

幂

什么是幂？

通常幂是指一个数自乘若干次的形式，如： $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ ，这里有 n 个 a 自乘

我们称 a 为底数、 n 为指数、 a^n 为 a 的 n 次幂或 a 的 n 次方

例如： $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ，这时 $a = 2$ 、 $n = 3$

小练习

当 $a = 3$, $n = 2$ 时, $3^2 = ?$

当 $a = 10$, $n = 3$ 时, $10^3 = ?$

当 $a = 4$, $n = 4$ 时, $4^4 = ?$

注：以上幂的表达式其实是默认指数 n 为正整数的情形，当 n 不是正整数时，幂的表达式是怎样的呢？

$$2^{-3} = ?$$

$$2^0 = ?$$

$$2^{\frac{1}{2}} = ?$$

上述幂的表达式中指数 n 分别等于-3、0、 $\frac{1}{2}$

对指数 n 进行讨论

1. 指数 n 为正整数

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a, \text{ 表示 } n \text{ 个 } a \text{ 相乘}$$

特别的，当 $n = 2$ 时，我们也称 a^2 为 a 的平方；当 $n = 3$ 时，我们也称 a^3 为 a 的立方

2. 指数 n 为0

$$\text{当底数 } a \text{ 不为 } 0 \text{ 时, } a^0 = 1$$

$$\text{如: } 2^0 = 1, (-3)^0 = 1, \frac{1}{4}^0 = 1 \text{ 等}$$

3. 指数 n 为负整数

$$a^n = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^n}, \text{ 表示 } |n| \text{ 个 } \frac{1}{a} \text{ 相乘}$$

$$\text{例如: } 2^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$$

4. 指数n为分数时

这里我们先讨论n的分子是1，分母是正整数的情形，如n等于 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等

假设 $n = \frac{1}{m}$ ，m为正整数（2、3、4等）

$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ ，表示a的m次方根，指的是谁的m次方等于a

特别的，当 $n = \frac{1}{2}$ 时， $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ，表示a的2次方根，也称a的平方根，此时 $\sqrt[2]{a}$ 这里的2可以省略，即 $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

当 $n = \frac{1}{3}$ 时， $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ ，表示a的3次方根，也称a的立方根

例如： $16^{\frac{1}{4}}$ 表示的是谁的4次方等于16，我们知道 $2^4 = 16$ 且 $(-2)^4 = 16$ ，所以 $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$ 和 -2

$27^{\frac{1}{3}}$ 表示的是谁的3次方等于27，我们知道 $3^3 = 27$ ，所以 $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$16^{\frac{1}{2}}$ 表示的是谁的2次方等于16，我们知道 $4^2 = 16$ 且 $(-4)^2 = 16$ ，所以 $16^{\frac{1}{2}} = 4$ 和 -4

小练习

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 =$$

$$10^{-2} =$$

$$4^{-3}$$

$$8^{\frac{1}{3}} =$$

$$100^{\frac{1}{2}} =$$

$$32^{\frac{1}{5}} =$$

$$3^{\frac{1}{2}} =$$

$$4^{\frac{1}{3}} =$$

幂运算规则

1. 同底数幂的乘法

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

规则：幂 a^m 与幂 a^n 有相同的底数a，此时两个幂相乘时，底数a不变，指数相加

例如： $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

2. 同底数幂的除法

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

规则：幂 a^m 与幂 a^n 有相同的底数a，此时两个幂相除时，底数a不变，指数相减

例如： $2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 2$

3. 幂的乘方

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \dots \times a^m$ ，即有n个 a^m 相乘

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \dots \times a^m = a^{m+m+\dots+m} = a^{m \times n}$$

例如： $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 = 729$

4. 积的乘方

$$(a \times b \times c)^m = a^m \times b^m \times c^m$$

规则：当一个幂是由多个数的乘积组成时，可以将这些数分别乘方再相乘

例如： $(2 \times 3 \times 4)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2 = 576$

小练习

$$3^2 \times 3^3 =$$

$$4^4 \div 4^3 =$$

$$(5^2)^2 =$$

$$(4ab^2)^2 \times (-\frac{1}{2}a^2b)^3 =$$

已知 $a^x = 2$, $a^y = 3$ 求 a^{x+y} 与 a^{2x-y} 的值

对指数n为任意分数

假设 $n = \frac{q}{p}$ ， p 和 q 为非0整数

$$a^{\frac{q}{p}} = ?$$

推导一下

$$a^{\frac{q}{p}} = (a^q)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$$

例如： $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

