整数唯一分解定理

定理

任何一个大于1的自然数n，都可以唯一分解成有限个质数的乘积，写作$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_m^{a_m}$，表示n有m种不同的质因数，每种质因数有$a_i$个。

我们把$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_m^{a_m}$叫做$a$的标准分解式，如：

$600的标准分解式:600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$

$117的标准分解式:117 = 3^2 \times 13$

$9828的标准分解式:9828 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13$

$10725的标准分解式:10725 = 3 \times 5^2 \times 11 \times 13$

因数个数

若自然数n可以唯一分解为$p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_m^{a_m}$，则因数个数可以表示为

$$(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times ... \times (a_m + 1)$$

如24的唯一分解为$24 = 2^3 \times 3^1$，则24的因数个数为$(3 + 1) \times (1 + 1) = 8$

因数和

若自然数n可以唯一分解为$p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_m^{a_m}$，则n的所有因数总和可以表示为

$(p_1^0 + p_1^1 + ... + p_1^{a_1}) \times (p_2^0 + p_2^1 + ... + p_2^{a_2}) \times ... \times (p_m^0 + p_m^1 + ... + p_m^{a_m})$

如24的唯一分解为$24 = 2^3 \times 3^1$，则24的所以因数总和为$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1) = 60$