

# 整除

## 定义

设 $a, b$ 是整数,  $b \neq 0$ . 如果有一个整数 $c$ , 它使得 $a = b \times c$ , 则 $a$ 叫做 $b$ 的倍数,  $b$ 叫做 $a$ 的因数, 这时我们说,  $b$ 能整除 $a$ 或 $a$ 能被 $b$ 整除, 我们用符号 $b|a$ 来表示这种整除关系.

即:  $\frac{a}{b}$  或  $a \div b$

- $a, b$ 是整数
- $b$ 不等于0
- $\frac{a}{b}$  或  $a \div b$ 的余数为0
- $a$ 是 $b$ 的倍数
- $b$ 是 $a$ 的因数

## 绝对值

任意一个实数 $a$ , 我们用记号 $|a|$ 来表示:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$|a|$ 叫做 $a$ 的绝对值

如:  $|2| = |-2| = 2$

## 引理

以下引理需要记忆, 不要求证明

1. 如果 $a, b$ 是两个整数并且满足 $a|b$ , 则 $(-a)|b$ 、 $a|(-b)$ 、 $(-a)|(-b)$ 、 $|a||b|$   
如 $a=3, b=9$ , 有 $3|9$ , 则 $(-3)|9$ 、 $3|(-9)$ 、 $(-3)|(-9)$ 、 $|3||9|$
2. 如果 $a, b, c$ 都是整数并且 $a|b, b|c$ , 则有 $a|c$   
如 $a=3, b=9, c=18$ ,  $3|9, 9|18$ , 则 $3|18$
3. 如果 $a, b$ 都是整数并且 $|a| < |b|, |b||a|$ , 则有 $a=0$   
如 $a=0, b=-5$
4. 如果 $a, b$ 是整数,  $b \neq 0$ , 则一定有并且只有两个整数 $q, r$ , 可使 $a = b \times q + r, 0 \leq r < |b|$ , 成立  
如 $a=9, b=3$ , 则 $9 = 3 \times 3 + 0$   
如 $a=10, b=3$ , 则 $10 = 3 \times 3 + 1$

即两个整数相除, 除数不为0时, 商和余数是确定且唯一的