6.4 非线性方程组的数值解法

6.4.1 非线性方程组的不动点迭代法

6.4.2 非线性方程组的Newton法

6.4.3 非线性方程组的Newton法

6.4.1 非线性方程组的不动点迭代法

设含有n个未知数的n个方程的非线性方程组为

$$F(x)=0 \qquad (6,4,1)$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$为n维列向量，

$$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots f_n(x))^T$$

$f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个是x的非线性函数，并假设自变量和函数值都是实数。多元非线性方程组(6.4.1)与一元非线性方程f(x)=0具有相同的形式，可以与一元非线性方程并行地讨论它的迭代解法。例如不动点迭代法和Newton型迭代法。但是，这里某些定理的证明较为复杂，我们将略去其证明。

把方程组(6.4.1)改写成下面便于迭代的等价形式：

$$x=\Phi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))^T \tag{6.4.2}$$

并构造不动点迭代法

$$x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)}),k=0,1,\cdots \tag{6.4.3}$$

对于给定的初始点$x^{(0)}$，若由此生成的序列$\{x_k\}$收敛，$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$

且$\phi(x)$是连续的，即 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$是自变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的

连续函数. 则 x^*满足$x^*=\phi(x^*)$,即x^*是迭代函数$\phi(x)$的不动点，

从而x^*是方程组(6.4.1)的解。

版权所有：中南大学数学院

例6.11 设有非线性方程组

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases} \tag{6.4.4}$$

把它写成等价形式

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2) = \dfrac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2 + 8) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = \dfrac{1}{10}(x_1 x_1^2 + x_1 + 8) \end{cases}$$

并由此构造不动点迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \dfrac{1}{10}[(x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2 + 8] \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \dfrac{1}{10}[x_1^{(k)}(x_2^{k})^2 + x_1^{(k)} + 8] \end{cases} \tag{6.4.5}$$

$$k = 0,1,\cdots$$

版权所有：中南大学数学院

取初始点 $x^{(0)}=(0,0)^T$。计算结果列于表6—9，可见迭代收敛到方程的解 $x^*=(1,1)^T$

表 6-9

k	0	1	2	…	18	19
$x_1^{(k)}$	0	0.8	0.928	…	0.999999972	0.999999989
$x_2^{(k)}$	0	0.8	0.931	…	0.999999972	0.999999989

函数也称映射，若函数 $\Phi(x)$ 的定义域为 $D\subset R^n$，则可用映射符号→简便地表示为 $\Phi: D\subset R^n\to R^n$。为了讨论不动点迭代法（6.4.3）的收敛性，先定义向量值函数的映内性和压缩性。

版权所有：中南大学数学院

定义6.3 设有函数 $\Phi: D\subset R^n \to R^n$ 若 $\Phi(x)\in D, \forall x\in D$ 则称 $\Phi(x)$在D上是映内的，记做 $\Phi(D)\subset D$，又若存在常数 $L\in(0,1)$，使得

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\le L\|x-y\|, \forall x, y\in D$$

则称 $\Phi(x)$ 在**D**上是压缩的，**L**称为压缩系数

压缩性与所用的向量范数有关，函数 $\Phi(x)$对某种范数是压缩的，对另一种范数可能不是压缩的。

定理6.7（**Brouwer不动点定理**）若 Φ在有界凸集 $D_0\subset D$ 上连续并且映内，则 Φ 在内 D_0 存在不动点。

定理6.8（压缩映射定理）设函数 $\Phi: D\subset R^n \to R^n$ 在闭集 $D_0\subset D$ 上是映内的，并且对某一种范数是压缩的，压缩系数为**L**，则

（**1**）$\Phi(x)$ 在 D_0上存在唯一的不动点 x^* 。

（**2**）对任何初值 $x^{(0)}\in D_0$迭代法（**6.4.3**）生成的序列 $\{x^{(k)}\}\subset D_0$ 且收敛到 x^* ，并且有误差估计式

版权所有：中南大学数学院

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{L}{1-L}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$$

例6.12 对于例6.11，设 $D_0=\{(x_1,x_2)^T: -1.5\le x_1,x_2\le 1.5\}$
试证：对任何初始点 $x^{(0)}\in D_0$， 由迭代法（**6.4.5**）生成的序列的都收敛到方程（**6,4.4**）在 D_0 中的唯一解 $x^*=(1,1)^T$

证：首先容易算出，对于任何 $x=(x_1,x_2)^T\in D_0$， 都有

$$0.8\le \varphi_1(x_1,x_2)\le 1.25 \qquad 0.3125\le \varphi_2(x_1,x_2)\le 1.2875$$

因此，迭代函数 Φ 在 D_0 上是映内的。进而，对于任何

$$x=(x_1,x_2)^T\in D_0 \qquad y=(y_1,y_2)^T\in D_0$$

都有 $|\varphi_1(x)-\varphi_1(y)|=\dfrac{1}{10}\left|(x_1+y_1)(x_1-y_1)+(x_2+y_2)(x_2-y_2)\right|$

$$\le \frac{3}{10}(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)=0.3\|x-y\|_1$$

版权所有：中南大学数学院

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)| &= \frac{1}{10}\left|x_1-y_1+x_1x_2^2-y_2y_2^2\right| \\
&= \frac{1}{10}\left|x_1-y_1+x_1x_2^2-y_1x_2^2+y_1x_2^2-y_1y_2^2\right| \\
&= \frac{1}{10}\left|(1+x_2^2)(x_1-y_1)+y_1(x_2+y_2)(x_2-y_2)\right| \\
&\le \frac{1}{10}(3.25|x_1-y_1|+4.5|x_2-y_2|) \le 0.45\|x-y\|_1
\end{aligned}
$$

从而

$$
\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_1 = |\varphi_1(x)-\varphi_2(y)|+|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)| \le 0.75\|x-y\|
$$

可见，函数Φ在上 D_0是压缩的。因此，由定理**6.8**得知结论成立。

以上讨论了迭代法在 D_0 的收敛性，下面讨论局部收敛性。

定义6.4 设x^*为Φ的不动点，若存在x^*的一个领域$S\subset D$，对一切$x^{(0)}\in S$，由（**6.4.3**）式产生的序列$\{x^{(k)}\}\subset S$且$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$，则称$\{x^{(k)}\}$具有局部收敛性。

定义6.5 设$\{x^{(k)}\}$收敛于x^*，存在常数$p\geq 2$及常数**c>0,**使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|x^{(k+1)}-x^*\right\|}{\left\|x^{(k)}-x^*\right\|}=c$$

则$\{x^{(k)}\}$称为**p阶收敛**。

定理6.9 设$\Phi:D\subset R^n\to R^n$，$x^*\in D_0$为Φ的不动点，若存在开球$S=S(x^*,\delta)=\{x:\left\|x-x^*\right\|<\delta\}\subset D$，常数$L\in(0,1)$，使

$$\left\|\Phi(x)-\Phi(x^*)\right\|\leq L\left\|x-x^*\right\|,\forall x\in S$$

则由**(6.4.3)**产生的序列$\{x^{(k)}\}$局部收敛至x^*

证：任给$x^{(0)}\in S$，一般的，设$x^{(k)}\in S$，即$\left\|x-x^*\right\|<\delta$，则

$$\left\|x^{(k+1)}-x^*\right\|=\left\|\Phi(x(^{(k)})-\Phi(x^*)\right\|\leq L\left\|x^{(k)}-x^*\right\|<L\delta<\delta$$

得知$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x^*\right\|=0$，从而有 $\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$。于是，由定义**6.4**知迭代法（**6.4.3**）在点x^*处局部收敛。定理得证。

与单个方程的情形类似，有时可以用关于导数的条件代替压缩条件来判别收敛性

定理6.10 设$\Phi:D\subset R^n\to R^n$，Φ在**D**内有一不动点x^*，且Φ在x^*处可导，且谱半径 $\rho(\Phi'(x^*))=\sigma<1$，则迭代法（**6.4.3**）在点$x^*$处局部收敛，其中，函数$\Phi(x)$的导数为**Jacobi**矩阵（见*式）

利用谱半径与范数的关系$\rho(A)\le\|A\|$，我们可用$\left\|\Phi'\left(x^*\right)\right\|<1$代替定理**6.10**中的条件 $\rho(\Phi'(x^*))<1$

版权所有：中南大学数学院

$$\Phi'(x)=\begin{Bmatrix}\nabla\varphi_1(x)^T\\ \nabla\varphi_2(x)^T\\ \vdots\\ \nabla\varphi_n(x)^T\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_2 x}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n}\end{Bmatrix} \qquad (*)$$

例如，对于例6.11有

$$\Phi'(x)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\\ x_2^2 & +12x_1x_2\end{pmatrix}$$

对于例6 .12所取的区域 D_0,Φ 的不动点 x^* 在它的内部。容易验证，在 D_0 上有 $\left\|\Phi'\left(x^*\right)\right\|\le 0.75$，因此，迭代法（6.4.5）在点 x^* 处局部收敛。

版权所有：中南大学数学院

6.4.2 非线性方程组的Newton法

对于非线性方程组，也可以构造类似于一元方程的Newton迭代法。设 x^* 是方程组（6.4.1）的解，$x^{(k)}$是方程组的一个近似解。用点$x^{(k)}$处的一阶Taylaor展开式近似每一个分量函数值 $f_i(x^*)=0$ ，有

$$f_i(x^*) \approx f_i(x^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}(x_j^* - x_j^{(k)}), i = 1,2,\cdots,n$$

写成向量形式有 $F(x^*) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x_j^* - x^{(k)})$

其中$F'(x^{(k)})$为$F(x)$ 的Jacobi矩阵 $F'(x)$在的 $x^{(k)}$值，而

$$F'(x)=\begin{Bmatrix}\nabla f_1(x)^T\\ \nabla f_2(x)^T\\ \vdots\\ \nabla f_n(x)^T\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2 x}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{Bmatrix}$$

若矩阵$F'(x^{(k)})$非奇异，则可以用使（**6.4.6**）右端为零的向量作为x^*新的一个近似值，记为$x^{(k+1)}$，于是得到**Newton迭代法**

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-(F'(x))^{-1}-F(x),k=0,2,\cdots \qquad \text{（6.4.7)}$$

其中$x^{(0)}$是给定的初值向量。如果写成一般不动点迭代$x^{k+1}=\Phi(x^{(k)})$的形式，则**Newton**迭代函数为

$$\Phi(x)=x-(F'(x))^{-1}F(x) \qquad \text{(6.4.8)}$$

在**Newton**法实际计算过程中，第**k**步是先解线性方程组

$$F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \qquad \textbf{(6.4.9)}$$

解出$\Delta x^{(k)}$后，再令$x^{(k+1)} = x^k + \Delta x^k$，其中包括了计算向量$F(x^{(k)})$和矩阵$F'(x^{(k)})$

例**6.13** 用**Newton**法解例**6.11**的方程组（**6.4.4**）

解 对该方程组有

$$F(x)=\begin{pmatrix} x_1^2-10x_1+x_2^2+8 \\ x_1x_2^2+x_110x_2+8 \end{pmatrix} \qquad F(x)=\begin{pmatrix} 2x_1-10 & 2x_2 \\ x_2^2+1 & 2x_1x_2-10 \end{pmatrix}$$

取初始向量$x^{(0)}=(0,0)^T$，解方程组 $F'(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)})$，即

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}\Delta x^{(0)} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

版权所有：中南大学数学院

求出$\Delta x^{(0)}$后，$\Delta x^{(1)}=x^{(0)}+\Delta x^{(0)}=(0.8,0.88)^T$。同理计算$x^{(2)},\cdots$，结果列于表6－10。可见，**Newton**法的收敛速度比例**6.11**中的迭代法（**6.4.5**）要快的多。

表 **6-10**

k	0	1	2	3	4
x_1^k	0	0.80	0.991787221	0.999975229	1.00000000
x_2^k	0	0.88	0.991711737	0.999968524	1.00000000

关于**Newton**法的收敛性，有下面的局部收敛性定理

版权所有：中南大学数学院

定理6.11 设$F:D\subset R^n \to R^n, x^*$满足$F(x^*)=0$。若有$x^*$的开邻域$S_0\subset D$，$F'(x)$在其上连续，$F'(x^*)$可逆，则

（1）存在以x^*为中心，$\sigma>0$为半径的闭球$S=S(x^*,\sigma)\subset S_0$，使（**6.4.8**）式中的$\Phi(x)$对所有$x\in S$都有意义，并且$\Phi(x)\in S$。

(2)Newton迭代序列$\{x^{(k)}\}$在**S**上收敛于x^*且是超线性收敛。

（**3**）若还有常数$\alpha>0$，使

$$\|F'(x)-F'(x^*)\|\le\alpha\|x-x^*\|, \forall x\in S$$

则**Newton**迭代序列$\{x^{(k)}\}$至少二阶收敛于x^*。

虽然**Newton**法具有二阶局部收敛性，但它要求$F'(x^*)$非奇异。如果矩阵$F'(x^*)$奇异或病态，那么$F'(x^{(k)})$也可能奇异或病态，从而可能导致数值计算失败或产生数值步稳定。这时可采用“**阻尼Newton法**”，即把（**6.4.9**）改成

$$[F'(x^{(k)})+\mu_k I]\Delta x^{(k)}=-F(x^{(k)}),k=0,1,\cdots$$

其中的参数 μ_k 称为阻尼因子，$\mu_k I$ 称为阻尼项，解出 $\Delta x^{(k)}$ 后，令 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}$。加进阻尼项的目的，是使线性方程的系数矩阵非奇异并良态。当 μ_k 选的很合适时，阻尼**Newton**法时线性收敛的。

例6．14 用**Newton**法和阻尼**Newton**法求解方程$(x)=0$ ，其中

$$F(x)=\begin{pmatrix} x_1^2-10x_1+x_2^2+23 \\ x_1x_2^2+x_1-10x_2+2 \end{pmatrix}$$

解：易知该方程有一个解是 $x^*=(4,1)^T$。由于

版权所有：中南大学数学院

$$F'(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

是奇异的，取阻尼因子 $\mu_k = 10^{-5}$.若取 $x^{(0)} = (2.5,2.5)^T$

按 *Newton* 法有 $x^{(1)} = (3.538461538, 1.438461538)^T$,

$\cdots, \ x^{(25)} = (4.000000025, 1.000000025)^T$。

在按阻尼 *Newton* 法计算有 $x^{(1)} = (3.538463160, 1.438461083)^T$,

$\cdots, x^{(29)} = (4.000000286, 1.000000286)^T$。

可见，即使矩阵$F'(x^*)$奇异，只要$F'(x^{(k)})$非奇异，*Newton*法仍收敛，但收敛是线形的。因为次例题的维数太小，*Newton*法并没有出现奇异或数值稳定性问题，

版权所有：中南大学数学院

从而阻尼 *Newton* 法不仅没有显示出它的作用，反而使迭代次数更多。但可以看出，阻尼 *Newton* 法是线形收敛的。

用迭代法求解非线形方程时，初始值的选取至关重要。初值不仅影响迭代是否收敛，而当方程有解时，不同的初值可能收敛到不同的解。

例 6.15 用 *Newton* 法求解 $F(x)=0$, 其中

$$F(x)=\begin{pmatrix} x_1^2-x_2-1 \\ (x_1-2)^2+(x_2-0.5)^2-1 \end{pmatrix}。$$

解 该方程组的实数解是抛物线 $x_1^2-x_2-1=0$ 与圆（$x_1-2)^2+(x_2-0.5)^2-1=0$ 的交点。这两个实根是 $x^*\approx(1.067346086, \ 0.139227667)^T$ 和 $x^{**}\approx(1.546342883, \ 1.391176313)^T$。

如果取初时向量 $x^{(0)}=(0,0)^T$, 那么有 $x^{(1)}=(1.0625,-1.0000)^T,\dots,$

版权所有：中南大学数学院

$x^{(5)} = (1.067343609\ ,0.139221092\ )^T$，计算结果收敛到 x^*。

若取初值 $x^{(0)} = (2,2)^T$，则有 $x^{(1)} = (1.645833333,1.583333333)^T$，$\cdots, x^{(5)} = (1.546342883,1.391176313)^T$，计算结果收敛到 x^{**}。

一般说来，为了保证迭代的收敛性，初始值应当取在所求解的足够小的邻域内。有的实际问题可以凭经验取初值，有的则可以用某些方法预估一个近似解。从数学的角度讲，这是个相当困难的问题。

6.4.3 非线性方程组的Newton法

Newton 法有较好的收敛性，但是每步都要计算 $F'(x^{(k)})$ 是不方便的，特别是当 $F(x)$ 的分量函数 $f_i(x)$ 比较复杂时，求导数值是困难的。所以，我们用较简单的矩阵 A_k 代替 *Newton* 法的 $F'(x^{(k)})$，迭代公式是

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1} F(x^{(k)}),\ k = 0,1,\cdots。\qquad (6.4.10)$$

下一步是要确定A_{k+1}。若是单个方程，割线中$f'(x_{k+1})$可用差商$[f(x_{k+1})-f(x_k)]/(x_{k+1}-x_k)$代替。方程组的情形，$x^{(k+1)}-x^{(k)}$是向量，于是取具有性质

$$A_{k+1}(x^{(k+1)}-x^{(k)})=F(x^{(k+1)})-F(x^{(k)}) \qquad (6.4.11)$$

的矩阵 A_{k+1}代替 *Newton* 法中的 $F'(x^{(k+1)})$。在多元情形下，当 $x^{(k)}$和$x^{(k+1)}$已知时，由方程（6.4.11）不能确定矩阵 A_{k+1}($n>1$个方程中含有 $n^2>n$个未知量）。因此，为了确定矩阵 A_{k+1}，需要附加其他条件。一个可行的途径是令

$$A_{k+1}=A_k+\Delta A_k, \qquad rank\,(\Delta A_k)=m\geq 1。 \qquad (6.4.12)$$

称ΔA_k为增量矩阵，由此得到的迭代法（6.4.10）称为拟 *Newton* 法，（6.4.11）称为拟 *Newton* 方程。通常取 $m=1$或$m=2$。当 $m=1$时，称为秩 1方法。$m=2$时，称为秩 2方法。

下面一秩1的情形为例，说明确定 增量矩阵 ΔA_k 的方法。

秩为1的矩阵 ΔA_k 总可以表示为 $\Delta A_k = u_k v_k^T$，其中 $u_k, v_k^T \in R^n$ 为列向量。记

$$s_k = x^{(k+1)} - x^{(k)}, y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})。$$

选择 u_k 和 v_k，使得矩阵 $A_{k+1} = A_k + \Delta A_k$ 满足拟 $Newton$ 方程（6.4.11），即 $(A_k + u_k v_k^T)s_k = y_k$。

若 $v_k^T s_k \neq 0$，则由此可解出

$$u_k = \frac{1}{v_k^T s_k}(y_k - A_k s_k)\quad,$$

即 u_k 由 v_k 唯一确定。向量 v_k 的一个自然取法是令 $v_k = s_k$，因为只要 $x^{(k+1)} \neq x^{(k)}$（即迭代尚未终止），这时总有 $v_k^T s_k = \|s_k\|_2^2 \neq 0$。把上述 v_k 和 u_k 代入 ΔA_k 有

$$\Delta A_k = \frac{1}{\|s_k\|_2^2}(y_k - A_k s_k)s_k^T \quad 。$$

于是得到求解方程 $F(x)=0$的迭代法

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1}F(x^{(k)}), \\ s_k = x^{k+1} - x^k, y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}), \\ A_{k+1} = A_k + \dfrac{1}{\|s_k\|_2^2}(y_k - A_k s_k)s_k^T, k = 0,1,\cdots 。 \end{cases} \qquad (6.4.13)$$

称之为*Btoyden*秩1方法，其中的初始值$x^{(0)}$给定，A_0可取为$F'(x^{(0)})$或单位矩阵。

利用下面的引理，可以避免方法（6.4.13）中的矩阵求逆，从而可将解方程组的直接法运算量$O(n^3)$降为$O(n^2)$。引理的结论只要直接做矩阵运算即可证明。

引理　若矩阵$A\in R^{n\times n}$非奇异，$u,v\in R^{T}$，则$A+uv^{T}$非奇异的充分必要条件是$1+v^{T}Au\neq 0$，并且有

$$(A+uv^{T})^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^{T}A^{-1}}{1+v^{T}A^{-1}u}。\quad (6.4.14)$$

在（6.4.13）中，令$B_k=A_k^{-1}$，有

$$A_k^{-1}u_k=\frac{1}{\|s_k\|_2^2}B_k(y_k-A_ks_k)=\frac{1}{\|s_k\|_2^2}(B_ky_k-s_k),$$

$$1+v_k^{T}A_k^{-1}u_k=1+\frac{1}{\|s_k\|_2^2}(v_k^{T}B_ky_k-v_k^{T}s_k)=\frac{1}{\|s_k\|_2^2}s_k^{T}B_ky_k。$$

如果$s_k^{T}B_ky_k\neq 0$，那么利用（6.4.14）有

$$B_{k+1}=(A_k+u_kv_k^{T})^{-1}=B_k-\frac{1}{s_k^{T}B_ky_k}(B_ky_k-s_k)s_k^{T}B_k。$$

版权所有：中南大学数学院

于是，方法（6.4.13）可改写成

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - B_k F(x^{(k)}), \\ s_k = x^{(k+1)} - x^{(k)}, y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}), \\ B_{k+1} = B_k + \dfrac{1}{s_k^T B_k y_k}(s_k - B_k y_k) s_k^T B_k, k = 0,1,\dots \text{。} \end{cases} \quad (6.4.15)$$

称之为逆Broyden秩1方法，其中的初始值$x^{(0)}$给定，B_0取为（$F'(x^{(0)}))^{-1}$或单位矩阵。逆Broyden方法是一种能有效地求解非线形方程组的拟Newton方法。可以证明，在一定的条件下，它是超线形收敛的。

例6.16　用逆Broyden方法（6.4.15）解例6.15中的方程组。

解　　对所给$F(x)$有

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 \\ 2x_1 - 4 & 2x_2 - 1 \end{pmatrix}\text{。}$$

版权所有：中南大学数学院

取$x^{(0)}=(0,0)^T$，有$F(x^{(0)})=(-1,3.25)^T$及

$$F'(x^{(0)})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -4 & -1\end{pmatrix}, B_0=(F'(x^{(0)}))^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & -0.25\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}-B_0F(x^{(0)})=(1.0625,-1)^T, s_0=x^{(1)}-x^{(0)}=x^{(1)},$$

$$F(x^{(1)})=(1.12890625,2.12890625)^T,$$

$$y_0=F(x^{(1)})-F(x^{(0)})=(2.12890625,-1.12109375)^T,$$

$$B_1=\begin{pmatrix}0.3557441 & -0.2721932\\ -0.5224991 & 0.1002162\end{pmatrix}。$$

接着再进行第 $k=1$步的计算，如此迭代 11次后有

$$x^{(11)}=(1.5463428833\ 2,1.3911763127\ 9)^T,$$

这是具有12位有效数字的近似解。 如果用 *Newton* 法求解，迭代到$x^{(7)}$便可得到同样精度的结 果，比逆*Broyden*方法少迭代4次，但每步计算量却要 多得多。

版权所有：中南大学数学院