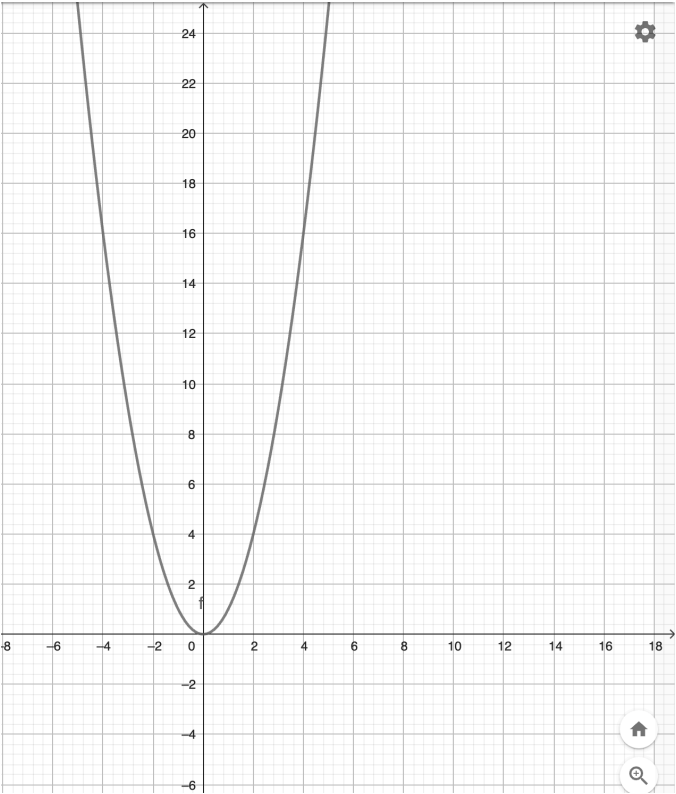


二次函数

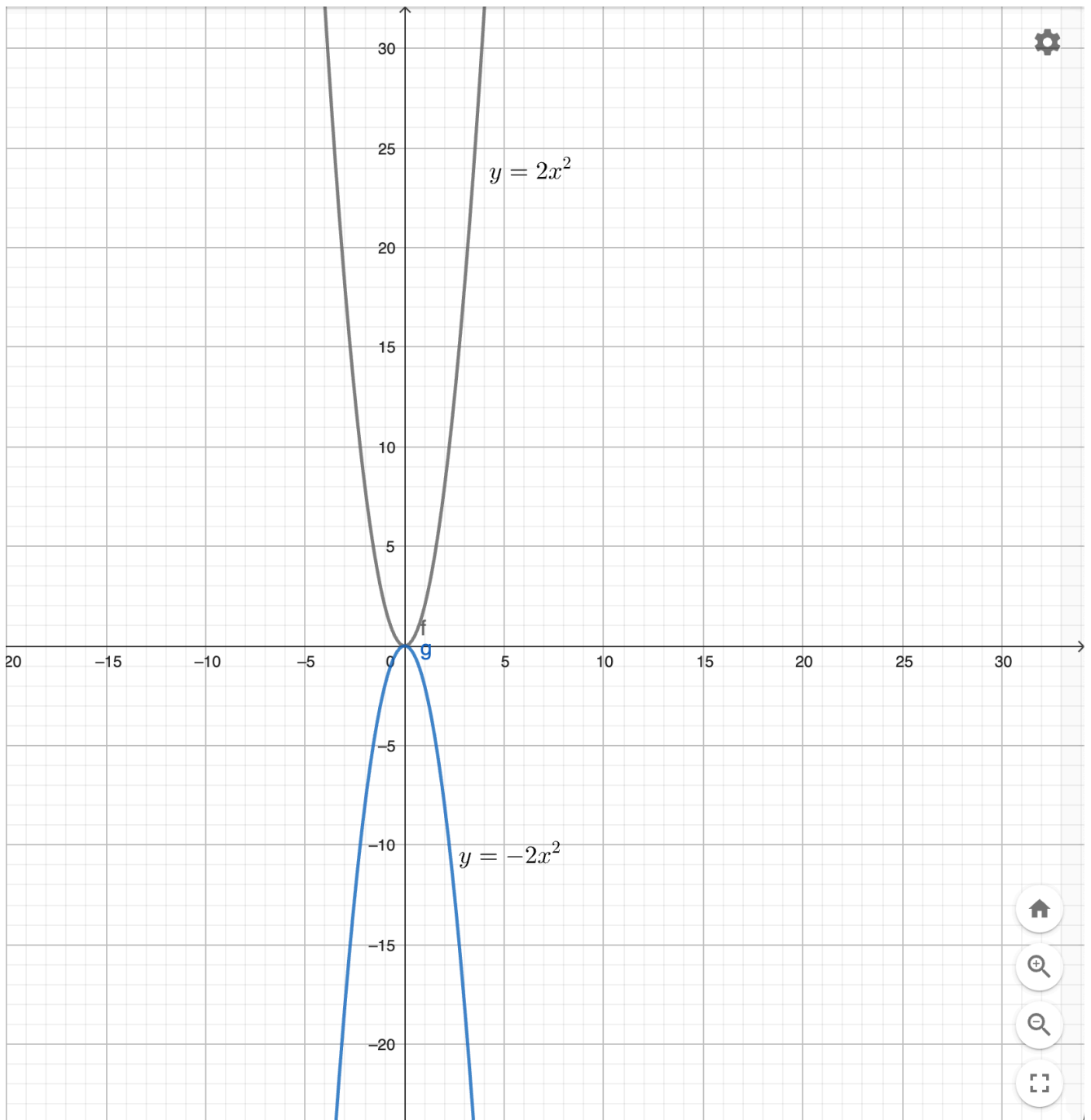


二次函数的函数表达式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，其中 $a \neq 0$ ， $x \in R$ ，二次函数的函数图像类似于一个抛物线
对比一次函数 $y = kx + b$ ， $k \neq 0$ ，二次函数自变量 x 的最高次幂是2，故称二次函数

性质

- 开口方向

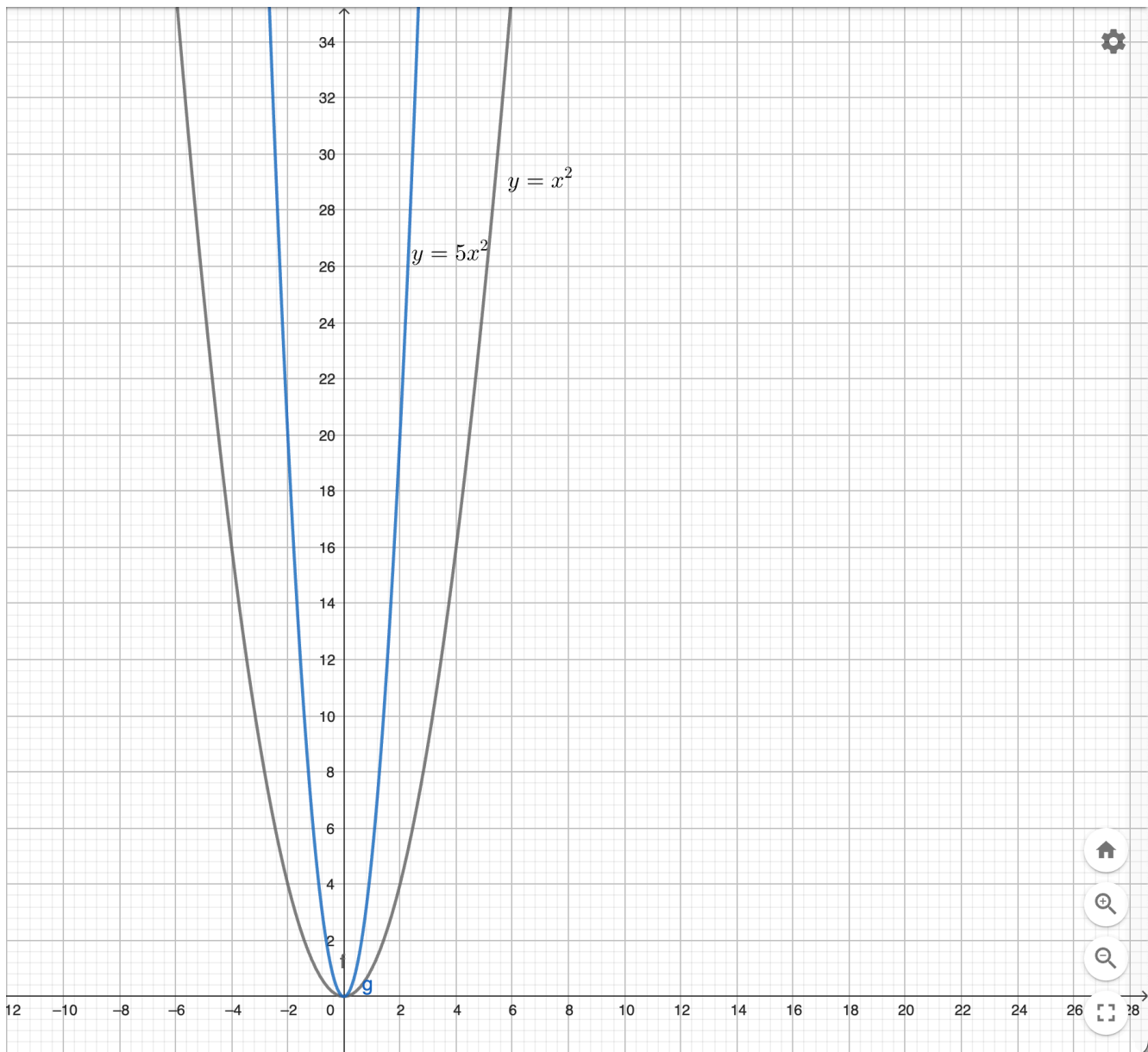
在以下两个二次函数中，我们看a的值对二次函数开口方向的影响是什么？



- 当 $a > 0$ 时，二次函数的开口向上
- 当 $a < 0$ 时，二次函数的开口向下

- 开口大小

在以下两个二次函数中，我们看 a 的值对二次函数开口大小的影响是什么？



- a 越大, 开口越小
- a 越小, 开口越大

- 对称性

二次函数 $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, 可以写成 $y = a(x - h)^2 + m, a \neq 0$ 的形式

将二次函数 $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ 改写称 $y = a(x - h)^2 + m, a \neq 0$, 需要用到配方法

- 配方法

它是把二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和的方法

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ 即为二次多项式

$a(x - h)^2 + m, a \neq 0$ 即为一次多项式的平方与一个常数的和

我们知道 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 、 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

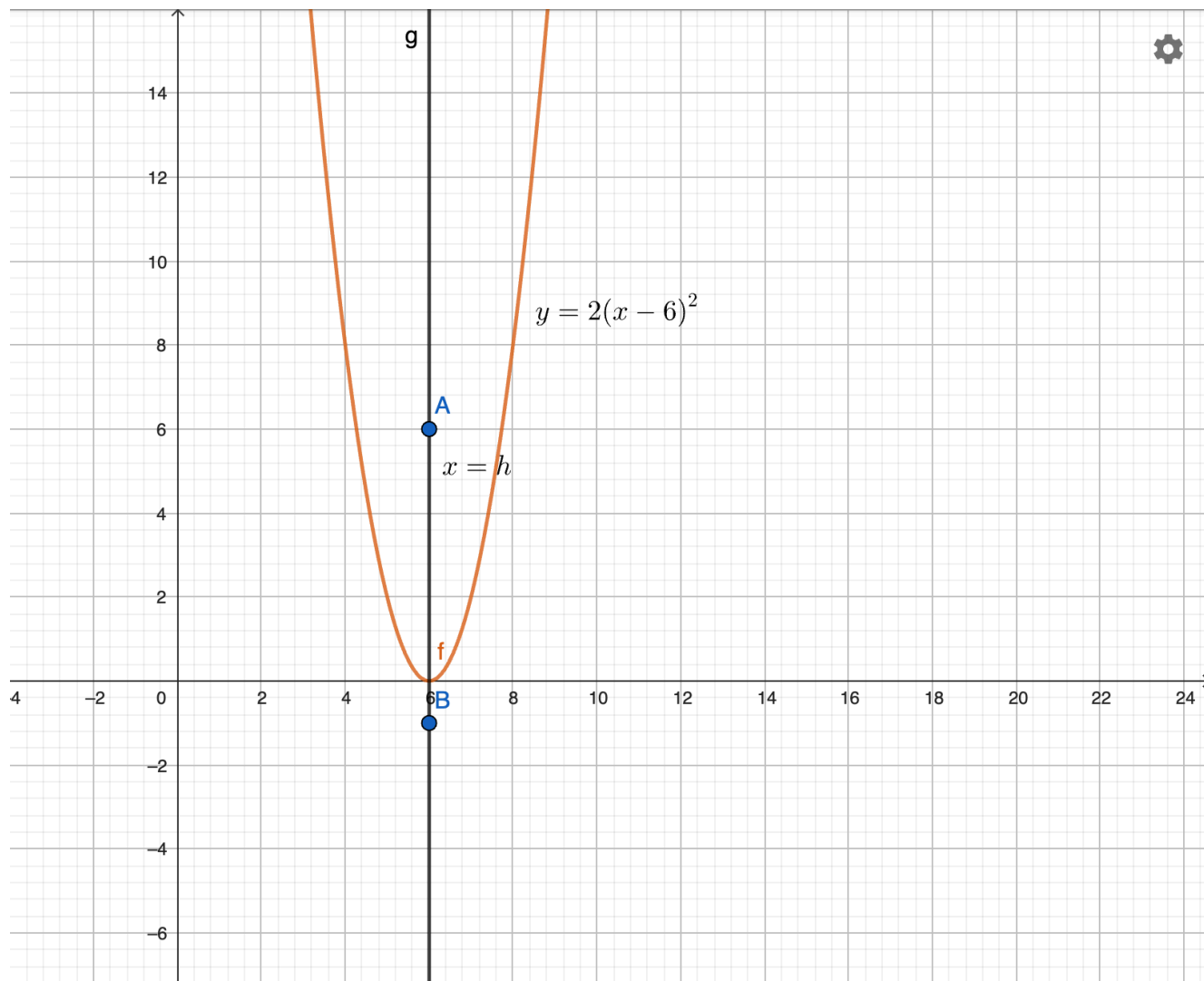
所以 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$

$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2) + c - (\frac{b}{2a})^2$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

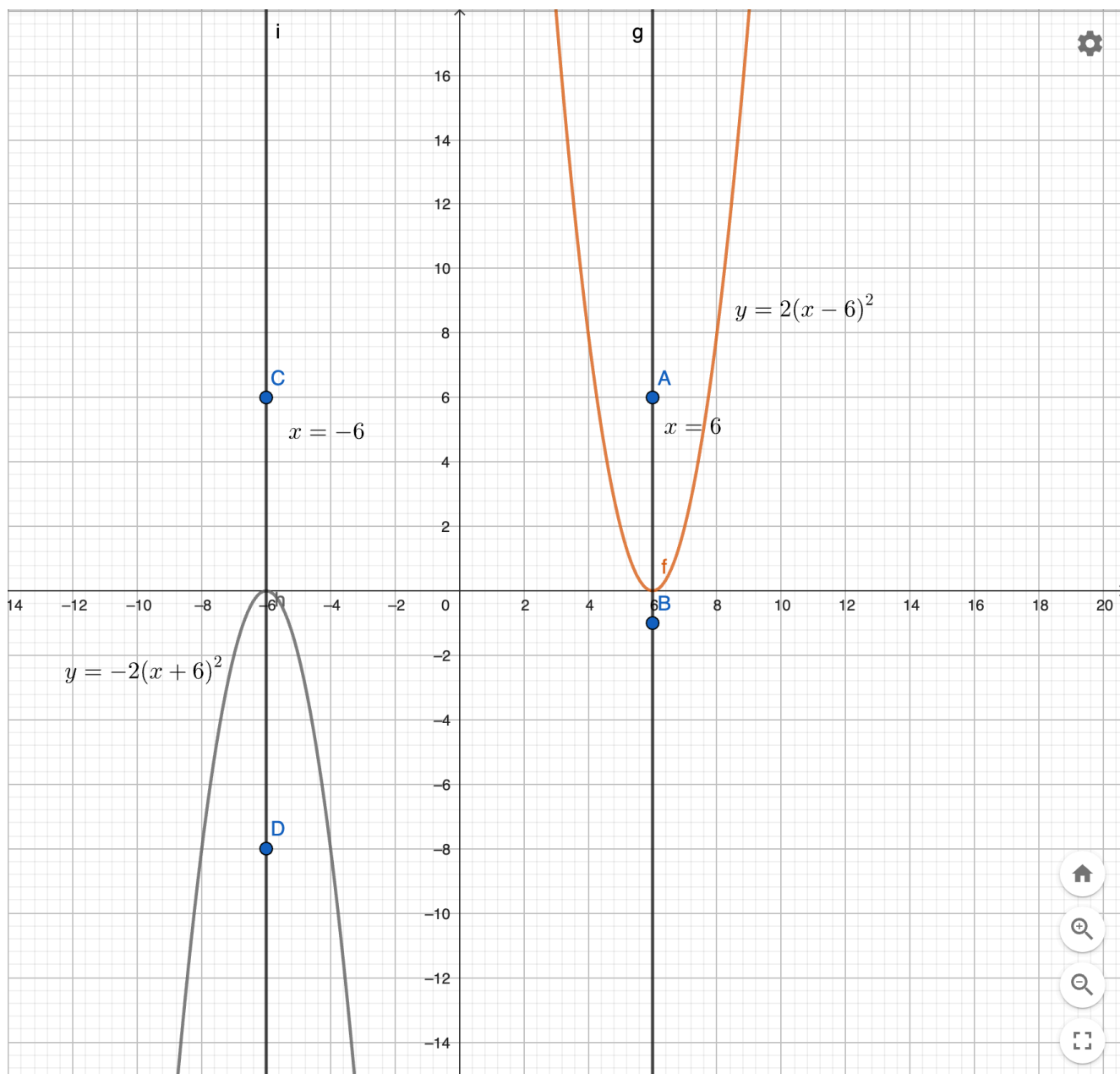
故二次函数 $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ 的对称轴是 $x = -\frac{b}{2a}$, $h = -\frac{b}{2a}, m = c - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$



观察二次函数 $y = 2(x - 6)^2$, 可以看出该二次函数是关于直线 $x = 6$ 对称的

对于任意二次函数 $y = a(x - h)^2 + m, a \neq 0$, 该二次函数关于 $x = h$ 对称

- 单调性



可以看到，对于二次函数 $y = -2(x + 6)^2$ ，当自变量 $x \in (-\infty, -6]$ 时，因变量 y 随 x 的增大而增大，我们称为函数单调递增；当自变量 $x \in [-6, +\infty)$ 时，因变量 y 随 x 的增大而减小，我们称为函数单调递减

而对于二次函数 $y = 2(x - 6)^2$ ，当自变量 $x \in (-\infty, 6]$ 时，因变量 y 随 x 的增大而减小，我们称为函数单调递减；当自变量 $x \in [6, +\infty)$ 时，因变量 y 随 x 的增大而增大，我们称为函数单调递增

我们称因变量 y 随着自变量 x 在某一区间上值的单调变化为函数的单调性

二次函数的单调性体现在其对称轴 $x = h$ 的两侧，并且受到 a 的影响；

如果 $a > 0$ ，二次函数在其对称轴左边，单调减小；在其对称轴的右边，单调增加

如果 $a < 0$ ，二次函数在其对称轴左边，单调增加；在其对称轴的右边，单调减小

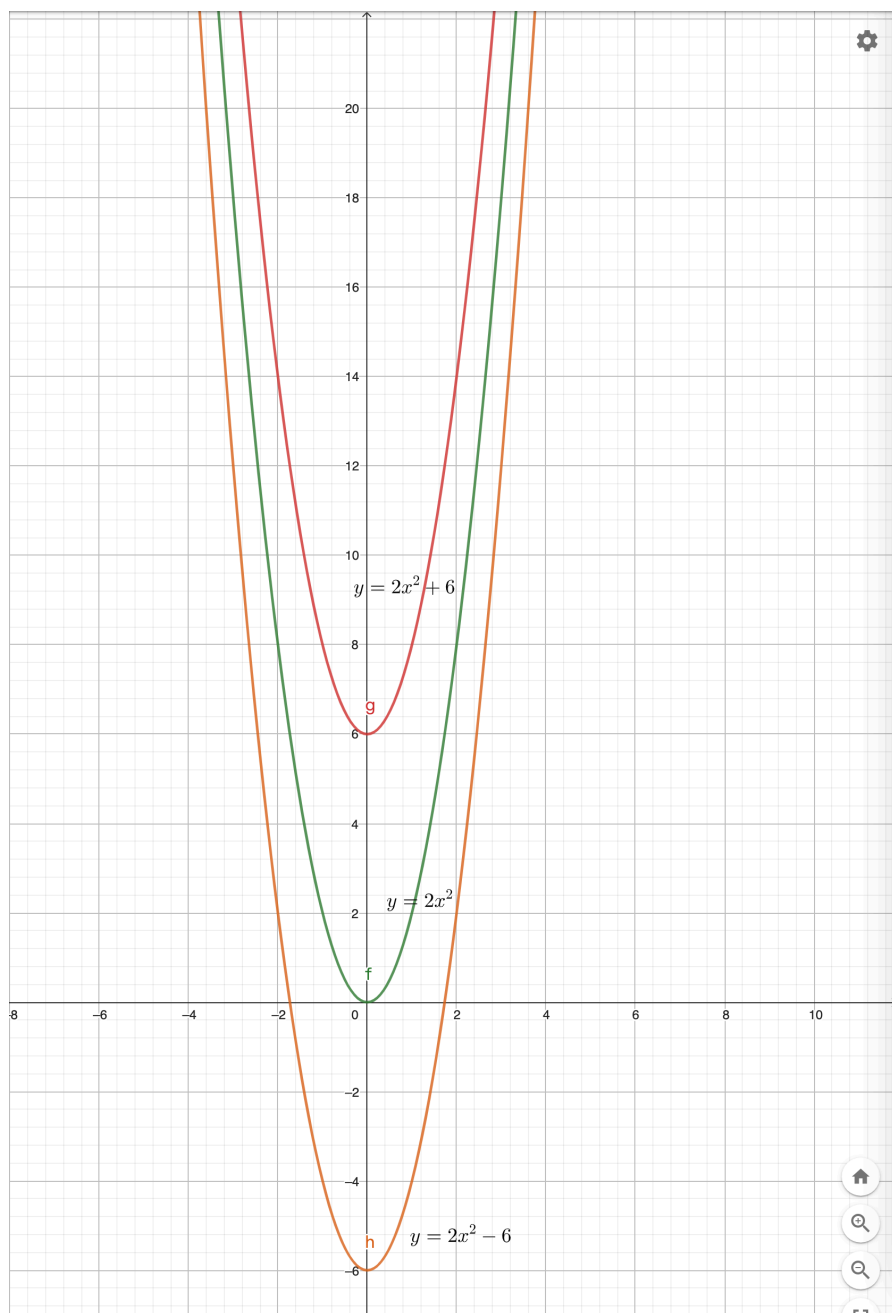
● 平移

与一次函数一样，也可以通过上加下减、左加右减的口诀来记忆

- 上下平移

函数表达式中对因变量 y 加上一个正整数 n ，则函数图像就会向上平移 n 个单位长度

函数表达式中对因变量 y 减去一个正整数 n ，则函数图像就会向下平移 n 个单位长度



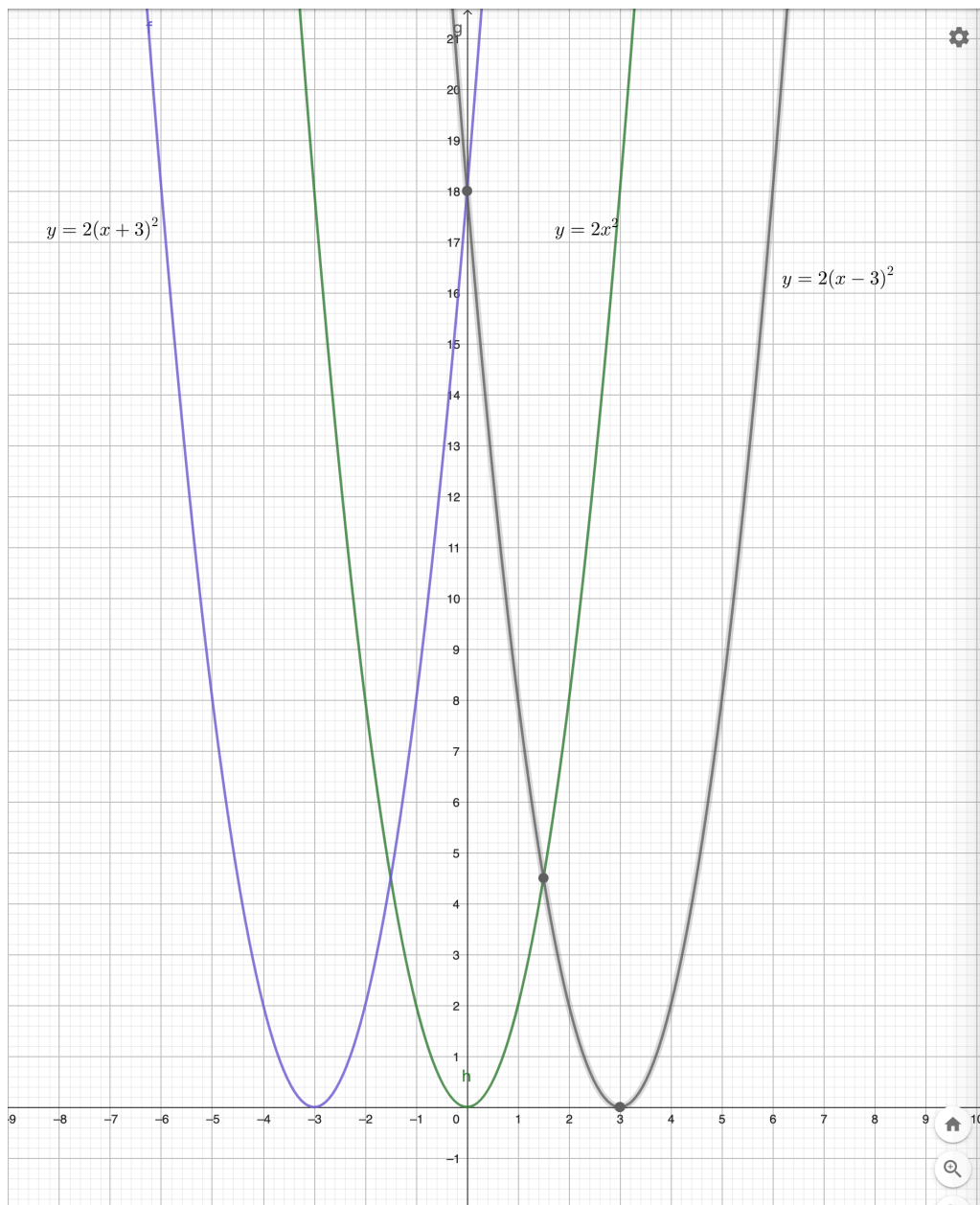
如将函数 $y = 2x^2$ 向上平移6个单位长度后，则函数表达式变为 $y = 2x^2 + 6$

如将函数 $y = 2x^2$ 向下平移6个单位长度后，则函数表达式变为 $y = 2x^2 - 6$

○ 左右平移

函数表达式中对自变量 x 加上一个正整数 n ，则函数图像就会向左平移 n 个单位长度

函数表达式中对自变量 x 减去一个正整数 n ，则函数图像就会向右平移 n 个单位长度



如将函数 $y = 2x^2$ 向左平移3个单位长度后，则函数表达式变为 $y = 2(x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 18$
 如将函数 $y = 2x^2$ 向右平移3个单位长度后，则函数表达式变为 $y = 2(x - 3)^2 = 2x^2 - 12x + 18$

求函数表达式

如果一条抛物线经过点A(3,0)、B(1,8)和C(4,2)，那么该二次函数的表达式是？

1. 写出二次函数的一般表达式

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. 将点A代入表达式

$$9a + 3b + c = 0$$

3. 将点B代入表达式

$$a + b + c = 8$$

4. 将点C代入表达式

$$16a + 4b + c = 2$$

5. 解出 a 、 b 、 c

$$a = 2, b = -12, c = 18$$

6. 该函数表达式为

$$y = 2x^2 - 12x + 18$$

画二次函数图像

如画二次函数 $y = 2x^2 - 12x + 20$ 的函数图像

1. 将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 利用配方写成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式

$$y = 2x^2 - 12x + 20 = 2(x^2 - 6x + 9) + 2 = 2(x - 3)^2 + 2$$

2. 根据二次函数的性质绘图

1. 开口方向

由于 $a = 2$, 故开口向上

2. 对称轴

$$x = 3$$

3. 对称轴顶点坐标

$$(3, 2)$$

4. 根据对称轴及函数表达式找对称点坐标

x 可以取2和4, 此时对应的 y 值是4, 即 $(2, 4)$, $(4, 4)$

