最大公因数

定义

如果整数$n \geq 2$，并且整数a_1、a_2、$...a_n$和d满足$d|a_1, d|a_2, ..., d|a_n$，则d叫做$a_1, a_2, ..., a_n$的公因数，公因数中最大的一个叫做a_1、a_2、$...a_n$的最大公因数.

我们写成$(a_1, a_2, ..., a_n) = d$

求几个正整数的最大公因数时，先把这些正整数分别分解质因数，然后取出它们所公有的质因数相乘

求48、60和72的最大公因数

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

48、60和72公有的素因数是2, 2, 3，它们的乘积就是这三个数的最大公因数：$2 \times 2 \times 3 = 12$

求1008、1260和882和1134的最大公因数?

引理

假设a和b都是正整数，且$a > b$，$a = b \times q + r$，其中q和r都是正整数，则a和b的最大公因数等于b和r的最大公因数，即$(a, b) = (b, r)$

求6731和2809的最大公因数

$6731 = 2809 \times 2 + 1113$

$(6731, 2809) = (2809, 1113)$

$2809 = 1113 \times 2 + 583$

$(2809, 1113) = (1113, 583)$

$1113 = 583 \times 1 + 530$

$(1113, 583) = (583, 530)$

$583 = 530 + 53$

$(583, 530) = (530, 53)$

$530 = 53 \times 10 + 0$

$(530, 53) = 53$

所以$(6731, 2809) = (530, 53) = 53$

以上求最大公约数的方法叫做辗转相除法

当求3个及以上正整数，如a_1，$a_2, ..., a_n$的最大公约数时，采取以下办法：

- 先求a_1和a_2的最大公因数，假设是b_1
- 再求b_1和a_3的最大公因数，假设是b_2
- 则b_2就是a_1、a_2、a_3的最大公因数

当$n \geq 4$时，以此类推

如求$(27090, 21672, 11352, 8127)$?