Date

# Mather 理论在多自由度系统应用上的讨论

Mather 理论在高维系统的发展是基于下面的框架：即紧流形上自然的时间周期的 Lagrangian 系统。这个框架对于许多力学系统，尤其是带有非光滑因素的力学系统是不适用的。为了克服这一问题，我们引入辛扭转映射这一概念。辛扭转映射即 $T^*\times\mathbb{R}^n \to T^*\times\mathbb{R}^n$ 的满足一定条件的映射，其为扭转映射的高维推广。在一个例子中可以看到辛扭转映射的潜在的应用价值。

## 1. 辛扭转映射的设定及其主要结果

设 $(q,p)\in\mathbb{R}^{2n}$，$F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ 为一个微分同胚。记 $F(q,p)=(Q(q,p),P(q,p))$。称 $F$ 为一个辛扭转映射，若有：

1) $F(q+m,p)=F(q,p)+(m,0)$，$\forall\, m\in\mathbb{Z}^n$

2) $\Phi:(q,p)\to(q,Q(q,p))$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的微分同胚

3) $\exists\, h:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$，$h(q+m,Q+m)=h(q,Q)$，$\forall m\in\mathbb{Z}^n$，且

$$PdQ-pdq=dh(q,Q)$$

4) $$\lim_{\|Q-q\|\to\infty} h(q,Q)\to+\infty$$

可以看到，辛扭转映射的设定与扭转映射几乎完全相同。2)条件3即单调扭转条件。

$$d\Phi=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p}\end{pmatrix}$$，若 $\det\frac{\partial Q}{\partial p}\neq 0$，则至少可以确保 $\Phi$ 是局部的同胚。实际上，若 $\sup\limits_{(q,p)\in\mathbb{R}^{2n}}\left\|\frac{\partial Q}{\partial p}(q,p)^{-1}\right\|<\infty$，则 $\Phi$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的微分同胚

Date

注意到，由 2), 3)，F 可由 $h^{2}$ 来确定。由 $\psi$ 的定义，由 $(q,p)$ 可确定 $(q,Q)$，再利用 $h_2(q,Q)=P$，即确定了 $P$。用公式描述即

$$F(q,p)=(Q\circ\psi(q,p),\ h_2\circ\psi(q,p)).$$

类似地，可以定义作用量

$$W(q_0,\cdots,q_N)=\sum_{i=0}^{N-1}h(q_i,q_{i+1}).$$

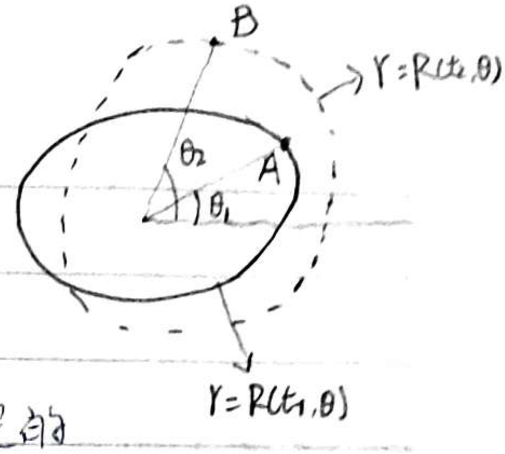
作用量的极值对应着 F 的轨道，我们在此不再赘述。

由于在高维空间没有了一维的序结构，辛映扭转映射的结果较少。

主要结果：设 F 为一个辛映扭转映射，则对任一个相互素的整数矢量 $(m,d)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^+$，F 至少有 $n+1$ 个 $(m,d)$ 型的周期轨道，即 $F^d(q,p)=(q+m,p)$.

2、一般类型的呼吸台球

考虑在平面内依赖于时间的闭凸曲线，设质点始终在此曲线所围区域的内部。在极坐标下，设此曲线为 $r=R(t,\theta)$，$R(t,\theta)$ 关于 $t,\theta$ 都是 $2\pi$-周期的，且 $R(t,\theta)$ 严格大于 0。当 $R(t,\theta)$ 不依赖于 $\theta$，一个质点在此区域内作自由运动，即呼吸圆台球模型。




Date

圆盘与之单自由度系统类似，我们总是先找到作用量，而后再确定扭转映射。作用量由给定的两个构型所确定的解带入 Lagrangian 所得到.

如图所示，给定了构型 $(t_1,\theta_1)$ $(t_2,\theta_2)$，可形式上得到解，

由定义 $A=(R(t_1,\theta_1)\cos\theta_1,\ R(t_1,\theta_1)\sin\theta_1)$

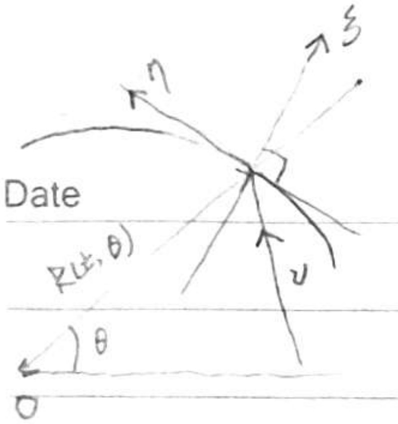
$B=(R(t_2,\theta_2)\cos\theta_2,\ R(t_2,\theta_2)\sin\theta_2)$

由质点在 AB 间作自由运动，且时间间隔为 $t_2-t_1$，可得到解为

$$(x(t),y(t))=(B-A)\frac{t-t_1}{t_2-t_1}+\cancel{B}A.$$

定义
$$h(t_1,\theta_1,t_2,\theta_2)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,dt$$
$$=\frac{1}{2(t_2-t_1)}\left(R^2(t_2,\theta_2)-2\cos(\theta_2-\theta_1)R(t_2,\theta_2)R(t_1,\theta_1)+R^2(t_1,\theta_1)\right)$$

首先我们关注，给定了构型 $\{(t_i,\theta_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$，此构型以 $h$ 作为作用量达到了极值，那么 $(t_i,\theta_i)$ 是否是一个真实运动的在碰撞时的时间与角度。这个答案在一些条件的限制下是肯定的。为此，我们先来看质点在碰撞时应满足的法则




设质点以速度 $v=(\dot{x},\dot{y})$ 在 $(R(t,\theta)\cos\theta,\ R(t,\theta)\sin\theta)$ 处与边界发生碰撞. 碰撞时切向速度不变, 法向相对速度改变.

设 $\tau=\frac{\partial}{\partial\theta}(R(t,\theta)\cos\theta,\ R(t,\theta)\sin\theta)$, 令 $\eta=\frac{\tau}{\|\tau\|}=(\eta_1,\eta_2)$.

令 $\xi=(\eta_2,-\eta_1)$, 则碰撞后的速度为

$$v'=\eta\langle\eta,v\rangle+\xi\left(-\langle\xi,v\rangle+2\langle\xi,r_0\rangle\right)$$

其中 $r_0=\frac{\partial}{\partial t}(R(t,\theta)\cos\theta,\ R(t,\theta)\sin\theta)$. 利用

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & v' \arrow[d] \\ (\dot{r},\dot{\theta}) \arrow[r] & (\dot{r}',\dot{\theta}') \end{tikzcd}$$

得到极坐标下的速度变化规律

$$(\dot{r},\dot{\theta})\to\left(\frac{\dot{r}R_2^2+R^2(-\dot{r}+2(\dot{\theta}R_2+R_1))}{R^2+R_2^2},\ \frac{\dot{\theta}R^2-R_2(-2\dot{r}+\dot{\theta}R_2+2R_1)}{R^2+R_2^2}\right)$$

其中 $R_1=\frac{\partial}{\partial t}R(t,\theta)$, $R_2=\frac{\partial}{\partial\theta}R(t,\theta)$, 当 $\frac{\partial}{\partial\theta}R(t,\theta)\equiv 0$,

$$(\dot{r},\dot{\theta})\to(-\dot{r}+2\dot{R},\ \dot{\theta})$$

下面我们说明极值轨道 $\{(t_i,\theta_i)\}$ 满足碰撞规则.

令 $L(\dot{r},\dot{\theta},r,\theta)=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2$.

$h=\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{r},\dot{\theta},r,\theta)\,dt$, 则

Date

$$\frac{\partial h}{\partial t_0} = -L(\dot r(t_0), \dot\theta(t_0), r, \theta) + \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot r}\frac{\partial \dot r}{\partial t_0} + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \dot\theta}{\partial t_0} + \frac{\partial L}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t_0} + \frac{\partial L}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right) dt$$

$$= -L + \frac{\partial L}{\partial \dot r}\frac{\partial r}{\partial t_0}\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \theta}{\partial t_0}\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= -\frac{1}{2}\dot r^2 - \frac{1}{2} r^2(t_0)\,\dot\theta(t_0)^2 + \frac{\partial L}{\partial \dot r}(t_0)\left(-R_1(t_0,\theta_0) + \dot r(t_0)\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}(t_0)\left(\dot\theta(t_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot r(t_0)^2 + \frac{1}{2} r^2(t_0)\,\dot\theta^2(t_0) - \dot r(t_0) R_1(t_0,\theta_0)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_0} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot r}\frac{\partial \dot r}{\partial \theta_0} + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \dot\theta}{\partial \theta_0} + \frac{\partial L}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \theta_0} + \frac{\partial L}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \right) dt$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot r}\frac{\partial r}{\partial \theta_0}\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\Big|_{t_0}^{t_1} = -\dot r(t_0)\,\cancel{+}\,R_2(t_0,\theta_0) - r^2(t_0)\,\dot\theta(t_0)$$

其中我们用了边值条件:

$r(t_0; t_0, t_1, \theta_0, \theta_1) = R(t_0, \theta_0)$ , $r(t_1; t_0, t_1, \theta_0, t_1) = R(t_1, \theta_1)$

$\theta(t_0; t_0, t_1, \theta_0, \theta_1) = \theta_0$ , $\theta(t_1; t_0, t_1, \theta_0, t_1) = \theta_1$

类似的

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} = -\frac{1}{2}\dot r(t_1)^2 - \frac{1}{2} r^2(t_1)\,\theta^2(t_1) + \dot r(t_1) R_1(t_1,\theta_1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \dot r(t_1) R_2(t_1,\theta_1) + r^2(t_1)\,\dot\theta(t_1).$$

对于极值轨道,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t_1}(t_0,\theta_0,t_1,\theta_1) + \dfrac{\partial h}{\partial t_0}(t_1,\theta_1,t_2,\theta_2) = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial \theta_1}(t_0,\theta_0,t_1,\theta_1) + \dfrac{\partial h}{\partial \theta_1}(t_1,\theta_1,t_2,\theta_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}(t_1^+)^2+\frac{1}{2}R(t_1,\theta_1)^2\dot{\theta}(t_1^+)^2-\dot{r}(t_1^+)R_1(t_1,\theta_1)=$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}(t_1^-)^2+\frac{1}{2}R(t_1,\theta_1)^2\dot{\theta}(t_1^-)^2-\dot{r}(t_1^-)R_1(t_1,\theta_1)$$

及 $\dot{r}(t_1^+)R_2(t_1,\theta_1)+R(t_1,\theta_1)^2\dot{\theta}(t_1^+)=\dot{r}(t_1^-)R_2(t_1,\theta_1)+R(t_1,\theta_1)^2\dot{\theta}(t_1^-)$.

从这两个式子中直接解出 $(\dot{r}(t_1^+),\dot{\theta}(t_1^+))$ 是有两个解.

第一个解显然是 $(\dot{r}(t_1^+),\dot{\theta}(t_1^+))=(\dot{r}(t_1^-),\dot{\theta}(t_1^-))$.

第二个解即是极坐标下的碰撞规律

为了排除第一个解，可对 $\theta_1-\theta_0$，$t_1-t_0$ 作限制使得

$\dot{r}(t_1^+)>0$　$\dot{r}(t_1^-)<0$.

这样，变分原理的框架至少是适合于此系统的.