数列

数列是一正整数集（或它的有限子集）为定义域的一列有序的数，数列中的每一项都叫做这个数列的项。排在第一位的数称为这个数列的第一项（也叫首项），排在第二位的数称为这个数列的第二项，以此类推，排在第n位的数为这个数列的第n项，通常用a_n表示。

数列的一般形式可以写成：

a_1，a_2，a_3，$...,a_n$

简记为$\{a_n\}$

数列：

$1,2,3,4,5,?,7,8,9$

$1,3,5,?,9,11,13$

$1,2,4,?,16,32,64$

$1,1,2,3,5,?,13,21,34$

观察以上数列中的?代表的数是什么?

通项公式

数列的第n项a_n与项的序数n之间的关系可以用一个公式$a_n=f(n)$来表示，这个公式叫做这个数列的通项公式。

如：

$1,2,3,4,5,6,7,8,9... \quad \rightarrow \quad a_n=n$

$1,3,5,7,9,11,13... \quad \rightarrow \quad a_n=2n-1$

$1,2,4,8,16,32,64... \quad \rightarrow a_n=2^{n-1}$

递推公式

如果数列$\{a_n\}$的第n项与它前一项或几项的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的递推公式。

如：

$1,2,3,4,5,6,7,8,9... \quad \rightarrow \quad a_n=a_{n-1}+1$

$1,3,5,7,9,11,13... \quad \rightarrow \quad a_n=a_{n-1}+2$

$1,1,2,3,5,8,13,21... \quad \rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2},a_1=1,a_2=1$

等差数列

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做公差，公差通常用字母d表示，前n项和用S_n表示。

如数列$1,2,3,4,5,6,7,8,9...$，就是一个等差数列，它的公差$d=1$

而数列$1,2,4,8,16,32,64...$，就不是一个等差数列

$1,3,5,7,9,11,13...$

$2,7,12,17,22,27...$

以上等差数列的公差是多少?

通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d$

---

1. 以下等差数列的通项公式是什么?

$1,3,5,7,9,11,13...$

$2,7,12,17,22,27...$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，如果$a_5=11, a_8=5$，求数列的通项公式

前n项和

$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+...+(a_1+(n-1)d)$

$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+...+(a_n-(n-1)d)$

由以上知道$2S_n=n(a_1+a_n)$

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

即等差数列的前n项和等于首末两项的和与项数乘积的一半

如等差数列$\{a_n\}$为$1,2,3,4,...,100$，则:

$S_n=1+2+3+...+100$

$S_n=100+99+98+...+1$

$2S_n = (1+101) \times 100$

$S_n = \frac{(1+101)\times 100}{2}$

又$S_n = \frac{(1+101)\times 100}{2}$

所以等差数列的前n项和还可以写成$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

---

1. 求以下等差数列的前n项和

   $2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 100$

2. 数列$\{a_n\}$的前n项和是：$S_n = n^2 + n$，求a_n的通项公式

等比数列

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示。

如数列$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...$，是等比数列，公比$q = 2$

以下等比数列的公比分别是多少?

$3, 9, 27, 81, 243, 729...$

$4, 28, 196, 1372, 9604...$

$1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1$

通项公式

$a_n = a_1 q^{n-1}$，其中a_1是首项，q是公比

以下等比数列的通项公式是什么?

$3, 9, 27, 81, 243, 729...$

$4, 28, 196, 1372, 9604...$

$1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1$

前n项和

- 当$q=1$时，等比数列的前n项和的公式为$S_n=na_1$
- 当$q\neq 1$时，等比数列的前n项和的公式为$S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}$

推导：

$S_1=a_1=a_1q^0$

$S_2=a_1+a_2=a_1q^0+a_1q^1$

$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1q^0+a_1q^1+a_1q^2$

$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n=a_1q^0+a_1q^1+a_1q^2+...+a_1q^{n-1}$

$qS_n=a_1q+a_2q+a_3q+...+a_nq$

$S_n-qS_n=a_1-a_nq$，则$(1-q)S_n=a_1-a_nq$

故当$q\neq 1$时，$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

求以下等比数列的和

$4,8,16,32,64,128....$

$3,9,27,81,243,729...$
