露天矿生产的车辆安排

【摘要】

本文主要对露天矿生产进行车辆安排，整个生产过程由铲车装车及卡车运输组成。根据附件中给出的品位限制、卡车载重及时速、各卸点一个班次的产量要求、装车及卸车时间、各铲位到各卸点之间的距离、各铲位岩石和矿石量及矿石的平均铁含量等因素，以提高铲车和卡车的利用率从而增加露天矿的经济效益为目标，分别考虑两条原则，建立数学模型。

针对原则一:首先，本文考虑总运量（吨公里）最小，同时出动最少的卡车，需要通过**二次优化**，先求出 20 辆卡车和 7 辆铲车情况下的总运量最小值。根据题目给出的铲位到卸点的距离矩阵，可以设立铲位到卸点运输次数的整形变量，结合所有卸点的产量要求以及矿石卸点的品味限制，建立关于铲位到卸点的运输次数整数线性规划数学模型，利用*Lingo*求解。得到最小总运量为 85628.62 吨公里。然后考虑车辆行驶时间，将题目给出的路程矩阵和速度通过物理公式转换为时间矩阵。设立每个卡车从铲位到卸点运输次数的三维整形变量和是否使用该卡车的“0-1”变量，建立“0-1”变量优化数学模型；根据第一步求解的总运量为已知条件，利用*Lingo*求解。求得最少需要 13 辆卡车。

针对原则二:首先，本文考虑利用已有车辆，求总产能最大，同时岩石产能最大，满足上述情况下满足总运量最大，需要通过三次优化，先求出 20 辆卡车和 7 辆铲车情况下，总产能的最大值。因为需要考虑卡车不等待问题，分别考虑卸点、铲点以及每个道路在一个班次内的卡车最大容载量，建立道路能力约束条件相关的**车流量饱和度**数学模型。利用*Lingo*求解。解得为 101948 吨。然后将求得的总产能的最大值为总产能的固定值为约束求岩石产量最大，求得最大岩石产量为 38654 吨。最后更具总产能的最大值为总产能的固定值以及求得的岩石产量为固定值求总运量最小，求得最小总运量为 159901 吨公里

关键词：车流量饱和度 二次优化 “0-1”变量

一、问题重述

1.1 引言

我国国土辽阔，矿产资源丰富，近几年来，国家大力鼓励发展工业，全国各地发展迅速，矿产资源消耗较大，尤其是铁矿，铁矿是钢铁工业的主要原料。现如今，铁矿主要由露天矿进行开采，整个生产过程主要由铲车装车和卡车运输到卸点进行卸车完成，这个过程中如何提高经济效益成为最重要的问题之一。

在露天矿中，每个铲位根据铁含量将石料分成矿石和岩石，不同的卸点要求的石料不同，在满足一个班次内各卸点的产量要求的情况下，提高铲车和卡车的利用率，从而提高经济效益。

1.2 问题提出

根据附件中给出的两个原则，分别建立数学模型，针对以下的实例，给出相应的生产计划、总运量、岩石和矿石产量。

露天矿铲位 10 个，卸点 5 个，铲车 7 台，卡车 20 辆，其中一个班次各卸点的产量要求：矿石漏、倒装场Ⅰ、倒装场Ⅱ分别需要的矿石数量分别为 1.2 万吨、1.3 万吨、1.3 万吨，岩石漏、岩场分别需要的岩石数量分别为 1.9 万吨、1.3 万吨。

问题一：考虑原则一的情况下，总运量最小；在总运量最小的前提下，出动最少的卡车数量

问题二：考虑原则二的情况下，利用现有的 20 辆卡车，从而获得最大的产量，其中岩石量优先且在产量相同时取总运量最小解

根据以上的两个问题，结合附件中所给的各种数据和条件，给出一个班次的生产计划：出动的铲车数量，各铲车分别位于哪些铲位上；出动的卡车数量，各卡车分别在哪些路线上各运输几次；以及相应的总运量、岩石和矿石产量。

二、问题分析

本题主要对露天矿的生产进行车辆安排，分别针对两个原则，分别建立数学模型，针对实例给出相应的生产计划、总运量、岩石和矿石产量。针对原则一，在满足各卸点生产要求、各铲位的矿石和岩石量及矿石卸点的品位限制的情况下，使总运量最小。在总运量最小的前提下，考虑出动最少的卡车，从而使得运输成本最小；针对原则二，仅使用现有的 20 辆卡车，获得最大的产量。

2.1 问题 1 分析

考虑原则一的情况下，分别对总运量最小和总运量最小下的运输成本最小建立数学模型，具体分析如下：

（1）总运量最小

在考虑原则一的情况下，满足附件中所给条件，以总运量最小为目标，建立数学模型，解决该问题，主要从以下几个方面进行考虑：

① 为了满足卡车不等待，各铲位和卸点的能力有限，铲位完成一次装车和卸点完成一次卸车需要时间，为了使卡车不进行等待，则需根据铲位装车能力和卸点卸车能力，分别计算出各铲位和卸点的最大工作次数。

② 为了满足产量和品位要求，卡车从各铲位运输到卸点的矿石或岩石量应满足该卸点的矿石或岩石要求量，若为卸矿石的卸点，则还需考虑品位限制。

③ 铲位石料有限的情况下，不能允许卡车无限地从铲位运输石料，且各铲位石料数量已知，应对从铲位拉出的石料数量进行限制。

（2）总运量最小情况下，运输成本最小

总运量最小的前提下，以出动最少的卡车数量最少为目标，建立数学模型，并给出相应的生产计划、总运量、岩石和矿石产量，解决该问题，需着重从以下几个方面进行考虑：

① 满足总运量最小，需根据总运量最小模型解出的最大运输次数，对卡车从铲位到卸点运输的次数进行限制。

② 卡车能力和数量限制，在一个班次内，每辆卡车所能工作的次数是一定的，需确保每辆卡车在一个班次内从铲位到卸点工作的时间应不大于一个班次的时间，且工作的卡车数量也不能超过露天矿拥有的卡车数量。

2.2 问题 2 分析

在考虑原则二的情况下，满足附件中所给条件，仅使用现有的车辆进行运输，分别以获得最大产量和最大产量下的总运量最小为目标，建立数学模型，并给出相应的生产计划、总运量、岩石和矿石产量，具体分析如下：

（1）最大产量

在考虑原则二的情况下，满足附件中所给条件，以最大产量为目标，建立数学模型，解决该问题，主要从以下几个方面进行考虑：

① 为了满足卡车不等待，需根据铲位装车能力和卸点卸车能力，分别计算出车辆在各铲位和卸点能工作的最大次数。

② 为了满足产量和品位要求，在满足从各铲位运输去卸点的矿石或岩

石的量不超过该铲位拥有的数量前提下，每辆卡车从各铲位运输到卸点的矿石或岩石量应满足该卸点的矿石或岩石要求量，若为卸矿石的卸点，则还需考虑一个班次车辆运输石料到卸点的品位限制。

③ 卡车能力、卡车和铲车数量限制，在一个班次内，每辆卡车所能工作的次数是一定的，需确保每辆卡车在一个班次内从铲位到卸点工作的时间应不大于一个班次的时间，且工作的卡车和铲车数量也不能超过露天矿拥有的卡车和铲车数量。

（2）最大产量下的总运量最小

最大产量的前提下，以总运量最小为目标，建立数学模型，并给出相应的生产计划、总运量、岩石和矿石产量，解决该问题，需着重从以下几个方面进行考虑：

① 满足最大产量，需根据最大产量模型求解出最大产量，并对各卡车从各铲位到各卸点运输的总产量进行限制。

② 满足最大岩石产量，在最大产量基础上，得出最大的岩石数量，并对各卡车从各铲位到两个岩石卸点运输的岩石数量进行限制。

三、符号说明

符号	描述说明
f_i	“0-1”变量，第i各铲位是否存在铲车
g_k	“0-1”变量，第k辆卡车是否出动
p_i	第i个铲位的矿石品味
b_i	第i个铲位中的最大矿石含量
w_i	第i个铲位中的最大岩石含量
d_{ij}	第i个铲位到第j个卸点的距离
s_j	第j个卸点一个班次的最低产量要求
x_{ij}	从第i个铲位到第j个卸点的运输次数
t_{ij}	卡车在第i个铲位铲位到第j个卸点之间通行一次所需时间
y_{ijk}	第k辆卡车从第i个铲位到第j个卸点的运输次数
Q_{ijk}	第k辆卡车在第i个铲位到第j个卸点的运输次数

四、模型假设

1、假设在铲位和卸点上岩石和矿石不发生损坏

2、假设在运输途中岩石和矿石不发生耗损

3、假设矿石的平均铁含量测量无误

4、假设各个铲位、卸点及卡车工位上不会出现无人的情况

五、模型建立与求解

针对一个班次的生产计划满足在卡车不等待条件下满足产量和品位的要求情况下，分别考虑两条原则，以增加露天矿经济效益为目标，建立数学模型，利用 *Lingo* 进行求解，并给出最优的生产计划以及相应的总运量及岩石和矿石产量。

5.1 问题 1 ：原则一

在本问中，考虑在原则一的情况下，且在卡车不等待条件下满足产量和品位要求，分别以总运量最小和总运量最小情况下出动最少卡车为目标，建立数学模型，利用 *Lingo* 求解，给出相应的电铲和卡车安排、岩石和矿石产量以及相应的总产量。

5.1.1 总运量最小计划

根据附件所给的条件和相应的数据，在满足各卡车不等待前提下满足产量和品位要求，并且考虑原则一情况下，以总运量最小为目标，建立数学模型。

5.1.1.1 确定目标

根据题目要求，为了满足卡车不等待条件下满足产量和品位要求情况下，以总运量最小为目标。设 x_{ij} 为从第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数，d_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点的距离。各铲位到各卸点的次数乘相应的距离总和，由于每辆卡车满载 154 吨，则再与载重量相乘，则得到总运量，使总运量最小，具体目标如下：

$$Min = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}\mathrm{d}_{ij}$$

5.1.1.2 约束条件

根据附件中所给条件和相应数据基础上，为了满足卡车在不等待条件下满足产量和品位要求，且以总运量最小为目标，需要对各个条件进行如下约束：

（1）“0-1”变量的约束

由于铲车数量有限，故应对铲位是否拥有铲车进行限制，可设 f_i 进行“0-1”约束，当 f_i 为 1 时表示第 i 个铲位存在铲车，当 f_i 为 0 时表示第 i 个铲位不存在铲车，具体约束如下：

$$f_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

（2）矿石卸点的品位约束

根据矿石卸点需要的铁含量为 28.5%—30.5%，结合附件中给出的各铲位的平均含铁量。设 p_i 为第 i 个铲位的平均铁含量，x_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数。卸点 1，2，3 为卸矿石的卸点，需要对其品位进行限制，将各铲位的含铁量乘相应运输到该卸点的矿石量，比上从各个铲位运输到该卸点的矿石量，即为每个卸点一个班次的品位限制，该品位要满足 28.5%—30.5%。

$$28.5\% \le \frac{154\sum_{i=1}^{10} p_i x_{ij}}{154\sum_{i=1}^{10} x_{ij}} \le 30.5\% \qquad j = 1,2,3$$

（3）铲位、卸点能力约束

为了满足卡车不等待，在一个班次内卡车去到各铲位的次数应受到约束。设 x_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数，由于每个铲车的装车时间为 5 分钟，在 8 小时内，每次装车至少相隔 5 分钟，则次数应不大于 480/5=96 次，具体约束如下：

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 96 \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

一个班次内卡车不仅受到铲位能力的限制，也与各卸点的卸货的次数有关。设 x_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数，每个卸点卡车卸车时间为 3 分钟，在 8 小时内，未避免等待，每次卸车至少相隔 3 分钟，则次数应不大于 480/3=160 次，具体约束如下：

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \le 160 \qquad j = 1,2,..,5$$

（4）铲位石料约束

为了使卡车从矿石铲位运输的矿石数量不能超过该铲位拥有的矿石数量，需要对其运输出的矿石数量进行限制。设 b_i 为第 i 个铲位最大矿石数量，

f_i为第i个铲位是否存在铲车，x_{ij}为第i个铲位到第j个卸点的运输次数，。若第i个铲位存在铲车，则从第i个铲位运输给卸矿石卸点 1、2、3 的总矿石量应不大于该铲位点的最大矿石数量；若第i个铲位不存在铲车，则无法从该铲位运输矿石，具体约束如下：

$$154\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le b_i f_i \qquad i=1,2,...,10$$

为了使卡车从岩石铲位运输的岩石数量不能超过该铲位拥有的岩石数量，需要对其运输出的岩石数量进行限制。设b_i为第i个铲位最大岩石数量，f_i为第i个铲位是否存在铲车，x_{ij}为第i个铲位到第j个卸点的运输次数，。若第i个铲位存在铲车，则从第i个铲位运输给卸岩石卸点 4、5 的总岩石量应不大于该铲位点的最大岩石数量；若第i个铲位不存在铲车，则无法从该铲位运输岩石，具体约束如下：

$$154\sum_{j=4}^{5} x_{ij} \le w_i f_i \qquad i=1,2,...,10$$

（5）卸点产量约束

根据题目要求，一个班次内卡车从各铲位运输到卸点的总石料需满足该卸点的产量要求。设s_j为第j个卸点一个班次的最低产量要求，x_{ij}为第i个铲位到第j个卸点的运输次数，对于每个卸点，从各个铲位运输过来的石料之和应不小于该卸点的产量要求，具体约束如下：

$$154\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \ge s_j \qquad j=1,2,...,5$$

（6）铲车数量约束

在该露天矿中仅有 7 台铲车，而铲位拥有 10 个，为了避免铲位不存在铲车的情况下，卡车去往该铲车进行运输，则需对铲位是否拥有铲车进行限制。设f_i为第i个铲位是否存在铲车，各铲位拥有的铲车之和应不大于 7，具体约束如下：

$$\sum_{i=1}^{10} f_i \le 7$$

5.1.1.3 总运量最小模型的建立与求解

综合以上的目标模型和约束条件分析，以总运量最小为目标，建立数学模型，具体模型如下：

$$目标：\quad Min = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}\mathrm{d}_{ij}$$

$$\begin{cases}
28.5\% \le \dfrac{154\sum_{i=1}^{10} p_i x_{ij}}{154\sum_{i=1}^{10} x_{ij}} \le 30.5\% & j=1,2,3 \\
\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 96 & i=1,2,\dots,10 \\
\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \le 160 & j=1,2,..,5 \\
154\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le b_i f_i & i=1,2,\dots,10 \\
154\sum_{j=4}^{5} x_{ij} \le w_i f_i & i=1,2,\dots,10 \\
154\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \ge s_j & j=1,2,\dots,5 \\
\sum_{i=1}^{10} f_i \le 7 & \\
f_i \in \{0,1\} & i=1,2,\dots,10 \\
x_{ij} \in N^* & i=1,2,\dots,10;\ j=1,2,\dots,5
\end{cases}$$

5.1.2 总运量最小，出动卡车数量最少

在 5.1.1 的前提下，即总运量最小的基础上，以出动卡车数量最少为目标，建立数学模型。

5.1.2.1 铲位与卸点间通行一次时间

为了方便后续计算卡车从铲位到卸点花费的时间，故需根据铲位与卸点间的距离计算出通行一次花费的时间。

（1）通行一次花费的时间式子

卡车通行一次的路线：从铲位装车，铲位到卸点的路线上，在卸点卸车，卸点回铲位的路线上。故通行一次所需时间：铲车装车时间 5 分钟、卡车卸车时间 3 分钟和两倍铲位与卸点之间花费的时间（铲位到卸点之间的距离比上卸点每分钟的速度），具体式子如下：

$$t_{ij} = 60\cdot\frac{2d_{ij}}{28} + 8$$

（2）处理后铲位与卸点间通行一次时间矩阵

根据以上卡车通行一次花费的时间式子，为了方便数据进行计算，编程求解各铲位到各卸点通行一次花费的时间矩阵T表示为：

$$T=\begin{bmatrix} 30.5429 & 16.1429 & 33.2429 & 10.7429 & 26.9429 \\ 30.2429 & 12.2429 & 32.0429 & 15.5429 & 24.5429 \\ 26.0429 & 16.1429 & 32.0429 & 13.4429 & 23.9429 \\ 25.1429 & 12.8429 & 27.5429 & 15.8429 & 21.5429 \\ 20.6429 & 13.4429 & 23.0429 & 19.7429 & 17.6429 \\ 19.7429 & 17.6429 & 23.6429 & 19.1429 & 20.0429 \\ 18.5429 & 14.3429 & 18.5429 & 26.0429 & 11.3429 \\ 16.1429 & 16.7429 & 18.5429 & 23.9429 & 14.9429 \\ 10.7429 & 21.2429 & 12.5429 & 29.6429 & 13.4429 \\ 13.4429 & 23.0429 & 10.4429 & 34.1429 & 10.1429 \end{bmatrix}$$

5.1.2.2 确定目标

在问题一的基础上，即总运量最小的前提下，以出动的卡车数量最少为目标。设g_k为是否出动第k辆卡车，使卡车数量之和最小，具体目标如下：

$$Min=\sum_{k=1}^{20} g_k$$

5.1.2.3 约束条件

为了在问题一的前提下，以卡车数量最小为目标，需对各个条件做如下约束：

（1）“0-1”变量的约束

在总运量最小的基础上，为了满足出动最少的卡车数量，应限制卡车是否进行运输石料，可设g_k进行“0-1”约束，当g_k为 1 时表示第k辆卡车出动运输石料，当g_k为 0 时表示第k辆卡车不出动运输石料，具体约束如下：

$$g_k \in \{0,1\} \qquad k=1,2,\ldots,20$$

（2）同一线路的车次约束

在问题一的基础上，在同一线路上运输的卡车数量需受到限制。设y_{ijk}为第k辆车在第i个铲位到第j个卸点的运输次数，x_{ij}为第i个铲位到第j个卸点的运输次数。在同一路线上运输的全部卡车数量应与问题一求解出的总运量最小情况下该线路上的运输次数相同，具体约束如下：

$$\sum_{k=1}^{20} y_{ijk} = x_{ij} \qquad i=1,2,...,10;\ j=1,2,..,5$$

（3）卡车能力约束

一个班次仅有 8 小时，故一个班次内的卡车工作时间应受到限制。设 t_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点之间通行一次所需的时间，g_k 为是否出动第 k 辆卡车。当第 k 辆卡车出动，第 k 辆卡车花费的总时间为各铲位到各卸点的运输次数乘上该路线上通行一次所需时间，实际情况下，一个班次内每辆卡车花费的时间应不大于 8*60=480 分钟；当第 k 辆卡车不出动，这辆卡车则不能运输石料。具体约束如下：

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} y_{ijk} t_{ij} \le 480 g_k \quad k=1,2,...,20$$

（4）卡车数量约束

露天矿仅有 20 辆卡车，需对卡车的数量进行限制。设 g_k 为是否出动第 k 辆卡车，所以出动的卡车数量之和应不大于拥有的 20 辆卡车，具体约束如下：

$$\sum_{k=1}^{20} g_k \le 20$$

5.1.2.4 最少卡车数量模型的建立与求解

综合以上的目标模型和约束条件，在总运量最小的基础上，以出动最少的卡车数量为目标，建立数学模型，具体模型如下：

$$\text{目标：} Min = \sum_{k=1}^{20} g_k$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{20} y_{ijk} = x_{ij} & i=1,2,...,10;\ j=1,2,..,5 \\ \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} y_{ijk} t_{ij} \le 480 g_k & k=1,2,...,20 \\ \sum_{k=1}^{20} g_k \le 20 & \\ g_k \in \{0,1\} & k=1,2,...,20 \end{cases}$$

5.1.2.5 具体结果

综上所述，对 5.1.2.4 建立的最少卡车数量模型进行 *Lingo* 求解，可得到铲位到卸点运输石料次数、各卡车的安排情况以及相应的总运量和岩石和

矿石产量。

（1）铲位到卸点运输次数

求解得到的卡车从各铲位运输石料到各卸点的次数具体如下表所示：

表 1：铲位到卸点运输石料次数

铲位 \ 卸点	1	2	3	4	5
1	0	0	0	81	0
2	13	42	0	0	13
3	0	0	0	43	2
4	0	43	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	54	0	0	0	0
9	0	0	70	0	0
10	11	0	15	0	70

从表中可看出出动 7 台电铲，分别位于铲位 1、2、3、4、8、9、10 上。

将上表的数据进行可视化展示，同样颜色表示卡车从不同铲位运输到同一卸点的路程，如下图所示：

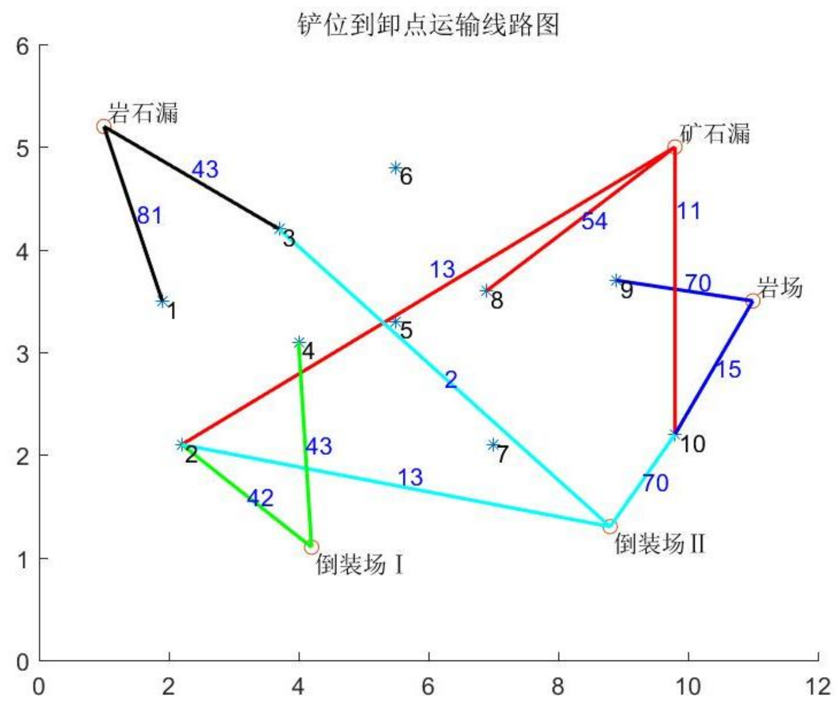

图 1：各铲位到各卸点的路线及相应次数

（2）卡车路线、次数安排

求解得到各线路上卡车运输次数，其中共出动 13 辆卡车，分别为卡车 1、

2、3、4、5、6、8、11、15、16、18、19、20，各卡车具体在哪些路线上运输的次数如下：

① 1 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 1 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 2：1 号卡车路线安排

车辆编号：1			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
1->4	1	2->1	2
3->5	1	8->1	23
9->3	1		

② 2 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 2 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 3：2 号卡车路线安排

车辆编号：2			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
2->2	21	3->4	14
10->3	3		

③ 3 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 3 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 4：3 号卡车路线安排

车辆编号：3			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
1->4	42	4->2	1

④ 4 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 4 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 5：4 号卡车路线安排

车辆编号：3			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
1->4	1	2->5	13
4->2	4	8->1	1
10->3	3		

⑤ 5 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 5 号卡车具体的路线

安排如下表所示：

表 6：5 号卡车路线安排

车辆编号：5			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
1->4	37	10->5	2

⑥　6 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 6 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 7：6 号卡车路线安排

车辆编号：6			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
2->1	1	2->2	2
3->5	1	9->3	27
10->5	6		

⑦　8、11 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 8 和 11 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 8：8 和 11 号卡车路线安排

车辆编号：8		车辆编号：11	
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
9->3	38	4->2	37

⑧　15 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 15 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 9：15 号卡车路线安排

车辆编号：15			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
2->1	10	8->1	1
10->1	11		

⑨　16 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 16 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 10：16 号卡车路线安排

车辆编号：16			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
2->2	4	3->4	29
10->3	1		

⑩　18、19 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 18 和 19 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 11：19 和 18 号卡车路线安排

车辆编号：19		车辆编号：18	
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
2->2	6	8->1	29
10->5	40		

⑪　20 号卡车路线安排

根据求解出的各线路上卡车运输的次数，可整理出 20 号卡车具体的路线安排如下表所示：

表 12：20 号卡车路线安排

车辆编号：20			
铲位->卸点	运输次数	铲位->卸点	运输次数
2->2	9	4->2	1
9->3	4	10->3	8
10->5	22		

（3）岩石、矿石产量

求解得到相应的总运量为：85628.62 吨公里，每个卸点相应的岩石、矿石的产量要求和产量具体如下表所示：

表 13：各卸点产量要求、产量

	矿石漏	倒装场Ⅰ	岩场	岩石漏	倒装场Ⅱ
产量要求（吨）	12000	13000	13000	19000	13000
石料产量（吨）	12012	13090	13090	19096	13090

5.2 问题 2 ：原则二

在本问中，考虑在原则二的情况下，且在卡车不等待条件下满足产量和品位要求，分别以获得最大产量和最大产量情况下总运量最小为目标，建立数学模型。

5.2.1 获得最大产能

考虑原则二的情况下，仅利用现有的 20 辆卡车，以获得最大的产能为目标，建立数学模型。

5.2.1.1 确定目标

根据题目要求，仅利用现有的车辆进行运输，以获得最大产量为目标。设 Q_{ijk} 为第 k 辆车从第 i 个铲位到第 j 个卸点运输的次数，由于每辆卡车满载 154 吨，各卡车从各铲位到各卸点的运输次数之和与载重量相乘，则得到总

产量，使总产量最大，具体目标如下：

$$Max = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk}$$

5.2.1.2 约束条件

为了满足卡车在不等待条件下满足产量和品位要求，需要对各个条件进行如下约束：

（1）“0-1”变量的约束

由于铲车数量有限，故应对铲位是否拥有铲车进行限制，可设 f_i 进行“0-1”约束，当 f_i 为 1 时表示第 i 个铲位存在铲车，当 f_i 为 0 时表示第 i 个铲位不存在铲车，具体约束如下：

$$f_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

（2）矿石卸点的品位约束

根据矿石卸点需要的铁含量为 28.5%—30.5%，结合附件中给出的各铲位的平均含铁量。设 p_i 为第 i 个铲位的平均铁含量，Q_{ijk} 为第 k 辆车从第 i 个铲位到第 j 个卸点运输的次数。卸点 1，2，3 为卸矿石的卸点，需要对其品位进行限制，将各铲位的含铁量乘每辆卡车从各铲位运输到该卸点的矿石量，比上每辆卡车从各铲位运输到该卸点的矿石总量量，即为各卸点一个班次的品位限制，该品位要满足 28.5%—30.5%。

$$28.5\% \le \frac{\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} p_i}{\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk}} \le 30.5\% \qquad j = 1,2,3$$

（3）铲位、卸点能力约束

为了满足卡车不等待，在一个班次内卡车去到各铲位的次数应受到约束。每个铲车的装车时间为 5 分钟，在 8 小时内，每次装车至少相隔 5 分钟，则每辆卡车去到铲位运输的次数之和应不大于 480/5=96 次，具体约束如下：

$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le 96 \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

一个班次内卡车不仅受到铲位能力的限制，也与各卸点的卸货的次数有关。每个卸点卡车卸车时间为 3 分钟，在 8 小时内，未避免等待，每次卸车至少相隔 3 分钟，则每辆卡车运输到卸点的次数之和应不大于 480/3=160 次，具体约束如下：

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le 160 \qquad j = 1,2,...,5$$

（4）铲位石料约束

为了使卡车从矿石铲位运输的矿石数量不能超过该铲位拥有的矿石数量，需要对其运输出的矿石数量进行限制。设 b_i 为第 i 个铲位最大矿石数量，f_i 为第 i 个铲位是否存在铲车。若第 i 个铲位存在铲车，则卡车从第 i 个铲位运输给卸矿石卸点 1、2、3 的总矿石量应不大于该铲位点的最大矿石数量；若第 i 个铲位不存在铲车，则卡车无法从该铲位运输矿石，具体约束如下：

$$154\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le b_i f_i \qquad i = 1,2,...,10$$

为了使卡车从岩石铲位运输的岩石数量不能超过该铲位拥有的岩石数量，需要对其运输出的岩石数量进行限制。设 b_i 为第 i 个铲位最大岩石数量，f_i 为第 i 个铲位是否存在铲车。若第 i 个铲位存在铲车，则卡车从第 i 个铲位运输给卸岩石卸点 4、5 的总岩石量应不大于该铲位点的最大岩石数量；若第 i 个铲位不存在铲车，则卡车无法从该铲位运输岩石，具体约束如下：

$$154\sum_{j=4}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le w_i f_i \qquad i = 1,2,...,10$$

（5）卸点产量约束

根据题目要求，一个班次内卡车从各铲位运输到卸点的总石料需满足该卸点的产量要求。设 s_j 为第 j 个卸点一个班次的最低产量要求，对于每个卸点，每辆卡车从各个铲位运输过来的石料之和应不小于该卸点的产量要求，具体约束如下：

$$154\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \ge s_j \qquad j = 1,2,...,5$$

（6）铲车数量约束

在该露天矿中仅有 7 台铲车，而铲位拥有 10 个，则需对铲位是否拥有铲车进行限制。设 f_i 为第 i 个铲位是否存在铲车，各铲位拥有的铲车之和应不大于 7，具体约束如下：

$$\sum_{i=1}^{10} f_i \le 7$$

（7）卡车能力约束

一个班次仅有 8 小时，故一个班次内的卡车工作时间应受到限制。设 t_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点之间通行一次所需的时间，g_k 为是否出动第 k 辆卡车。当第 k 辆卡车出动，第 k 辆卡车花费的总时间为各铲位到各卸点的运输次数乘上该路线上通行一次所需时间，实际情况下，一个班次内每辆卡车花费的时间应不大于 8*60=480 分钟；当第 k 辆卡车不出动，这辆卡车则不能运输石料。具体约束如下：

$$0 \le \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} Q_{ijk} t_{ij} \le 480 g_k \qquad k = 1,2,...,20$$

（8）车流量饱和度限制

为避免卡车等待的情况，在不同长度的路线上，卡车数量应受到线路长度的影响。设 r_{ijk} 为第 k 辆卡车是否负责从第 i 各铲位运输石料到第 j 个卸点，d_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点的距离。卡车在铲位装车比卸点卸车花费时间长，故只要满足各卡车在铲位进行装车的时候不堵塞，而装车时间为 5 分钟，若线路上存在 2 辆卡车，则两辆卡车之间至少相隔 5 分钟的路程才能不进行等待，若相距 D 分钟，则卡车等待时间为 $(5-D)$ 分钟，依此类推 n 辆卡车相距 $D\cdot(n-1)$ 分钟的路程，该路程应不大于第 i 各铲位到第 j 个卸点的路程长度。综上，可得到具体的车流量饱和度限制模型如下：

$$D \cdot \left(\sum_{k=1}^{20} r_{ijk} - 1 \right) \le \frac{60 \cdot d_{ij}}{28} \qquad i = 1,2,...,10, j = 1,2,...,5$$

卡车是否在线路上运输关系到该卡车在该线路上的运输次数，设 M 为一个较大整数。当 r_{ijk} 为 0 时，表示第 k 辆卡车无法从第 i 各铲位运输石料到第 j 个卸点的次数，反之则可以，具体约束如下：

$$Q_{ijk} \le r_{ijk} \cdot M \qquad i = 1,2,...,10; j = 1,2,...,5; k = 1,2,...,20$$

具体分析图如下：

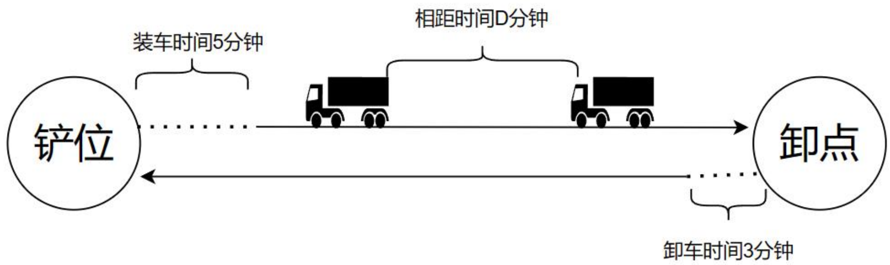

图 2 车流量饱和度分析图

5.2.1.3 最大产能模型的建立与求解

综合以上的目标模型和约束条件，利用现有的卡车数量进行运输，以获得最大的产能为目标，建立数学模型，具体模型如下：

$$\text{目标：}\quad Max = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk}$$

$$\begin{cases}
28.5\% \le \dfrac{\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk}p_i}{\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk}} \le 30.5\% & j=1,2,3 \\
154\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk} \ge s_j & j=1,2,...,5 \\
0 \le \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}Q_{ijk}t_{ij} \le 480g_k & k=1,2,...,20 \\
154\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk} \le b_i f_i & i=1,2,...,10 \\
154\sum_{j=4}^{5}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk} \le w_i f_i & i=1,2,...,10 \\
\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk} \le 96 & i=1,2,...,10 \\
\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20}Q_{ijk} \le 160 & j=1,2,...,5 \\
5\cdot\left(\sum_{k=1}^{20}r_{ijk}-1\right) \le \dfrac{60\cdot d_{ij}}{28} & i=1,2,...,10,\ j=1,2,...,5 \\
Q_{ijk} \le r_{ijk}\cdot M & i=1,2,...,10;\ j=1,2,...,5;\ k=1,2,...,20 \\
\sum_{i=1}^{10}f_i \le 7 & \\
f_i \in \{0,1\} & i=1,2,...,10 \\
Q_{ijk} \in N^* & i=1,2,...,10;\ j=1,2,...,5;\ k=1,2,...,20
\end{cases}$$

5.2.2 最大产量下的总运量最小

在 5.2.1 的前提下，即获得产量最大的情况下，可求解出该情况下的最大产量和最大岩石产量，满足最大产量和最大岩石产量基础上，以总运量最小为目标，建立数学模型。

5.2.2.1 确定目标

根据题目要求，在获得最大产量最大的基础上，以总运量最小为目标。设 Q_{ijk} 为第 k 辆车从第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数，d_{ij} 为第 i 个铲位到第 j 个卸点的距离。卡车从各铲位到各卸点的次数乘相应的距离总和，由于每辆卡车满载 154 吨，则再与载重量相乘，则得到总运量，使总运量最小，具体目标如下：

$$Min = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} d_{ij}$$

5.2.2.2 约束条件

为了满足题目需求，在建立最大产量下的总运量最小模型时，需对部分条件进行约束，部分 5.2.1 已有的约束条件不再赘述，其他具体约束条件如下：

（1）满足最大产量

为了符合最大产量要求的情况下，卡车从各铲位到各卸点运输的总产量应满足要求，故需对总产量进行限制。设 Q_{ijk} 为第 k 辆车从第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数，由于每辆卡车每次都满载运输且载重量为 154 吨，各卡车从各铲位到各卸点的运输次数之和与载重量相乘，则得到总产量，为满足最大产量，相应的总产量应与 5.2.1 求解出的最大产量 101948 相同，具体如下：

$$154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} = 101948$$

（2）满足最大岩石产量

符合最大产量要求的基础上求解出岩石产量最多的方案，利用 *Lingo* 求解出最大的岩石产量，各卡车从铲位运输到两个岩石卸点的岩石应满足要求，故需对每个卸岩石卸点的岩石产量进行限制。设 Q_{ijk} 为第 k 辆车从第 i 个铲位到第 j 个卸点的运输次数，卡车从各铲位运输到两个岩石卸点的岩石产量要求应满足最大岩石产量 38654，具体如下：

$$154\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} = 38654 \qquad j = 4,5$$

5.2.2.3 最大产量下的总运量最小模型的建立与求解

综合以上的目标模型和约束条件，在 5.2.1 的前提下，即满足最大产量和最大岩石产量的基础上，以总运量最小为目标，建立数学模型，具体模型

如下：

$$\text{目标：}\quad Min = 154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} d_{ij}$$

$$\begin{cases}
28.5\% \le \dfrac{\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} p_i}{\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk}} \le 30.5\% & j=1,2,3 \\
154\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \ge s_j & j=1,2,...,5 \\
0 \le \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} Q_{ijk} t_{ij} \le 480 g_k & k=1,2,...,20 \\
154\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le b_i f_i & i=1,2,...,10 \\
154\sum_{j=4}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le w_i f_i & i=1,2,...,10 \\
\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le 96 & i=1,2,...,10 \\
\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} \le 160 & j=1,2,...,5 \\
154\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} = 101948 & \\
154\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{20} Q_{ijk} = 38654 & j=4,5 \\
5\cdot\left(\sum_{k=1}^{20} r_{ijk} - 1\right) \le \dfrac{60\cdot d_{ij}}{28} & i=1,2,...,10,\ j=1,2,...,5 \\
Q_{ijk} \le r_{ijk}\cdot M & i=1,2,...,10;\ j=1,2,...,5;\ k=1,2,...,20 \\
\sum_{i=1}^{10} f_i \le 7 & \\
f_i \in (0,1) & i=1,2,...,10 \\
Q_{ijk} \in N^* & i=1,2,...,10;\ j=1,2,...,5;\ k=1,2,...,20
\end{cases}$$

5.2.2.4 具体结果

综上所述，对 5.2.2.4 建立的最少卡车数量模型进行 *Lingo* 求解，可得到铲位到卸点运输石料次数、各卡车的安排情况以及相应的总运量和岩石和矿石产量。

（1）铲位到卸点运输次数

求解得到的卡车从各铲位运输石料到各卸点的次数具体如下表所示：

表 14：铲位到卸点运输石料次数

铲位 \ 卸点	1	2	3	4	5
1	0	29	0	44	0
2	2	34	0	30	29
3	19	26	0	35	15
4	0	36	0	30	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	33	28	0	35
8	28	2	37	2	27
9	0	0	0	0	0
10	33	0	45	0	18

从表中可看出共出动 7 台电铲，分别位于铲位 1、2、3、4、7、8、10 上。

（2）卡车路线、次数安排

求解得到各线路上卡车运输次数，共出动 20 辆卡车，每辆卡车具体在哪些路线上运输的次数如下：

表 15：卡车路线及相应次数安排

车辆编号	铲位->卸点	运输次数	车辆编号	铲位->卸点	运输次数
1	2->5	10	1	8->3	12
2	7->2	33	3	4->2	36
4	2->2	34	4	8->2	2
5	2->5	19	6	8->3	25
7	3->5	12	7	10->5	18
8	1->4	44	9	2->1	1
9	10->1	33	10	3->1	1
10	8->1	28	11	7->3	4
11	8->5	27	12	3->4	35
13	3->1	18	14	10->3	45
15	2->4	30	16	3->2	26
16	8->4	2	17	3->5	3
17	7->5	35	18	1->2	29
19	2->1	1	19	7->3	24
20	4->4	30			

（3）**岩石、矿石产量**

求解得到相应的总运量为：159901 吨公里，每个卸点相应的岩石、矿石的产量要求和产量具体如下表所示：

表 16：各卸点产量要求、产量

	矿石漏	倒装场Ⅰ	岩场	岩石漏	倒装场Ⅱ
产量要求（吨）	12000	13000	13000	19000	13000
石料产量（吨）	12628	24640	16940	21714	19096

六、模型评价与推广

6.1 模型优点

1）本模型满足露天生产提供的各类约束条件

2）本模型符合现实中多生产点与多点之间的车辆安排，具有较大的实用性

6.2 模型推广

露天矿生产的车辆安排是一类比较常见的生产与运输安排时间，与现实中多生产点与多接收点之间车辆安排类似。满足客户不等待条件下满足产量和质量要求，分别考虑满足基本的产量要求情况下，出动最少的车辆运输和考虑利用有限的车辆去运输最大产量。本模型适用于相似要求下的车辆安排事件。

七、参考文献

[1]李晓雯. 机场预约巴士线路规划及车辆调度研究[D].吉林大学,2024.DOI:10.27162/d.cnki.gjlin.2023.001136.

[2]魏薇,张利,余丽洁.基于多目标规划模型的轨道交通周边土地优化研究[J].广东交通职业技术学院学报,2024,23(01):41-44+54.

[3]崔洪涛.抚顺东露天矿生产进度优化[J].露天采矿技术,2023,38(01):76-78.DOI:10.13235/j.cnki.ltcm.2023.01.020.

附录

一、支撑材料的文件列表

1、LINGO2.lg4

2、Q2LINGO1.lg4

3、Q3LINGO2.lg4

二、程序代码

1、Lingo 代码

```
!原则一求总运量最小
sets:
 aa/1..10/:p,b,w,f;
 bb/1..5/:s;
 cc(aa,bb):x,d;
endsets
data:
 d=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A12:E21);
 b=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A23:J23);
 w=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A24:J24);
 p=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A25:J25);
 s=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A27:E27);
 @ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\ans.xls',A1:E10)=x;
enddata

x(3,4)=43;

min = 154 * @sum(aa(i):@sum(bb(j):x(i,j)*d(i,j)));
@for(bb(j)|j#eq#1#or#j#eq#2#or#j#eq#5:0.285<((154*@sum(aa(i):
p(i)*x(i,j)))/(154*@sum(aa(i):x(i,j)))));
@for(bb(j)|j#eq#1#or#j#eq#2#or#j#eq#5:((154*@sum(aa(i):p(i)*x
(i,j)))/(154*@sum(aa(i):x(i,j))))<0.305);

@for(aa(i):@sum(bb(j):x(i,j))<96);
@for(bb(j):@sum(aa(i):x(i,j))<160);
```

```
@for(aa(i):154*@sum(bb(j)|j#eq#1#or#j#eq#2#or#j#eq#5:x(i,j))<
b(i)*f(i)*10000);
@for(aa(i):154*@sum(bb(j)|j#eq#3#or#j#eq#4:x(i,j))<w(i)*f(i)*
10000);
@for(bb(j):154*@sum(aa(i):x(i,j))>s(j)*10000);
@sum(aa(i):f(i))<7;

@for(aa(i):@bin(f(i)));
@for(cc(i,j):@gin(x(i,j)));
```

文件名:Q2LINGO1.lg4

```
!原则一求车辆数最少
sets:
 aa/1..10/:;
 bb/1..5/:;
 cc/1..20/:g;
 dd(aa,bb,cc):y;
 ee(aa,bb):x,d,t;
endsets
data:
 d=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A12:E21);
 x=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\ans.xls',A1:E10);
 @ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\ans.xls',G1:K10)=t;
 v=28;
enddata
min = @sum(cc(k):g(k));
@for(aa(i):@for(bb(j):@sum(cc(k):y(i,j,k))=x(i,j)));
@for(ee(i,j):t(i,j) = 2*d(i,j)/v*60+8);
@for(cc(k):@sum(aa(i):@sum(bb(j):y(i,j,k)*t(i,j)))<480*g(k));
@sum(cc(k):g(k))<20;

@for(cc(k):@bin(g(k)));
@for(dd(i,j,k):@gin(y(i,j,k)));
```

文件名:Q3LINGO2.lg4

```
!原则二
sets:
 aa/1..10/:p,b,w,f;
 bb/1..5/:s;
 cc(aa,bb):x,d,t;
 dd/1..20/:g;
 ee(aa,bb,dd):y,r;
endsets
data:
 d=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A12:E21);
 b=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A23:J23);
 w=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A24:J24);
 p=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A25:J25);
 s=@ole('D:\homewrok\建模\第二题露天矿\105.xls',A27:E27);
 v=28;
 M = 1e9;
enddata


max = 154*@sum(cc(i,j):x(i,j));

154*@sum(cc(i,j)|j#eq#3#or#j#eq#4:x(i,j))=49280;


@for(bb(j)|j#eq#1#or#j#eq#2#or#j#eq#5:0.285*(154*@sum(aa(i):x(i,j)))<(154*@sum(aa(i):p(i)*x(i,j))));
@for(bb(j)|j#eq#1#or#j#eq#2#or#j#eq#5:(154*@sum(aa(i):p(i)*x(i,j)))<(154*@sum(aa(i):x(i,j)))*0.305);

@for(aa(i):@sum(bb(j):x(i,j))<96);
@for(bb(j):@sum(aa(i):x(i,j))<160);
```

```
@for(aa(i):154*@sum(bb(j)|j#eq#1#or#j#eq#2#or#j#eq#5:x(i,j))<b(i)*f(i)*10000);
@for(aa(i):154*@sum(bb(j)|j#eq#3#or#j#eq#4:x(i,j))<w(i)*f(i)*10000);
@for(bb(j):154*@sum(aa(i):x(i,j))>s(j)*10000);
@sum(aa(i):f(i))<7;

@for(aa(i):@for(bb(j):@sum(dd(k):y(i,j,k))=x(i,j)));
@for(cc(i,j):t(i,j) = d(i,j)/v*60);
@for(dd(k):@sum(aa(i):@sum(bb(j):y(i,j,k)*(2*t(i,j)+8)))<480*g(k));
@sum(dd(k):g(k))<20;

@for(aa(i):@for(bb(j):@sum(dd(k):r(i,j,k))*5-5<t(i,j)));
@for(aa(i):@for(bb(j): @for(dd(k):y(i,j,k)<r(i,j,k)*M )));


@for(dd(k):@bin(g(k)));
@for(aa(i):@bin(f(i)));
@for(cc(i,j):@gin(x(i,j)));
@for(ee(i,j,k):@gin(y(i,j,k)));
@for(ee(i,j,k):@bin(r(i,j,k)));
```