最小公倍数

定义

如果整数$n \geq 2$，并且a_1，$a_2, ..., a_n$和m都是正整数，又$a_1|m$，$a_2|m$，$..., a_n|m$，则m叫做$a_1, a_2, ..., a_n$的公倍数，在a_1，$a_2, ..., a_n$所有的公倍数中，最小的一个公倍数叫做a_1，$a_2, ..., a_n$的最小公倍数，我们写作$\{a_1, a_2, ..., a_n\} = m$

如$\{4, 6\} = 12$

如果求n个正整数$a_1, a_2, ..., a_n$的最小公倍数，可先将它们分解成标准分解式$p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_m^{a_m}$，然后找出所有$p_i^{a_i+1}$，要满足它不能整除所有的$a_1, a_2, ..., a_n$，最后将所有$p_i^{a_i}$相乘，就是这n个数$a_1, a_2, ..., a_n$的最小公倍数

求$108, 28$和42的最小公倍数

$108 = 2^2 \times 3^3$

$28 = 2^2 \times 7$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

可以发现2^{2+1}、3^{3+1}、7^{1+1}都不能整除108、28、42，所以$108, 28$和42的最小公倍数是：$2^2 \times 3^3 \times 7$ = 756

互素

如果整数$n \geq 2$，并且a_1，$a_2, ..., a_n$都是正整数，如果这些正整数的最大公因数是1，即$(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$，我们称$a_1, a_2, ..., a_n$是互素的

如$(6, 10, 15) = 1$

引理1

如果整数$n \geq 2$，并且a_1，a_2，$..., a_n$两两互素，则这n个正整数的最小公倍数就是这n个数的乘积.

如$15, 32, 49$两两互素，则$\{15, 32, 49\} = 15 \times 32 \times 49 = 23520$

引理2

假设a和b都是正整数，并且a和b的最小公倍数是m，即$\{a, b\} = m$，如果m'是a和b的公倍数，则有$m|m'$

即最小公倍数与其它公倍数满足整除的关系

引理3

假设a和b都是正整数，并且a和b的最小公倍数是m，a和b的最大公因数是d，即$\{a, b\} = m, (a, b) = d$，则$a \times b = d \times m$

即两个正整数的乘积等于这两个数的最小公倍数与最大公因数的乘积