姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分

随机行走问题的探究及随机数的应用

陈正　2013301020075　13级天眷班

【摘要】

随机系统是我们经常遇到的一类随机性占主导地位的系统，但是其并不是毫无规律可循，相反，随机系统大多数具有其独特的随机性规律，而 Python 语言具有其独特的随机数处理方式，有助于我们更好的了解和使用随机系统。本文通过对随机系统中的一个问题——随机行走问题的探究来熟悉和使用 Python 语言中的随机数生成语句，并利用其研究概率论中的某些随机数问题。

I 介绍

随机问题在生活与生产中随处可见，从股市走势、楼盘涨跌，到掷骰子、投飞镖，无一不与随机问题有关，这种随机性较强的随机系统一直受到人们普遍的关注，并得到了较好的探索与研究。

随机问题中一个典型的模型就是随机行走模型，对于其的研究表明，随机行走模型与物理学中的扩散模型有着相当大的联系，对随机行走模型的研究有助于我们对于扩散的了解的深入。

II 正文

一、随机行走问题的探究

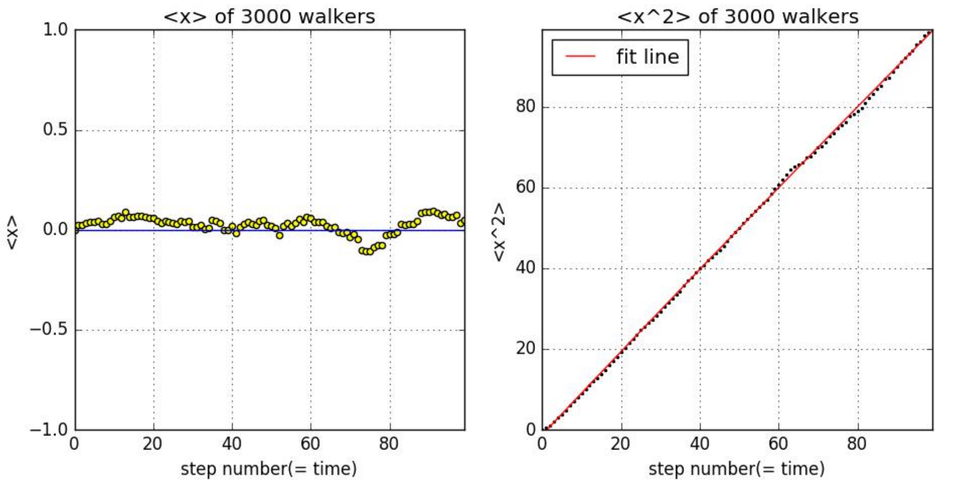
随机行走问题可以精炼为如下表述：初始时刻处在原点位置的粒子，每隔相同的时间间隔就随机性地向某一方向移动一定的距离。其向各方向移动的概率可能相等也可能不等，每次移动的距离可能一定也可能只是在某一范围内随机，这些不同的条件对应着不同类型的物理模型。为使得问题简化，选择对一维随机行走模型进行探究（即随机方向只有两个），假设每次行走距离一定。

（一）等可能随机行走

假设初始时刻粒子处于原点（$x=0$处），每次行走距离为一个单位长度，每隔一个相同的时间间隔行走一步，向正负X轴方向概率相等，均为$\frac{1}{2}$，总共有3000个粒子作为研究

对象。

通过 Python 产生$(0,1)$的随机数，由其是否大于0.5来确定粒子向 X 轴正向还是负向运动，以此类推，将 3000 个粒子都进行“随机行走”，得到如下图所示的相对原点的位置和时间的关系图以及离原点距离平方和与时间的关系图：

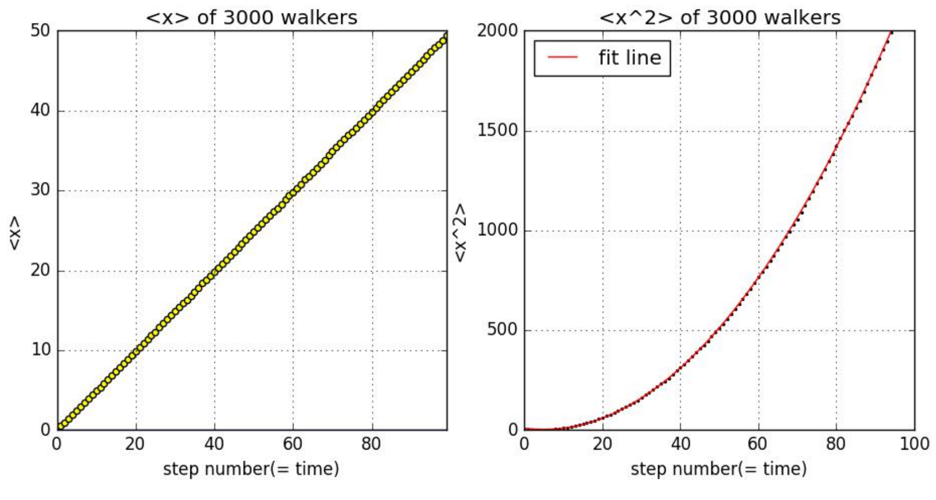


可以看出，粒子在原点附近波动，相对原点的平均距离和为 0，而与原点距离的平方和与时间则是呈线性关系。

（二）不等可能随机行走

与等可能随机行走所做的假设基本一致，只是在粒子选择方向上的概率有所不同，假设向某一方向的行走概率为 0.75，而向另一方向的概率为 0.25，其余均与上一问题相同。

同样适用随机数来确定粒子运动方向，求解作图可得如下关系图：

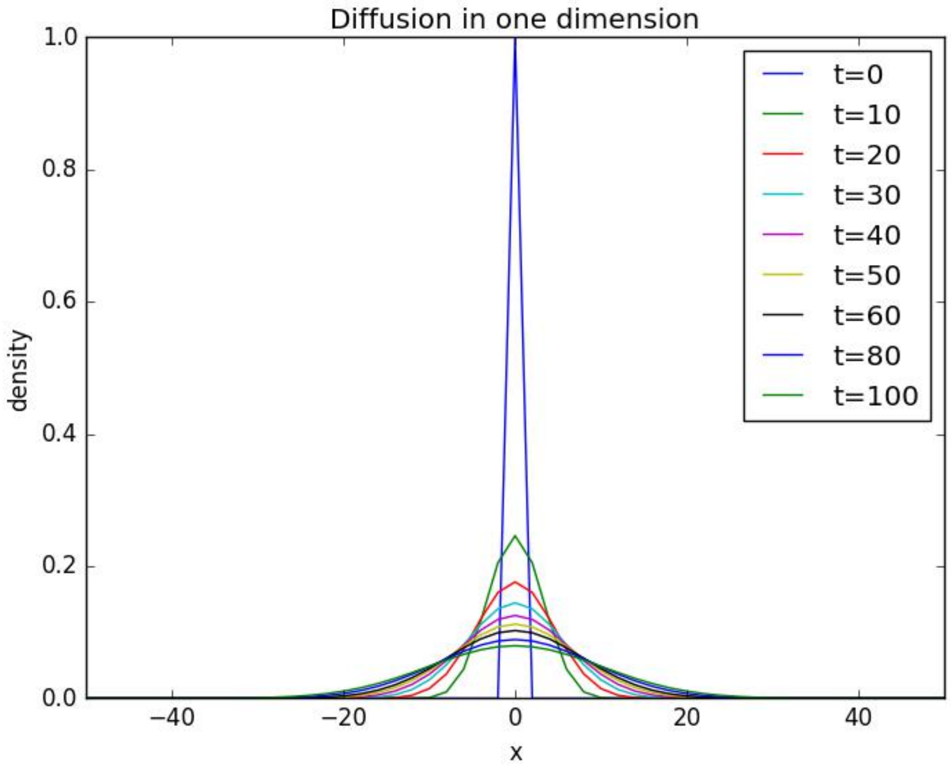


可以看出粒子的平均速度偏移平衡位置移向概率较高的方向，切随着时间增长呈线性增长，而其与原点距离的平方和则是一个近似二次函数。

（三）随机行走与扩散

继续使用之前的模型，选择考虑一段时间后的密度分布来探究随机行走中蕴含的扩散关系。

由密度函数写出相应程序并作出随着时间t变化的不同时刻的密度分布图，如下（其中$t=0,10,20,30,40,50,60,80,100$）：



可以得出密度曲线随着时间增长而不断变矮、变宽，但是其总面积则不发生变化，这与扩散现象的理论基本一致。说明随机行走模型可以在一定程度上对扩散现象进行定性解释。

二、随机数的其他应用

Python 中的随机数除了可以用来进行随机行走这类明显的随机问题进行研究外，还可以对概率中的蒙特卡洛法的问题进行求解。

（一）会面问题

1、*问题提出*

甲、乙两人约定 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人 $10\,\mathrm{min}$，过时即离去。求两人的会面概率。

2、*理论分析*

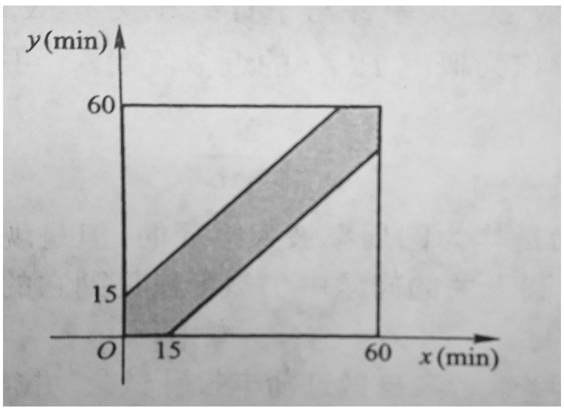
以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间（从 6 时起计，以 min 为单位），则两人能会面的充要条件是：$|x-y|\le 10,$

如图建立坐标系，实验结果为（x, y），则会面概率

$P(\text{两人能会面})=\{(x,y):|x-y|\le 10\},$

3、*程序求解*

由随机数产生，判断 $|x-y|\le 10$ 占总个所得（x, y）的比例即为待求概率 P。下表展示了不同统计基数下的 P 值。



实验次数	100	1000	10000	100000	1000000
P	0.33	0.322	0.3184	0.31725	0.3146

由表中数据可以看出，随着实验基数的不断增大，P 值趋向于稳定在 $P=0.315$ 附近，这与理论解 $P=\frac{60^2-50^2}{60^2}=\frac{11}{36}\approx 0.3056$ 误差不大，可以看出这一方法的可行性。

（二）蒲丰投针问题

1、*问题提出*

平面上画一些等距离的平行线，相邻平行线的距离为 $a(a>0)$。向平面任意投掷一枚长为 $l(l<a)$ 的针，由针与平行相交的概率求圆周率 π。

2、*理论分析*

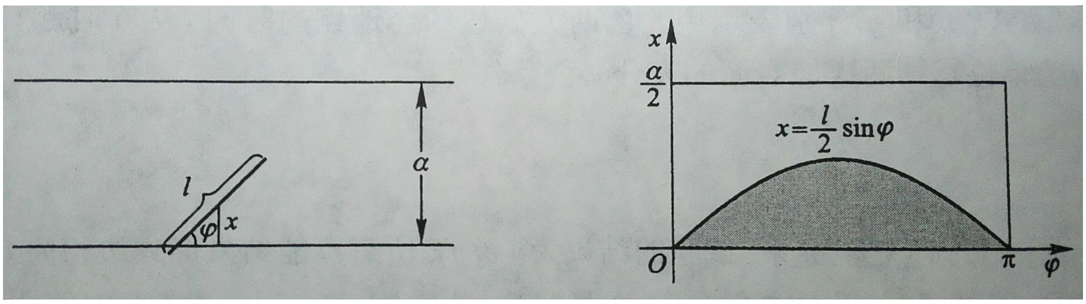
以 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离，又以 φ 表示针与平行线的交角（见图 2），易知样本空间为

$$\Omega=\{(\varphi,x):0\le\frac{\alpha}{2},0\le\varphi\le\pi\},$$

记 $A=$"针与平行线相交"，则

$A=\{(\varphi,x):x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$，此区域在图 1.2 中阴影表示。由此可得概率

$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\pi\cdot\frac{a}{2}}=\frac{2l}{\pi a}$。我们通过程序求得 $P(A)$ 之后就可得出相应的 π 值。



3、*程序求解*

由随机数程序易得下表，表示不同的 a,l 在实验了 1000000 次的情况下所得的圆周率值：

a, l	1, 0.4	1, 0.8	2, 1	3, 1	4, 1
P(A)	0.254702	0.509262	0.318289	0.212148	0.159201
π	3.1409	3.1418	3.1418	3.1426	3.14907

由上图可以看出所得圆周率的值在一定范围内与π的理论值吻合很好，故此可以作为一个求得圆周率的方法。

III 结论

1、随机行走模型的实验与理论吻合较好，一定程度上揭示了扩散现象来自于运动不等概率的机制原理；

2、随机行走模型与扩散之间存在一定的联系，但是要想更好地用随机行走模型来解释扩散，需要将随机行走模型进一步改进完善；

3、Python 中的随机数有助于解决概率论中某些蒙特卡洛（Monte Carlo）方法的问题。

IV 参考文献

1. 计算物理（第二版），清华大学出版社；
2. The random walk model: the drunkard and diffusion，郭帅斐；
3. Python 语言在随机过程中的应用，吴雨桥（部分代码）；
4. 概率论与数理统计（第二版），高等教育出版社。

附：程序代码见本人 Github 软件池“Final-Paper”文件夹内。