

# 基于一维热传导的高温作业专用服装设计

## 【摘要】

本文针对由多层材料组成的高温作业服装的传热问题进行研究,综合考虑多种传热方式、边界条件和初始条件建立一维非稳态热传导模型,并以此模型为基础解决该服装设计中各层材料厚度的问题。

针对问题一,为计算高温环境下假人皮肤外侧的温度分布,本文通过热学基础知识和傅里叶方程推导出各层间的一维热传导模型。建立第一,三类边界条件约束,将时间和空间离散化,写出隐式差分法的差分方程。基于最小二乘法原理,建立优化模型,拟合出实测温度与模型推导求得的温度最优估计。差分方程采用对三角追赶法进行简化计算,在模拟温度与实测温度的残差平方和最小为 6.56,的情况下,得到环境与高温服最外层,和人体与高温服最内层的热交换系数分别为:  $108.0(m^2 \cdot k)$ ,  $8.3(m^2 \cdot k)$ ,再利用该参数估计值得到温度分布图,最后将皮肤层所得温度情况与附件二数据进行对比,检验模型合理性。

针对问题二,以第Ⅱ层的厚度最小为优化目标,综合 60 分钟内最大温度、超过  $44^\circ C$  的时间和厚度等约束,建立基于问题一非稳态热传导方程的优化模型,将第二层厚度作为变量,使用二分法和穷举法迭代找到使第Ⅱ层厚度最小且符合题目要求的厚度为  $17.7 mm$ 。

针对问题三,需要确定第Ⅱ层和第Ⅳ层的最优厚度,根据题目要求。类似于问题二,采用优化算法来解决这个问题。考虑到第Ⅳ层是空气层,空气的质量极小,结合实际情况对于高温作业服来说,质量越小越好。故先确定第Ⅳ层厚度为最大厚度  $6.4 mm$ ,目标就变成确定第Ⅱ层与第Ⅳ层厚度之和最小。将第Ⅱ层和第Ⅳ层的厚度之和作为目标,使用二分法与穷举法迭代计算,找到满足题目约束且使第Ⅱ层与第Ⅳ层厚度之和,最小的第二层厚度为  $19.2 mm$ 。

**关键词:** 一维热传导模型 隐式差分法 最小二乘法 三角追赶法

## 一、问题重述

### 1.1 引言

在高温作业时，需要穿着专用的热防护服，对在高温或超高温环境下的工作人员进行保护，避免热源对人体造成影响。该专用服装一般由三层织物材料构成，第 I 层与外界环境相接触，第 III 层与皮肤之间存在的空隙为第 IV 层。如何设计高温专用服装，使得工作人员在保证安全的情况下所花费的成本较低成为一个难题，本题需对该情况进行研究。

### 1.2 问题提出

在本文中需根据专用服装构成，结合附件所给参数值和假人外侧实测温度数据。将体内温度控制在  $37^{\circ}\text{C}$  的假人放置在实验室高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度，为了降低研发成本、缩短研发周期，请利用数学模型确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并对以下几个问题进行求解：

1、当环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、第 II 层厚度为  $6\text{ mm}$ 、IV 层厚度为  $5\text{ mm}$ 、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧温度（见附件 2）。建立数学模型，计算温度分布，并生成温度分布的 *Excel* 文件。

2、当环境温度为  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层厚度为  $5.5\text{ mm}$  时，对第 II 层最优厚度进行确定，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

3、当环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$  时，对第 II 层和第 IV 层的最优厚度进行确定，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

## 二、问题分析

本题主要对高温作业专用服装设计进行研究。根据附件所给服装材料参数值和假人皮肤外侧的测量温度，为了降低研发成本、缩短研发周期，利用数学模型确定假人皮肤外侧的温度变化。

### 2.1 问题 1 分析

问题一需在环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、第 II 层厚度为  $6\text{ mm}$ 、IV 层厚度为  $5\text{ mm}$ 、工作时间为 90 分钟的情形下开展实验，建立数学模型，计算温度分布，解决该问题，需从以下几个方面进行分析：

① 导热方程推导。根据题目可知，在趋于稳态之前，温度会随着时间逐渐变化，此时为非稳态传热，且该题目仅对厚度进行研究，为一维非稳态导热，需根据热力学第一定律和傅里叶定律，对一维非稳态热传导方程进行

推导。

② 差分法计算。为了对温度数值进行求解，为了使得求解得到的数值稳定和收敛，使用隐式差分格式来求解，得到相应的对三角方程组，再对该对三角方程组使用“追赶”法进行求解。

③ 满足定解条件。为了得到温度分布情况，除了满足热传导方程以外，还需满足相应的初始状态和边界约束，其中初始条件为假人和防护服初始温度，边界条件分为第一类边界条件和第三类边界条件，除此之外还需满足其连续性条件。

④ 未知参数求解。针对第三类边界条件中的热交换系数未知，需对该系数进行求解，需结合附件所给假人皮肤外侧的测量温度，使用最小二乘法对未知参数进行确定。

## 2.2 问题 2 分析

问题二需在环境温度为  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层厚度为  $5.5\text{ mm}$ 、工作时间为 60 分钟的情形下开展实验，建立数学模型，确定第 II 层的最优厚度，解决该问题，需从以下几个方面进行分析：

① 为了满足实验要求，需保证环境温度、IV 层厚度以及工作时间满足实验所规定的要求，除此之外，还需保证实验过程中假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

② 为了确定 II 层的最优厚度。在满足实验要求情况下，考虑成本越低越好，即 II 层的厚度越小越好，使用的厚度越小，相应的成本越低，故在本题中需以 II 层厚度最小为目标。

## 2.3 问题 3 分析

问题三需在环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$ 、工作时间为 30 分钟的情形下开展实验，建立数学模型，确定第 II 层和 IV 层的最优厚度，解决该问题，需从以下几个方面进行分析：

① 为了满足实验要求，需保证环境温度以及工作时间满足实验所规定的要求，除此之外，还需保证实验过程中假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

② 为了确定 II 层和 IV 层的最优厚度。在满足实验要求情况下，考虑成本越低越好，由于第 IV 层为空隙层，而第 II 层由织物材料构成，故 IV 层花费的成本比 II 层花费成本低。考虑成本低的情况，第 II 层厚度越低相应的成本就越小，故在本题中需以 IV 层厚度最大、II 层厚度最小为目标。

### 三、符号说明

符号	描述说明
$T_m$	第 $m$ 层的温度
$T_{\text{人}}$	假人初始的皮肤温度
$T_m^+$	第 $m$ 层最左侧温度
$T_m^-$	第 $m$ 层最右侧温度
$q_m$	$d_m$ 处的热流密度
$k_{out}$	第 I 层与外界环境的热交换系数
$k_{in}$	第IV层与皮肤外侧的热交换系数
$\lambda_m$	第 $m$ 层的热传导率
$c_m$	第 $m$ 层的比热容
$\rho_m$	第 $m$ 层的材料密度
$d_m$	第 $m$ 层的厚度

### 四、模型假设

- 1、假设各层上的换热条件均匀一致，可忽略边缘散热效应；
- 2、假设织物材料各向同性；
- 3、假设假人在未进入测试环境前，体温为 37℃；
- 4、假设假人在未进入测试环境前，衣服各层温度与体温保持一致；
- 5、假设假人一进入测试环境，衣服最外侧瞬间升至环境温度；
- 6、假设假人皮肤层最内侧温度保持不变，恒为 37℃。

### 五、知识预备

本题需对高温作业专业服装进行研究，据此需针对热传递问题，说明热传导现象的若干物理定律，并根据题目要求增加定解条件。

#### （一）傅里叶定律

该定律指在导热过程中，单位时间内通过给定截面的导热量，正比于垂直于该截面方向上的温度变化率和截面面积，而热量传递的方向则与温度升高的方向相反，具体式子如下：

$$\vec{q} = -k\nabla u$$

## （二）热力学第一定律

热力学第一定律是指物体内能的增加等于物体吸收的热量和对物体所做的功的总和。即热量可以从一个物体传递到另一个物体，也可以与机械能或其他能量互相转换，但是在转换过程中，能量的总值保持不变，即能量守恒定律。

## （三）Newton 冷却定律

Newton 冷却定律是指温度高于周围环境的物体相周围介质传递热量逐渐冷却时所遵循的规律，当周围环境与物体表面存在温差时，在单位时间从单位面积散失的热量与温度成正比，即：

$$dQ = k(T - T_1)dSdt$$

## （四）稳态和非稳态

传热过程中的稳态指系统在长时间内保持稳定的温度变化，而非稳态指系统在短时间内发生变化。在稳态条件下，热量输入和输出达成一个平衡，温度分布保持不变。

稳态传热过程与非稳态传热过程的主要区别在于时间尺度。稳态传热过程需较长时间才能达到平衡，而非稳态传热则在短时间内发生变化。故，稳态传热过程更适合用于描述长时间内的温度分布，而非稳态传热过程则更适合用于描述短时间内的温度变化。

# 六、模型建立与求解

本题主要对高温作业专业服装进行研究，根据附件中所给参数和皮肤外侧的测量数据，利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况。

## 6.1 问题 1：计算温度分布

在本问中需根据附件所给专用服装材料的参数值和环境温度、服装层厚度，建立数学模型，计算其温度分布。

根据题目描述，绘制各层示意图，具体如下所示：

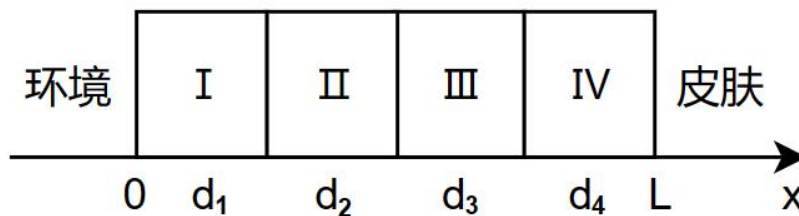


图 1：各层示意图

### 6.1.1 一维非稳态导热方程推导

在传热系统还未到达稳态之前需进行非稳态传热过程，非稳态传热过程中热量传递速率不恒定，随着时间发生变化，该情况下，温度分布不均匀，据此需对非稳态导热方程进行推导。

基于热力学第一定律和傅里叶定律，对一维非稳态热传导方程推导：

$$\begin{aligned}\Delta Q &= c\rho T\Delta V \\ \rightarrow \Delta Q &= c\rho T(x,t)\Delta V \\ \rightarrow Q(t) &= \int_0^d c\rho T(x,t)Sdx \\ \frac{dQ}{dt} &= \int_0^d c\rho T(x,t)dxS\end{aligned}$$

其中， $\Delta Q$ 表示单位体积内的热量， $T$ 表示温度， $\Delta V$ 表示体积元， $c$ 表示比热容， $\rho$ 表示材料密度， $S$ 表示截面积。

考虑热流量通过研究对象的边界流速，根据热量传递从温度高的一侧传递向温度低的一侧这一特性建立如下方程：

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \frac{-\lambda T(0+\Delta x)-T(0,t)}{\Delta x}S \\ \rightarrow \frac{dQ}{dt} &= \lambda \left[ \frac{\partial T(0+\Delta t,t)}{\partial x} - \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \right] \\ \rightarrow \frac{dQ}{dt} &= \lambda \int_0^d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dxS\end{aligned}$$

其中 $\lambda$ 表示热扩散率。

将以上通过不同方法研究得出的热流速方程联立：

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dxS &= c\rho \int_0^d T(x,t)dxS \\ \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\end{aligned}$$

综上，可得到不考虑热辐射条件下，建立如下一维非稳态热传导模型，存在不同层由于材料不同，相对应 $m$ 层热传导方程为：

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m \rho_m} \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} \quad (1-1)$$

其中， $\lambda_m$ 表示第 $m$ 层的热传导率， $c_m$ 表示第 $m$ 层的比热容， $\rho_m$ 表示第 $m$ 层的材料密度。

### 6.1.2 隐式差分格式

在离散化热传导方程中，将时间作为自变量，温度分布量作为因变量。为了使得求解得到的数值稳定和收敛，使用隐式差分格式来求解，因为隐式

格式在每个时间步都求解了一个线性方程组，从而确保了数值解的稳定性。据此，需先对热传导方程的隐式差分格式方程进行推导。

根据推导出的一维非稳态热传导方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

向后差分于时间导数，中心差分于空间二阶导数，得到：

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

整理上式，得到：

$$-\frac{\lambda \Delta t}{c\rho \Delta x^2} T_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2\lambda \Delta t}{c\rho \Delta x^2}\right) T_j^{n+1} - \frac{\lambda \cdot \Delta t}{c\rho \cdot \Delta x^2} T_{j+1}^{n+1} = T_j^n$$

设  $r = \frac{\lambda \Delta t}{c\rho \Delta x^2}$ ，则上式可写成：

$$-r T_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r) T_j^{n+1} - r T_{j+1}^{n+1} = T_j^n \quad (1-2)$$

将上式写成矩阵向量形式：

定义向量  $Te^{n+1} = [T_1^{n+1}, T_2^{n+1}, \dots, T_{N-1}^{n+1}]^T$  和  $Te^n = [T_1^n, T_2^n, \dots, T_{N-1}^n]^T$

变换矩阵  $A$  为  $(N-1) \times (N-1)$  矩阵，其非零元素为：

$$A_{jj} = 1 + 2r, \quad A_{(j,j-1)} = -r, \quad A_{(j,j+1)} = -r$$

综上，隐式有限差分格式为：

$$AT^{n+1} = T^n \quad (1-3)$$

其中隐式格式在每个时间步都需对以上线性方程组进行求解，由于  $A$  为特征值大于零的对称矩阵，为正定矩阵，故有唯一解。

### 6.1.3 追赶法求解三对角矩阵

根据 6.1.2 中求解得到的有限差分格式：

$$AT^{n+1} = T^n$$

上式对应矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-2}^{n+1} \\ T_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ \vdots \\ T_{N-2}^n \\ T_{N-1}^n \end{bmatrix}$$

### ① “追”的过程

追赶法得基本原理就是矩阵  $LU$  分解，即将矩阵  $A$  分解为：

$$A = LU \quad (1-4)$$

其中  $L$  为一个对角线上元素为 1 的下三角矩阵， $U$  为一个上三角矩阵，一个三角矩阵作  $LU$  分解后，得到一个下三角矩阵与一个上三角矩阵的乘积，即：

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & l_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

将式子 (1-3) 和 (1-4) 进行联合，可得：  $LUT^{n+1} = T^n$

记  $Ly = T^n$ ，根据上式可得：  $UT^{n+1} = y$

其中有：

$$\begin{cases} y_1 = T^n \\ y_i = T_i^n - l_i \cdot y_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

### ② “赶”的过程

使用回代法求解上三角方程组，从三对角矩阵得到的上三角方程组如下：

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-2}^{n+1} \\ T_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

同解上三角方程组回代得：



$$\begin{cases} T_N^{n+1} = \frac{T_N^n}{A_{(N,N)}} \\ T_i^{n+1} = \frac{T_i^n - A_{(i,i+1)} \cdot T_{i+1}^{n+1}}{A_{(i,i)}} \quad i = N-1, \dots, 2, 1 \end{cases}$$

#### 6.1.4 最小二乘法求解未知参数

针对 5 中第三类边界条件中的热交换系数，使用最小二乘法对未知参数  $k_{out}$  和  $k_{in}$  进行求解，使得与实测数据的吻合效果较好，拟合目标是使用最小二乘法，将观测值与基于模拟函数计算出的数值之间的残差平方和最小化，设  $T_4'^-$  为，其优化目标为：

$$\text{Min} \quad z = \sum_{t=0}^{5400} (T_4'^-(t) - T_4^-(t))^2$$

#### 6.1.5 定解条件

定解条件关系到方程是否有解，其解是否可靠。需满足题目要求的相应的初始状态和边界约束，据此，需增加以下几个定解。

##### ① 初始条件

假设假人在未进入测试环境前体温为  $37^\circ\text{C}$ ，且假人在未进入测试环境前，衣服各层温度与体温保持一致，设  $T_\lambda$  为假人初始皮肤温度， $T_m$  为第  $m$  层的温度， $t=0$  时各层温度与假人体温保持一致，具体条件如下：

$$\begin{cases} T_\lambda = 37^\circ\text{C} \\ T_m(x, t)|_{t=0} = T_\lambda, x \in [0, L], m = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

##### ② 第一类边界条件

为了求解温度分布，在已知环境温度条件下，需对第一类边界条件进行约束。

假设假人一进入测试环境，衣服最外侧瞬间升至环境温度， $T_1^+$  为第 I 层最左侧温度， $T_0$  为环境温度，衣服最外侧温度应与环境温度保持一致，具体边界条件如下：

$$\begin{cases} T_1^+(x, t)|_{x=0} = T_0, \quad t \in [0, t_{\max}] \\ T_0 = 75^\circ\text{C} \end{cases}$$

##### ③ 连续性条件

相邻两层接触面处满足温度和热流密度连续，设  $T_m$  表示第  $m$  层与第  $m+1$  层接触面  $d_m$  处的温度， $q_m$  表示  $d_m$  处的热流密度， $^+$ 、 $^-$  分别表示每层材料的左右两侧，同时为对应量的左右极限。

$$\begin{cases} T_m^- = T_{m+1}^+, & m = 1, 2, 3 \\ q_m^- = q_{m+1}^+, & m = 1, 2, 3 \end{cases}$$

#### ④ 第三类边界条件

外界温度与防护服表面上的温度往往并不相同，而第三类边界条件规定了物体边界与周围流体间表面传热系数与周围流体的温度，据此需对第一边界条件进行约束。

利用热传导中的 *Newton* 冷却定律：物体从一介质到另一介质的热量与两介质间的温度差成正比，即流过物体表面  $S$  的热量为：

$$dQ = k(T - T_1)dSdt$$

本题在一维热传导方程基础上，引入介质外的法向量。存在两个热对流情况，分别是高温作业防护服第 I 层最左端与环境进行热交换，在  $x=0$  处法向量方向是  $x$  轴负方向，设  $k_{out}$  为第 I 层与外界环境的热交换系数，建立如下方程：

$$-k_{out} \frac{\partial T_1^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_{out}(T_0 - T_1^+)$$

高温作业防护服第 IV 层最右端与环境进行热交换，在  $x=L$  处法向量方向是  $x$  轴正方向，设  $k_{in}$  为第 IV 层与皮肤外侧的热交换系数，建立如下方程：

$$k_{in} \frac{\partial T_4^-}{\partial x} \Big|_{x=L} = k_{in}(T_{\lambda} - T_4^-)$$

#### 6.1.6 温度分布模型的建立与求解

综合以上一维非稳态方程推导、隐式差分格式和定解条件，可建立求解温度分布模型，具体模型如下：

$$\begin{cases} -rT_{j-1}^{n+1} + (1+2r)T_j^{n+1} - rT_{j+1}^{n+1} = T_j^n \\ r = \frac{\lambda \Delta t}{c\rho \Delta x^2} \\ T_m(x, t) \Big|_{t=0} = T_{\lambda}, & x \in [0, L], m = 1, 2, 3, 4 \\ T_1^+(x, t) \Big|_{x=0} = T_0, & t \in [0, t_{\max}] \\ T_{\lambda} = 37^{\circ}\text{C} \\ T_0 = 75^{\circ}\text{C} \\ T_m^- = T_{m+1}^+, & m = 1, 2, 3 \\ q_m^- = q_{m+1}^+, & m = 1, 2, 3 \end{cases}$$

### 6.1.7 计算温度分布算法的具体描述

根据以上的一维非稳态导热方程推导、隐式差分格式、对三角矩阵的追赶法求解和相应的定解条件，设计相对应的计算温度分布算法，具体步骤如下：

*Step1*：隐式差分格式离散化计算。根据一维非稳态热传导方程，向后差分于时间导数，中心差分于空间二阶导数。分别对左边界条件和右边界条件进行离散化处理，具体如下：

根据左边界条件，对其进行离散化处理：

$$-k_1 \frac{T(2,k) - T(0,k)}{2\Delta x} = k_{out} (T_{out} - T(1,k))$$

整理可得：

$$T(0,k) = \frac{2\Delta x k_{out} T_{out}}{k_1} - \frac{2\Delta x k_{out} T(1,k)}{k_1} + T(2,k)$$

根据每层材料内部，有：

$$T_j(1,k-1) = -r_1 T_j(2,k) - r_1 T_j(0,k) + (1+2r_1) T_j(1,k)$$

联立得：

$$T_j(1,k-1) = -r_j T_j(2,k) - r_j \left( \frac{2\Delta x k_{out} T_{out}}{k_1} - \frac{2\Delta x k_{out} T(1,k)}{k_1} + T(2,k) \right) + (1+2r) T_j(1,k)$$

$$T_j(1,k-1) + r_1 \frac{2\Delta x k_{out} T_{out}}{k_1} = -2r_1 T_j(2,k) + (1+2r_1 + r_1 \frac{2\Delta x k_{out}}{k_1}) T_j(1,k)$$

同理，右边界条件离散化也进行如上处理，得：

$$T_j(L,k-1) - \frac{2\Delta x k_{in} T_{in}}{k_4} = -2r_1 T_j(L+1,k) + (1+2r_j - r_j \frac{2\Delta x k_{in}}{k_4}) T_j(L,k)$$

*Step2*：对初步拟合标准数据，并使用追赶法求解对三角矩阵。对未知参数热交换系数不断改变，接着使用追赶法对三对角方程组进行求解，求解过程详见 6.1.3 中追赶法求解三对角矩阵，直至确定未知参数热交换系数得大概范围。

*Step3*：未知参数求解。根据确定的热交换系数范围，使用最小二乘法对未知参数热交换系数  $k_{out}$  和  $k_{in}$  取不同值下的残差平方和进行计算，选取残差平方和最小对应的热交换系数。

算法具体的流程图如下图所示：

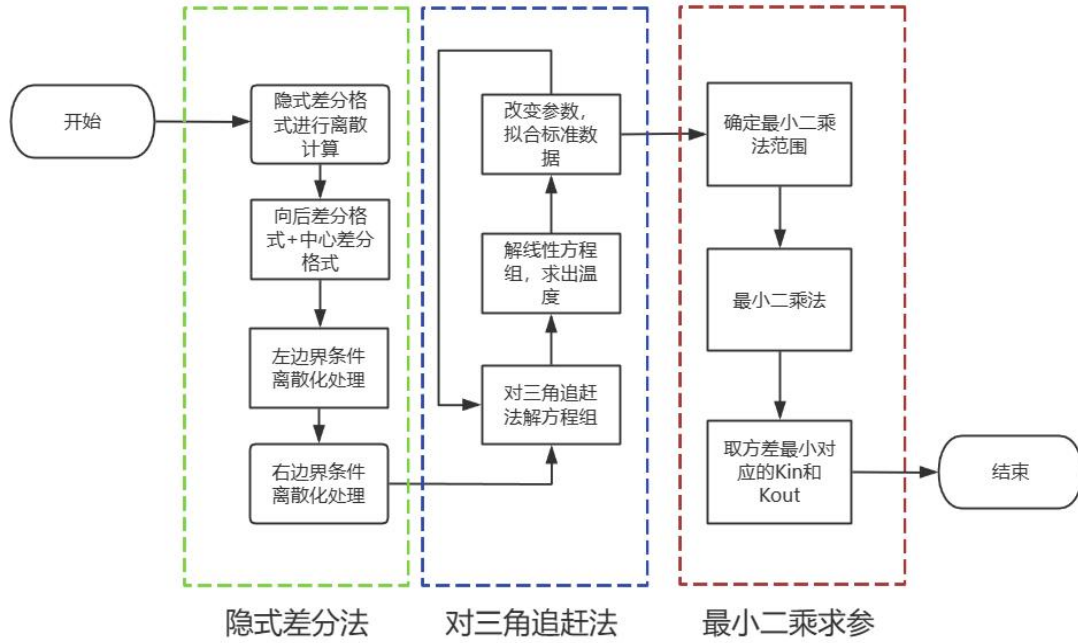


图 2：算法流程图

### 6.1.8 具体结果

使用最小二乘法确定  $k_{out}$  和  $k_{in}$  未知参数，观测值与基于模拟函数计算出的数值之间的残差平方和最小化为目标。

分别对第 I 层与外界环境的热交换系数  $k_{out}$  和 IV 层与皮肤外侧的热交换系数  $k_{in}$  取不同值进行研究，确定其大概范围，以下时  $k_{out}$  和  $k_{in}$  取不同值与实测数据的对比图：

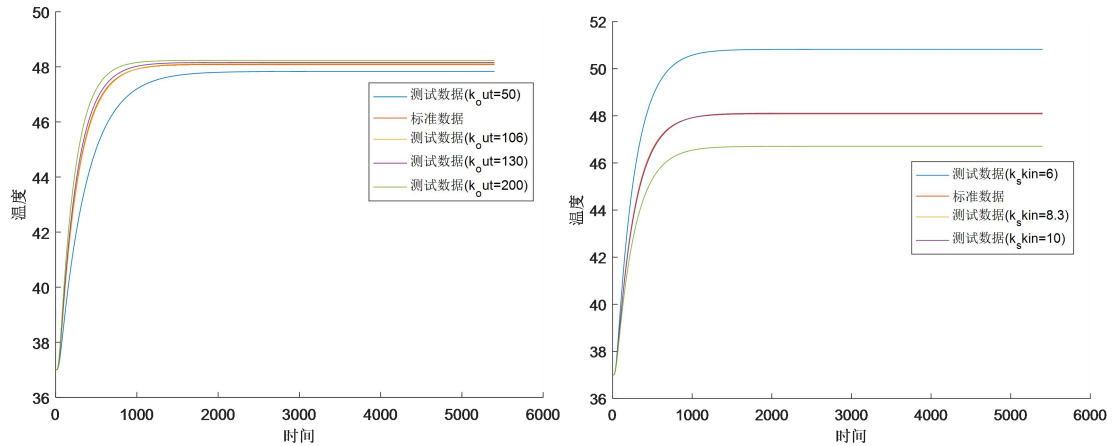


图 3：k-out 和 k-int 取不同数值与实测数据对比图

以上为第 I 层与外界环境的热交换系数  $k_{out}$  和 IV 层与皮肤外侧的热交换系数  $k_{in}$  取不同值情况下与实测数据的对比，通过对比可得取  $k_{out}$  的范围为  $[100,110]$ ， $k_{in}$  的范围为  $[8,9]$ ，针对该范围，取  $k_{out}$  变化步长为 1， $k_{in}$  变化步长为 0.1，计算其不同数值对应的残差平方和，得到的残差平方和数据具体如下表所示：

表 1: 热交换系数  $k_{out}$  和  $k_{in}$  不同取值下的残差平方和数据

$k_{out} \backslash k_{in}$	8	8.1	8.2	8.3	...	8.9	9
100	425.76	192.69	58.39	17.95	...	1499.83	1997.56
101	435.52	198.13	59.64	15.13	...	1475.01	1969.44
102	445.49	203.85	61.25	12.75	...	1451.03	1942.22
103	455.66	209.86	63.21	10.79	...	1427.85	1915.86
104	466.01	216.11	65.50	9.23	...	1405.45	1890.33
105	476.53	222.61	68.10	8.04	...	1383.78	1865.59
106	487.20	229.34	70.99	7.21	...	1362.83	1841.62
107	498.02	236.27	74.16	6.72	...	1342.56	1818.39
108	508.97	243.41	77.59	6.56	...	1322.96	1795.87
109	520.04	250.72	81.27	6.71	...	1303.99	1774.03
110	531.22	258.21	85.18	7.14	...	1285.64	1752.86

对上表数据进行可视化展示，具体如下图所示：

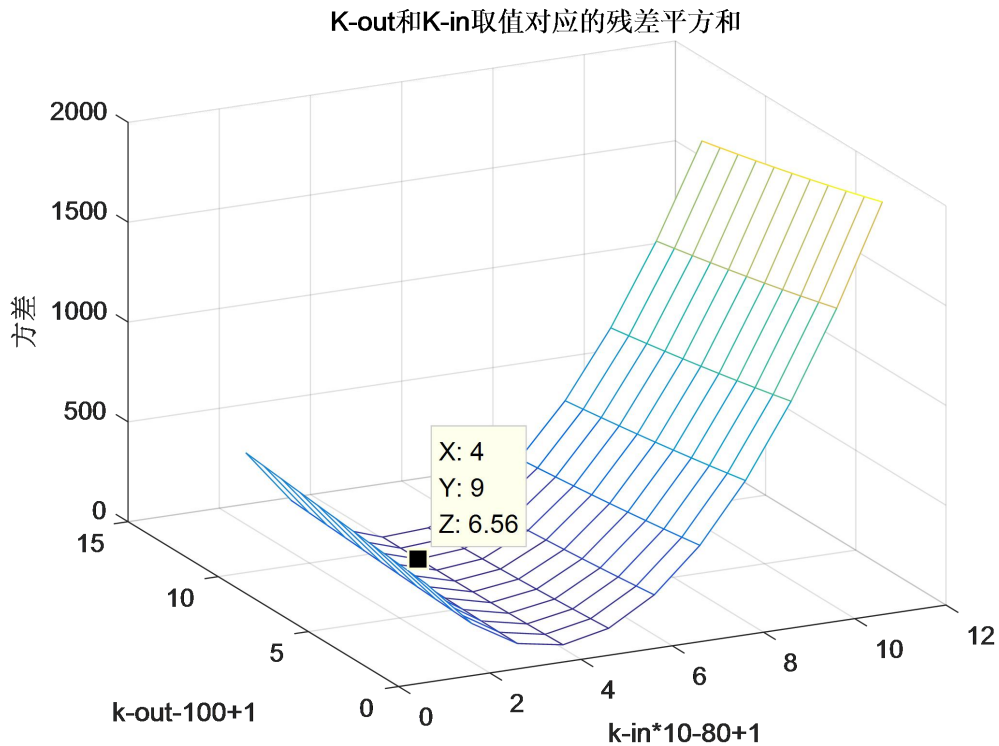


图 4:  $k_{out}$  和  $k_{in}$  取值不同相应的残差平方和

结合表格和图形，可看出当  $k_{out} = 108$  和  $k_{in} = 8.3$  时残差平方和为 6.56，数值最小，即该参数下的拟合效果最好。在该参数下，相应的实测数据和拟合数据的温度分布对比图如下图所示：

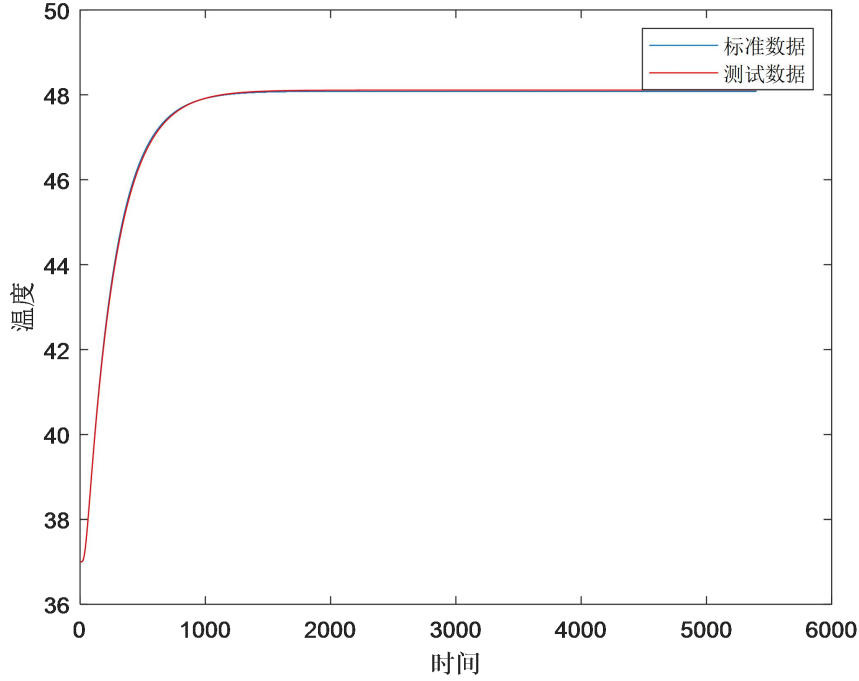


图 5: 实测数据和拟合数据的温度分布对比图

从上图对比可看出，两条曲线吻合效果较好，说明参数  $k_{out}$  和  $k_{in}$  取值合适。

综上，将热交换系数分布设置为  $k_{out} = 108$  和  $k_{in} = 8.3$ ，将隐式差分与定解条件进行联合，递推为一个三对角线性方程组，对其进行求解即可得到各个时刻防护服各层温度分布情况，其中时间步长设置为 1 秒，位置步长设置为  $0.1\text{ mm}$ ，部分温度分布矩阵部分如下所示，具体的温度分布数据详见支撑材料 problem1.xlsx。

$$T = \begin{bmatrix} 37 & 37 & 37 & 37 & \cdots & 37 & 37 & 37 \\ 50.2979 & 47.3795 & 44.9839 & 42.9905 & \cdots & 37 & 37 & 37 \\ 53.7182 & 47.3795 & 48.4670 & 46.1082 & \cdots & 37 & 37 & 37 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 73.83 & 73.6759 & 73.5219 & 73.3680 & \cdots & 48.4698 & 48.1489 & 47.8279 \\ 73.8313 & 73.6774 & 73.5236 & 73.3699 & \cdots & 48.4711 & 48.1501 & 47.8291 \\ 73.8326 & 73.6789 & 73.5253 & 73.3717 & \cdots & 48.4724 & 48.1514 & 47.8304 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 74.1457 & 74.0331 & 73.9206 & 73.8081 & \cdots & 48.7756 & 48.4461 & 48.1166 \\ 74.1457 & 74.0331 & 73.9206 & 73.8081 & \cdots & 48.7756 & 48.4461 & 48.1166 \\ 74.1457 & 74.0331 & 73.9206 & 73.8081 & \cdots & 48.7756 & 48.4461 & 48.1166 \end{bmatrix}$$

相应的温度变化图如下所示：

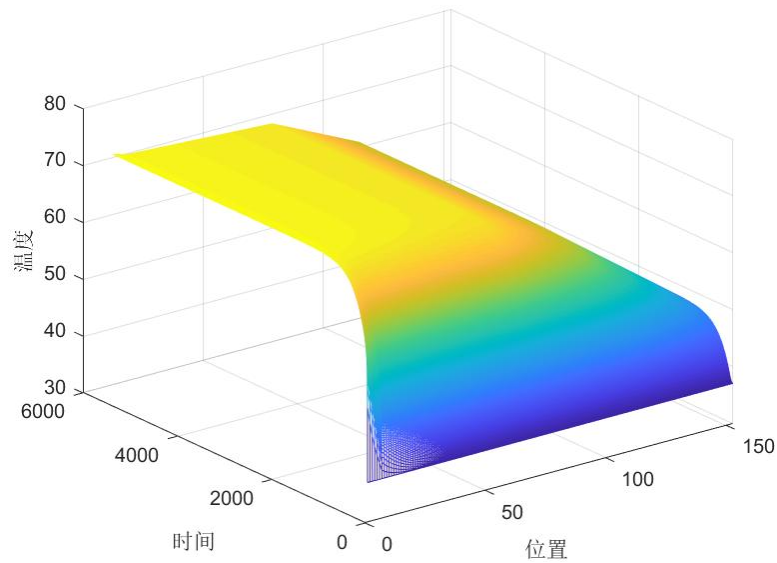


图 6：温度变化图

从上图可观察出，随着时间的增加，各个位置的温度都随之上升，直至从非稳态转变成稳态。且时间不变的情况下，随着位置增加，即越靠近内层皮肤，则温度越低。

其中，对 3000 秒下不同位置的温度进行分析，具体的不同位置温度变化图如下图所示：

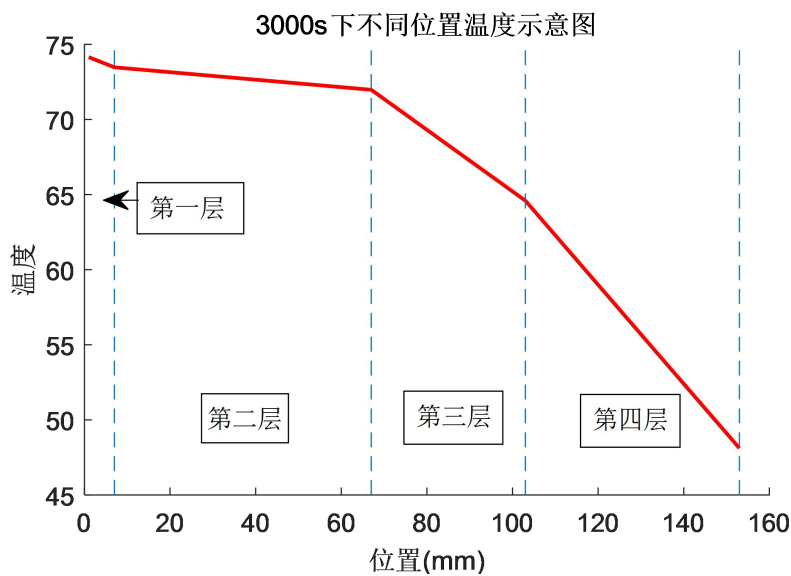


图 7：3000 秒下不同位置的的温度示意图

由上图可看出第 I 层最左侧温度小于  $75^{\circ}\text{C}$ ，且第 I 层和第 II 层温度都较高，且第 II 层温度下降的差别不大，而第 III 层和第 IV 层下降较快，结合每层的热传导率可知，热传导率越高该层能更快传递热量，而第 IV 层热传导率最低传递能量的能力较低，故随着位置的增加，温度下降越多。

## 5.2 问题 2：确定 II 层最优厚度

在本问中需根据附件所给专用服装材料的参数值和环境温度、服装层厚

度，对第Ⅱ层的最优厚度进行求解，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47℃，且超过 44℃的时间不超过 5 分钟。

### 5.2.1 确定目标

在满足工作时间 60 分钟时，假人皮肤外侧温度限制条件下，需确定第Ⅱ层的最优厚度，设  $d_2$  为防护服第Ⅱ层厚度，为了方便高温作业，需使第Ⅱ层厚度越小越好，故以第Ⅱ层厚度最小为目标，具体目标如下：

$$\text{Min} \quad Z = d_2$$

### 5.2.2 约束条件

根据题目要求和附件所给参数值和测量温度，为了更好地确定第Ⅱ层厚度，需对部分条件进行约束，部分 5.1 已有的约束条件不再赘述，其他具体约束条件如下：

#### (1) 皮肤外侧最高温度约束

根据题目要求，假人皮肤外侧温度不超过 47℃，设  $T(L, t_{\max})$  为最大时间假人外侧的假人温度，使皮肤外侧假人温度不超过 47℃，具体约束如下：

$$T(L, t_{\max}) \leq 47^\circ\text{C}$$

#### (2) 超过 44℃时间约束

超过 44℃的时间需受到限制，设  $T(L, t_1)$  为  $t_1$  时间下皮肤外侧温度，根据题目要求：在 60 分钟内超过 44℃时间不超过 5 分钟，具体约束如下：

$$T(L, t_1) = 44^\circ\text{C}$$

$$3600 - t_1 \leq 300$$

#### (3) 环境温度约束

环境温度会对防护服温度和人体皮肤温度造成影响，在本问中需满足当前环境温度为 65℃，设  $T_1^+$  为第一层最左侧温度，由于防护服最外侧与外界直接接触，故防护服最外侧与当前温度相同，具体约束如下：

$$T_1^+(x, t) \Big|_{x=0} = 65^\circ\text{C}, \quad t \in (0, 3600]$$

#### (4) IV层厚度约束

当第Ⅳ层的厚度已知情况下，设  $d_m$  为防护服第  $m$  层厚度，其中令  $m$  为 4，即为第Ⅳ层厚度，该厚度需满足为 5.5 mm，具体约束如下：

$$d_4 = 5.5$$



### 5.2.3 II层最优厚度模型的建立与求解

综合以上目标和约束条件，结合 5.1 建立的温度分布模型，可建立 II 层最优厚度模型，具体模型如下：

$$\begin{cases} \text{目标: } \min Z = d_2 \\ T(L, t_{\max}) \leq 47^\circ\text{C} \\ T(L, t_1) = 44^\circ\text{C} \\ 3600 - t_1 \leq 300 \\ -rT_{j-1}^{n+1} + (1+2r)T_j^{n+1} - rT_{j+1}^{n+1} = T_j^n \\ r = \frac{\lambda \Delta t}{c \rho \Delta x^2} \\ T_1^+(x, t)|_{x=0} = 65^\circ\text{C}, \quad t \in (0, 3600] \\ T_4^-(x, t)|_{t=0} = 37^\circ\text{C}, \quad x \in [0, L] \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = L \\ d_4 = 5.5 \\ T_m^- = T_{m+1}^+, \quad m = 1, 2, 3 \\ q_m^- = q_{m+1}^+, \quad m = 1, 2, 3 \end{cases}$$

### 5.2.4 具体结果

综上，将隐式差分、定解条件和约束条件进行联合，以第 II 层厚度最小为目标，对其进行求解即可得到各个时刻防护服各层温度分布情况，求解得到最小的第 II 层厚度  $17.7 \text{ mm}$ ，相应的温度变化图如下所示：

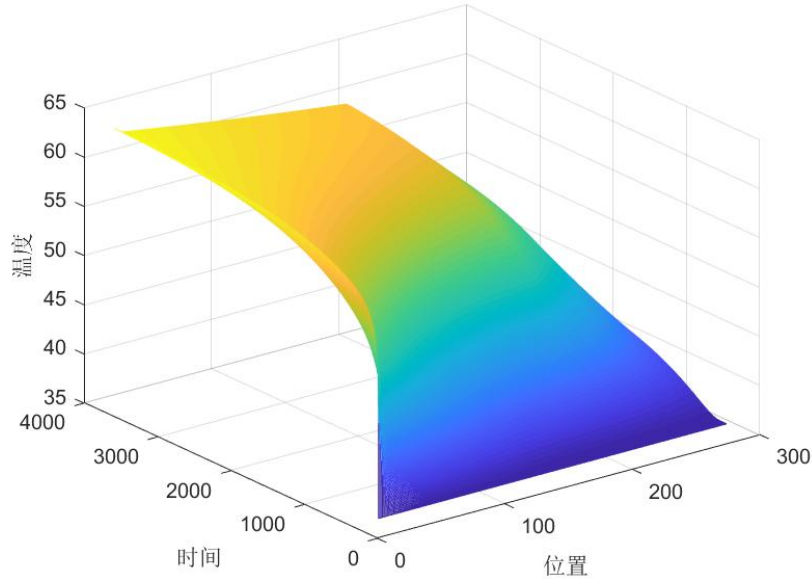


图 8：温度变化图

从上图可观察出，随着时间的增加，各个位置的温度都随之上升。且时间不变的情况下，随着位置增加，即越靠近内层皮肤，则温度越低。

60 分钟相应的皮肤外侧温度变化图如下图所示：

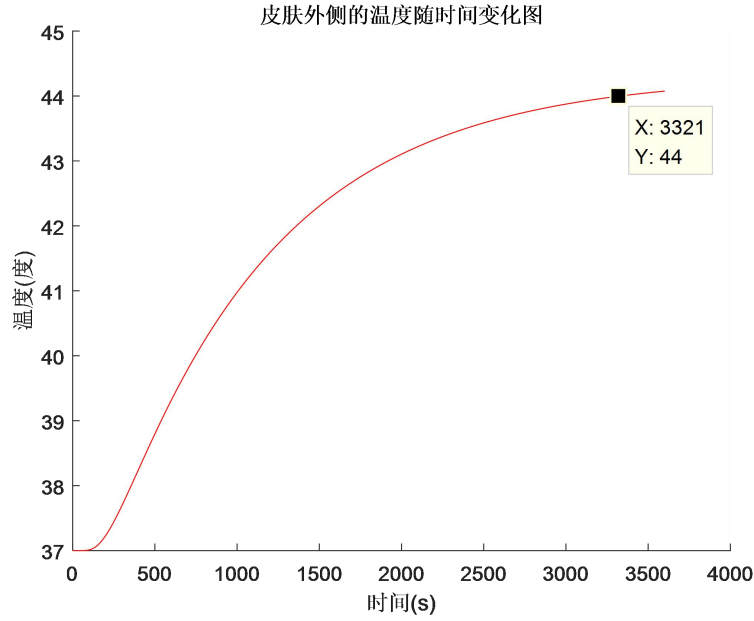


图 9：60 分钟皮肤外侧温度变化图

从上图可看出，直至 60 分钟皮肤外侧的温度都未超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间为 3321 秒，不超过 5 分钟，满足题目要求。

### 5.3 问题 3：确定 II 层和 IV 层最优厚度

在本问中需根据附件所给专用服装材料的参数值和环境温度、服装层厚度，对第 II 层和 IV 层的最优厚度进行求解，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

#### 5.3.1 确定目标

考虑经济因素，由于第 IV 层为空气间隙层，所花费的成本价格比第 II 层低，故考虑在满足条件情况下，第 IV 层越厚越好，而第 II 层越薄越好，设  $d_m$  为第  $m$  层厚度，具体目标如下所示：

$$Z = \{\max d_4, \min d_2\}$$

#### 5.3.2 约束条件

根据题目要求和附件所给参数值和测量温度，为了更好地确定第 II 层厚度，需对部分条件进行约束，部分 5.1 已有的约束条件不再赘述，其他具体约束条件如下：

##### (1) 皮肤外侧最高温度约束

根据题目要求，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，设  $T(L, t_{\max})$  为最大时间假人外侧的假人温度，使皮肤外侧假人温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，具体约束如下：

$$T(L, t_{\max}) \leq 47^{\circ}\text{C}$$

### (2) 超过 44℃ 时间约束

超过 44℃ 的时间需受到限制，设  $T(L, t_1)$  为  $t_1$  时间下皮肤外侧温度，根据题目要求：在 30 分钟内超过 44℃ 时间不超过 5 分钟，具体约束如下：

$$T(L, t_1) = 44^\circ\text{C}$$

$$1800 - t_1 \leq 300$$

### (3) 环境温度约束

环境温度会对防护服温度和人体皮肤温度造成影响，在本问中需满足当前环境温度为 80℃，设  $T_1^+$  为第一层最左侧温度，由于防护服最外侧与外界直接接触，故防护服最外侧与当前温度相同，具体约束如下：

$$T_1^+(x, t) \Big|_{x=0} = 80^\circ\text{C}, \quad t \in (0, 3600]$$

### 5.3.3 II 层和 IV 层最优厚度模型的建立与求解

综合以上目标和约束条件，结合 5.1 建立的温度分布模型，以 IV 层厚度最大 II 层厚度最小为目标，可建立 II 层和 IV 层最优厚度模型，具体模型如下：

$$\begin{cases} \text{目标: } Z = \{\max d_4, \min d_2\} \\ T(L, t_{\max}) \leq 47^\circ\text{C} \\ T(L, t_1) = 44^\circ\text{C} \\ 1800 - t_1 \leq 300 \\ T_1^+(x, t) \Big|_{x=0} = 80^\circ\text{C}, \quad t \in (0, 3600] \\ T_4^-(x, t) \Big|_{t=0} = 37^\circ\text{C}, \quad x \in [0, L] \\ -rT_{j-1}^{n+1} + (1+2r)T_j^{n+1} - rT_{j+1}^{n+1} = T_j^n \\ r = \frac{\lambda \Delta t}{c\rho \Delta x^2} \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = L \\ T_m^- = T_{m+1}^+, \quad m = 1, 2, 3 \\ q_m^- = q_{m+1}^+, \quad m = 1, 2, 3 \end{cases}$$

### 5.3.4 具体结果

综上，将隐式差分、定解条件和约束条件进行联合，以第 IV 层厚度最大 II 层厚度最小为目标，对其进行求解即可得到各个时刻防护服各层温度分布情况，求解得到最小的第 II 层厚度 19.2 mm，第 IV 层厚度为 6.4 mm，相应的温度变化图如下所示：

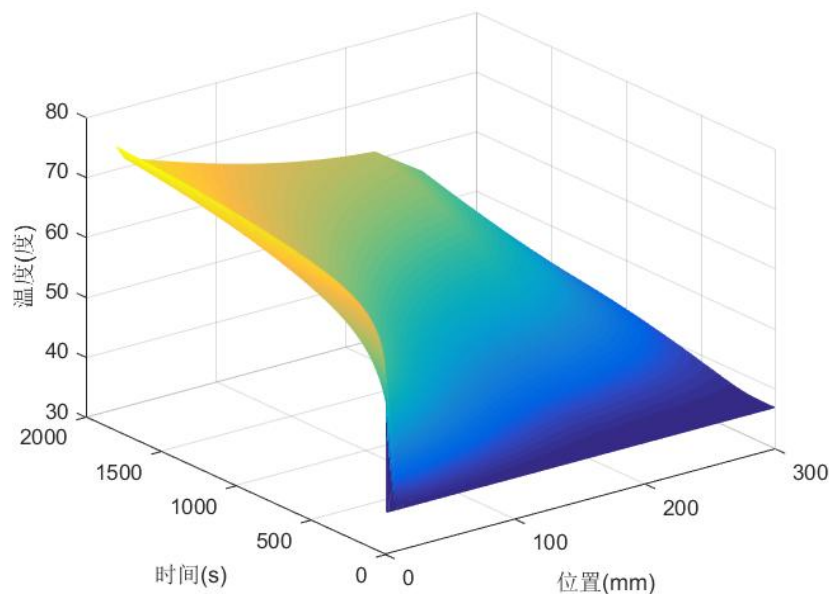


图 10：温度变化图

从上图可观察出，随着时间的增加，各个位置的温度都随之上升。且时间不变的情况下，随着位置增加，即越靠近内层皮肤，则温度越低。

30 分钟相应的皮肤外侧温度变化图如下图所示：

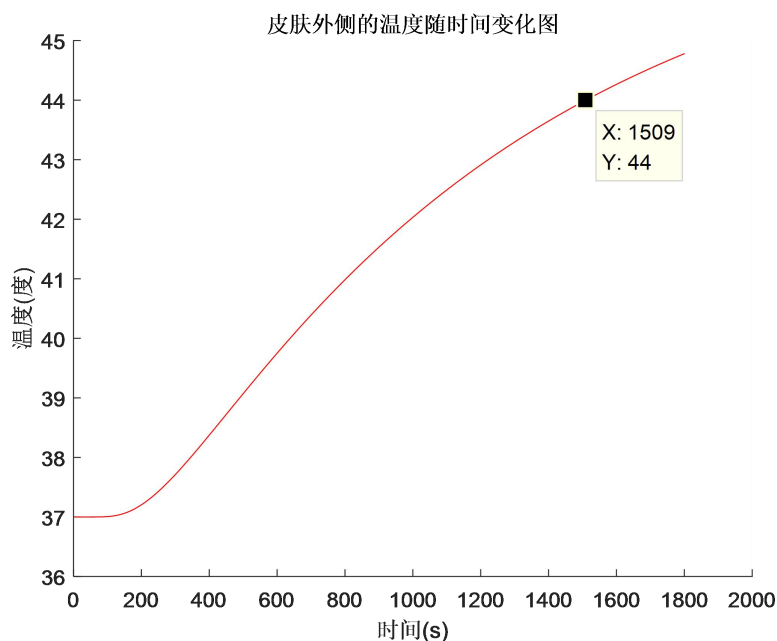


图 11：30 分钟皮肤外侧温度变化图

从上图可看出，直至 30 分钟皮肤外侧的温度都未超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间为 1509 秒，不超过 5 分钟，满足题目要求。

## 六、模型评价与推广

### 6.1 模型优点

- 1) 本模型满足专用服装材料的参数值和实验要求

- 2) 本模型使用最小二乘法对位置参数进行求解
- 3) 本模型考虑热对流

## 6.2 模型推广

本文针对在高温或超高温环境下的工作人员进行保护,避免热源对人体造成影响,符合现实中对高温防护服的设计。满足专用服装材料的参数值和相应的实验要求情况下,按照花费成本最低为目标,设计不同层的最优厚度。其中,对未知参数求解考虑第三类边界条件,使用最小二乘法进行拟合,求解出拟合效果最好的位置参数热交换系数。基本上解决了高温防护服设计的问题。运用本模型可最大程度上保证安全的情况下减小成本的花费,综上,本模型具有很大的推广价值。

## 七、参考文献

- [1]伯音,王聪,冯彦芳,等.基于冻土热传导方程解析解的相似准则研究[J/OL].长江科学院院报,1-8[2024-07-14].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1171.TV.20240624.1057.002.html>.
- [2]周露明,朱珍德,谢兴华,等.基于非傅里叶定律的近场动力学热力耦合模型及花岗岩热损伤破裂模拟[J/OL].岩土工程学报,1-10[2024-07-14].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1124.tu.20240228.1435.006.html>.
- [3]葛子进,张玺童,伍识诚.“热食助手”——基于牛顿冷却定律自然对流条件下的食物饮品降温模型[J].发明与创新(高中生),2024,(03):14-17.
- [4]胡希卓,徐诗,朱剑琴,等.第三类加热边界条件下超临界正癸烷的流动换热和热裂解特性研究[J/OL].推进技术,1-11[2024-07-14].<https://doi.org/10.13675/j.cnki.tjjs.2306061>.
- [5]解雯佳,黄忠亿.自适应隐式有限差分方法求解美式期权定价问题[J].计算数学,2023,45(03):284-298.

## 附录

### 一、支撑材料的文件列表

- 1、problem1.xlsx
- 2、最小二乘法.m
- 3、第一题.m
- 4、第二题.m
- 5、第三题.m

### 二、程序代码

- 1、最小二乘法.m

```
rho = [300, 862, 74.2, 1.18]; %密度
c = [1377, 2100, 1726, 1005]; %比热
k = [0.082, 0.37, 0.045, 0.028]; %热传导系数
data = xlsread('CUMCM-2018-Problem-A-Chinese-Appendix.xlsx', 2);
z = zeros(11,11);
%两个未知参数（需要估计）
for k_out = 100:110
    for k_skin = 8:0.1:9

d = [0.0006, 0.006, 0.0036, 0.005]; %每层的厚度
dt = 1; %温度步长
dx = 0.1 * 10^(-3); %距离步长

r1 = k(1) * dt / (c(1) * rho(1) * dx * dx);
r2 = k(2) * dt / (c(2) * rho(2) * dx * dx);
r3 = k(3) * dt / (c(3) * rho(3) * dx * dx);
r4 = k(4) * dt / (c(4) * rho(4) * dx * dx);

N = round(sum(d) / dx + 1);
A = zeros(N); %等式左边（中间变量矩阵）

%左边界条件
```

```
A(1, 1) = 1 + 2 * r1 + 2 * dx * k_out * r1 / k(1);
```

```
%第 I 层
```

```
A(1, 2) = -2 * r1;
```

```
d1 = round(d(1) / dx + 1); %步数
```

```
for i = 2 : d1 - 1
```

```
    A(i, i) = 1 + 2 * r1;
```

```
    A(i, i - 1) = -r1;
```

```
    A(i, i + 1) = -r1;
```

```
end
```

```
%第 I 层与第 II 层接触面
```

```
A(d1, d1 - 1) = -k(1) / dx;
```

```
A(d1, d1 + 1) = -k(2) / dx;
```

```
A(d1, d1) = -(A(d1, d1 - 1) + A(d1, d1 + 1));
```

```
%第 II 层
```

```
d2 = d1 + round(d(2) / dx);
```

```
for i = d1 + 1 : (d2 - 1)
```

```
    A(i, i) = 1 + 2 * r2;
```

```
    A(i, i - 1) = -r2;
```

```
    A(i, i + 1) = -r2;
```

```
end
```

```
%第 II 层与第 III 层接触面
```

```
A(d2, d2 - 1) = -k(2) / dx;
```

```
A(d2, d2 + 1) = -k(3) / dx;
```

```
A(d2, d2) = -(A(d2, d2 - 1) + A(d2, d2 + 1));
```

```
%第 III 层
```

```
d3 = d2 + round(d(3) / dx);
```

```
for i = d2 + 1 : (d3 - 1)
```

```
    A(i, i) = 1 + 2 * r3;
```

```
    A(i, i - 1) = -r3;
```

```

        A(i, i + 1) = -r3;
    end

    %第 III 层与第 IV 层接触面
    A(d3, d3 - 1) = -k(3) / dx;
    A(d3, d3 + 1) = -k(4) / dx;
    A(d3, d3) = -(A(d3, d3 - 1) + A(d3, d3 + 1));

    %第 IV 层
    d4 = d3 + round(d(4) / dx);
    for i = d3 + 1 : (d4 - 1)
        A(i, i) = 1 + 2 * r4;
        A(i, i - 1) = -r4;
        A(i, i + 1) = -r4;
    end

    %右边界条件
    A(d4, d4) = 1 + 2 * r4 + 2 * dx * k_skin * r4 / k(4);
    A(d4, d4 - 1) = -2 * r4;

    %温度
    U = zeros(5401, N);
    U(1, :) = 37;

    %解线性方程，求出温度
    for i = 1 : 5400
        b = U(i, :)';
        b(1) = b(1) + 2 * dx * k_out * 75 * r1 / k(1);
        b(N) = b(N) + 2 * dx * r4 * k_skin * 37 / k(4);
        b(d1) = 0;
        b(d2) = 0;
        b(d3) = 0;
        U(i + 1, :) = A \ b;
    end
end

```



```

        for i = 1:5401
            z(k_out-100+1,k_skin*10-80+1) = z(k_out-100+1,k_skin*10-80+1) +
            (data(i,2)-U(i,d4))^2;
        end
    end
end

```

```

    end
end

```

```

figure
mesh(z)
xlabel('k_out');
ylabel('k_skin');

```

```

zlabel('方差');

```

2、问题二.m

```

rho = [300, 862, 74.2, 1.18]; %密度
c = [1377, 2100, 1726, 1005]; %比热
k = [0.082, 0.37, 0.045, 0.028]; %热传导系数

```

%两个未知参数（需要估计）

```

k_out = 108;
k_skin = 8.3;%14.2;

```

```

d = [0.0006, 0.006, 0.0036, 0.005]; %每层的厚度
dt = 1; %温度步长
dx = 0.1 * 10^(-3); %距离步长

```

```

r1 = k(1) * dt / (c(1) * rho(1) * dx * dx);
r2 = k(2) * dt / (c(2) * rho(2) * dx * dx);
r3 = k(3) * dt / (c(3) * rho(3) * dx * dx);
r4 = k(4) * dt / (c(4) * rho(4) * dx * dx);

```

```

N = round(sum(d) / dx + 1);
A = zeros(N); %等式左边（中间变量矩阵）

%左边界条件
A(1, 1) = 1 + 2 * r1 + 2 * dx * k_out * r1 / k(1);

%第 I 层
A(1, 2) = -2 * r1;
d1 = round(d(1) / dx + 1); %步数
for i = 2 : d1 - 1
    A(i, i) = 1 + 2 * r1;
    A(i, i - 1) = -r1;
    A(i, i + 1) = -r1;
end

%第 I 层与第 II 层接触面
A(d1, d1 - 1) = -k(1) / dx;
A(d1, d1 + 1) = -k(2) / dx;
A(d1, d1) = -(A(d1, d1 - 1) + A(d1, d1 + 1));

%第 II 层
d2 = d1 + round(d(2) / dx);
for i = d1 + 1 : (d2 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r2;
    A(i, i - 1) = -r2;
    A(i, i + 1) = -r2;
end

%第 II 层与第 III 层接触面
A(d2, d2 - 1) = -k(2) / dx;
A(d2, d2 + 1) = -k(3) / dx;
A(d2, d2) = -(A(d2, d2 - 1) + A(d2, d2 + 1));

```

```

%第 III 层
d3 = d2 + round(d(3) / dx);
for i = d2 + 1 : (d3 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r3;
    A(i, i - 1) = -r3;
    A(i, i + 1) = -r3;
end

%第 III 层与第 IV 层接触面
A(d3, d3 - 1) = -k(3) / dx;
A(d3, d3 + 1) = -k(4) / dx;
A(d3, d3) = -(A(d3, d3 - 1) + A(d3, d3 + 1));

%第 IV 层
d4 = d3 + round(d(4) / dx);
for i = d3 + 1 : (d4 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r4;
    A(i, i - 1) = -r4;
    A(i, i + 1) = -r4;
end

%右边界条件
A(d4, d4) = 1 + 2 * r4 + 2 * dx * k_skin * r4 / k(4);
A(d4, d4 - 1) = -2 * r4;

%温度
U = zeros(5401, N);
U(1, :) = 37;

%解线性方程，求出温度
for i = 1 : 5400
    b = U(i, :);
    b(1) = b(1) + 2 * dx * k_out * 75 * r1 / k(1);
    b(N) = b(N) + 2 * dx * r4 * k_skin * 37 / k(4);

```

```

        b(d1) = 0;
        b(d2) = 0;
        b(d3) = 0;
        U(i + 1, :) = A \ b;
    end

```

```

data = xlsread('CUMCM-2018-Problem-A-Chinese-Appendix.xlsx', 2);
figure
t = data(:, 1);
plot(t, data(:, 2))
xlabel('时间');
ylabel('温度');
hold on
plot(t, U(:, d4), 'r')
legend('标准数据', '测试数据');

```

```

figure
mesh(U)
xlabel('位置');
ylabel('时间');
zlabel('温度');
xlswrite('problem1.xlsx', U);

```

### 3、问题二.m

```

rho = [300, 862, 74.2, 1.18]; %密度
c = [1377, 2100, 1726, 1005]; %比热
k = [0.082, 0.37, 0.045, 0.028]; %热传导系数
kd = 1 ;
for k_d2 = 0.0006:0.0001:0.025

    k_out = 108;
    k_skin = 8.3;

    d = [0.0006, k_d2, 0.0036, 0.0055]; %每层的厚度
    dt = 1; %温度步长

```

```

dx = 0.1 * 10^(-3); %距离步长

r1 = k(1) * dt / (c(1) * rho(1) * dx * dx);
r2 = k(2) * dt / (c(2) * rho(2) * dx * dx);
r3 = k(3) * dt / (c(3) * rho(3) * dx * dx);
r4 = k(4) * dt / (c(4) * rho(4) * dx * dx);

N = round(sum(d) / dx + 1);
A = zeros(N); %等式左边（中间变量矩阵）

%左边界条件
A(1, 1) = 1 + 2 * r1 + 2 * dx * k_out * r1 / k(1);

%第 I 层
A(1, 2) = -2 * r1;
d1 = round(d(1) / dx + 1); %步数
for i = 2 : d1 - 1
    A(i, i) = 1 + 2 * r1;
    A(i, i - 1) = -r1;
    A(i, i + 1) = -r1;
end

%第 I 层与第 II 层接触面
A(d1, d1 - 1) = -k(1) / dx;
A(d1, d1 + 1) = -k(2) / dx;
A(d1, d1) = -(A(d1, d1 - 1) + A(d1, d1 + 1));

%第 II 层
d2 = d1 + round(d(2) / dx);
for i = d1 + 1 : (d2 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r2;
    A(i, i - 1) = -r2;
    A(i, i + 1) = -r2;
end

```

```

%第 II 层与第 III 层接触面
A(d2, d2 - 1) = -k(2) / dx;
A(d2, d2 + 1) = -k(3) / dx;
A(d2, d2) = -(A(d2, d2 - 1) + A(d2, d2 + 1));

%第 III 层
d3 = d2 + round(d(3) / dx);
for i = d2 + 1 : (d3 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r3;
    A(i, i - 1) = -r3;
    A(i, i + 1) = -r3;
end

%第 III 层与第 IV 层接触面
A(d3, d3 - 1) = -k(3) / dx;
A(d3, d3 + 1) = -k(4) / dx;
A(d3, d3) = -(A(d3, d3 - 1) + A(d3, d3 + 1));

%第 IV 层
d4 = d3 + round(d(4) / dx);
for i = d3 + 1 : (d4 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r4;
    A(i, i - 1) = -r4;
    A(i, i + 1) = -r4;
end

%右边界条件
A(d4, d4) = 1 + 2 * r4 + 2 * dx * k_skin * r4 / k(4);
A(d4, d4 - 1) = -2 * r4;

%温度
U = zeros(3601, N);
U(1, :) = 37;

```

```

%解线性方程， 求出温度
for i = 1 : 3600
    b = U(i, :)' ;
    b(1) = b(1) + 2 * dx * k_out * 65 * r1 / k(1);
    b(N) = b(N) + 2 * dx * r4 * k_skin * 37 / k(4);
    b(d1) = 0;
    b(d2) = 0;
    b(d3) = 0;
    U(i + 1, :) = A \ b;
end
sum_ = 0;
for i = 1:3601
    if U(i,d4) > 44.0000
        sum_ = sum_ + 1;
    end
end
if sum_ <= 300
    kd = min(k_d2,kd);
    break;
end
end
k_d2 = kd;

%%%%%%%%%%%%%%

k_out = 108;
k_skin = 8.3;

d = [0.0006, k_d2, 0.0036, 0.0055]; %每层的厚度
dt = 1; %温度步长
dx = 0.1 * 10^(-3); %距离步长

```

```

r1 = k(1) * dt / (c(1) * rho(1) * dx * dx);
r2 = k(2) * dt / (c(2) * rho(2) * dx * dx);
r3 = k(3) * dt / (c(3) * rho(3) * dx * dx);
r4 = k(4) * dt / (c(4) * rho(4) * dx * dx);

N = round(sum(d) / dx + 1);
A = zeros(N); %等式左边（中间变量矩阵）

%左边界条件
A(1, 1) = 1 + 2 * r1 + 2 * dx * k_out * r1 / k(1);

%第 I 层
A(1, 2) = -2 * r1;
d1 = round(d(1) / dx + 1); %步数
for i = 2 : d1 - 1
    A(i, i) = 1 + 2 * r1;
    A(i, i - 1) = -r1;
    A(i, i + 1) = -r1;
end

%第 I 层与第 II 层接触面
A(d1, d1 - 1) = -k(1) / dx;
A(d1, d1 + 1) = -k(2) / dx;
A(d1, d1) = -(A(d1, d1 - 1) + A(d1, d1 + 1));

%第 II 层
d2 = d1 + round(d(2) / dx);
for i = d1 + 1 : (d2 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r2;
    A(i, i - 1) = -r2;
    A(i, i + 1) = -r2;
end

%第 II 层与第 III 层接触面

```



```

A(d2, d2 - 1) = -k(2) / dx;
A(d2, d2 + 1) = -k(3) / dx;
A(d2, d2) = -(A(d2, d2 - 1) + A(d2, d2 + 1));

```

%第 III 层

```

d3 = d2 + round(d(3) / dx);
for i = d2 + 1 : (d3 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r3;
    A(i, i - 1) = -r3;
    A(i, i + 1) = -r3;
end

```

%第 III 层与第 IV 层接触面

```

A(d3, d3 - 1) = -k(3) / dx;
A(d3, d3 + 1) = -k(4) / dx;
A(d3, d3) = -(A(d3, d3 - 1) + A(d3, d3 + 1));

```

%第 IV 层

```

d4 = d3 + round(d(4) / dx);
for i = d3 + 1 : (d4 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r4;
    A(i, i - 1) = -r4;
    A(i, i + 1) = -r4;
end

```

%右边界条件

```

A(d4, d4) = 1 + 2 * r4 + 2 * dx * k_skin * r4 / k(4);
A(d4, d4 - 1) = -2 * r4;

```

%温度

```

U = zeros(3601, N);
U(1, :) = 37;

```

%解线性方程，求出温度

```

for i = 1 : 3600
    b = U(i, :);
    b(1) = b(1) + 2 * dx * k_out * 65 * r1 / k(1);
    b(N) = b(N) + 2 * dx * r4 * k_skin * 37 / k(4);
    b(d1) = 0;
    b(d2) = 0;
    b(d3) = 0;
    U(i + 1, :) = A \ b;
end

```

```

t = 1:3601;
xlabel('时间(s)');
ylabel('温度(度)');
title('皮肤外侧的温度随时间变化图');
hold on
plot(t, U(:, d4), 'r')
%{
figure
mesh(U)
xlabel('位置');
ylabel('时间');
zlabel('温度');
%}

```

#### 4、问题三.m

```

rho = [300, 862, 74.2, 1.18]; %密度
c = [1377, 2100, 1726, 1005]; %比热
k = [0.082, 0.37, 0.045, 0.028]; %热传导系数
kd = 1;
for k_d2 = 0.0006:0.0001:0.025

    k_out = 108;
    k_skin = 8.3;

```

```
d = [0.0006, k_d2, 0.0036, 0.0064]; %每层的厚度
```

```
dt = 1; %温度步长
```

```
dx = 0.1 * 10^(-3); %距离步长
```

```
r1 = k(1) * dt / (c(1) * rho(1) * dx * dx);
```

```
r2 = k(2) * dt / (c(2) * rho(2) * dx * dx);
```

```
r3 = k(3) * dt / (c(3) * rho(3) * dx * dx);
```

```
r4 = k(4) * dt / (c(4) * rho(4) * dx * dx);
```

```
N = round(sum(d) / dx + 1);
```

```
A = zeros(N); %等式左边（中间变量矩阵）
```

```
%左边界条件
```

```
A(1, 1) = 1 + 2 * r1 + 2 * dx * k_out * r1 / k(1);
```

```
%第 I 层
```

```
A(1, 2) = -2 * r1;
```

```
d1 = round(d(1) / dx + 1); %步数
```

```
for i = 2 : d1 - 1
```

```
    A(i, i) = 1 + 2 * r1;
```

```
    A(i, i - 1) = -r1;
```

```
    A(i, i + 1) = -r1;
```

```
end
```

```
%第 I 层与第 II 层接触面
```

```
A(d1, d1 - 1) = -k(1) / dx;
```

```
A(d1, d1 + 1) = -k(2) / dx;
```

```
A(d1, d1) = -(A(d1, d1 - 1) + A(d1, d1 + 1));
```

```
%第 II 层
```

```
d2 = d1 + round(d(2) / dx);
```

```
for i = d1 + 1 : (d2 - 1)
```

```
    A(i, i) = 1 + 2 * r2;
```

```

    A(i, i - 1) = -r2;
    A(i, i + 1) = -r2;
end

%第 II 层与第 III 层接触面
A(d2, d2 - 1) = -k(2) / dx;
A(d2, d2 + 1) = -k(3) / dx;
A(d2, d2) = -(A(d2, d2 - 1) + A(d2, d2 + 1));

%第 III 层
d3 = d2 + round(d(3) / dx);
for i = d2 + 1 : (d3 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r3;
    A(i, i - 1) = -r3;
    A(i, i + 1) = -r3;
end

%第 III 层与第 IV 层接触面
A(d3, d3 - 1) = -k(3) / dx;
A(d3, d3 + 1) = -k(4) / dx;
A(d3, d3) = -(A(d3, d3 - 1) + A(d3, d3 + 1));

%第 IV 层
d4 = d3 + round(d(4) / dx);
for i = d3 + 1 : (d4 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r4;
    A(i, i - 1) = -r4;
    A(i, i + 1) = -r4;
end

%右边界条件
A(d4, d4) = 1 + 2 * r4 + 2 * dx * k_skin * r4 / k(4);
A(d4, d4 - 1) = -2 * r4;

```

```

%温度
U = zeros(1801, N);
U(1, :) = 37;

%解线性方程， 求出温度
for i = 1 : 1800
    b = U(i, :)' ;
    b(1) = b(1) + 2 * dx * k_out * 80 * r1 / k(1);
    b(N) = b(N) + 2 * dx * r4 * k_skin * 37 / k(4);
    b(d1) = 0;
    b(d2) = 0;
    b(d3) = 0;
    U(i + 1, :) = A \ b;
end
sum_ = 0;
for i = 1:1801
    if U(i,d4) > 44
        sum_ = sum_ + 1;
    end
end
if sum_ <= 300
    kd = min(k_d2,kd);
    break;
end
end
k_d2 = kd;

%%%%%%%%%%
k_out = 108;
k_skin = 8.3;

d = [0.0006, k_d2, 0.0036, 0.0064]; %每层的厚度
dt = 1; %温度步长
dx = 0.1 * 10^(-3); %距离步长

```

```

r1 = k(1) * dt / (c(1) * rho(1) * dx * dx);
r2 = k(2) * dt / (c(2) * rho(2) * dx * dx);
r3 = k(3) * dt / (c(3) * rho(3) * dx * dx);
r4 = k(4) * dt / (c(4) * rho(4) * dx * dx);

N = round(sum(d) / dx + 1);
A = zeros(N); %等式左边（中间变量矩阵）

%左边界条件
A(1, 1) = 1 + 2 * r1 + 2 * dx * k_out * r1 / k(1);

%第 I 层
A(1, 2) = -2 * r1;
d1 = round(d(1) / dx + 1); %步数
for i = 2 : d1 - 1
    A(i, i) = 1 + 2 * r1;
    A(i, i - 1) = -r1;
    A(i, i + 1) = -r1;
end

%第 I 层与第 II 层接触面
A(d1, d1 - 1) = -k(1) / dx;
A(d1, d1 + 1) = -k(2) / dx;
A(d1, d1) = -(A(d1, d1 - 1) + A(d1, d1 + 1));

%第 II 层
d2 = d1 + round(d(2) / dx);
for i = d1 + 1 : (d2 - 1)
    A(i, i) = 1 + 2 * r2;
    A(i, i - 1) = -r2;
    A(i, i + 1) = -r2;
end

```

%第 II 层与第 III 层接触面

$A(d2, d2 - 1) = -k(2) / dx;$

$A(d2, d2 + 1) = -k(3) / dx;$

$A(d2, d2) = -(A(d2, d2 - 1) + A(d2, d2 + 1));$

%第 III 层

$d3 = d2 + \text{round}(d(3) / dx);$

for  $i = d2 + 1 : (d3 - 1)$

$A(i, i) = 1 + 2 * r3;$

$A(i, i - 1) = -r3;$

$A(i, i + 1) = -r3;$

end

%第 III 层与第 IV 层接触面

$A(d3, d3 - 1) = -k(3) / dx;$

$A(d3, d3 + 1) = -k(4) / dx;$

$A(d3, d3) = -(A(d3, d3 - 1) + A(d3, d3 + 1));$

%第 IV 层

$d4 = d3 + \text{round}(d(4) / dx);$

for  $i = d3 + 1 : (d4 - 1)$

$A(i, i) = 1 + 2 * r4;$

$A(i, i - 1) = -r4;$

$A(i, i + 1) = -r4;$

end

%右边界条件

$A(d4, d4) = 1 + 2 * r4 + 2 * dx * k\_skin * r4 / k(4);$

$A(d4, d4 - 1) = -2 * r4;$

%温度

$U = \text{zeros}(1801, N);$

$U(1, :) = 37;$

```

%解线性方程， 求出温度
for i = 1 : 1800
    b = U(i, :)';
    b(1) = b(1) + 2 * dx * k_out * 80 * r1 / k(1);
    b(N) = b(N) + 2 * dx * r4 * k_skin * 37 / k(4);
    b(d1) = 0;
    b(d2) = 0;
    b(d3) = 0;
    U(i + 1, :) = A \ b;
end

t = 1:1801;
xlabel('时间(s)');
ylabel('温度(度)');
title('皮肤外侧的温度随时间变化图');
hold on
plot(t, U(:, d4), 'r')

```