排列、组合

排列

假设有3个字母，分别是a、b、c，现在将这3个字母按顺序排成一队，请问有多少种排队方法?

①号位 ②号位 ③号位

- 枚举法
  - a排一号位

    a b c

    a c b
  - b排一号位

    b a c

    b c a
  - c排一号位

    c a b

    c b a
- 乘法原理

  将a、b、c三个字母按顺序排成一队，要分为3个步骤

  1. 把①号位分配给a、b、c中的一个，有3种方法
  2. 把②号位分配给剩下两个字母中的一个，有2种方法
  3. 把③号位分配给最后一个字母，有1种方法

  所以根据乘法原理，总共的排队方法有 $3 \times 2 \times 1 = 6$种

抽象与推广

将3个字母a、b、c按顺序排成一队，可以抽象为将3个不同元素按顺序排成一队。

我们知道将3个不同元素按顺序排成一队有$3 \times 2 \times 1 = 6$种方法；

通过乘法原理，我们同样能够知道，

将4个不同元素按顺序排成一队有$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$种

将5个不同元素按顺序排成一队有$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$种

推广到n个不同元素按顺序排成一队有$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$种

我们将这种n个不同元素按顺序排成一队，叫做全排列，用A_n^n表示

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

其中$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$也是$n!$，读作“n的阶乘”，所以

$$A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

如将5个不同元素按顺序排成一队表示为A_5^5，有$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$种

假设我们要从4个不同元素中选出两个按顺序进行排列，请问有多少种排队方法?

①号位 ②号位

将4个不同元素中的两个按顺序进行排列，可以分为两个步骤

1. 把①号位分配给4个元素中的一个，有4种方法
2. 把②号位分配给剩下3个元素中的一个，有3种方法

根据乘法原理，总共的排队方法有$4 \times 3 = 12$种

同样的，通过乘法原理，我们能够知道：

从n个不同的元素中，取出m个元素$(m < n)$，按顺序排成一列，有$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (m-n+1)$种；

我们将从n个不同的元素中，取出m个元素$(m < n)$，按顺序排成一列，叫作选排列，用A_m^n表示

$$A_m^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (m-n+1)$$

$$A_m^n = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (m-n+1) \times (m-n) \times ... \times 2 \times 1}{(m-n) \times ... \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(m-n)!}$$

如从4个不同元素中选出两个进行排列表示为A_4^2，有$4 \times 3 = 12$种方法

组合

从4个不同元素中选取两个元素，按顺序进行排列的另一个思考角度

两步算法

1. 从4个不同元素中选取两个元素
2. 将选取出的两个元素进行全排列

我们知道从4个不同元素中选取两个，按顺序进行排列有A_4^2种方法；

1. 假设从4个不同元素中选取两个元素，有n种选法
2. 将选取出的两个元素进行全排列，有A_2^2种方法

那么$A_4^2 = n \times A_2^2$，则$n = \frac{A_4^2}{A_2^2}$

即从4个不同元素中选取两个元素，有$\frac{A_4^2}{A_2^2}$种选法

现在我们推广到从n个不同元素中选取m$(m \leq n)$个元素为一组，那么总组合数是多少?

1. 假设从n个不同元素中选取m个元素，有n种选法
2. 将选取出的m个元素进行全排列，有A_m^m种方法

根据乘法原理，从n个不同元素中选取m$(m \leq n)$个元素，按顺序排成一列有$A_m^m \times n$种

根据选排列，我们知道从n个不同元素中选取m$(m \leq n)$个元素，按顺序排成一列可以表示为A_n^m

所以，$A_n^m = A_m^m \times n$，

即：$n = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (m-n+1)}{m \times (m-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$

我们称从n个不同元素中无序的选取m$(m \leq n)$个元素为一组，叫做从n个元素中取出m个元素的一个组合，这样的组合个数称为组合数，用C_n^m表示

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-m+1)}{m \times (m-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

如从4个不同元素中选取两个元素的组合数可以表示为$C_4^2 = \frac{A_4^2}{A_2^2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

与排列的区别

组合数是从n个不同元素中选取m$(m \leq n)$个元素，选取出的m个元素不排列；而排列数还需要对选取出的m个元素进行全排列，所以组合数相比于排列数，需要除去重复的A_m^m个元素

性质

$$C_n^{n-m} = C_n^m$$

$C_n^{n-m} = \frac{A_n^{n-m}}{A_{n-m}^{n-m}} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$

$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{(n-m)! \times m!}$

小练习

$5A_5^3 + 4A_4^2 =$

$A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4 =$

$C_{15}^3 =$

$C_{200}^{197} =$

用0~9可以排成：
1. 多少个不同的三位数
2. 多少个没有重复数字的三位数
3. 多少个没有重复数字的三位奇数
4. 多少个没有重复数字的三位偶数
5. 多少个没有重复数字且比300大的三位偶数

从5名乒乓球运动员中选3名参加单打比赛，共有多少种不同选法?

从5名乒乓球运动员中选3名，并确定出场顺序，以参加团体比赛，共有多少种不同选法?

从5种菜中选出不同的2种，并种在不同的土地上进行实验，共有多少种不同的种植方法?

把9本课外书分给甲、乙、丙三名同学，每个人分3本，则共有多少种不同的分法?

把9本课外书分给甲、乙、丙三名同学，一人分4本，一人分3本，一人分2本，则共有多少种不同的分法?

将4名志愿者派去三个奥运场馆做志愿者，要求每个场馆至少有1名志愿者，共有多少种分法?