

计数问题

捆绑法

如果指定某些元素在排列中**相邻**，那么可以采用“捆绑法”，将这些元素**当作一个整体考虑**。

例：5个同学小张、小明、小红、小亮、小李排成一行，但是**要求小明和小亮必须相邻**，求方案总数？

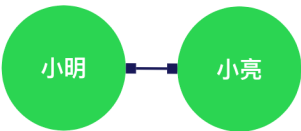


1. 我们可以把小明和小亮**捆绑**到一起，当成1个人来看待，然后进行全排列



此时有 A_4^4 种方案

2. 对于每种方案里的小明和小亮，他们的排列顺序也可以是不同的，所以要对小明和小亮进行全排列



有 A_2^2 种方案

3. 根据题意，完成排列需要1、2两个步骤，所以由**乘法原理**，我们知道方案总数是

$$A_4^4 \times A_2^2 = 48 \text{种}$$

插空法

如果指定某些元素在排列中**不能相邻**，那么可以采用“插空法”，把这些元素插入到其他元素中。

例：5个同学小张、小明、小红、小亮、小李排成一行，但是**要求小明和小亮不能相邻**，求方案总数？



1. 我们可以先把除小明和小亮之外的3个同学排成一行，即对小张、小李、小红三个人进行全排列



方案数为 A_3^3

2. 此时小张、小李、小红三个人两边共有4个空隙，小明和小亮从中选择2个不同的空隙

方案数为 A_4^2

3. 再利用乘法原理

总方案数为 $A_3^3 \times A_4^2 = 72$

隔板法

隔板法一般用来求解n个相同元素分到m个不同容器中，且允许容器为空的方案数。

例：把10个相同的苹果放入3个不同的盘子，盘子可以为空，求方案总数？



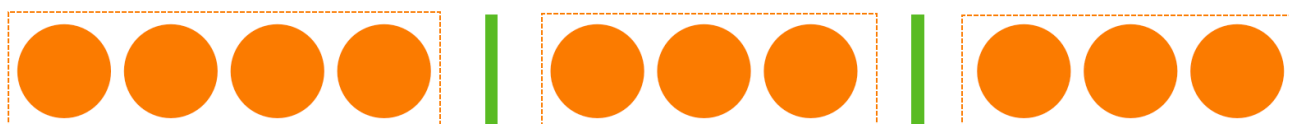
1. 此时我们可以再添加2个苹果，如：



2. 将新添加的2个苹果想象成挡板，如：



3. 将第一个挡板左边的苹果放入第一个盘，将两个挡板中间的苹果放入第二个盘，将第二个挡板右边的苹果放入第三个盘



所以把10个相同的苹果放入3个不同的盘子，盘子可以为空，这个问题可以转换为在12个相同的苹果中，任意选择两个苹果当成挡板，此时有 C_{12}^2 种方案

小练习

1. 把8个同样的球放在5个相同的袋子里，允许有的袋子空着不放，问共有多少种不同的分发？

2. 5个小朋友并排站成一列，其中有两个小朋友是双胞胎，如果要求这两个小朋友必须相邻，有多少种不同的排列方法？

3. 把10个三好学生名额分配到7个班级，每个班级至少有一个名额，一共有多少种不同的分配方案？

4. 有5副不同颜色的手套，一次性从中取6支手套，恰好能配成两幅手套的不同取法有多少种？

5. 有6个人，两个人组成1队，总共组成3队，不区分队伍的编号。不同的组队情况有多少种？

6. 1、1、2、2、3这5个数组成不同的三位数有多少种？

7. 书架上有21本书，编号为1~21，从中选4本，其中每2本的编号都不相邻的选法有多少种？

8. 10个一样的球放在编号为1、2、3的3个盒子中，要求每个盒子中的球数不少于1个，有多少种不同的放法？