow$ 设 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一条空间曲线且其曲率 $\kappa \equiv 0$.

由 $\kappa=|\boldsymbol{r}''(s)|$, 可知 $\boldsymbol{r}''(s) \equiv \mathbf{0}$,

方程两边同时对 s 积分, 有 $\boldsymbol{r}'(s) \equiv \boldsymbol{a}, |\boldsymbol{a}|=1$,

再积分有 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}|=1$.

这表示过定点 $\boldsymbol{b}$, 方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 的直线.

例 2

圆的曲率恒为非零常数.

证明

不妨设圆的方程为 $\boldsymbol{r}(s)=R\{\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}, 0\}, R>0$, 即这个圆是圆心在原点, 半径为 R 的.

由于 $\boldsymbol{r}'(s)=\{-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}, 0\} \neq \mathbf{0}$, 所以圆为正则曲线.

由于 $\boldsymbol{r}''(s)=\frac{1}{R}\{-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}, 0\}$, 故

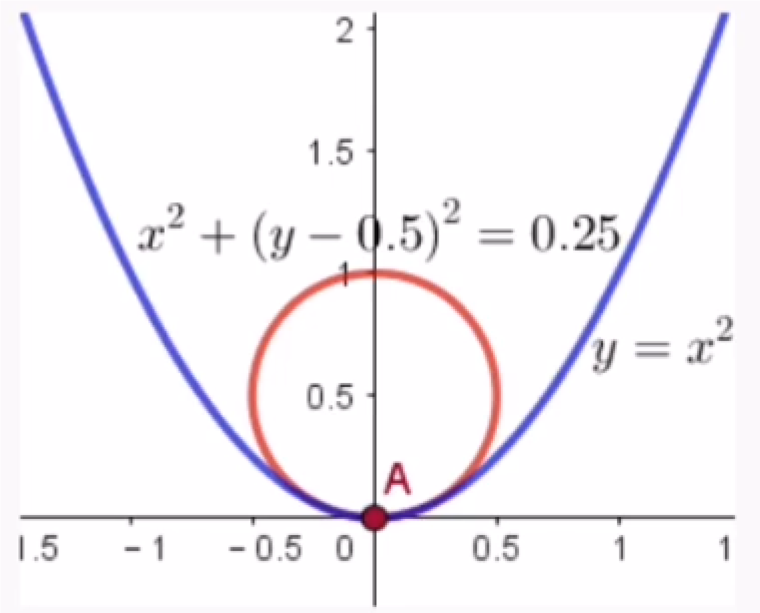
$\kappa=|\boldsymbol{r}''(s)|=\frac{1}{R} \neq 0.$

注解

从上述两个例子, 不难从直观上体会曲率的几何含义. 而且对于圆来说, 半径越大曲率越小, 半径越小曲率越大.

圆的这个特性也有一个用途, 任意一条曲线在一点的弯曲情况总可以用一个圆来描述.

如果曲线在一点的曲率为 κ , 那么我们总找到一个半径为 $\frac{1}{\kappa}$ 的圆, 与曲线切于该点, 并且位于曲线凹入一侧, 这样的圆称为曲线在该点的**曲率圆**.



曲率圆

定义 2

设 C: $\boldsymbol{r}(s)$ 为曲率处处不为零的正则曲线，则称

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{r}'(s), \quad \boldsymbol{\beta}(s) = \frac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|},$$

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \frac{\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)|}$$

分别为 C 在 $P(s)$ 处的**单位切向量，主法向量和副法向量**.

称 $\{P(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 为曲线在点 $P(s)$ 处的 **Frenet 标架**. 三个向量统称为**基本向量**.

- 弧长参数曲线，r'(s)模长为1，因此是单位切向量；r'(s)与r''(s)处处垂直，因此β(s)和α(s)是处处垂直的；β(s)的定义方式使得其也是单位向量；γ(s)的定义方式，使得其与α(s)和β(s)是正交的，并且也是单位向量
- 三个向量构成一个右手标架

1-3-1-曲率和伏雷内标架-3

注解

由于

$$|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)|=|\boldsymbol{r}'(s)||\boldsymbol{r}''(s)|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{r}''(s)|\neq 0$$

故上述定义的 2,3 两式有意义.

为了计算方便, 我们需要考察三个基本向量和曲率的一般参数表示. 即有下面的定理.

baike.baidu.com 向量积、叉积、外积的模长计算公式

- 之前定义的4个量，都可以用一般参数t来表示（之前用的是弧长参数）

定理 2

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}&=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\\
\boldsymbol{\beta}&=\frac{(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t))\boldsymbol{r}''(t)-(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t))\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}\\
\boldsymbol{\gamma}&=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}\\
\kappa&=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}.
\end{aligned}$$

- 式子1、3、4要求记忆，2不用

证明

利用复合函数求导法则，可以得到:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{r}'(s) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

上式也可写为 $\boldsymbol{r}'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r}'(s)$. 故

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}''(t) &= \frac{d}{dt}(|\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r}'(s)) \\
&= \frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}'(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}'(s) \\
&= \frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}'(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r}'(s))\frac{ds}{dt} \\
&= \frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}'(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|^2\boldsymbol{r}''(s)
\end{aligned}$$

- 相同向量与自身做叉乘，得到0向量

证明

所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) &= (|\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r}'(s)) \times \left(\frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}'(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|^2\boldsymbol{r}''(s)\right) \\
&= |\boldsymbol{r}'(t)|^3(\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s))
\end{aligned}$$

上式两边取模，有

$|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)| = |\boldsymbol{r}'(t)|^3|\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)|$

两式相比，立即可得

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)|} = \frac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}.$$

- 解析几何中的双重向量积

证明

因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}\\ &= \frac{(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\times\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}\\ &= \frac{(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t))\boldsymbol{r}''(t)-(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t))\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}.\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)| &= |\boldsymbol{r}'(t)|^3|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))|\\ &= |\boldsymbol{r}'(t)|^3|\boldsymbol{r}''(s))| = |\boldsymbol{r}'(t)|^3\kappa\end{aligned}$$

即空间曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率为

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}.$$

1-3-1-曲率和伏雷内标架-4

例 3

求曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,t\}$ ，在点 $(1,0,0)$ 处的基本向量和曲率.

解

由于 $t=0$ 时 $\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\}$，故点 $(1,0,0)$ 在曲线上.

而 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t,\cos t,1\}, \boldsymbol{r}''(t)=\{-\cos t,-\sin t,0\}$

所以 $\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\}, \boldsymbol{r}''(0)=\{-1,0,0\}$.

从而

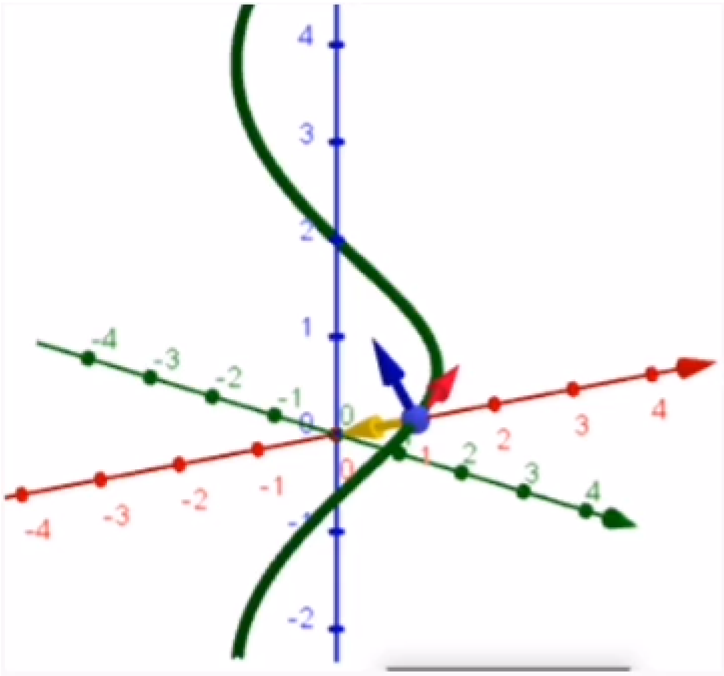
$$|\boldsymbol{r}'(0)|=\sqrt{2},$$
$$\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)=\{0,1,1\}\times\{-1,0,0\}=\{0,-1,1\}$$
$$|\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)|=\sqrt{2}.$$

解

所以

$$\boldsymbol{\alpha}_0=\frac{\boldsymbol{r}'(0)}{|\boldsymbol{r}'(0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}$$
$$\boldsymbol{\gamma}_0=\frac{\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)}{|\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}$$
$$\boldsymbol{\beta}_0=\boldsymbol{\gamma}_0\times\boldsymbol{\alpha}_0=\{-1,0,0\}$$
$$\kappa_0=\frac{|\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)|}{|\boldsymbol{r}'(0)|^3}=\frac{1}{2}$$

- 叉乘的计算方法要复习，一定注意方向



三个基本向量

1-3-1-曲率和伏雷内标架-5-伏雷内标架的运动

[1-3-1-曲率和伏雷内标架-5-伏雷内标架的运动_哔哩哔哩_bilibili]

1-3-2-基本三棱形-1

定义 1

$P(s)$ 为曲线 $C: \boldsymbol{r}(s)$ 上一点，设 $\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)$ 为曲线在 $P(s)$ 处的三个基本向量. 过 P 点，平行于 $\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)$ 的直线分别称为曲线在点 P 的 切线，主法线和副法线.

过 P 点，垂直于 $\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)$ 的平面分别称为曲线在点 P 的 法平面，从切平面和密切平面.

由 P 点和 P 点处的三个基本向量，切线，主法线，副法线，法平面，从切平面和密切平面构成的图形称为曲线在一点处的 基本三棱形.

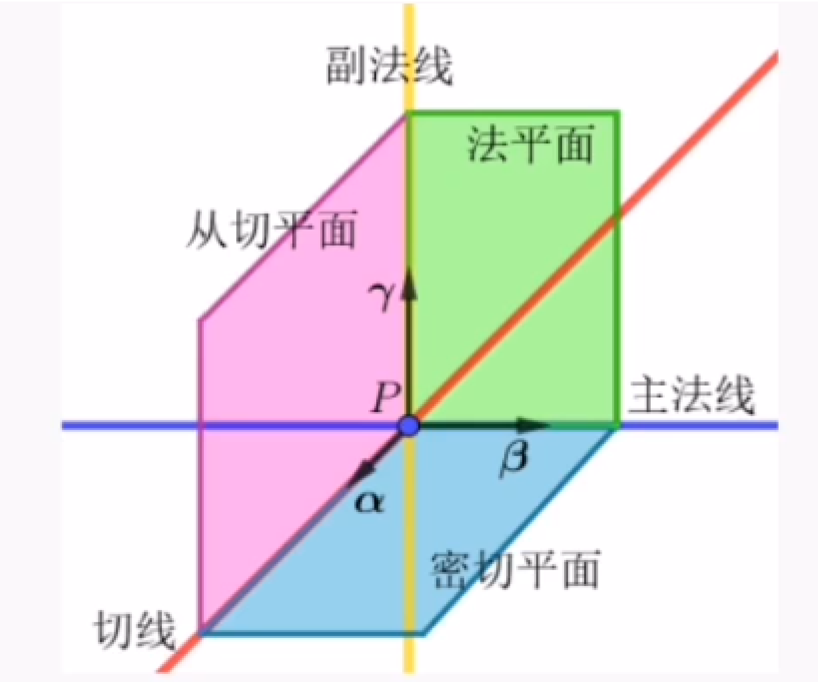


Figure: 空间曲线在一点处的基本三棱形

- 下面关心这3条直线和平面的方程是怎样的

定理 1

曲线 $C: \boldsymbol{r}(s)$ 在点 $P_0(s_0)$ 的切线，主法线和副法线的方程分别为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{\gamma}_0,$$

法平面，从切平面和密切平面的方程分别为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha}_0=0 \quad 或 \quad (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)=0$$
$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{\beta}_0=0 \quad 或 \quad (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)=0$$
$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=0 \quad 或 \quad (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0)=0$$

- 上图右下方的括号表示混合积
- 在计算具体曲线的具体点的3条直线和平面的方程时，不会用上面的方法

定理 2

若直线 l 与平面 π 垂直相交于一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，则直线的方程为

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

的充要条件是平面的方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

- 基本三棱形中直线、平面垂直的关系有3对，因此只要推出3个直线的方程，就能够和平面的方程对应起来

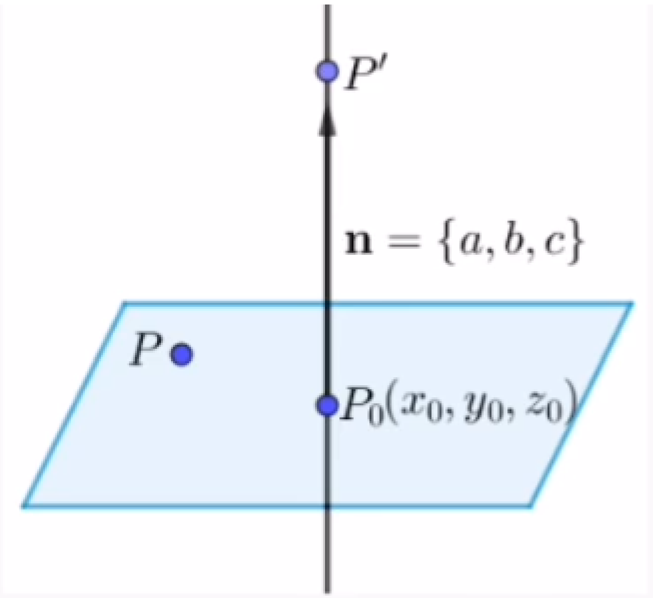


Figure: 直线垂直于平面

1-3-2-基本三棱形-2

例 1

求曲线 $C: \boldsymbol{r}(t)=\{\cos t, \sin t, t\}$，在点 $(1,0,0)$ 处的基本三棱形中三个平面和三条直线方程.

解

由前一例题

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}, \boldsymbol{\gamma}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}, \boldsymbol{\beta}_0 = \{-1,0,0\},$$

这样, 曲线在点 $(1,0,0)$ 处的切线, 主法线和副法线的方程分别为:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}, \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

解

再由前一定理可得曲线在点 $(1,0,0)$ 处的法平面, 从切平面和密切平面的方程分别为:

$$0(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0 \quad \text{或} \quad y+z=0$$

$$(-1)(x-1)+0(y-0)+0(z-0)=0 \quad \text{或} \quad x=1$$

$$0(x-1)+(-1)(y-0)+1(z-0)=0 \quad \text{或} \quad y-z=0$$

下面我们将比较常见的密切平面的方程写出来.

定理 3

设 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为一条空间曲线, 则它在任意一点 $t=t_0$ 处的密切平面的一般参数方程为

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) & z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

解

将 $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$, 和

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t))\boldsymbol{r}''(t) - (\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t))\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}$$

带入到密切平面方程 $(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0) = 0$ 中,

有

$$\left(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}, \frac{(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'' - (\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}\right) = 0.$$

利用混合积的性质, 将混合积第二项和第三项的系数提出, 并消去有

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}', (\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'' - (\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}') = 0.$$

证明

进一步地, 有

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}', (\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'') = 0.$$

或者

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{r}'(t_0), \boldsymbol{r}''(t_0)) = 0.$$

因此密切平面的一般参数表示形式为

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

1-3-2-基本三棱形-3

例 2

求曲线 $C: \boldsymbol{r}(t) = \{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$ 在点 $t = 0$ 处的密切平面方程.

证明

因为 $\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t,\sin 2t\}$, 所以

$\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t,\cos t,2\cos 2t\}$,

$\boldsymbol{r}''(t)=\{-\cos t,-\sin t,-4\sin 2t\}$.

进而 $\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\}$, $\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,2\}$, $\boldsymbol{r}''(t)=\{-1,0,0\}$.

因此所求密切平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$ 化简得 $2y-z=0$.

1-3-3-挠率与伏雷内公式-1

本节的要点:

- 挠率的定义与计算
- Frenet 公式的推导
- Frenet 公式的应用

注解

设曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{P(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$, 下面我们关心, 它们的一阶导数 $\boldsymbol{\alpha}'(s),\boldsymbol{\beta}'(s),\boldsymbol{\gamma}'(s)$ 与三个基本向量的关系.

显然, 每一个一阶导数都能由三个基本向量线性表示, 那么具体表达式是怎样的? 下面我们就来讨论一下.

注解

由单位切向量, 主法向量和曲率的定义式 $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{\beta}(s)=\dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}, \kappa(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|$, 立即得到第一个伏雷内公式.

$\boldsymbol{\alpha}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s)$.

下面我再来考察 $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ 与三个基本向量的关系式.

定理 1

设曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的三个基本向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)$, 则 $\boldsymbol{\gamma}'(s) \parallel \boldsymbol{\beta}(s)$.

- ||表示平行于

证明

由于

$\boldsymbol{\gamma}'(s)=(\boldsymbol{\alpha}(s)\times\boldsymbol{\beta}(s))'$

$=\boldsymbol{\alpha}'(s)\times\boldsymbol{\beta}(s)+\boldsymbol{\alpha}(s)\times\boldsymbol{\beta}'(s)$

$=\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s)\times\boldsymbol{\beta}(s)+\boldsymbol{\alpha}(s)\times\boldsymbol{\beta}'(s)$

$=\boldsymbol{\alpha}(s)\times\boldsymbol{\beta}'(s)$

所以 $\boldsymbol{\gamma}'(s)\perp\boldsymbol{\alpha}(s)$.

而 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 单位长, 故 $\boldsymbol{\gamma}'(s)\perp\boldsymbol{\gamma}(s)$.

因而 $\boldsymbol{\gamma}'(s)\parallel\boldsymbol{\beta}(s)$.

注解

不妨设 $\boldsymbol{\gamma}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s)$,

因此 $\tau(s)=-\boldsymbol{\gamma}'(s)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)$ 并且

$|\tau(s)|=|\boldsymbol{\gamma}'(s)|$.

这样我们可以合理地定义一个新的概念, 挠率.

上面两边同时点乘β

定义 1

设 $\boldsymbol{\beta}(s)$ 和 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 分别为空间曲线 C 的主法向量和副法向量，这里参数 s 为弧长．则 $\tau(s) = -\boldsymbol{\gamma}'(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s)$ 称为曲线 C 的**挠率**．

定理 2

空间曲线的挠率的弧长参数的表达式为

$$\tau(s) = \frac{(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s))}{\kappa^2(s)} \tag{1}$$

一般参数的表达式为

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2} \tag{2}$$

1-3-3-挠率与伏雷内公式-2

证明

先证明第一式，

$$\begin{aligned}
&\tau(s) = -\boldsymbol{\gamma}'(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) \\
&= -((\boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}(s))' - \boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}'(s)) \\
&= \boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \boldsymbol{\beta}'(s) \\
&= \frac{\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)|} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}\right)' \\
&= \frac{\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|} \cdot \frac{\boldsymbol{r}'''(s)|\boldsymbol{r}''(s)| - |\boldsymbol{r}''(s)|'\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2} \\
&= \frac{(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s))}{\kappa^2(s)}
\end{aligned}$$

证明

接着证明第二式. 利用上节的结果 $\boldsymbol{r}'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|\boldsymbol{r}'(s)$ 和

$\boldsymbol{r}''(t) = \dfrac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}'(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|^2\boldsymbol{r}''(s)$ 有

$$\boldsymbol{r}'''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}'(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|^2\boldsymbol{r}''(s)\right)$$

$$= \frac{d^2|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt^2}\boldsymbol{r}'(s) + \frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}''(s)|\boldsymbol{r}'(t)|$$

$$+2|\boldsymbol{r}'(t)|\frac{d|\boldsymbol{r}'(t)|}{dt}\boldsymbol{r}''(s) + |\boldsymbol{r}'(t)|^3\boldsymbol{r}'''(s)$$

证明

所以三式求混合积, 并化简可得

$$(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)) = |\boldsymbol{r}'(t)|^6(\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{r}'''(s))$$

由第一式有

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)|^6\kappa^2},$$

证明

再由上节定理 $\kappa(t)$ 的表达式

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$$

有

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2}.$$

1-3-3-挠率与伏雷内公式-3

例 1

求曲线 $C: \boldsymbol{r}(t)=\{\cos t, \sin t, t\}$ 在点 $(1,0,0)$ 处的挠率.

解

$\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t, \cos t, 1\}, \boldsymbol{r}''(t)=\{-\cos t,-\sin t, 0\}, \boldsymbol{r}'''(t)=\{\sin t,-\cos t, 0\}$.

所以 $t=0$ 时 $\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\}$,

$\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\}, \boldsymbol{r}''(0)=\{-1,0,0\}, \boldsymbol{r}'''(0)=\{0,-1,0\}$.

从而 $|\boldsymbol{r}'(0)|=\sqrt{2}$,

$\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)=\{0,1,1\}\times\{-1,0,0\}=\{0,-1,1\}$

$|\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)|=\sqrt{2},(\boldsymbol{r}'(0), \boldsymbol{r}''(0), \boldsymbol{r}'''(0))=1$.

所求结果为 $\tau_0=\dfrac{(\boldsymbol{r}'(0), \boldsymbol{r}''(0), \boldsymbol{r}'''(0))}{|\boldsymbol{r}'(0)\times\boldsymbol{r}''(0)|^2}=\dfrac{1}{2}$.

定理 3

曲线在点 $P(s)$ 处的三个基本向量与它们的导数具有下面的关系

$$\left\{\begin{array}{lll}\boldsymbol{\alpha}'(s) & = & \kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\beta}'(s) & = & -\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}'(s) & = & -\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s)\end{array}\right.$$

称这组公式为曲线在点 $P(s)$ 处的 **Frenet 公式**.

注解

Frenet 公式还可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'(s) \\ \boldsymbol{\beta}'(s) \\ \boldsymbol{\gamma}'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s) \\ \boldsymbol{\beta}(s) \\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{pmatrix}$$

系数矩阵是一个反对称矩阵.

注解

由解析几何的知识, 我们知道: 平面的方程为 $(\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0))\cdot\boldsymbol{n}=0$, 或 $\boldsymbol{r}(u,v)\cdot\boldsymbol{n}=C$. 这里 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 为平面上一个固定点, $\boldsymbol{n}$ 为平面的一个法向量, $C=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)\cdot\boldsymbol{n}$ 是一个常数.

因此一条曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为此平面上的曲线当且仅当 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{n}=C$. 即如下定理所述.

定理 4

曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 落在法向量为 $\boldsymbol{n}\neq\mathbf{0}$ 的平面上当且仅当 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{n}=C$.

例 2

曲率处处不为零的空间曲线为平面曲线当且仅当其挠率为零.

- 对于空间曲线而言，曲率反映的是曲线投影到一点处的密切平面的弯曲程度，挠率反应曲线离开或者偏离这个密切平面的偏离程度；空间曲线在一点处的弯曲情况是由两个率刻画的，一个叫曲率，一个叫挠率；
- 曲线为平面曲线的话，那么其密切平面就是其所在的平面，没有离开其对应的密切平面

证明

设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一条空间曲线.

$\Rightarrow$ 如果 C 为平面曲线. 设曲线所在的平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$.

由于曲线在平面内, 所以单位切向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{r}'(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}$$

也在平面内,

故 $\boldsymbol{r}'(s)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直. 即

$$\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

证明

上式两端同时对 s 求导有

$$\boldsymbol{r}''(s)\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \boldsymbol{r}'''(s)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

这样向量 $\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}''(s),\boldsymbol{r}'''(s)$ 都垂直于常向量 $\boldsymbol{n}$. 所以它们共面.

从而 $(\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}''(s),\boldsymbol{r}'''(s))=0$. 进而挠率

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{r}'(s),\boldsymbol{r}''(s),\boldsymbol{r}'''(s))}{\kappa^2(s)}=0.$$

证明

$\Leftarrow$ 如果 $\tau(s)\equiv 0$, 则

由 Frenet 公式 $\boldsymbol{\gamma}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{\beta}$, 得 $\boldsymbol{\gamma}(s)\equiv\boldsymbol{\gamma}_0$. 从而

$0=\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=(\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}_0)'$

所以

$$\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=C$$

这说明曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是平面曲线.

1-3-3-挠率与伏雷内公式-4

例 3

所有密切平面过定点的正则曲线为平面曲线.

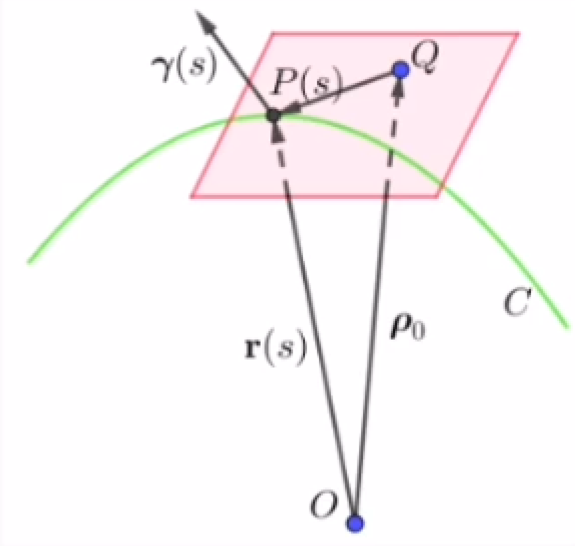


Figure: 密切平面过定点的曲线

证明

由已知可以设曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，且曲率 $C: \kappa(s)$ 处处不为零. 曲线 C 在任意一点 $P(s)$ 的密切平面过固定点 $\boldsymbol{\rho}_0$. 则有

$$(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) = 0$$

方程两边同时对参数 s 求导

$$\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) + (\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{\rho}_0) \cdot (-\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s)) = 0$$

即

$$\tau(s)(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(s) = 0$$

证明

下面说明 $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)\neq 0$.

事实上, 假设 $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)=0$. 则有

$\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\boldsymbol{\beta}(s)+(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0)\cdot(-\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s))=0$ 即

$$\kappa(s)(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha}(s)=0$$

而已知曲率 $C:\kappa(s)$ 处处不为零, 所以只能有

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha}(s)=0$$

因此向量 $\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\rho}_0$ 与三个基本向量 $\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)$ 都垂直.

证明

从而必有

$$\boldsymbol{r}(s)\equiv\boldsymbol{\rho}_0$$

即曲线为一点. 这与曲线的正则性矛盾. 故

$$\tau(s)\equiv 0$$

从而曲线为平面曲线.

1-3-3-挠率与伏雷内公式-5

练习

证明: 如果曲线的每一个法平面内都包含某个确定的非零向量, 那么这条曲线是平面曲线.

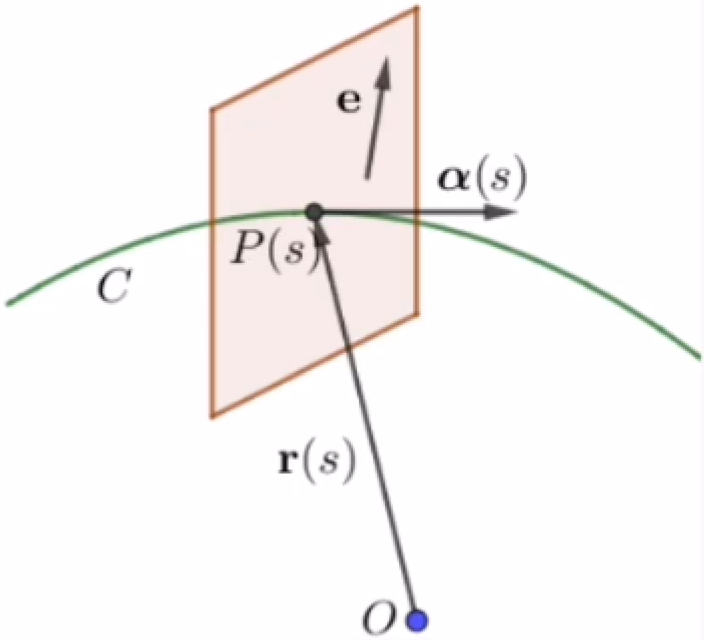


Figure: 法平面含常向量的曲线

证明

设 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是一条每一点都包含非零常向量 $\boldsymbol{e}$ 的曲线, s 是自然参数. 由题意我们有

$$\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \boldsymbol{e} = 0.$$

上式两边同时对 s 求导, 并带入 Frenet 公式有

$$\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s) \cdot \boldsymbol{e} = 0.$$

因为曲线在每一点处都存在法平面, 所以 $\kappa(s) \neq 0$, 故有

$$\boldsymbol{\beta}(s) \cdot \boldsymbol{e} = 0.$$

证明

上式两边同时再对 s 求导，并带入 Frenet 公式有

$$(-\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s)\gamma(s))\cdot\boldsymbol{e}=0.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\boldsymbol{e}=0$，所以

$$\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s)\cdot\boldsymbol{e}=0.$$

因为已知 $\quad\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\boldsymbol{e}=0,\boldsymbol{\beta}(s)\cdot\boldsymbol{e}=0,$

所以 $\quad\boldsymbol{e}\parallel\gamma(s)$，且它们都不是零向量，所以

$$\gamma(s)\cdot\boldsymbol{e}\neq 0,$$

所以 $\tau(s)$ 恒为零，故曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 为平面曲线.

练习

证明圆柱螺线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\},(a,b>0)$ 在任意一点的曲率和挠率恒为常数.

1-3-4-空间曲线一点邻近的结构-1

1-3-4-空间曲线一点邻近的结构-2

1-3-4-空间曲线一点邻近的结构-3

1-3-5-曲线论的基本定理-1

1-3-5-曲线论的基本定理-2

1-3-5-曲线论的基本定理-3

1-3-5-曲线论的基本定理-4

1-3-6-一般螺线-1

1-3-6-一般螺线-2

1-3-6-一般螺线-3

1-3-7-习题课-1