记忆&理解的关键：对矩阵分块，将乘法转为向量间的乘法。（分块乘法时应保证块与块间的乘法有意义）
矩阵和矩阵、矩阵和向量间的

1. 矩阵 × 向量

$A_{n\times m}$　$x_{m\times 1}$

① 行观点：

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ \vdots \\ a_n^T x \end{bmatrix}$$

每行为A的行和x的内积。
（以分块矩阵视角，相当于对A按行分块，对x不分块，即为 n×1 向量和 1×1 向量之积）

② 列观点：

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$$

以x中元素为系数对A的列进行线性组合。
（以分块矩阵视角，相当于对A按列分块，对x按行分块，即为 1×m 向量和 m×1 向量之积）

2. 矩阵 × 矩阵

$A_{n\times m}$　$B_{m\times p}$

△ A、B分块方式不同

① A不分块，B按列看：

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

相当于得到AB的列组合。

② B不分块，A按行看：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1^T B \\ \vdots \\ a_n^T B \end{bmatrix}$$

③ A按行看，B按列看：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^Tb_1 & a_1^Tb_2 & \cdots & a_1^Tb_p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n^Tb_1 & a_n^Tb_2 & \cdots & a_n^Tb_p \end{bmatrix}$$

④ A按列看，B按行看：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix} = a_1b_1^T + a_2b_2^T + \cdots + a_mb_m^T$$

△ A、B分块方式相同

引入一种对乘法的理解方式：

n×n矩阵相当于描述n维空间的坐标系，一列为一根轴。向量相当于一个坐标。

当我们用向量×矩阵，实际上是假设该向量为该矩阵坐标系上坐标，然后放弃使用该矩阵作坐标系，将向量表示的坐标转换成标准正交基下的坐标。用矩阵×矩阵，实际上是相当于对多个坐标进行如上处理。

e.g. 坐标 $a=(a_1\ \ a_2)$ 为行向量。$B=\begin{pmatrix}b_1^T\\ b_2^T\end{pmatrix}$ 为一组基。 $aB=(a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix}b_1^T\\ b_2^T\end{pmatrix}=a_1b_1^T+a_2b_2^T$

坐标们 $A=\begin{pmatrix}a_1^T\\ a_2^T\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}b_1^T\\ b_2^T\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_1^T+a_{12}b_2^T\\ a_{21}b_1^T+a_{22}b_2^T\end{pmatrix}$

若惯用列向量，则 aB 变为 Ba，将坐标和基均看作列向量。

综上：

① A、B均按行看： $\rightarrow$ a_1^T对B做行组合。

$$AB=\begin{pmatrix}a_1^T\\ \vdots\\ a_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1^T\\ \vdots\\ b_m^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1^T+\cdots+a_{1m}b_m^T\\ \vdots\\ a_{n1}b_1^T+\cdots+a_{nm}b_m^T\end{pmatrix}$$

↖ 坐标们 ↖ 组基

② A、B均按列看： $\rightarrow$ b_1对A做列组合

$$AB=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & \cdots & b_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}a_1+\cdots+b_{1m}a_m & \cdots & b_{p1}a_1+\cdots+b_{pm}a_m\end{pmatrix}$$

↖ 组基 ↖ 坐标们