

# 刚体动力学简介

张晓明

xiaomingzzhang@163.com

2023 年 12 月 22 日

这个笔记是为了叙述关于刚体动力学的经典内容, 如坐标系的运动, 惯性张量, 欧拉角等相关概念, 以及 Euler 陀螺, Lagrange 陀螺等经典例子. 我们尝试以数学的形式阐述这些概念, 以定性的观点解释这些陀螺的动力学.

## 目录

### 1 三维旋转群 $SO(3)$

大多数情况下, 我们只考虑刚体定点运动. 因此, 必然涉及到一个坐标系关于另一个坐标系作旋转, 与这个描述最贴近的数学概念即三维旋转群  $SO(3)$ .

**定义 1.1** 令  $\mathbb{R}^3$  为三维欧氏空间,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为其中的内积. 称线性变换  $D: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \in SO(3)$ , 如果  $D$  保持定向, 且对任意的  $x, y \in \mathbb{R}^3$  都有

$$\langle Dx, Dy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

首先, 上述定义要求  $D$  是线性的. 实际上, 若  $D$  保持内积, 则对任意的  $u, v \in \mathbb{R}^3$ , 可证明

$$\|D(u+v) - D(u) - D(v)\|^2 = \langle D(u+v) - D(u) - D(v), D(u+v) - D(u) - D(v) \rangle = 0,$$

$$\|D(\lambda v) - \lambda D(v)\|^2 = \langle D(\lambda v) - \lambda D(v), D(\lambda v) - \lambda D(v) \rangle = 0,$$

其中  $\lambda \in \mathbb{R}$  为常数. 因此  $D$  保持内积即意味着  $D$  是线性的.

一般地, 我们选取一组单位正交基作为线性空间  $\mathbb{R}^3$  中的一组基, 并取右手定向为其定向. 在这样的设定下,  $D \in SO(3)$  可唯一地由一个矩阵表出,  $D$  保持定向即其相应的矩阵的行列式大于 0. 下面我们将用同一符号表示  $D \in SO(3)$  与其相应的矩阵.

**定理 1.1** 在映射的复合下, 集合  $SO(3)$  构成了一个群. 并且, 如果  $D \in SO(3)$ , 则有

(i)  $DD^T = D^T D = E$ ;

(ii)  $\det(D)=1$ ;

其中  $E$  为单位矩阵,  $D^T$  为矩阵  $D$  的转置.

**证明:** 在矩阵表示下, 线性映射的复合即其相应的矩阵作乘积. 若  $A, B \in SO(3)$ , 则

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) > 0.$$

故  $AB$  保持定向.  $AB$  也显然保持内积, 故  $AB \in SO(3)$ . 矩阵的乘法满足结合律. 单位矩阵  $E \in SO(3)$ , 其即为  $SO(3)$  中的单位元. 若  $D \in SO(3)$ , 则

$$\langle Dx, Dy \rangle = x^T D^T Dy = x^T y = \langle x, y \rangle$$

对任意的  $x, y \in \mathbb{R}^3$  均成立, 故  $D^T D = E = DD^T$ , 即  $D^T = D^{-1}$ . 因此,  $SO(3)$  构成了一个群.

(i) 已证. 由于  $1 = \det(E) = \det(D^T D) = \det(D^T)\det(D) = (\det(D))^2$ , 而  $\det(D) > 0$ , 故  $\det(D) = 1$ .  $\square$

若  $D \in SO(3)$ , 那么  $D^T D = E$ , 即矩阵  $D$  的每个列向量都为单位向量, 且第  $i$  个列向量垂直于第  $j$  个列向量 ( $i \neq j$ ). 利用  $DD^T = E$ , 矩阵  $D$  的每个行向量都为单位向量, 且第  $i$  个行向量垂直于第  $j$  个行向量 ( $i \neq j$ ). 因此,  $D$  将标准正交基  $(e_1, e_2, e_3)$  保持定向地变为了另一组标准正交基  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 其中  $\xi_i$  为  $D$  的第  $i$  个列向量. 这也是  $SO(3)$  被称作旋转群的原因.

平面上绕原点逆时针旋转  $\theta$  的变换, 扩充到三维空间中即矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这个变换保持  $e_3$  轴不变, 我们称  $e_3$  轴为此旋转的旋转轴. 对任意的旋转  $D \in SO(3)$ , 是否存在这样的一个轴呢? 答案是肯定的.

**定理 1.2 (Euler 旋转定理)** 对任意的  $D \in SO(3)$ , 都存在着一个旋转轴, 即存在  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , 使得  $D\xi = \xi$ . 且若  $D \neq E$ , 则此旋转轴是唯一的, 即若  $D\xi_1 = \xi_1, D\xi_2 = \xi_2$ , 则  $\xi_1, \xi_2$  线性相关.

**证明:** 只需证明 1 是矩阵  $D$  的特征值即可.

$$\begin{aligned} \det(D - E) &= \det((D - E)^T) = \det(D^T - E) = \det(D^{-1} - D^{-1}D) \\ &= \det(D^{-1}(E - D)) = \det(D^{-1})\det(-(D - E)) = -\det(D - E), \end{aligned}$$

因此  $\det(D - E) = 0$ . 故 1 是矩阵  $D$  的特征值.

假设  $D \neq E$ , 且  $D$  存在两个不同的旋转轴. 那么 1 至少是  $\det(D - \lambda E) = 0$  的二重根. 由于  $\det(D) = 1$ , 那么矩阵  $D$  的三个特征值全为 1. 存在正交矩阵  $U$  可使得矩阵  $D$  对角化 (这一性质对满足  $AA^T = A^T A$  的矩阵都成立), 即  $U^{-1}DU = E$ , 因此  $DU = U$ . 对任意的三阶矩阵  $A$ , 我们有  $DA = DUU^T A = UU^T A = A$ , 故  $D = E$ . 这与先前假设矛盾.  $\square$

借用于 Euler 旋转定理, 我们可对  $SO(3)$  的拓扑结构作一个粗略的描述.

“考虑三维空间中以  $\pi$  为半径以原点为中心的实心球. 此球中的每个点  $p$ , 都可对应于一个旋转: 绕着矢量  $p$  以右手螺旋的方式旋转角度  $\|p\|$ . 点  $p$  与  $-p$  表示绕着同一直线但以不同的方向进行旋转. 如此的对应方式会存在一个问题, 即当  $\|p\| = \pi$  时,  $p$  与  $-p$  对应着同一种旋转. 这是由于绕着同一个轴以不同的方向旋转  $\pi$  实质上是同一种旋转. 因此为了让此球与  $SO(3)$  一一对应, 我们还需要将

球面的对径点粘接. 经过如此的处理后, 我们得到了一个同胚于  $SO(3)$  的拓扑空间, 即实心球并将球面上的对径点粘接.

这样的对应关系可以解释  $SO(3)$  连通但非单连通这一事实. 从球面的北极连接南极的直线, 由于我们粘接了球面上的对径点, 实际上是  $SO(3)$  中的一个闭圈. 这个闭圈在  $SO(3)$  中是无法收缩到一点的, 因为无论如何变形, 起点与终点必须始终都在对径点上, 否则此圈将会断掉. 用旋转的语言表述, 这个圈代表从绕着  $z$  轴逆旋转  $90$  度逐渐变为绕着  $z$  轴逆时针旋转  $0$  度, 再从绕  $z$  轴顺时针旋转  $0$  度逐渐变为顺时针旋转  $90$  度.

令人惊奇的是, 如果沿着此圈走两次, 即先从北极到南极, 再跳回北极 (这是容许的, 因为这两点在  $SO(3)$  中是同一个点), 再从北极到南极, 那么这个走两次的圈可以被收缩成一点: 首先将这两条重合的线保持重合地变形为球面上连接北极与南极的一条半圆弧, 然后将此其中的一个半圆弧对称到其对径位置, 这样便形成了一个大大圆, 此大圆再沿着球面收缩到北极. 实际上,  $SO(3)$  的基本群为一个二阶的循环群.”<sup>1</sup>

## 2 Euler 角与 Euler 旋转矩阵

$SO(3)$  既具有群的结构, 也具有光滑流形的结构. 作为一个流形, 其上的坐标可用 Euler 角描述. 后面我们将看到,  $SO(3)$  作为刚体定点运动的构型流形, Euler 角可选为此构型流形的广义坐标.

为了对不同坐标系下的矢量进行区分, 我们将用  $K, k$  表示相同定向的 3 维欧氏空间,  $D \in SO(3)$  指的是  $D: K \rightarrow k$ ,  $D$  保持内积与定向. 设  $Q \in K$ ,  $DQ = q$ ,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ ,  $q = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $D$  的作用如图 1 所示.

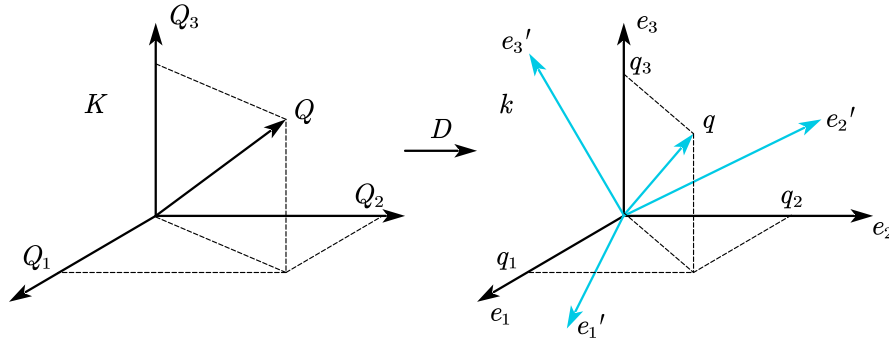


图 1 旋转  $D$  对矢量的作用

考虑如图 2 所示的一组单位正交基  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ . 取  $e_1, e_2$  所在平面与  $e'_1, e'_2$  所在平面的交线, 并取此交线上的一个单位矢量  $e_N = [e_3, e'_3]$ . 将标准单位正交基  $\{e_1, e_2, e_3\}$  旋转为  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  需要以下三个步骤:

- 绕着  $e_3$  轴逆时针转动  $\varphi$  使得  $e_1$  轴与  $e_N$  轴重合, 此时  $e_1$  变为  $e_N$ ,  $e_3$  保持不变;
- 绕着  $e_N$  轴逆时针转动  $\theta$  使得  $e_3$  轴与  $e'_3$  轴重合, 此时  $e_3$  变为  $e'_3$ ,  $e_N$  保持不变;

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_rotation\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_rotation_group)

- 绕着  $e'_3$  轴逆时针转动  $\psi$  使得  $e_N$  轴与  $e'_1$  轴重合, 此时  $e_N$  变为  $e'_1$ ,  $e_2$  变为  $e'_2$ ,  $e'_3$  轴保持不动.

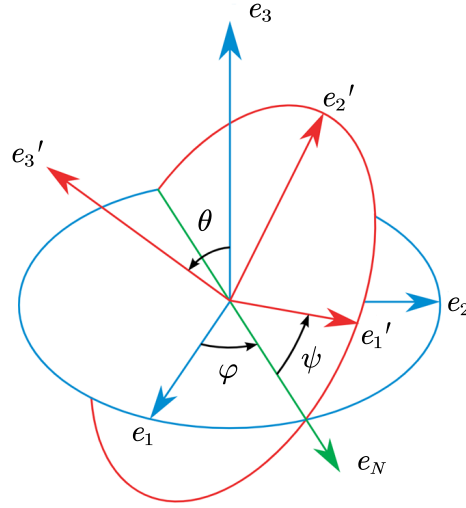


图 2 Euler 角

由上述构造,  $\varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi]$ . 这三个角度的变化分别称为: 进动, 章动, 旋转. 上述旋转方式一般记为  $z-x-z$  旋转, 因为旋转的先后顺序为先绕当前  $z$  轴, 再绕当前  $x$  轴, 最后绕当前  $z$  轴. 类似地, 可以定义其他类型的旋转方式, 如  $z-y-z$  方式的旋转.

以如上的三个角度定义了旋转  $D: K \rightarrow k$  后, 我们可以利用这三个角度给出  $D$  的矩阵表示, 称为 Euler 旋转矩阵. 这个矩阵表示的含义如下: 首先对于矢量  $Q \in \mathbb{R}^3$ , 记其在  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  上的投影为  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ , 而后再找到其在  $\{e_1, e_2, e_3\}$  上的投影  $\{q_1, q_2, q_3\}$ . 那么旋转矩阵  $D$  的作用即  $DQ = q$ . 依照这个作法, 实际上, 我们只需要求得  $e'_i$  在  $\{e_1, e_2, e_3\}$  上的三个分量, 而后将这些分量作为矩阵  $D$  的第  $i$  个列向量即可. 这是求矩阵  $D$  的一个较直观的做法.

实际上, 若将变换  $D$  进行分解,  $D: K \rightarrow K' \rightarrow K'' \rightarrow k$ , 这三个变换相应于三次旋转, 其中  $K', K''$  都为欧氏空间, 那么矩阵  $D$  可以表示为一些简单矩阵的乘积. 令

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$R_3(\theta), R_1(\theta)$  分别表示绕  $e_3, e_1$  轴旋转  $\theta$ . 那么对于  $Q \in K$ , 且  $DQ = q$ , 我们有

$$Q = R_3^{-1}(\psi) \circ R_1^{-1}(\theta) \circ R_3^{-1}(\varphi)q.$$

因此

$$D = R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

利用 Euler 角所给出的  $D$  的矩阵表示, 我们得到以下结论.

**命题 2.1** 若  $D \in SO(3)$ , 则  $D$  保持矢量积, 即对任意的  $x, y \in \mathbb{R}^3$ ,

$$[Dx, Dy] = D[x, y],$$

其中  $[\cdot, \cdot]$  为三维欧氏空间中的矢量积.

**证明:** 由于  $D = R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi)$ , 只需证明  $R_3$  与  $R_1$  保持矢量积即可. 利用  $[x, y] = A(x)y$ , 其中

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

故  $R_3$  与  $R_1$  对矢量积的保持性可直接验证, 这里不再赘述.  $\square$

### 3 依赖于时间的旋转变换和角速度

这一节我们将处理依赖于时间的旋转变换. 通常地, 我们将这种依赖于时间的旋转变换称作旋转运动.

**定义 3.1** 假设  $k, K$  都为欧氏空间,  $t \in U$ , 其中  $U \subset \mathbb{R}$  为一个开区间. 若对任意的  $t \in U$ , 变换  $D_t : K \rightarrow k \in SO(3)$ , 且矩阵  $D_t$  的各个分量光滑地依赖于  $t$ , 则称  $D_t$  为坐标系  $K$  相对于  $k$  的一个旋转运动.

通常地, 我们称  $K$  为动坐标系或刚体坐标系,  $k$  为静坐标系.

关于旋转运动的一个重要事实是, 任意一个时刻均存在着一个旋转轴.

**定义 3.2** 设  $D_t : K \rightarrow k \in SO(3)$  为旋转运动, 对于  $K$  中不依赖于时间的矢量  $Q$ , 称

$$\dot{q} = \dot{D}_t Q$$

为  $Q \in K$  在坐标系  $k$  中的运动速度, 其中  $q = D_t Q$ .

**定理 3.1** 设  $D_t : K \rightarrow k \in SO(3)$  为旋转运动, 则在任意时刻都存在着瞬时转动轴, 即有

$$\dot{q} = [\omega, q],$$

其中  $q = D_t Q$ ,  $\omega$  只依赖于时间, 不依赖于  $Q$  的选取.

我们将矢量  $\omega \in k$  称作是在  $t$  时刻时旋转运动  $D_t$  在坐标系  $k$  下的角速度.

**证明:** 注意到

$$\dot{q} = \dot{D}_t Q = \dot{D}_t D_t^{-1} q.$$

我们首先证明映射  $\dot{D}_t D_t^{-1} : k \rightarrow k$  是一个反对称算子 (即满足  $B + B^T = 0$  的线性算子). 由于  $D_t \in SO(3)$ ,  $D_t D_t^T = E$ . 对此式关于  $t$  求导得到

$$\dot{D}_t D_t^T + D_t \dot{D}_t^T = \dot{D}_t D_t^{-1} + (\dot{D}_t D_t^{-1})^T = 0.$$

因此  $\dot{D}_t D_t^{-1}$  是反对称算子.

3 阶的反对称矩阵可唯一地由其下三角的三个元素所唯一确定, 因此所有三阶反对称矩阵构成的线性空间是三维线性空间. 而集合

$$\{A(x) : [x, y] = A(x)y \text{ 对所有的 } y \in \mathbb{R}^3 \text{ 都成立}, x \in \mathbb{R}^3\}$$

也构成了一个三维的反对称线性算子空间, 其中  $A(x)$  由式 (2.2) 所确定. 因此这两个空间为相同维数的线性空间. 故存在  $\omega \in k$  使得

$$\dot{D}_t D_t^{-1} = A(\omega),$$

即

$$\dot{q} = \dot{D}_t Q = \dot{D}_t D_t^{-1} q = A(\omega)q = [\omega, q].$$

□

如果我们用 Euler 角表示旋转运动  $D_t$ , 可令  $D_t = R_3(\varphi(t))R_1(\theta(t))R_3(\psi(t))$ , 那么我们可以用这些角度的导数将  $\omega$  显式地给出. 这里我们不给出其表达式. 对刚体的应用中, 得到  $\omega$  在动坐标系下的投影  $\Omega = D_t^{-1}\omega$  是重要的. 下面我们就来用 Euler 角及其导数来计算  $\Omega$ .

对式子

$$\dot{D}_t Q = \dot{D}_t D_t^{-1} q = [\omega, q]$$

左乘以  $D_t^{-1}$  得到

$$D_t^{-1} \dot{D}_t Q = [\Omega, Q]. \quad (3.1)$$

直接计算得到

$$D_t^{-1} \dot{D}_t = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\varphi} \cos \theta & \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta & 0 & -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi & \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix}.$$

因此我们有

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

## 4 四元数与三维中间的旋转

用 Euler 角表示三维空间中的旋转会出现一个称为万向锁的奇异性. 通俗地说, 万向锁指的是如果我们固定某个旋转角度, 那么旋转将只剩下一个方向可以变动, 这使得我们丧失掉了一个自由度. 另一方面, 如果我们知道了刚体的角速度在动坐标系中的变化, 要求旋转矩阵时, 就要求解方程 (4.1), 然而, 我们有

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \theta} (\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi) \\ \Omega_1 \cos \psi - \Omega_2 \sin \psi \\ \Omega_3 - \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

这说明方程在  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi$  处会出现奇异性. 实际上, 当  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi$  时, 我们所描述的  $z-x-z$  方式的 Euler 角会出现万向锁, 此时, 两个坐标系的  $z$  轴共向, 我们仅可变动一个角度. 出现这种现象的原因是我们采用了固定的旋转方式, 而非系统本身具有奇异性. 如果我们采用其他的旋转方式, 可以避免  $z$  轴共向时的奇异性, 但是又会产生其他的奇异性. 这一点在计算上是极其不方便的, 如果我们考虑用数值方法去计算一个比较复杂的刚体运动, 我们就需要在定义不同的 Euler 角之间来回切换以避免奇异性. 使用四元数来表示三维空间的坐标系旋转能够完美地解决这一问题, 下面我们就来介绍如何用四元数表示旋转.

用四元数表示旋转实际上是一种轴角式的旋转, 即描述绕着某个轴旋转了多少角度的旋转. 为此, 我们首先来介绍轴角旋转的 Rodrigues 公式.

首先规定一下记号, 在之前我们不对标量还有矢量的字母进行区分, 在本节中, 小写字母  $q \in \mathbb{R}$  为标量, 粗体字母  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  为矢量, 大写字母  $Q$  将表示四元数.

### 4.1 Rodrigues 旋转公式

绕着某个轴的旋转需要四个变量来描述:  $\mathbf{u}$  作为旋转轴,  $\theta$  作为旋转角. 然而对于旋转轴  $\mathbf{u}$ , 只有其方向是重要的, 因此我们不妨规定  $\|\mathbf{u}\| = 1$ .

现在我们考虑空间中的矢量  $\mathbf{v}$  在以  $\mathbf{u}$  为旋转轴, 以  $\theta$  作为旋转角的变换下的像  $\mathbf{v}'$ . 之前介绍过的 Euler 旋转定理说明旋转变换保持一个方向不变, 这个方向就是旋转轴的方向. 因此我们不妨将矢量  $\mathbf{v}$  作如下分解:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

其中  $\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}$  分别是  $\mathbf{v}$  平行于  $\mathbf{u}$  与垂直于  $\mathbf{u}$  的分量. 由于旋转变换是线性的, 那么其可以分别作用于这两个矢量, 因此我们有

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp},$$

这是由于旋转不改变  $\mathbf{v}_{\parallel}$ . 如图 3 所示. 对于  $\mathbf{v}'_{\perp}$ , 我们可以利用平面旋转来求得其表达式, 首先取

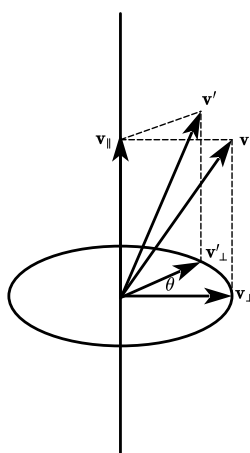


图 3 矢量  $\mathbf{v}$  的旋转分解

$\mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}_\perp]$ , 其与  $\mathbf{v}_\perp$  构成了垂直于  $\mathbf{u}$  的平面的一组正交基, 虽然这两个矢量不是单位的, 但其长度相同. 在这个平面上,  $\mathbf{v}_\perp$  旋转了  $\theta$  角, 那么我们有

$$\mathbf{v}'_\perp = \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)\mathbf{w}.$$

注意到

$$\mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}_\perp] = [\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

我们稍作整理得到:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}'_\perp \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos(\theta)(\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}) + \sin(\theta)[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\ &= \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)[\mathbf{u}, \mathbf{v}].\end{aligned}$$

这样我们就得到了 Rodrigues 旋转公式. 我们总结一下:

**定理 4.1** (Rodrigues 旋转公式)  $\mathbb{R}^3$  中任意一个矢量  $\mathbf{v}$  绕单位矢量  $\mathbf{u}$  旋转  $\theta$  角得到的矢量为

$$\cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)[\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

## 4.2 四元数及其基本运算

我们知道可以使用复数的乘法来定义平面上的旋转, 对于三维空间中的旋转同样可以使用一类更高维的数来定义其旋转, 即四元数. 四元数的定义与复数的定义十分类似, 不同的是, 四元数有三个虚部.

四元数是表示为如下形式的数:

$$Q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

其中  $i, j, k$  都是符号, 这些符号的乘法满足:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (4.2)$$

全体四元数的集合记作  $\mathbb{H}$ .

如果我们要求这些符号的乘积符合结合律, 那么由式子 (4.2) 实际上可以求得任意两个符号成绩的结果. 例如, 我们有  $ij = -ijk \cdot k = k$ . 对于其他符号的乘法, 也可这样得到结果. 我们将结果总结成表格:

$\times$	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

上面的表格的最左侧的元素乘以最上面的四个元素得到表格中的结果. 注意到, 上述定义的乘法不具备交换性, 如  $ij = k, ji = -k$ . 符号的乘法运算可以由三个单位正交基的矢量积作类比. 实际上, 若



$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为三个右手定向的单位矢量, 那么它们之间的矢量积运算与上述表格相一致. 这里已经可以隐约看到四元数的乘积与旋转的关系.

习惯上, 我们将四元数  $Q = a + bi + cj + dk$  写成有序对  $\{a, \mathbf{v}\}$ , 其中我们称  $a$  为四元数的实部,  $\mathbf{v} = (b, c, d)$  为四元数的虚数部分, 我们将其理解成一个矢量. (在关于四元数的内容中, 一般将这个有序对写成  $[a, \mathbf{v}]$ , 为了区分我们所用到的矢量积记号, 这里我们使用花括号).

下面我们来讨论两个四元数的运算. 加法减法的定义是平凡的, 只需要按照实部与虚部分别相加相减即可. 同样对于一个实数, 这个实数乘以一个四元数的结果是四元数的各个分量都乘以这个实数.

下面我们来着重考虑四元数的乘法. 上面已经看到, 四元数的乘法并不满足交换律. 因此, 我们必须区分四元数的左乘与右乘. 对于两个四元数

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \{q_0, \mathbf{q}\}, \\ P &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = \{p_0, \mathbf{p}\}, \end{aligned}$$

我们利用刚刚的乘法表, 并使用分配律与结合律, 可以得到

$$\begin{aligned} QP &= \{q_0, \mathbf{q}\}\{p_0, \mathbf{p}\} = (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) + \\ &\quad (q_0 p_1 + p_0 q_1 + p_3 q_2 - p_2 q_3)i + \\ &\quad (q_0 p_2 + p_0 q_2 + p_1 q_3 - p_3 q_1)j + \\ &\quad (q_0 p_3 + p_0 q_3 + p_2 q_1 - p_1 q_2)k. \end{aligned}$$

我们观察一下这个结果, 发现其很有规律: 其实部是  $q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ , 其虚部是  $q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + [\mathbf{q}, \mathbf{p}]$ . 我么将这个结果写成如下公式

$$\{q_0, \mathbf{q}\}\{p_0, \mathbf{p}\} = \{q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + [\mathbf{q}, \mathbf{p}]\}. \quad (4.3)$$

现在我们已经计算了两个一般的四元数的乘法公式, 那么同复数一样, 还需要定义其共轭, 模长, 逆等运算. 规定四元数的共轭运算为

$$\{q_0, \mathbf{q}\}^* = \{q_0, -\mathbf{q}\}.$$

规定四元数的模长为

$$\|\{q_0, \mathbf{q}\}\| = \sqrt{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2}.$$

注意到:

$$\begin{aligned} \{q_0, \mathbf{q}\}\{q_0, \mathbf{q}\}^* &= \{q_0, \mathbf{q}\}\{q_0, -\mathbf{q}\} \\ &= \{q_0^2 - \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{q}), q_0(-\mathbf{q}) + q_0(\mathbf{q}) + [\mathbf{q}, -\mathbf{q}]\} \\ &= \{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2, \mathbf{0}\}, \end{aligned}$$

即两个互为共轭的四元数的乘积为一个实数: 其模长的平方. 不难验证有  $Q^*Q = QQ^*$ .

如果四元数  $P$  满足  $PQ = QP = 1$ , 那么我们称  $P$  为  $Q$  的逆, 记作  $P = Q^{-1}$ . 我们可以借助求复数的逆的方法来求四元数的逆. 假设  $\|Q\| \neq 0$ , 由于

$$\|Q\|^2 Q^{-1} = Q^* Q Q^{-1} = Q^*,$$

我们有

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|}.$$

特别地, 当  $\|Q\| = 1$ , 那么  $Q^{-1} = Q^*$ . 我们将单位长度的四元数全体记为  $S^3$ .

### 4.3 四元数与旋转

回忆一下我们之前讨论过的内容: 如果我们需要将一个向量  $\mathbf{v}$  沿着一个用单位向量  $\mathbf{u}$  所定义的旋转轴旋转  $\theta$  度, 那么我们可以将这个向量  $\mathbf{v}$  拆分为正交于旋转轴的  $\mathbf{v}_\perp$  以及平行于旋转轴的  $\mathbf{v}_\parallel$ . 我们可以对这两个分向量分别进行旋转, 获得  $\mathbf{v}'_\perp$  和  $\mathbf{v}'_\parallel$ . 将它们相加就是  $\mathbf{v}$  旋转之后的结果  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_\parallel + \mathbf{v}'_\perp$ .

自然地, 我们可以将这些矢量全部定义为纯四元数, 即实部为 0 的四元数. 例如  $V = \{0, \mathbf{v}\}$ . 显然我们仍旧有

$$V = V_\parallel + V_\perp, \quad V' = V'_\parallel + V'_\perp.$$

#### 4.3.1 $V_\perp$ 的旋转

我们先前已经知道:

$$\mathbf{v}'_\perp = \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)[\mathbf{u}, \mathbf{v}_\perp].$$

我们可以将上式中的  $\mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_\perp$  替换成相应的四元数  $V'_\perp, V_\perp$ , 但是仍有一项  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}_\perp]$ . 幸运的是, 对于两个虚部相互正交的四元数, 我们有

$$\{0, \mathbf{u}\}\{0, \mathbf{v}_\perp\} = \{0, [\mathbf{u}, \mathbf{v}_\perp]\}.$$

这样我们就有

$$\begin{aligned} V'_\perp &= \cos(\theta)V_\perp + \sin(\theta)UV_\perp \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)U)V_\perp. \end{aligned}$$

注意到,  $\cos(\theta) + \sin(\theta)U$  实际上是一个四元数:  $Q = \{\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}\}$ . 这样我们就得到了矢量垂直于旋转轴时的旋转的四元数乘法表示. 我们将上述讨论总结一下:

**定理 4.2** 若矢量  $\mathbf{v}_\perp$  正交于旋转轴  $\mathbf{u}$ , 那么旋转  $\theta$  角得到的矢量  $\mathbf{v}'_\perp$  可以用四元数乘法得到:

$$V'_\perp = QV_\perp,$$

其中  $Q = \{\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}\}$ .

#### 4.3.2 $V$ 的旋转

由于旋转并不会改变  $\mathbf{v}_\parallel$ , 那么我们可以得到:

$$V' = V_\parallel + QV_\perp.$$

下面几个小的引理可以帮助我们化简这个式子.

**引理 4.1** 设  $Q = \{\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}\}$ ,  $\mathbf{u}$  是单位矢量, 那么我们有  $Q^2 = \{\cos(2\theta), \sin(2\theta)\mathbf{u}\}$ .

引理 4.2 假设  $V = \{0, \mathbf{v}\}$ ,  $Q = \{a, \mathbf{u}\}$ , 并且  $\mathbf{v}, \mathbf{u}$  共向, 那么  $QV = VQ$ .

引理 4.3 假设  $V = \{0, \mathbf{v}\}$ ,  $Q = \{a, \mathbf{u}\}$ , 并且  $\mathbf{v}, \mathbf{u}$  垂直, 那么  $QV = VQ^*$ .

这里我们不给出这些引理的证明, 因为这些证明都可以直接利用四元数的乘法公式进行验证.

利用这些引理, 我们可以对原来的公式进行化简了:

$$\begin{aligned} V' &= V_{\parallel} + QV_{\perp} \\ &= 1 \cdot V_{\parallel} + PPV_{\perp} \\ &= PP^{-1}V_{\parallel} + PPV_{\perp}, \end{aligned}$$

这里我们引入了新的四元数  $P = \{\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{u}\}$ . 根据引理 4.1,  $P^2 = Q$ , 并且可看到  $P$  也是单位的四元数. 那么再利用  $P^{-1} = P^*$  以及上面的引理, 我们可进一步得到:

$$\begin{aligned} V' &= PP^{-1}V_{\parallel} + PPV_{\perp} \\ &= PP^*V_{\parallel} + PPV_{\perp} \\ &= PV_{\parallel}P^* + PV_{\perp}P^* \\ &= P(V_{\parallel} + V_{\perp})P^* \\ &= PVP^*. \end{aligned}$$

现在, 我们得到了最终的结果:  $V' = PVP^*$ , 其中  $P = \{\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{u}\}$ ,  $\mathbf{u}$  表示旋转轴的单位矢量,  $\theta$  表示旋转角.

这里我们采用了一种相对几何的角度来推导这个公式, 实际上, 如果已知了这个结果, 我们可以直接用四元数的乘法公式验证  $PVP^*$  的虚部即是 Rodrigues 旋转公式的结果.

#### 4.4 用四元数表示的角速度

现在我们考虑使用四元数来表示角速度. 回顾之前的记号, 如果静坐标系  $k$  经过旋转变换到动坐标系  $K$ , 那么矢量之间的转换关系  $D_t (q = D_t Q)$  即是这个旋转. 那么我们考虑单位四元数  $\{q_0(t), \mathbf{q}(t)\}$ , 假设这个四元数使得  $k$  经过旋转变换到  $K$ . 矩阵  $D_t$  即是

$$d_{\mathbf{v}}(\{q_0(t), \mathbf{q}(t)\}\{0, \mathbf{v}\}\{q_0(t), -\mathbf{q}(t)\}),$$

其中  $d_{\mathbf{v}}$  表示对四元数的虚部关于  $\mathbf{v}$  求导. 直接计算得到:

$$D_t = \begin{pmatrix} q_0(t)^2 + q_1(t)^2 - q_2(t)^2 - q_3(t)^2 & 2q_1(t)q_2(t) - 2q_0(t)q_3(t) & 2q_0(t)q_2(t) + 2q_1(t)q_3(t) \\ 2q_1(t)q_2(t) + 2q_0(t)q_3(t) & q_0(t)^2 - q_1(t)^2 + q_2(t)^2 - q_3(t)^2 & 2q_2(t)q_3(t) - 2q_0(t)q_1(t) \\ 2q_1(t)q_3(t) - 2q_0(t)q_2(t) & 2q_0(t)q_1(t) + 2q_2(t)q_3(t) & q_0(t)^2 - q_1(t)^2 - q_2(t)^2 + q_3(t)^2 \end{pmatrix}$$

因此, 我们可以直接计算  $D_t^{-1}\dot{D}_t$ , 其为反对称矩阵, 有

$$D_t^{-1}\dot{D}_t Q = [\Omega, Q],$$

我们求得:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -q_1(t)q'_0(t) + q_0(t)q'_1(t) + q_3(t)q'_2(t) - q_2(t)q'_3(t) \\ -q_2(t)q'_0(t) - q_3(t)q'_1(t) + q_0(t)q'_2(t) + q_1(t)q'_3(t) \\ -q_3(t)q'_0(t) + q_2(t)q'_1(t) - q_1(t)q'_2(t) + q_0(t)q'_3(t) \end{pmatrix}.$$

注意到, 我们实际上还有一个微分方程:

$$q_0(t)q'_0(t) + q_1(t)q'_1(t) + q_2(t)q'_2(t) + q_3(t)q'_3(t) = 0.$$

这是因为四元数  $\{q_0(t), \mathbf{q}(t)\}$  的模长是单位的. 利用这些方程, 我们最终得到:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Omega_1(t)q_1 - \Omega_2(t)q_2 - \Omega_3(t)q_3 \\ \Omega_1(t)q_0 - \Omega_3(t)q_2 - \Omega_2(t)q_3 \\ \Omega_2(t)q_0 - \Omega_3(t)q_1 + \Omega_1(t)q_3 \\ \Omega_3(t)q_0 + \Omega_2(t)q_1 - \Omega_1(t)q_2 \end{pmatrix}.$$

这是一个线性的变系数微分方程, 其保持状态变量的模长不变. 最为关键的是, 如此表示角速度不会出现像用 Euler 角时表示的奇异性.

## 5 惯性张量及其性质

从这一节开始, 我们开始正式介绍刚体动力学的内容. 更具体地, 我们将介绍刚体的定点运动.

**定义 5.1** 设三维空间中的存在一组质点  $\{m_i x_i\}$ , 若这组质点还受到以下的约束:

$$\|x_i - x_j\| = r_{ij}$$

为常量, 称这组质点构成了一个刚体. 若这组质点还受到约束:  $x_1 = 0$ , 称刚体具有固定点, 并称此时刚体的运动为刚体定点运动.

一般地, 刚体的构型空间是三维欧氏空间与三维旋转群的乘积. 对于刚体定点运动, 构型空间即  $SO(3)$ .

为了给后续的讨论作准备, 我们先介绍一些记号. 记  $k$  为静坐标系,  $K$  为与刚体固连的动坐标系. 动坐标系的矢量  $Q$  在静坐标系下的投影为  $q = D_t Q$ . 对所有的矢量都做如此的记号要求: 大写字母表示在动坐标系中的矢量, 其相应的小写字母表示该矢量在静坐标系下的投影.

首先, 我们假设刚体由有限个质点所组成. 后面我们将看到这个假设是不必要的, 对于连续体, 许多量可由求和转变为积分的形式.

令刚体的总角动量为  $m = \sum_i \mu_i [q_i, \dot{q}_i]$ , 其中  $\mu_i$  为第  $i$  个质点的质量. 角动量  $m$  在动坐标系  $K$  中为  $M = D_t^{-1} m$ . 由先前的推导, 角速度  $\omega$  具有如下的性质

$$\dot{q}_i = [\omega, q_i].$$

因此有

$$m = \sum_i \mu_i [q_i, [\omega, q_i]].$$

故

$$M = D_t^{-1} m = \sum_i \mu_i D_t^{-1} [q_i, [\omega, q_i]] = \sum_i \mu_i [Q_i, [\Omega, Q_i]].$$

如果定义坐标系  $K$  到自身的映射

$$\mathcal{A}: V \mapsto \sum_i \mu_i [Q_i, [V, Q_i]],$$

容易看到映射  $\mathcal{A}$  是线性的. 因此线性算子  $\mathcal{A}$  将角速度映射为了角动量, 即

$$\mathcal{A}(\Omega) = M.$$

我们称这个将动坐标系  $K$  映射到自身的线性映射称为惯性张量. 由于刚体在坐标系  $K$  中的质量分布是固定的, 以及线性算子  $\mathcal{A}$  的定义, 可看出此算子只依赖于刚体关于原点的质量分布.

下面我们说明算子  $\mathcal{A}$  是对称的. 实际上, 对于任意的  $X, Y \in K$ , 我们有

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}X, Y \rangle &= \left\langle \sum_i \mu_i [Q_i, [X, Q_i]], Y \right\rangle = \sum_i \mu_i \langle [Q_i, [X, Q_i]], Y \rangle = \\ &= \sum_i \mu_i \langle [Y, Q_i], [X, Q_i] \rangle = \sum_i \mu_i \langle [X, Q_i], [Y, Q_i] \rangle = \langle X, \mathcal{A}Y \rangle, \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中我们用到了  $\langle [X, Y], Z \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle$  这一事实. 因此  $\mathcal{A}$  是对称的.

设矢径  $Q_i$  在坐标系  $K$  的三个分量为  $\{Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}\}$ . 下面我们给出算子  $\mathcal{A}$  的表达式.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega) &= \sum_i \mu_i [Q_i, [\Omega, Q_i]] = \sum_i \mu_i A(Q_i) A(\Omega) Q_i = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i \mu_i (Q_{i2}^2 + Q_{i3}^2) & -\sum_i \mu_i Q_{i1} Q_{i2} & -\sum_i \mu_i Q_{i1} Q_{i3} \\ -\sum_i \mu_i Q_{i1} Q_{i2} & \sum_i \mu_i (Q_{i1}^2 + Q_{i3}^2) & -\sum_i \mu_i Q_{i2} Q_{i3} \\ -\sum_i \mu_i Q_{i1} Q_{i3} & -\sum_i \mu_i Q_{i2} Q_{i3} & \sum_i \mu_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $A(\cdot)$  由式 (2.2) 所给出. 这里再次验证了算子  $\mathcal{A}$  的对称性.

就像所有的对称矩阵一样, 我们可以选取一组单位正交基 (与原坐标系  $K$  具有相同的定向) 使得算子  $\mathcal{A}$  在这组基下是对角矩阵. 但这里有一个问题, 我们可以通过坐标变换使得矩阵  $\mathcal{A}$  对角化, 那么对角化后的矩阵是否与新坐标系下定义的惯量矩阵一致呢? 答案是肯定的. 实际上, 我们可以证明更一般的结论.

**命题 5.1** 在相同的定向下, 惯性张量与欧氏坐标系的选取无关.

**证明:** 设  $K'$  是另外一个与  $K$  定向一致的三维欧氏空间, 变换  $B: K' \rightarrow K \in SO(3)$ . 在新坐标系  $K'$  下, 惯量算子  $\mathcal{A}$  为

$$B^{-1} \mathcal{A} B.$$

对于  $K$  中的矢量  $X$ , 记其在  $K'$  中的相应矢量为  $X' = B^{-1}X$ . 刚体在新坐标系下的惯性张量  $\mathcal{A}'$  满足

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(V') &= \mathcal{A}'(B^{-1}V) = \sum_i \mu_i [Q'_i, [V', Q'_i]] = \\ &= \sum_i \mu_i [B^{-1}Q_i, [B^{-1}V, B^{-1}Q_i]] = \sum_i \mu_i B^{-1} [Q_i, [V, Q_i]], \end{aligned}$$

因此有

$$B \mathcal{A}' B^{-1} V = \sum_i \mu_i [Q_i, [V, Q_i]] = \mathcal{A} V,$$

即  $\mathcal{A}' = B^{-1} \mathcal{A} B$ . 这与惯性张量  $\mathcal{A}$  在  $K'$  下的形式一致, 得证.  $\square$

**定义 5.2** 惯量算子  $\mathcal{A}$  的三个正交的特征方向称为刚体的惯量主轴 (或简称为主轴), 称其相应的三个特征值为主转动惯量.

**定义 5.3** 设  $\Xi$  为  $K$  中的一条直线, 称

$$\sum_i \mu_i r_i^2$$

为刚体关于轴  $\Xi$  的转动惯量, 其中  $r_i$  为  $Q_i$  到  $\Xi$  的距离.

**推论 5.1** 刚体的三个主转动惯量  $I_1, I_2, I_3$  大于等于 0. 任意两个主转动惯量之和大于等于另外一个主转动惯量, 等号当且仅当刚体是平面物体时成立. 刚体的三个主转动惯量分别为刚体关于三个惯量主轴的转动惯量.

**证明:** 在以  $\mathcal{A}$  的三个单位特征矢量作为新的基的欧氏空间, 算子  $\mathcal{A}$  是对角的. 由命题 5.1, 惯量算子  $\mathcal{A}$  与坐标系的选择无关. 那么在新的基下 (仍采用原先的记号), 刚体的三个主转动惯量  $I_1, I_2, I_3$  即其三个对角元素

$$I_1 = \sum_i \mu_i (Q_{i2}^2 + Q_{i3}^2), I_2 = \sum_i \mu_i (Q_{i1}^2 + Q_{i3}^2), I_3 = \sum_i \mu_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2).$$

显然其都大于 0. 注意到

$$I_1 + I_2 = \sum_i \mu_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2 + 2Q_{i3}^2) \geq \sum_i \mu_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2) = I_3,$$

因此当且仅当  $\sum_i \mu_i Q_{i3}^2 = 0$  成立时, 即刚体位于  $\{e_1, e_2\}$  所在的平面时,  $I_1 + I_2 = I_3$ . 类似地可说明其余情况.

最后一条性质可立即由刚体关于轴的转动惯量的定义得到. □

**推论 5.2** 刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = \frac{1}{2} \langle M, \Omega \rangle.$$

特别地, 若坐标系  $K$  的正交基由算子  $\mathcal{A}$  的主轴构成,

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2).$$

**证明:** 由定义, 刚体的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \mu_i \langle \dot{q}_i, \dot{q}_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i \langle [\omega, q_i], [\omega, q_i] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \mu_i \langle [\Omega, Q_i], [\Omega, Q_i] \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = \frac{1}{2} \langle M, \Omega \rangle, \end{aligned}$$

其中我们用到了算子  $D_t$  对矢量积的保持性,  $D_t$  不改变内积以及式 (5.1). □

从前面的讨论中可以看到, 主转动惯量对于刚体的性态有着重要影响. 我们一般假设  $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ . 若  $I_1 > I_2 > I_3$  称刚体为非对称陀螺, 若  $I_1 = I_2 > I_3$  称刚体为对称陀螺, 若  $I_1 = I_2 = I_3$  称刚体为球陀螺.

**定义 5.4** 称  $K$  中的集合  $\{\Omega \in K : \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = 1\}$  为刚体的惯性椭球. 特别地, 在主轴为正交基下, 惯性椭球即  $\{\Omega \in K : I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = 1\}$ , 其第  $i$  个半轴长度为  $1/\sqrt{I_i}$ .

由先前的定义与结果, 当刚体为非对称陀螺时, 其惯性椭球为三轴椭球; 当刚体为对称陀螺时, 其惯性椭球为旋转椭球; 当刚体为球陀螺时, 其惯性陀螺即为球体. 反之也是成立的.

下面我们讨论一下刚体的对称性对其主轴及其惯性椭球的影响. 假设刚体对某个轴  $\Xi$  具有  $k$  ( $k > 1$ ) 阶的对称性, 即存在  $B: K \rightarrow K \in SO(3)$  有  $B^k = E, B\Xi = \Xi$  (当  $1 \leq j < k$  时,  $B^j \neq E$ ),  $B$  还满足

$$B\{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\},$$

且若  $B(Q_i) = Q_j$ , 有  $\mu_i = \mu_j$ . 这里用直观的语言描述即, 当刚体绕着  $\Xi$  旋转角度  $2\pi/k$  时, 刚体与自身重合 (位置重合且质量的分布也重合). 那么惯量算子  $\mathcal{A}$  满足

$$\mathcal{A}(\Xi) = \sum_j \mu_j [Q_j, [\Xi, Q_j]] = \sum_i \mu_i [BQ_i, [B\Xi, BQ_i]] = B \sum_i \mu_i [Q_i, [\Xi, Q_i]] = B\mathcal{A}(\Xi),$$

即  $\mathcal{A}(\Xi)$  是旋转  $B$  的旋转轴. 由于旋转轴的唯一性, 故存在常数  $\lambda$  使得  $\mathcal{A}(\Xi) = \lambda\Xi$ , 即  $\Xi$  是刚体的主轴之一. 综上, 当刚体关于某个轴具有对称性时, 此轴为刚体的主轴.

另一个非平凡的结论是, 当刚体关于某个对称轴的阶数大于 2 时, 刚体的惯量椭球一定是关于此轴的旋转椭球. 实际上, 我们有

$$\mathcal{A}(BV) = \sum_j \mu_j [Q_j, [BV, Q_j]] = \sum_i \mu_i [BQ_i, [BV, BQ_i]] = B \sum_i \mu_i [Q_i, [V, Q_i]] = B\mathcal{A}(V),$$

因此,  $\mathcal{A}B = B\mathcal{A}$ . 利用这个交换性, 不难验证  $\Omega \in \{\Omega \in K : \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = 1\}$  当且仅当  $B\Omega \in \{\Omega \in K : \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = 1\}$ , 即惯量椭球在旋转  $B$  下是不变的, 也就是说惯量椭球与刚体具有相同的对称性. 假设刚体关于此对称轴的阶数大于 2. 那么若惯量椭球是三轴椭球, 则其不可能有大于 2 阶的对称轴, 这与假设矛盾. 故其一定是旋转椭球, 且由于惯量椭球在旋转  $B$  下不变, 惯量椭球的旋转轴即刚体的对称轴.

我们将以上讨论总结成以下定理:

**定理 5.1** 若刚体对某个轴  $\Xi$  具有  $k$  ( $k > 1$ ) 阶的对称性, 则此轴为刚体的主轴. 并且, 刚体的惯量椭球也具有与刚体相同的对称性. 特别地, 若  $k > 2$ , 则惯量椭球为关于轴  $\Xi$  的旋转椭球.

下面我们介绍转动惯量的平行轴定理.

**定理 5.2 (Steiner 定理)** 假设  $K$  中有两个平行轴, 其中一个过刚体的质心

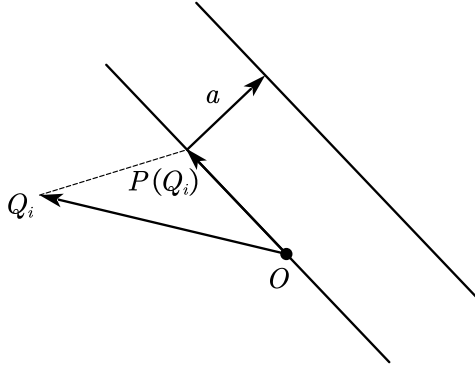
$$\frac{1}{\sum_i \mu_i} \sum_i \mu_i Q_i.$$

那么刚体对这两个轴的转动惯量满足

$$I = I_0 + \sum_i \mu_i r^2,$$

其中  $r$  是两个轴之间的距离,  $I_0$  是刚体关于过质心的轴的转动惯量.

**证明:** 由于刚体关于某个轴的转动惯量与坐标平移无关, 故不失一般性, 选取质心作为坐标系  $K$  的原点. 设  $Q_i$  到过质心的轴的距离为  $\|P(Q_i) - Q_i\|$ , 其中  $P(Q_i)$  为矢量  $Q_i$  在此轴上的投影. 那么  $Q_i$  到另一个轴的距离为  $\|P(Q_i) - Q_i + a\|$ , 其中  $a \in K$  使得  $X + a$  在不过质心的轴上 ( $X$  为过质心的轴上的点) 且  $\|a\| = r$ , 见图 4. 故刚体关于过此轴的转动惯量为

图 4  $Q_i$  到不同轴的距离

$$I = \sum_i \mu_i \|P(Q_i) - Q_i + a\|^2 = \sum_i \mu_i (\|P(Q_i) - Q_i\|^2 + \|a\|^2 - 2\langle Q_i, a \rangle) = I_0 + \sum_i \mu_i r^2,$$

其中我们用到了质心在原点这一条件. □

最后, 我们说明刚体由有限个质点组成这一限制是不必要的. 假设  $U$  为坐标系  $K$  中的一个区域, 令  $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$  为此区域的密度函数. 类似地, 角动量以及惯性张量可定义为

$$M = \int_U \rho(Q)[Q, [\Omega, Q]]dQ, \quad \mathcal{A}: V \mapsto \int_U \rho(Q)[Q, [V, Q]]dQ.$$

可看到  $\mathcal{A}$  仍是线性的. 其余如主轴之类的定义是一样的. 注意到, 当讨论刚体的对称性时, 刚体具有  $k$  阶的对称性, 则相应的关于旋转  $B$  的条件应变为  $BU = U$ , 且任给  $Q \in U$ ,  $\rho(Q) = \rho(BQ)$ .

## 6 Euler 方程

在接下来的章节中, 我们将具体地推导刚体定点运动的微分方程. 这些微分方程也有着不同的描述, 如可在静坐标系或动坐标系中描述, 也可用 Newton 的观点, Lagrange 的观点或是 Hamilton 的观点来描述. 本节介绍的 Euler 方程即是在 Newton 力学的观点下推导的.

首先我们来看在静坐标系下刚体应满足的微分方程. 仍假设刚体是由有限个质点组成的,  $\mu_i$  为第  $i$  个质点的质量,  $q_i$  为其在静坐标系  $k$  下的矢径, 对每个静坐标系下的矢量  $x$ , 用其相应的大写字母  $X$  表示其在动坐标系  $K$  下的矢径, 即  $x = D_t X$ .

我们假设第  $i$  个质点  $q_i$  受到内力  $\sum_j f_{ij}$  以及外力  $u_i(q_i, \dot{q}_i)$ , 其中  $f_{ij} = -f_{ji} = \delta_{ij}(q_i - q_j)$ ,  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  为依赖于刚体中质点的位置与速度的实数. 这里的内力即是为了保证刚体内各个点之间的距离保持常量, 且为了推导的需要, 我们假设了内力的具体形式. 可以想象在各个质点之间连接了无质量的不可伸缩的杆件. 在此内力形式的假设下, 可验证

$$\sum_i [q_i, \sum_j f_{ij}] = 0.$$

上式意味着刚体的内力矩之和为 0, 我们也可直接假设其为 0 而不假设内力的形式.



那么根据 Newton 第二定律, 我们有

$$\mu_i \ddot{q}_i = \sum_j f_{ij} + u_i.$$

将  $q_i$  同时与上式两边做矢量积并对  $i$  求和得到

$$\sum_i [q_i, \mu_i \ddot{q}_i] = \frac{d}{dt} \sum_i \mu_i [q_i, \dot{q}_i] = \sum_i [q_i, f_{ij} + u_i] = \sum_i [q_i, u_i],$$

即

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mu_i [q_i, [\omega, q_i]] = \sum_i [q_i, u_i]. \quad (6.1)$$

上式即刚体的动量矩定理的形式. 由  $m = D_t M$ , 刚体的角动量  $m$  的导数满足

$$\dot{m} = D_t \dot{M} + \dot{D}_t M = D_t \dot{M} + \dot{D}_t D_t^{-1} m = D_t \dot{M} + [\omega, m] = D_t(\dot{M} + [\Omega, M]).$$

再根据 (6.1) 得到

$$D_t(\dot{M} + [\Omega, M]) = \sum_i [q_i, u_i] = D_t \sum_i [Q_i, D_t^{-1} u_i(D_t^{-1} Q_i, D_t^{-1} [\Omega, Q_i])],$$

即

$$\dot{M} + [\Omega, M] = \sum_i [Q_i, D_t^{-1} u_i(D_t^{-1} Q_i, D_t^{-1} [\Omega, Q_i])]. \quad (6.2)$$

由于  $M = \mathcal{A}\Omega$ , 方程 (6.2) 既可以看做是关于角速度的微分方程, 也可看做是关于角动量的微分方程. 方程 (6.2) 即著名的 Euler 方程.

当无外力且动坐标系的坐标轴为刚体的主轴时, Euler 方程的形式特别简单.  $M$  与  $\Omega$  的分量满足  $M_i = I_i \Omega_i$ . 令方程 (6.2) 右边为 0 并将  $Q$  替换为  $\mathcal{A}^{-1}M$  得到  $\dot{M} + A(\mathcal{A}^{-1}M)M = 0$ , 其分量形式为

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} M_2 M_3, \\ \dot{M}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} M_3 M_1, \\ \dot{M}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} M_1 M_2. \end{aligned}$$

将上式中的  $M_i$  替换为  $I_i \Omega_i$  得到角速度的微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3, \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3 \Omega_1, \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

一般地, 我们用到式 (6.3) 较多一些, 因为角速度可与欧拉角及其相应的导数对应, 见 (4.1). 代入方程 (4.1) 以后, 我们可以得到关于三个欧拉角的三个二阶微分方程, 这组方程决定了刚体的动力学.

在重力场下, 我们可以选取动坐标系下的角速度  $\Omega$  以及  $D_t^{-1}e_3 = \Gamma$  作为六个变量, 从而得到一组六阶的常微分方程, 称为 Euler-Poisson 方程. 对于静坐标系下的常矢量  $c$ , 令  $C = D_t^{-1}c$ , 那么我们有

$$\dot{C} = \dot{D}_t^{-1}c = \dot{D}_t^{-1}D_t C = -D_t^{-1}\dot{D}_t C = [C, \Omega],$$

其中我们用到了

$$\frac{d}{dt}(D_t^{-1}D_t) = \dot{D}_t^{-1}D_t + D_t^{-1}\dot{D}_t = 0$$

以及 (3.1). 将这个结论用到矢量  $\Gamma$  上, 我们得到  $\dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega]$ . 在重力下, 质点  $q_i$  受力为  $\mu_i g e_3$ . 不妨设在动系中, 刚体质心矢量为  $R$ , 刚体的总质量为  $\mu$ . 在这些记号下, Euler 方程 (6.2) 为

$$\dot{M} + [\Omega, M] = \sum_i [Q_i, D_t^{-1}\mu_i g e_3] = [g \sum_i \mu_i Q_i, D_t^{-1}e_3] = [\mu g R, \Gamma].$$

故我们得到 Euler-Poisson 方程:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\dot{\Omega} + [\Omega, \mathcal{A}\Omega] &= [\mu g R, \Gamma], \\ \dot{\Gamma} &= [\Gamma, \Omega]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

## 7 Euler 陀螺

本节考虑 Euler 陀螺, 即刚体在定点运动时不受任何外力. 另外一类情形与这类情况等价: 刚体的固定点在质心而外部的力场是均匀力场, 此时外力  $u_i = \mu_i f$ , 其中  $f$  为常矢量, 可验证此时的总外力矩为零:

$$\sum_i [q_i, u_i] = \sum_i [q_i, \mu_i f] = [\sum_i \mu_i q_i, f] = 0.$$

因此, 刚体的 Euler 方程与不受外力时完全相同. 实际上, 在中心场下运动的刚体, 可以将刚体的运动分解为质心在中心场下的运动 (刚体的质量全部集中于质心) 和刚体绕质心的运动, 如果刚体关于质心是中心对称的, 那么此时刚体绕质心的运动也相当于 Euler 陀螺情形. 在后续的讨论的刚体的一般运动, 我们将细述这类情形.

### 7.1 对称陀螺

首先我们考虑刚体的惯量椭球是对称椭球:  $I_1 = I_2 > I_3$ , 同样地, 设刚体的主轴为动坐标系的坐标轴. 由于此时静坐标系下的角动量的导数  $\dot{m}$  为零, 可适当地取静坐标系中的正交基使得  $m$  与  $z$  轴同向. 下面我们将给出三个 Euler 角关于时间的函数.

由方程 (6.3) 以及  $I_1 = I_2$ , 立即得到  $\Omega_3 = c$ . 下面我们说明 Euler 角中的  $\theta$  角为常量. 设动坐标系的三个坐标基为  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , 静坐标系的坐标基为  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . 由假设,  $\theta$  即  $D_t E_3$  与  $m$  的夹角. 注意到

$$\langle m, D_t E_3 \rangle = \langle D_t M, D_t E_3 \rangle = \langle M, E_3 \rangle = \langle \mathcal{A}\Omega, E_3 \rangle = I_3 \Omega_3.$$

由于  $m$  与  $D_t E_3$  的模长始终为定值, 那么根据上式, 两者的夹角  $\theta = \theta_0$  也是常量.

设  $m = (0, 0, m_3)$ , 那么有  $\mathcal{A}\Omega = M = D_t^{-1}m = D_t^T m$ . 利用矩阵  $D_t$  的表达式 (2.1) 以及角速度的表达式 (4.1), 并代入  $\dot{\theta} = 0$  我们得到

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\varphi} \sin \theta_0 \sin \psi \\ I_2 \dot{\varphi} \sin \theta_0 \cos \psi \\ I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_3 \sin \theta_0 \sin \psi \\ m_3 \sin \theta_0 \cos \psi \\ m_3 \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

由上式立即得到

$$\theta(t) \equiv \theta_0, \quad \dot{\varphi} = \frac{m_3}{I_1}, \quad \dot{\psi} = \left( \frac{m_3}{I_3} - \frac{m_3}{I_1} \right) \cos \theta_0.$$

我们还可以获得如下定性的信息: 瞬时旋转轴  $\omega$  的长度不变,  $\omega$  与  $m$  的夹角也不变, 且三个矢量  $\{m, \omega, D_t E_3\}$  在静坐标系  $k$  下位于同一个平面. 根据这些信息, 刚体在转动时, 矢量  $\omega$  与矢量  $D_t E_3$  分别画出了两个锥面, 见图 5. 值得注意的是, 由于  $\omega$  与  $D_t E_3$  的夹角也不变, 故在动坐标系中,  $\Omega$  也绕着  $E_3$  画出一个锥面.

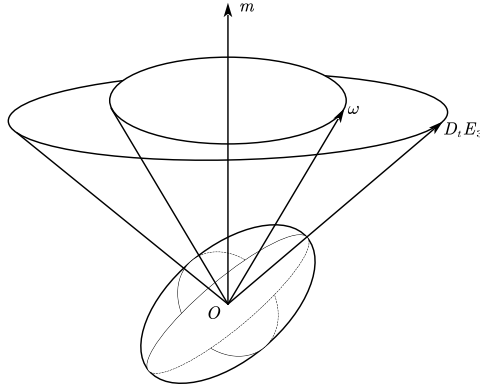


图 5 矢量  $\omega$  与矢量  $D_t E_3$  在  $k$  中画出的锥面

实际上, 由方程 (6.3),  $\Omega_3$  为常量, 而  $\Omega_1, \Omega_2$  满足的方程为无阻尼线性振子, 容易验证  $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$  也为常量. 因此  $\Omega$  具有固定的模长, 故  $\omega$  的模长也是常量. 由于

$$\langle m, \omega \rangle = \langle M, \Omega \rangle = \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = 2T,$$

其中  $T$  即系统的动能. 由能量守恒以及  $\omega$  的模长不变, 故  $\omega$  与  $m$  的夹角也不变. 利用  $\mathcal{A}\Omega = M$ , 由三个矢量  $\{M, \Omega, E_3\}$  组成的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_1 \Omega_1 & \Omega_1 & 0 \\ I_2 \Omega_2 & \Omega_2 & 0 \\ I_3 \Omega_3 & \Omega_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

不难看出其行列式为 0. 因此  $\{m, \omega, D_t E_3\}$  在静坐标系  $k$  下是共面的.

虽然  $\omega$  与陀螺轴  $D_t E_3$  都是周期运动, 但刚体的运动仍可能是拟周期的: 若刚体绕着陀螺轴的旋转  $\psi(t)$  与刚体的陀螺轴绕  $m$  的旋转  $\varphi(t)$  的周期之比与  $2\pi$  不可公度, 即

$$\frac{I_1 \cos \theta_0}{I_3 - I_1} \notin 2\pi\mathbb{Q},$$

那么陀螺永远也回不到初始位置. 反之, 陀螺的运动则是周期的.

另一个值得注意的点是守恒量的个数与刚体转动时频率的个数关系. 上面我们已经说明若 Euler 陀螺是对称陀螺, 则刚体转动时一般有两个频率. 作为一个三个自由度的系统, 六维的相空间中需要有四个独立的首次积分才能得到一个二维环面, 而我们现在已知的守恒量有: 角动量的三个分量, 能量. 由于陀螺绕  $E_3$  轴的旋转不改变系统的 Lagrangian 量, 即系统的动能, 由诺特定理, 角动量在  $E_3$  轴上的投影  $M_3$  是守恒的. 而又由于刚体转动的频率个数为 2, 我们断言这个守恒量与其他守恒量是相关的, 否则系统将存在 5 个独立的首次积分, 这样系统一般的运动只有 1 个频率, 与先前的推导相矛盾.

实际上, 系统的角动量的模长的平方 (由于角动量守恒, 其模长自然是守恒的),  $M_3$  以及能量都可由动坐标系下的角速度表出, 分别列出为:

$$T = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2, \quad M_3 = I_3\Omega_3,$$

$$m^2 = \langle m, m \rangle = \langle M, M \rangle = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2.$$

再次利用  $I_1 = I_2 > I_3$ , 我们有

$$M_3 = I_3 \sqrt{\frac{2I_1T - m^2}{I_1I_3 - I_3^2}},$$

即  $M_3$  可由角动量以及动能表出.

当刚体是球陀螺, 系统的首次积分为角动量  $m$ ,  $M$  以及动能  $T$ .  $M$  守恒是由于绕动坐标系中的三个坐标轴的旋转不会改变动能. 这 7 个量中有 5 个是独立的, 因此球陀螺一般的运动只有一个频率. 实际上, 由于

$$m = D_t M = D_t A \Omega = I D_t \Omega = I \omega,$$

其中  $I = I_1 = I_2 = I_3$ , 即角速度是恒定的. 刚体一般的运动即是绕  $\omega$  轴作匀速转动.

最后, 我们来叙述一下上述结果对于地球运动的描述. 如果将地球绕太阳的运动认为是中心场问题, 那么作为一个刚体在三维空间中的运动, 地球的运动可分解为其质心 (地心) 绕太阳的椭圆运动与地球自身绕其质心的自由转动 (由于地球是中心对称的). 但地球并不是一个球体, 而是一个有些扁的旋转体 (其赤道半径比极径长 43 公里), 其关于连接南极与北极的轴的转动惯量较大, 而对于其另外两个位于赤道面上的轴的转动惯量较小. 由以上对旋转椭球的运动分析, 地球的瞬时转动轴在与地球固连的坐标系中是周期变化的, 因此南极点与北极点 (地球瞬时转动轴与地球表面的交点) 也是周期变化的, 周期约为 25722 年. 因此, 即便不考虑其他行星的作用, 地球的运动也具有三个频率, 绕太阳的公转频率, 绕旋转轴的转动频率, 以及旋转轴绕着自转的角动量的转动频率.

## 7.2 非对称陀螺

下面我们考虑非对称陀螺:  $I_1 > I_2 > I_3$ . 对于非对称陀螺, 若要得到 Euler 角关于时间的显式表达式, 需要用到椭圆积分. 然而, 即便不将系统解出, 利用守恒量, 我们也可对系统的动力学有一个较清晰的认识.

首先来看刚体能量以及角动量模长的平方这两个首次积分:

$$2T = I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3},$$

$$M^2 = \langle M, M \rangle = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

注意到, 由于  $\mathcal{A}\Omega = M$ , 在动坐标系中, 研究  $M$  的运动与研究  $\Omega$  的运动是等价的. 由上式可以看到, 动坐标系下的角动量  $M$  位于一个三轴椭球与球的交线上. 为了看出这些交线的构造, 我们固定椭球, 即固定能量  $T > 0$ , 而改变  $M$  的大小.

显然只有当  $2TI_3 \leq M^2 \leq 2TI_1$  时, 球才与椭球有交线, 得到的交线如图 6 所示.

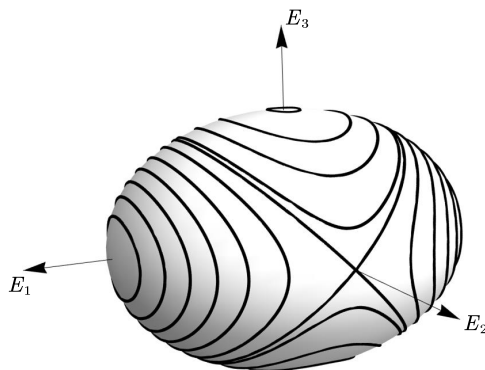


图 6 角动量  $M$  在等能面上的轨迹.

注意到, 这个椭球与惯量椭球的形状是不同的. 惯量椭球的三个半轴长分别为

$$1/\sqrt{I_1}, 1/\sqrt{I_2}, 1/\sqrt{I_3},$$

与这个椭球的三个半轴长的大小关系刚好相反. 当  $2TI_3 < M^2 < 2TI_2$  时, 球与等能面的交线是绕着轴  $E_3$  与等能面的交点的两条封闭曲线. 当  $M^2 = 2TI_2$ , 球与等能面的交线是交叉着的两个闭曲线, 交叉点也是  $E_2$  轴与等能面的交点. 当  $M^2$  渐渐增大时, 交线渐渐收缩到  $E_1$  轴与等能面的两个交点.

坐标轴  $E_i$  与等能面的交点代表着角动量是恒定的沿着  $E_i$  轴的矢量, 此时角速度  $\Omega$  也是恒定的, 且其与角动量共线, 即都位于  $E_i$  轴上. 因此, 在静坐标系下,  $\omega$  与  $m$  共线, 故  $\omega$  的大小与方向都是恒定的. 此时刚体的运动即是绕着主轴  $E_i$  的恒定旋转.

值得注意的是, 当角速度的方向与主轴有着小的偏差, 其变化与该主轴的主转动惯量相关. 若角速度的方向充分靠近  $E_1, E_3$  轴, 由图 6, 其仍然在  $E_1, E_3$  轴附近变化; 但当角速度的方向靠近  $E_2$  轴时, 即便是再小的偏差, 其也会发生较大的变化.

以上我们利用系统的两个守恒量给出了陀螺的角动量在动坐标系  $K$  中的一个定性描述. 下面我们考虑刚体在静坐标系下的绝对运动. 首先刚体的绝对运动与惯量椭球的绝对运动是等价的, 在直观上即是刚体的惯量椭球与动坐标系  $K$  一样, 都是与刚体固连的, 可利用惯量椭球的定义证明这一点. 以下即是著名的 Euler 陀螺的 Poincaré (普安索) 描述.

**定理 7.1** 惯量椭球沿着一个垂直于角动量  $m$  的恒定平面作无滑动的滚动.

**证明:** 惯量椭球即

$$W := \{\Omega : \langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle = 1\}.$$

考虑在静坐标系  $k$  中与角动量  $m$  垂直且与椭球  $D_t W$  相切的两个平面. 下面我们说明这两个平面与时间无关.

注意到, 在切点处, 椭球的法线与  $m$  平行. 刚体运动时的角速度  $\Omega$  所在直线与惯量椭球的两个交点为  $\pm\Xi = \pm\Omega/\sqrt{2E}$ , 其中  $E$  为刚体运动的能量. 相应地, 在静系中, 这两个交点为  $\pm\xi = \pm\omega/\sqrt{2E}$ . 而惯量椭球在交点处的法线为

$$\text{grad}(\langle \mathcal{A}\Omega, \Omega \rangle) = 2\mathcal{A}\Omega = 2M.$$

由  $\pm\xi$  在惯量椭球上, 且惯量椭球在  $\pm\xi$  的法线方向与  $m$  平行,  $\pm\xi$  即为切点. 下面说明  $\xi$  与  $m$  的内积是常量, 则惯量椭球的中心到平面的距离也为常量, 即这两个平面是恒定的. 由推论 5.2, 我们有

$$\langle \pm\xi, m \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2E}} \langle \omega, m \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2E}} \langle \Omega, M \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2E}} \langle \Omega, \mathcal{A}\Omega \rangle = \pm\sqrt{2E}.$$

最后, 由于切点  $\pm\xi$  位于瞬时转动轴  $\omega$  上, 其速度恒为 0, 这说明惯量椭球在切平面上是无滑动的.  $\square$

由之前对于角动量的分析可知, 角动量在刚体坐标系中是周期变化的, 故角速度在刚体坐标系中也是周期变化的. 因此, 上述定理中惯量椭球与不变平面的切点在惯量椭球上画出一条闭曲线. 当切点沿着这条曲线变化一周后, 在刚体坐标系中, 运动回归到初始状态. 但在静坐标系中, 这个切点在不变平面上绕着矢量  $m$  的垂足转过了角  $\alpha$ . 当  $\alpha$  与  $2\pi$  可公度时, 惯量椭球可回到初始状态. 当  $\alpha$  与  $2\pi$  不可公度时, 刚体永远不会回到初始位置. 此时切点在不变平面上的运动是拟周期的.

关于如何显式地得到刚体的绝对运动, 即给出三个 Euler 角关于时间的函数, 可参见.

## 8 Lagrange 陀螺

这一节我们考虑在重力场下的刚体定点运动. 这个问题采用 Lagrange 的观点是较为方便的. 首先, 取静坐标系的  $e_3$  轴的负向为重力方向, 刚体坐标系的三个坐标轴分别为三个主轴. 既然要采用 Lagrange 的观点, 我们需要写出广义坐标下系统的动能与势能. 广义坐标自然地可选择为三个 Euler 角. 那么动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2}(I_1(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 + I_2(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2). \end{aligned}$$

假设刚体在坐标系  $K$  中所占区域为  $\mathcal{U}$ , 其密度函数为  $\rho$ . 那么在刚体坐标系中, 质心坐标为

$$(X_0, Y_0, Z_0) := \frac{1}{\int_{\mathcal{U}} \rho(Q) dQ} \int_{\mathcal{U}} \rho(Q) Q dQ.$$

记在静坐标系下的质心坐标  $(x_0, y_0, z_0)^T = D_t(X_0, Y_0, Z_0)^T$ . 取势能零点为  $z_0 = 0$  时刚体的位置. 那么根据势能的定义, 刚体的势能为

$$U = \int_{\mathcal{U}} \rho(Q) (D_t Q)_3 g dQ = g (D_t \int_{\mathcal{U}} \rho(Q) Q dQ)_3 = \mu g z_0.$$

其中  $\mu$  为刚体的总质量,  $(\cdot)_3$  为一个矢量的第三个分量.

因此在重力下, 刚体的 Lagrange 函数为

$$L = T - U = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) - \mu g z_0. \quad (8.1)$$

这个三个自由度的力学系统有两个首次积分: 能量与角动量在  $e_3$  轴上的分量  $m_3$ . 实际上, 绕  $e_3$  轴的旋转不会改变质心的坐标, 那么势能是不会改变的. 由诺特定理, 角动量在此轴上的投影是守恒的.

仅仅知晓两个守恒量不能完全理解这个三自由度系统的动力学. Lagrange 考虑了一类特殊情形: 当刚体是对称陀螺, 即  $I_1 = I_2$ , 且刚体的质心在主轴  $E_3$  轴上, 这类情况被称作是 Lagrange 陀螺. 如果刚体是一个均质的旋转体, 取旋转轴上一点作为刚体的固定点, 此时刚体的定点运动即为 Lagrange 陀螺情形.

如果刚体为 Lagrange 陀螺, 那么绕着  $E_3$  轴的转动不会改变系统的动能与势能. 因此, 角动量在  $E_3$  轴的投影  $M_3$  也是守恒的, 此时系统具有了三个守恒量. 下面我们利用这三个守恒量来分析 Lagrange 陀螺的动力学. 可以预见, 此时刚体一般的运动将会有三个频率.

由 Euler 角的定义,  $U = \mu g z_0 = \mu g l \cos \theta$ , 其中  $l$  为质心在  $E_3$  轴的坐标. 令  $I_1 = I_2$ , 可得到 Lagrange 陀螺的 Lagrange 函数为:

$$L = \frac{1}{2}(I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2) - \mu g l \cos \theta. \quad (8.2)$$

此时 Lagrange 函数与  $\varphi, \psi$  无关, 我们立即可得到两个守恒量:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \dot{\varphi}(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = m_3, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3 \dot{\varphi} \cos \theta + I_3 \dot{\psi} = M_3, \end{aligned} \quad (8.3)$$

其中我们运用了  $\mathcal{A}\Omega = M, m = D_t M$ , 以及  $\Omega, D_t$  的表达式 (见 (4.1), (2.1)) 验证了  $m_3$  与  $M_3$  的表达式与  $\partial L / \partial \dot{\varphi}, \partial L / \partial \dot{\psi}$  一致.

首先, 我们来看 Lagrange 陀螺与球摆之间的联系. 利用 (??) 将  $\dot{\psi}$  用  $\frac{M_3}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta$  替代, Lagrange 函数 (??) 变为

$$L = \frac{1}{2}(I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l \cos \theta). \quad (8.4)$$

而长度为  $l$  的无质量的杆, 一段固定, 一段连一个质量为  $\mu$  的球摆的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\mu g(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha) - \mu g l \cos \alpha), \quad (8.5)$$

这里的  $(\alpha, \phi)$  为球坐标,  $\alpha$  与 Euler 角中的  $\theta$  定义一致, 而  $\phi$  则与  $\varphi$  相差一个常数, 见下图. 因此, 如果将刚体绕自身对称轴的旋转忽略, 此时刚体的动力学与一个球摆的动力学完全一致.

利用能量以及  $m_3, M_3$  的守恒, 我们可以将此时刚体的运动简化为一个单自由度自治系统的动力学. 由 (??) 可看到, 若  $m_3 \neq M_3$ , 则  $\theta \neq 0, \pi$ . 若某个运动使得  $\theta(t_0) = 0$  或  $\pi$ , 此运动应该为下列情况中的一种:

- 刚体绕着  $e_3$  轴作恒定旋转.
- 刚体绕  $E_3$  轴旋转, 同时刚体在质心所在的球面上的大圆上作单摆运动.

下面我们总假设  $m_3 \neq M_3$ .

**定理 8.1** Lagrange 陀螺的运动可化简为如下的单自由度系统的运动:

$$E' = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - U_{eff}(\theta),$$

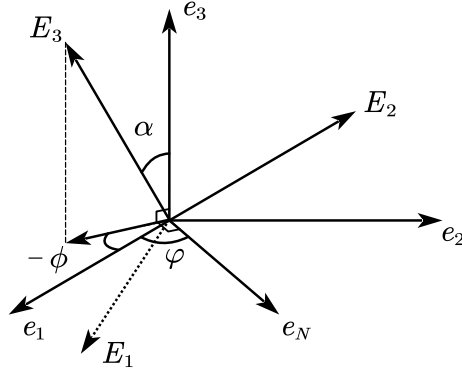


图 7 Euler 角  $\varphi$  与球坐标中的角度  $\phi$  之间的关系.

其中  $E'$  为此单自由度系统的 Hamilton 函数,  $U_{eff}$  为等效势能, 其具体表达式为

$$U_{eff} = \frac{(m_3 - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \mu g l \cos \theta.$$

**证明:** 利用 (??) 解出

$$\dot{\varphi} = \frac{m_3 - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta.$$

将  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$  代入到能量的表达式中得到

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(m_3 - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{M_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta.$$

由于  $M_3^2/2I_3$  为常数, 令  $E' = E - M_3^2/2I_3$  即可得到所证结论.  $\square$

下面我们进一步分析刚体的绝对运动. 如果忽略刚体绕  $E_3$  轴的旋转, 那么我们只需要了解矢量  $E_3$  的变化规律即可. 为此我们需要分析  $\varphi$  与  $\theta$  的变化规律.