幂

什么是幂?

通常幂是指一个数自乘若干次的形式，如：$a^n = a \times a \times a \times ... \times a$，这里有n个a自乘

我们称a为底数、n为指数、a^n为a的n次幂或a的n次方

例如：$2^3 = 2 \times 2 \times 2$，这时$a = 2$、$n = 3$

注：以上幂的表达式其实是默认指数n为正整数的情形，当n不是正整数时，幂的表达式是怎样的呢?

$$2^{-3} = ?$$

$$2^0 = ?$$

$$2^{\frac{1}{2}} = ?$$

上述幂的表达式中指数n分别等于-3、0、$\frac{1}{2}$

对指数n进行讨论

1. 指数n为正整数

   $a^n = a \times a \times a \times ... \times a$，表示n个a相乘

   特别的，当$n = 2$时，我们也称a^2为a的平方；当$n = 3$时，我们也称a^3为a的立方

2. 指数n为0

   当底数a不为0时，$a^0 = 1$

   如：$2^0 = 1$、$(-3)^0 = 1$、$\frac{1}{4}^0 = 1$等

3. 指数n为负整数

   $a^n = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times ... \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^n}$，表示n个$\frac{1}{a}$相乘

   例如：$2^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$

4. 指数n为分数时

   这里我们先讨论n的分子是1，分母是正整数的情形，如n等于$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$等

   假设$n = \frac{1}{m}$，m为正整数（2、3、4等）

$$a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$$，表示a的m次方根，指的是谁的m次方等于a

特别的，当$n=\frac{1}{2}$时，$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$，表示a的2次方根，也称a的平方根，此时$\sqrt[2]{a}$这里的2可以省略，即$\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}$

当$n=\frac{1}{3}$时，$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$，表示a的3次方根，也称$a$的立方根

例如：$16^{\frac{1}{4}}$表示的是谁的4次方等于16，我们知道$2^4=16$且$(-2)^4=16$，所以$16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$和$-2$

$27^{\frac{1}{3}}$表示的是谁的3次方等于27，我们知道$3^3=27$，所以$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$

$16^{\frac{1}{2}}$表示的是谁的2次方等于16，我们知道$4^2=16$且$(-4)^2=16$，所以$16^{\frac{1}{2}}=4$和-4

幂运算规则

1. 同底数幂的乘法

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

规则：幂a^m与幂a^n有相同的底数a，此时两个幂相乘时，底数a不变，指数相加

例如：$2^3\times 2^4=2^{3+4}=2^7=128$

2. 同底数幂的除法

$$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

规则：幂a^m与幂a^n有相同的底数a，此时两个幂相除时，底数a不变，指数相减

例如：$2^4\div 2^3=2^{4-3}=2$

3. 幂的乘方

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\ldots\times a^m$$，即有n个a^m相乘

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\ldots\times a^m=a^{m+m+\ldots+m}=a^{m\times n}$$

例如：$(3^2)^3=3^2\times 3^2\times 3^2=3^{2+2+2}=3^6=729$

4. 积的乘方

$$(a\times b\times c)^m=a^m\times b^m\times c^m$$

规则：当一个幂是由多个数的乘积组成时，可以将这些数分别乘方再相乘

例如：$(2\times 3\times 4)^2=2^2\times 3^2\times 4^2=576$

对指数n为任意分数

假设$n=\frac{q}{p}$，p和q为非0整数

$$a^{\frac{q}{p}}=?$$

推导一下

$$a^{\frac{q}{p}}=(a^q)^{\frac{1}{p}}=\sqrt[p]{a^q}$$

例如：$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$