

输油管的布置及数学模型

谢丽英

(广东第二师范学院 物理系, 广东 广州 510303)

摘要:应用优化分析理论,针对输油管道的铺设问题,考虑了是否使用共用管道以及是否存在附加费用等不同情况,进行数学模型的建立,得出在不使用共用管道、使用共用管道且不存在附加费用以及使用共用管道但存在附加费用的几种情况下的最优铺设方案,使得各种情况下输油管道铺设费用最低.

关键词:多元函数;极值;优化
中图分类号:G 424. 28 文献标识码:A 文章编号:2095-3798(2012)03-0046-04

1 问题重述

某油田计划在铁路线一侧建造两家炼油厂,同时在铁路线上增建一个车站,用来运送成品油. 由于这种模式具有一定的普遍性,油田设计院希望建立管线建设费用最省的一般数学模型与方法^[1].

问题 1:针对两炼油厂到铁路线距离和两炼油厂间距离的各种不同情形,提出你的设计方案. 在方案设计时,若有共用管线,应考虑共用管线费用与非共用管线费用相同或不同的情形.

问题 2:设计院目前需对一更为复杂的情形进行具体的设计. 两炼油厂的具体位置由图 1 所示,其中 A 厂位于郊区(图中的 I 区域),B 厂位于城区(图中的 II 区域),两个区域的分界线用图中的虚线表示. 图中各字母表示的距离(单位:km)分别为 $a=5, b=8, c=15, l=20$.

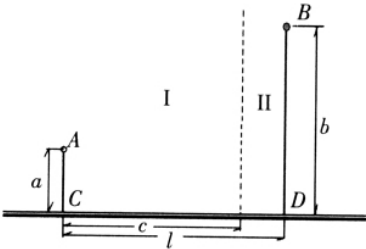


图 1 炼油厂的位置布局

若所有管线的铺设费用均为每千米 7.2 万元. 铺设在城区的管线还需增加拆迁和工程补偿等附加费用,为对此项附加费用进行估计,聘请 3 家工程咨询公司(其中公司一具有甲级资质,公司二和公司三具有乙级资质)进行了估算. 估算结果如表 1 所示.

表 1 附加费用的估算

工程咨询公司	公司一	公司二	公司三
附加费用(万元/km)	21	24	20

请为设计院给出管线布置方案及相应的费用.

收稿日期: 2011-09-23
基金项目: 广东第二师范学院 2010 年教育科学研究课题
作者简介: 谢丽英,女,广东湛江人,广东第二师范学院物理系教师,博士.

问题 3:在该实际问题中,为进一步节省费用,可以根据炼油厂的生产能力,选用相适应的油管.这时的管线铺设费用将分别降为输送 A 厂成品油的每千米 5.6 万元,输送 B 厂成品油的每千米 6.0 万元,共用管线费用为每千米 7.2 万元,拆迁等附加费用同上.请给出管线最佳布置方案及相应的费用.

2 模型的假设与符号说明

2.1 模型的假设

- (i)假设两炼油厂位于铁路同一侧,布局如图 1 所示,且炼油厂 A 比炼油厂 B 距离铁路近;
- (ii)假设不考虑铺设管线线路的地势和地形的变化;
- (iii)假设在郊区内不考虑任何工程补偿等附加费用.

2.2 符号说明

k_1, k_2 :分别表示非共用管线和共用管线的单位铺设费用,单位为万元/km,且 $k_1 \leq k_2 < 2k_1$;
 y :表示管道铺设的总费用;
 a :表示 A 厂到铁路的距离;
 b :表示 B 厂到铁路的距离;
 l :表示 A、B 两个厂在铁路上的投影之间的距离.

3 问题分析

问题 1 中,由于两炼油厂的位置不确定,因此两炼油厂所在的直线可能垂直于铁路,也可能不垂直于铁路.前者的最小铺设方式即管道垂直于铁路;而对于后者,由于存在共用管线费用与非共用管线费用相同或不同两种情况,要分别建立数学模型进行求解.

对于问题 2 和问题 3 首先要对 3 家工程咨询公司进行比较,选择较优的公司,考虑拆迁和工程补偿等附加费用,得出工程费的表达式,找出极值点,从而计算出最低工程费用.

4 模型的建立与求解

4.1 问题 1 的模型

4.1.1 无共用管道的情形

考虑图 2 中两种情形:

(a)AB 连线垂直于铁路:工程费为 $y=k_1(a+b)$;

(b)AB 连线不垂直于铁路:由于管道铺设费用相同,所以当 AB 两点到铁路上某点的距离之和最小时,工程费最低.如图 2(b),作 A 关于直线 CD 的对称点 A',连接 A'B 交与直线 CD 于点 P,则将车站建于 P 点时管道铺设费用最小,为

$$y=k_1 \sqrt{(b+a)^2+l^2}.$$

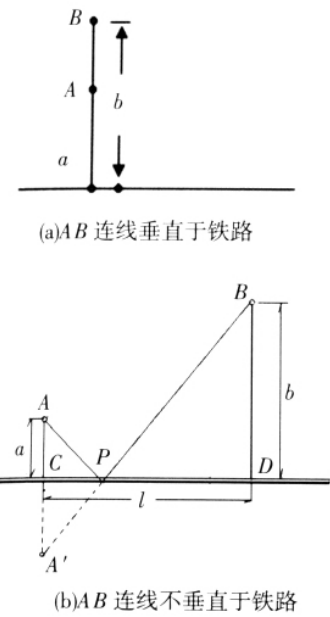
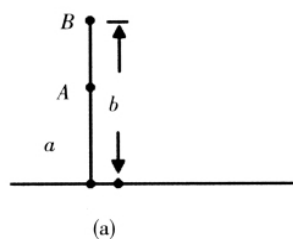


图 2 没有公用管道的情形

4.1.2 有共用管道的情形

若存在共用管道,则考虑图 3 中的两种情形,且这两种情形的工程费用为:



(a)工程费用为 $y=k_1(b-a)+k_2a$;

(b)假设共用管道长度为 $d, 0 < d \leq a$, 根据 4.1.1 节可得 A、B 两点到距离铁路为 d 的平行线上一点的距离之和的最小值为 $\sqrt{l^2+(b+a-2d)^2}$, 则工程费用为

$$y=k_1\sqrt{l^2+(b+a-2d)^2}+k_2d. \quad (1)$$

式中 y 是关于 d 的函数. 当 $k_1=k_2$ 时, 为共用管道和非共用管道单位铺设费用相同的情形; 当 $k_1 \neq k_2$ 时, 为共用管道和非共用管道单位铺设费用不同的情形. 为求得最小值, 对 y 求导^[2,3], 得

$$\frac{dy}{dd} = \frac{-2k_1(a+b-2d)}{\sqrt{l^2+(b+a-2d)^2}} + k_2.$$

因为 $k_1 \leq k_2 < 2k_1$, 令 $\frac{dy}{dd} = 0$, 得 $d = \frac{1}{2}(a+b \pm k_2 \frac{l}{\sqrt{4k_1^2 - k_2^2}})$. 不妨

假设 $a \leq b$, 由于 $0 < d \leq a$, 则 $\frac{a+b}{2} \geq a \geq d$, 所以 d 的取值为 $d = \frac{1}{2}(a+b -$

$k_2 \frac{l}{\sqrt{4k_1^2 - k_2^2}})$. 并且, 当 $k_1 = k_2$ 时, $d = \frac{1}{2}(a+b - \frac{\sqrt{3}}{3}l)$.

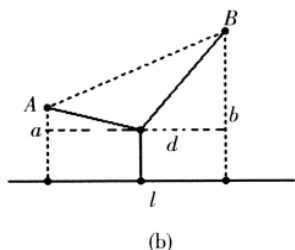


图 3 两炼油厂有公用管线的情形

4.2 问题 2 的建模及求解

如图 4 所示, 在分界线上有一点 E, E 为 B 炼油厂管线所经过的一点.

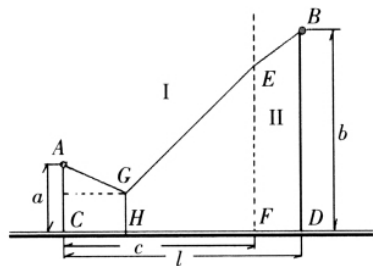


图 4 问题 2 和问题 3 的布局

在考虑城区附加费用后, 设 $EF=e$, 由于区域 II 存在拆迁补偿费, 且该费用远远高于管道的单位铺设费用, 所以 EB 应该尽量短, 即 $a \leq e \leq b$. 那么, 郊区中管道总长度为 $AG+EG+GH$, 其中 GH 表示共用管线长度, 设 $GH=d$, 则 $0 \leq d \leq a$, 当 $d=0$ 时表示无共用管道.

考虑到铺设在城区的管线还需增加拆迁和工程补偿等附加费用, 对 3 家咨询公司的资质进行比较, 公司一是具备甲级资质的咨询公司, 公司二和公司三是具备乙级资质的咨询公司, 相比之下, 甲级资质的可信度比较高. 在附加费用估计相差不大的情况下, 选择可信度比较高的具有甲级资质的公司一作为工程咨询公司, 即附加费用为 21 万元/km. 设 y 为工程费用与附加费用的总额, 由 4.1.2 节的分析得

$$y=k_1\sqrt{c^2+(e+a-2d)^2}+k_2d+(k_1+21)\sqrt{(l-c)^2+(b-e)^2}. \quad (2)$$

由题目可知, $a=5, b=8, c=15, l=20, k_1=k_2=7.2$, 则(2)式为

$$y=7.2\sqrt{225+(5+e-2d)^2}+7.2d+28.2\sqrt{25+(8-e)^2}. \quad (3)$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial d}=0, \\ \frac{\partial y}{\partial e}=0. \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)计算得 $e \approx 7.356\text{km}$, $d \approx 1.848\text{km}$, 将其带入式(3)得 $y \approx 280.184$ 万元. 由于 $d \approx 1.848 \neq 0$, 所以在郊区有共用管线时费用低.

4.3 问题 3 的建模及求解

如图 4 所示, B 厂的管线和虚线 EF 的交点为 E , G 为动点, d 为动点 G 到铁路线的距离, G 到 AC 的距离为 f , $0 \leq f < c$, 且 d, e, f 为变量.

工程费用为

$$y = 5.6 \sqrt{f^2 + (a-d)^2} + 6 \sqrt{(c-d)^2 + (e-d)^2} + 27 \sqrt{(b-e)^2 + (l-c)^2} + 7.2d. \tag{5}$$

由题目可知, $a=5, b=8, c=15, l=20$, 则(5)式为

$$y = 5.6 \sqrt{f^2 + (5-d)^2} + 6 \sqrt{(15-d)^2 + (e-d)^2} + 27 \sqrt{(8-e)^2 + 25} + 7.2d. \tag{6}$$

计算式(6)的极值点得 $e \approx 7.709 \text{ km}$, $d \approx 5 \text{ km}$, $f \approx 0 \text{ km}$, 将其带入式(5)得 $y \approx 233.391$ 万元. 由计算结果可知, AC 段为公用管线, 车站建于 C 点.

5 模型的进一步讨论

在现实生活中, 有很多与本题输油管线铺设相类似的问题, 如货物运输路线的铺设、地铁线的铺设和工厂排污管道的铺设等. 可以根据本题的思路, 通过数学建模的方法, 结合实际, 找出最佳方案.

参考文献:

[1] 中国工业与应用数学学会. 2010 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. (2010-09-17). [2011-09-20]. http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/d5ae730f57dea3208cae73f7635aeec8.html.
[2] 汪晓银, 周保平. 数学建模与数学实验[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 64-70.
[3] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 23-26.

The Layout of Transport Pipe and the Mathematical Model

XIE Li-ying

(Department of Physics, Guangdong University of Education,
Guangzhou, Guangdong, 510303, P. R. China)

Abstract: In this paper, optimization theories have been used to analyze the layout of transport pipe. The analyses have considered several conditions if the common pipe was used or if extra-costs existed. The paper has shown the model for several conditions: (i) the common pipe is not used; (ii) the common pipe exists while there are no extra-costs; (iii) there are common pipe and extra-costs. The paper also gets the optimum layouts for those conditions and their corresponding minimum layout costs.

Key words: multivariate function; extreme; optimum