输油管线铺设的优化模型

李　明

（苏州工业职业技术学院 文化与艺术系，江苏 苏州　215104）

摘　要：通过用几何方法与导数求最小值方法相结合，结合建立输油管线辅设最少费用的一般数学模型，得到费用最小值，解决了管道辅设的最短路径问题。

关键词：管线铺设；优化模型；最低费用；设计方案

中图分类号：O 29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-2153(2012)05-0029-04

1　问题背景与描述

本问题源于 2010 年全国大学生数学建模竞赛 C 题[1]。原问题背景是某油田计划在铁路线一侧建造两家炼油厂 A 和 B，同时在铁路线上增建一个车站 E，油田设计院预建立管线建设费用最省的一般数学模型和方法。

问题一：针对两炼油厂到铁路线距离和两炼油厂间距离的各种不同情形，提出设计方案。在方案设计时，若有共用管线，应考虑共用管线费用与非共用管线费用相同或不同的情形。

问题二：设计院目前需对一更为复杂的情形进行具体的设计。两炼油厂的具体位置由图 1 所示。图 1 中，I 区域为 A 厂位于郊区，II 区域为 B 厂位于城区，两个区域的分界线用虚线表示，距离分别为 a=5 km，b=8 km，c=15 km，l=20 km。

若所有管线的铺设费用均为每千米 7.2 万元。铺设在城区的管线还需增加拆迁和工程补偿等附加费用，为对此项附加费用进行估计，聘请三家工程咨询公司（其中公司一具有甲级资质，公司二和公司三具有乙级资质）进行了估算。估算结果：公司一为 21 万元/km；公司二为 24 万元/km；公司三为 20 万元/km。请为设计院给出管线布置方案及相应的费用。

问题三：在该实际问题中，为进一步节省费用，可以根据炼油厂的生产能力，选用相适应的油管。这时的管线铺设费用将分别降为输送 A 厂成品油的每千米 5.6 万元，输送 B 厂成品油的每千米 6.0 万元，共用管线费用为每千米 7.2 万元，拆迁等附加费用同上。请给出管线最佳布置方案及相应的费用。

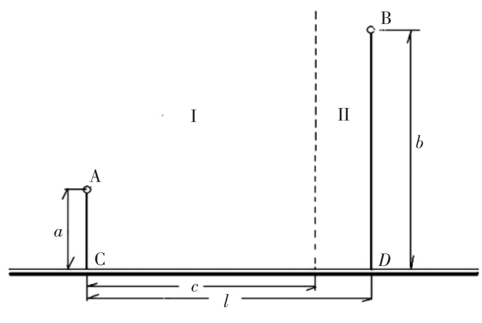

图 1　两炼油厂的具体位置

2　模型假设

（1）假定在管线设置区域内，火车线路是直线，车站、两个炼油厂 A 和 B 均视为质点。

（2）假定管线铺设时，忽略地面上复杂地理环境，视 A 和 B 周围情况相同。

收稿日期：2012-08-07

作者简介：李　明（1975-），女，新疆石河子人，副教授，硕士，研究方向为应用数学。

（3）假定管道建设材料标准统一，价格稳定。

（4）不妨设炼油厂 A 到铁路线的距离 a 小于炼油厂 B 到铁路线的距离 b，即 $a\leqslant b$。

3 模型建立与求解

3.1 问题一模型的建立

问题一的基本图形如图 1 所示，以铁路线所在直线为 x 轴，过炼油厂 A 到铁路线的垂线为 y 轴，原点为 C，建立直角坐标系，AC 距离为 a，炼油厂 B 到铁路线的垂足为 D，且距离为 b，两厂间垂直距离为 l，则有 $A(0,a)$，$B(l,b)$。

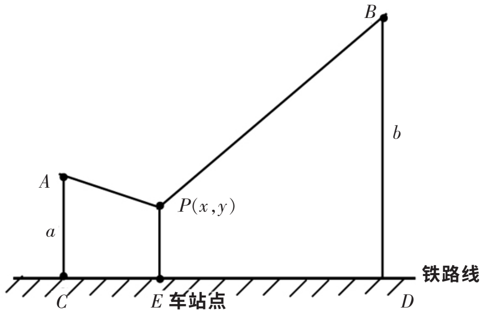

图 2　炼油厂铁路位置

图 2 中，$P(x,y)$ 为两个炼油厂 A 和 B 非共用管线的交点，显然有 $0\leqslant y\leqslant a$，原因是：

（1）假如 $y<0$，点 P 位于 x 轴下方，如图 3 所示，连接 BQ，显然 $BP+AP+PE>BQ+AQ$，则点 P 不存在，车站会建在 Q 点。

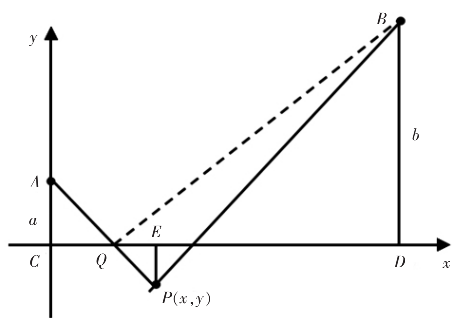

图 3　P 点位置分析(I)

(2)假如 $y>a$，点 P 高于 A 点位置，如图 4 所示，连接 BA，显然 $BP+PA+PE>BA+AC$，则点 P 不存在，车站会建在 C 点[2]。

因此，在 $0\leqslant y\leqslant a$ 情况下，构建以管线铺设费用最少为目标的优化函数，假如共用管线的单位成本是非共用管线单位成本的 k 倍，即 $C_2=kC_1$。

根据“费用=单位成本×管线总长”，得

$$\min W=C_1\times AP+C_1\times BP+C_2\times PE,$$

$$\min W=C_1\times g(x,y),$$

式中：C_1 为非共用管道铺设的单位成本；C_2 为共用管道铺设的单位成本；C 为附加费用；W 为管线总费用。则在单位成本 C_1 一定的情况下，$g(x,y)$ 最小，就是总费用 W 最省，如图 5 所示，建立如下数学模型[3]：

$$\min g(x,y)=\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{(l-x)^2+(b-y)^2}+ky,$$

约束条件为

$$0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant y\leqslant b。$$

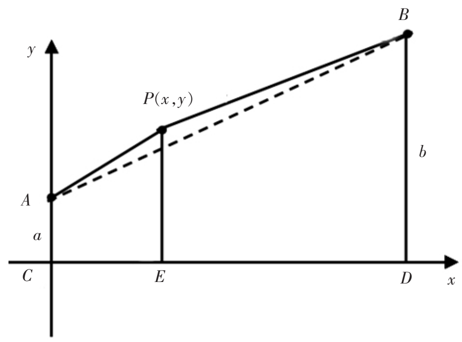

图 4　P 点位置分析(II)

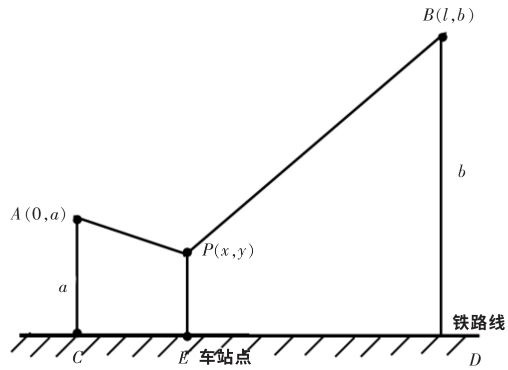

图 5　A，B，P 三点坐标

问题归结到：在指定范围内，变量 x 和 y 取何值时，目标函数 $g(x,y)$ 能取到最小值。由导数的知识易见，函数 $g(x,y)$ 分别对 x 和 y 求偏导：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}-\dfrac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+(b-y)^2}}=0\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{-(a-y)}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}-\dfrac{(b-y)}{\sqrt{(l-x)^2+(b-y)^2}}+k=0\end{cases}。\quad(1)$$

式(1)简化过程较为复杂，但经过观察，会发现使用三角函数求解较为简单[4]，即

令 $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}=\sin\alpha$，$\dfrac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+(b-y)^2}}=\sin\beta$，

则，易见 $\dfrac{a-y}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}\cos\alpha$，$\dfrac{b-y}{\sqrt{(l-x)^2+(b-y)^2}}\cos\beta$，

方程(1)可化简为

$$\begin{cases}\sin\alpha-\sin\beta=0\\-\cos\alpha-\cos\beta+k=0\end{cases},$$

解之得,$\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{k}{2}$,$\sin\alpha=\sin\beta=\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{2}$;由 $\dfrac{x}{a-y}=\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{k}$,得 $x=\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{k}(a-y)$;由 $\dfrac{l-x}{b-y}=\tan\beta=\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{k}$,得驻点

$$y=\frac{b+a}{2}-\frac{kl}{2\sqrt{4-k^2}},x=\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}\frac{a-b}{2}+\frac{l}{2}。$$

由于 $x=\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{k}\dfrac{a-b}{2}+\dfrac{l}{2}>0$ 和 $y=\dfrac{b+a}{2}-\dfrac{kl}{2\sqrt{4-k^2}}>0$,可以得到以下3种情况:

(1)当 $\dfrac{(b-a)\sqrt{4-k^2}}{k}<l<\dfrac{(b+a)\sqrt{4-k^2}}{k}$ 时,有 $\min g(x,y)=\dfrac{(b+a)k}{2}+\dfrac{l\sqrt{4-k^2}}{2}$;

(2)当 $l=\dfrac{(b-a)\sqrt{4-k^2}}{k}$ 时,$(x,y)=(0,a)$,有 $\min g(x,y)=\sqrt{(b-a)^2+l^2}+ka$;

(3)当 $l=\dfrac{(b+a)\sqrt{4-k^2}}{k}$ 时,$(x,y)=(\dfrac{al}{a+b},0)$,有 $\min g(x,y)=\sqrt{(b-a)^2+l^2}$。

当共用管线和非共用管线费用相同时,$k=1$,就有 $C_2=C_1$,代入上式易得结果。

3.2 问题二模型的建立

问题二给出的条件是 $a=5,b=8,c=15,l=20$,且所有管线铺设费用相同均为7.2万元/km,说明 $k=1$,$C_2=C_1=7.2$,郊区费用仅为管线铺设费用,所以将数据代入问题一的结论,较快知道郊区管线铺设的大致设计方案,但与问题一不同的是,最终费用还要考虑城区管线铺设中所产生的附加费用,由于附加费用是估算数据,为了能较好地体现科学和合理性,可以通过目前大家都比较公认的层次分析法来确定三家不同资质的公司在附加费用评估中所占权重,从而核算出一个相对合理和科学的附加费用值。

3.2.1 附加费用的核算

(1)建立成对比较矩阵[5]

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\1/3&1&2\\1/4&1/2&1\end{pmatrix},$$

解出最大特征根 $\lambda=3.0183$。

(2)进行一致性检验

计算一致性指标 $CI=\dfrac{\lambda-n}{n-1}=0.0091$,查表得随机性指标 $RI=0.58$,得一致性比率 $CR=\dfrac{CI}{RI}=0.0158<0.1$,因此通过一致性检验。

(3)对最大特征值对应的特征向量进行归一化处理,得权向量为

$$\omega=(0.625\quad 0.2385\quad 0.1365)^{\mathrm{T}}。$$

说明这三家公司对附加费用的估算所占权重值,经过加权计算得附加值可选择为

$0.625\times21+0.2385\times24+0.1365\times20=21.579$ 万元/km。

3.2.2 管线铺设的优化设计方案

要考虑总费用最省,应是郊区费用与城区费用总和最小,两者统一考虑,城区管线铺设要尽可能水平,郊区管线铺设要符合模型一中3种结论中的一种,按照 $a\leqslant b$ 作为临界条件,将数据 $a=5$,$b=8$,$c=15$,$l=20$,$k=1$,$C_2=C_1=7.2$ 代入问题一的结论中,无论选择 A 与 H 同高($0<l<10\sqrt{3}$),还是 H 将 B 同高($3\sqrt{3}<l<13\sqrt{3}$),郊区管线铺设方案都应该选择情况(1)的设计,此时最优方案设计如图6所示。图6中,H 点为城郊管线的连接点,所有管线铺设的费用均为7.2万元/km,根据图6可建立如下优化模型:

总费用=城区费用+郊区费用,

城区费用 $=(21.579+7.2)HB$,其中 $HB=\sqrt{(8-z)^2+25}$,

郊区费用 $=7.2(AP+PE+PH)$,其中,$AP=\sqrt{x^2+(5-y)^2}$,$PE=y$,$PH=\sqrt{(15-x)^2+(z-y)^2}$。

以总费用最省,建立优化模型为

$$\min W=7.2(\sqrt{x^2+(5-y)^2}+y+\sqrt{(15-x)^2+(z-y)^2})+28.779\sqrt{(8-z)^2+25},$$

$$\text{s.t.}\quad 0\leqslant x\leqslant15,0\leqslant y\leqslant8,0\leqslant z\leqslant8。$$

使用LINGO编程计算得到结果为 $x=5.4479$,$y=1.8547$,$z=7.3696$。此时得到的最小费用为 $\min W=283.0955$ 万元,车站 E 点应该建在离A厂

垂直距离 5.4479 km[6]。

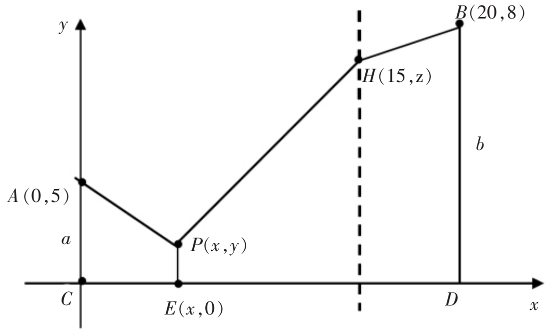

图 6　城郊管线铺设优化模型

3.3　问题三模型的建立

问题三中涉及到炼油厂的生产能力,致使管线铺设费用分别降为输送 A 厂成品油的为 5.6 万元/mk,输送 B 厂成品油的 6.0 万元/km,共用管线费用为 7.2 万元/km,拆迁等附加费用同问题二,因此相当于在问题二的基础上,加入了两炼油厂 A 和 B 的输送管道费用不同这一因子,方法与模型二相类似,建模如下:

总费用=城区费用+郊区费用,

城区费用 $=(21.579+6)HB$, 其中 $HB=\sqrt{(8-z)^2+25}$,

郊区费用$=5.6\times AP+7.2\times PE+6\times PH$,其中,$AP=\sqrt{x^2+(5-y)^2}$, $PE=y$, $PH=\sqrt{(15-x)^2+(z-y)^2}$,

以总费用最省,建立优化模型为

$$\min W=5.6\sqrt{x^2+(5-y)^2}+7.2y+6\sqrt{(15-x)^2+(z-y)^2}+27.579\sqrt{5^2+(8-z)^2},$$

$$\text{s.t.}\quad 0\leqslant x\leqslant 15,\ 0\leqslant y\leqslant 8,\ 0\leqslant z\leqslant 8。$$

使用 LINGO 编程计算得到结果为 $x=6.7325$, $y=0.1399$, $z=7.2816$, 此时得到的最小费用为 $\min W=252.3676$ 万元, 车站 E 点应该建在离 A 厂垂直距离 6.7325 km。

4　模型评价

所有问题的关键都在于问题一的解决, 虽然问题二和问题三相对问题一来说,添加了很多实际施工中遇到的常见情况, 但是问题一的三种情况是输油管铺设的一般模型,在此基础上,代入实际数据可以科学地得到后面两个实际问题的最佳设计方案。本文不足之处是假设的施工条件过于理想化, 还有较多的实际情况没有考虑,因此数据结果只能作为参考,建模方法有待进一步改进。

参考文献:

[1] 2010 年高教杯全国大学生数学建模竞赛(CUMCM)题目[EB/OL]. [2010-09-10]. http://www.mcm.edu.cn/.
[2] 宋兵,曹进德,陈恩水. 变拆迁补偿输油管布置的优化模型[J]. 数学的实践和认识,2011,41(20):248-252.
[3] 韩中庚. 实用运筹学——模型、方法与计算[M]. 北京:清华大学出版社,2007.
[4] 吴力荣. 输油管布局的优化模型 [J]. 常熟理工学院学报:自然科学版,2011,25(10):58-61.
[5] 姜启源,谢金星,叶俊. 数学建模[M]. 3 版.北京:高等教育出版社,2005.
[6] 陆卫丰, 陈卫忠. 基于输油管最优布置的数学模型[J]. 苏州市职业大学学报,2011,22(3):60-65.

Optimization model about laying of oil pipeline

LI Ming
(Suzhou Institute of Industrial Technology, Suzhou 215104, China)

Abstract: The problem C of CUMCM in 2010, Oilfield design institute the establishment of pipeline construction cost the province general mathematical model and method, Cost unit cost of pipeline length, In some cases the unit cost, pipeline laying length is short, the cost of the total cost of less,the real problem is converted in the plane to find a point made the point to the two refinery distance and the ordinate is the minimum problems in plane geometry.The thesis based on the vocational students´ level and specialty, the geometric derivative and seek the most value algebra method of combining, show the basic knowledge of mathematics in the solution of practical problems charm.

Key words: laying of pipeline; optimal model; minimum cost; design projects