第 2 章　Poisson 过程及其推广

2.1 Poisson 过程

2.1.1　Poisson 过程的定义

Poisson 过程是一种累计随机事件发生次数的独立增量过程．如果说 Poisson 分布适合描述稀有事件发生的统计规律的话，那么 Poisson 过程就适合刻画“稀有事件流”的概率特性．例如，它可作为“车流”,“顾客流”,“信号流”,“粒子流”等问题的随机模型．

定义 2.1.1　给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，若对任意 $t\geq 0$，$N(t)$为取非负整数值的随机变量，且当 $0\leq s<t$ 时，有 $N(s)\leq N(t)$，则称$\{N(t),t\geq 0\}$为**计数过程（counting process）**.

直观上，如果以 $N(t)$表示$(0, t]$内某随机事件 A 的发生次数，那么$\{N(t),t\geq 0\}$就是一个计数过程．

定义 2.1.2　设$\{N(t),t\geq 0\}$为计数过程，若它满足条件

(1) $N(0)=0$；

(2) 具有平稳独立增量；

(3) 对任意的 $t\geq 0$，$\Delta t>0$，

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t), \tag{2.1.1}$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t), \tag{2.1.2}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数，则称$\{N(t),t\geq 0\}$是**强度为 λ 的齐次 Poisson 过程(homogeneous Poisson process)**．齐次 Poisson 过程简称为 Poisson 过程．

定义中的条件(1)、(2)表明过程具有零初值且增量具有平稳性和独立性．条件(3)的(2.1.1)式说明事件发生的稀有性，而(2.1.2)式刻画事件是相继发生的，意即在任一瞬间出现多个事件的概率极小．

定理 2.1.3　若$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为 λ 的 Poisson 过程，则对任意的 $s\geq 0$，$t>0$，有

$$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{2.1.3}$$

证　对 $t>0$，记

$$\begin{aligned} p_n(t) &\triangleq P\{N(t+s)-N(s)=n\}\\ &=P\{N(t)-N(0)=n\}\\ &=P\{N(t)=n\}\ \text{（由平稳增量及零初值）}. \end{aligned}$$

首先，对 $n=0$，考察 $p_0(t)$．当 $\Delta t>0$ 时，因为

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &=P\{N(t+\Delta t)=0\}\\ &=P\{N(t)=0,\ N(t+\Delta t)-N(t)=0\}\\ &=p_0(t)P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}\ \text{（由独立增量）}\\ &=p_0(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]\ \text{（由(2.1.1), (2.1.2)式）}, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda p_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

在上式两端令 $\Delta t\to 0$，得

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t).$$

由初始条件：$p_0(0)=1$，可解得

$$p_0(t)=e^{-\lambda t}. \tag{2.1.4}$$

其次，考察 $p_n(t)(n\geq 1)$．当 $\Delta t>0$ 时，因为

$$\begin{aligned}
p_n(t+\Delta t)&=P\{N(t+\Delta t)=n\}\\
&=P\{N(t)+N(t+\Delta t)-N(t)=n\}\\
&=\sum_{k=0}^{n}P\{N(t)=n-k,\ N(t+\Delta t)-N(t)=k\}\\
&=\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(t)P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\} \quad \text{（由独立增量）}\\
&=p_n(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]+p_{n-1}(t)[\lambda\Delta t+o(\Delta t)]+o(\Delta t)\\
&=p_n(t)(1-\lambda\Delta t)+p_{n-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t),
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

在上式的两端，令 $\Delta t\to 0$，得微分方程

$$p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t).$$

方程的初始条件为：$p_n(0)=0\ (n\geq 1)$．现在，需求解常微分方程初值问题：

$$\left.\begin{array}{l} p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)\\ p_n(0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)\end{array}\right\} \tag{2.1.5}$$

记 $\tilde{P}_n(s)\triangleq\int_0^{+\infty}p_n(t)e^{-st}\mathrm{d}t\triangleq\mathscr{L}[p_n(t)]$．由 Laplace 变换，得

$$\tilde{P}_n(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda}\tilde{P}_{n-1}(s)=\cdots=\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n\tilde{P}_0(s),$$

其中

$$\tilde{P}_0(s)=\int_0^{+\infty}p_0(t)e^{-st}\mathrm{d}t\overset{(2.1.4)}{=}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s+\lambda},$$

故

$$
\begin{aligned}
p_n(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\tilde{P}_n(s)\right] = \lambda^n \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\lambda)^{n+1}}\right] \\
&= \lambda^n t^n e^{-\lambda t} \big/ \Gamma(n+1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n=1,2,\cdots).
\end{aligned} \tag{2.1.6}
$$

综合(2.1.4)及(2.1.6)式，可知(2.1.3)式成立． □

注 在上面定理的证明过程中，求解常微分方程初值问题(2.1.5)采用的是 Laplace 变换方法．实际上也可用其他方法（比如，矩母函数的方法）来求解．记

$$
\psi(u,t) \triangleq E(e^{uN(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} P\{N(t)=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} p_k(t)
$$

为 $N(t)$的矩母函数．取 ψ 对 t 的偏导数并由(2.1.5)式，得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi(u,t)}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} p_k'(t) \\
&= -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} p_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{uk} p_{k-1}(t) \\
&= -\lambda \psi(u,t) + \lambda e^u \psi(u,t) \\
&= \lambda \psi(u,t)(e^u - 1).
\end{aligned}
$$

再由

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \ln \psi(u,t)}{\partial t} = \lambda(e^u - 1) \\
&\psi(u,0) = p_0(0) = 1
\end{aligned}
\right\}
$$

解得$\psi(u,t) = e^{\lambda t(e^u - 1)}$．因矩母函数与分布函数是一一对应的，故 $N(t) \sim P(\lambda t)$，亦即

$$
P\{N(t)=n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \ (n=0,1,2,\cdots).
$$

从而定理的结论成立．

由定义 2.1.2 及定理 2.1.3，可引出 Poisson 过程的另一等价定义．

定义 2.1.4 设$\{N(t), t \geq 0\}$是计数过程，若它满足条件

(1) $N(0) = 0$；

(2) 具有独立增量；

(3) 对任意的 $s \geq 0, t > 0$，有

$$
P\left\{N(t+s) - N(s) = n\right\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n=0,1,2,\cdots),
$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数，则称$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为 λ 的 Poisson 过程．

Poisson 过程两种定义的等价性的证明留给读者作练习．

设$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为 λ 的 Poisson 过程．对任意 $t > 0$，因 $N(t) \sim P(\lambda t)$，故 $E[N(t)] = \lambda t$．由此可知，

$$
\lambda = \frac{E[N(t)]}{t}.
$$

即，参数 λ 表示单位时间内某随机事件的平均出现次数，故称之为“强度”或“速率”．

例 2.1.5 患者按 Poisson 过程到某社区诊所就医，参数 λ=3(人/小时)．诊所上午 8:30

开门，问至 9:30 仅一人前来就诊而到 11:30 共有 6 人来就诊的概率.

解 令 t 为时间，计时单位为小时，取 8:30 为初始时刻（即，$t=0$），则所求概率为

$$\begin{aligned} P\{N(1)=1, N(3)=6\} &= P\{N(1)=1, N(3)-N(1)=5\} \\ &= P\{N(1)=1\}P\{N(3)-N(1)=5\} \\ &= \frac{3\cdot 1\cdot e^{-3\cdot 1}}{1!}\frac{[3\cdot(3-1)]^5\cdot e^{-3\cdot(3-1)}}{5!} \doteq 0.024. \quad \square \end{aligned}$$

上面的第 2 个等号是利用了 Poisson 过程的增量具有相互独立性．在计算与 Poisson 过程有关的概率或期望时经常会用到这一性质．比如，在例 2.1.5 中要问 $E[N(1)N(3)]$是多少？由增量的独立性可得

$$\begin{aligned} E[N(1)N(3)] &= E\{N(1)[N(3)-N(1)+N(1)]\} \\ &= EN(1)\cdot E[N(3)-N(1)] + E[N^2(1)] \\ &= 3\times 6 + 3 + 3^2 = 30. \end{aligned}$$

定理 2.1.6 若$\{N_i(t), t\ge 0\}$是参数为 λ_i 的 Poisson 过程(i=1,2,⋯,n)，并且它们相互独立，则$\left\{N(t)=\sum_{k=1}^{n}N_k(t),\ t\ge 0\right\}$是参数为$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$ 的 Poisson 过程.

证 当 n=2 时即为习题 2.4．用归纳法即可证明定理的余下部分．□

2.1.2 与 Poisson 过程相联系的随机变量及其分布

前面指出，Poisson 过程适合刻画“稀有事件流”的概率特性，那么，何谓“事件流”？

定义 2.1.7 设$\{S_n, n\ge 0\}$为随机变量列，若 $0=S_0\le S_1\le\cdots\le S_n\le\cdots$，则称$\{S_n, n\ge 0\}$为**事件流**.

对计数过程$\{N(t), t\ge 0\}$，令 $S_0=0$，$S_n=\inf\{t\ge 0: N(t)\ge n\}(n\ge 1)$．直观上，$S_n$ 表示累计数第 n 次加 1 的发生时刻．易见 S_n 为随机变量且 $0=S_0\le S_1\le\cdots\le S_n\le\cdots$，即$\{S_n，n\ge 0\}$是与计数过程相联系的事件流.

反之，对事件流$\{S_n，n\ge 0\}$，令 $N(t)=\sup\{n: S_n\le t\}\ (t\ge 0)$．直观上，$N(t)$表示在区间$(0, t]$中出现 S_n 的次数，因而$\{N(t), t\ge 0\}$为一个计数过程．可见计数过程与事件流两个概念是密切地联系在一起的.

若以 $N(t)(t\ge 0)$表示在$(0, t]$中到达服务台请求服务的顾客数，则$\{N(t), t\ge 0\}$为一个计数过程．此时，$S_n(n\ge 1)$表示第 n 位顾客来到服务台的到达时刻，它也表示直到第 n 位顾客到达所需的**等待时间**，称$\{S_n，n\ge 0\}$为顾客流或（顾客）**到达时刻流**．在这里，“服务台”及“顾客”都是广义的．比如，“服务台”可能是交通管理部门在某一路口设置的检测点，“顾客”是通过该检测点的车辆．又比如，“服务台”可能是港口而“顾客”则是来港口停泊的船只．再比如，“服务台”也可能是大型超市、医院的急诊部、美容店等，“顾客”则是来到这些场所寻求相应服务的消费者，等等.

对计数过程$\{N(t), t\ge 0\}$及与之相伴的到达时刻流$\{S_n，n\ge 0\}$，下列事件是等价的

$$\left.\begin{aligned} \{N(t)\ge n\} &= \{S_n\le t\} \\ \{N(t)=n\} &= \{S_n\le t< S_{n+1}\} \end{aligned}\right\} \tag{2.1.7}$$

令 $T_n = S_n - S_{n-1}\,(n \ge 1)$，直观上，$T_n$ 表示第 n 位顾客与第 $n-1$ 位顾客相继来到服务台的时间间隔，称$\{T_n, n \ge 1\}$为**到达间隔序列**．显然，$\{T_n, n \ge 1\}$与$\{S_n, n \ge 0\}$相互唯一地确定．

下面的定理刻画了计数过程、到达时刻流、到达间隔序列与 Poisson 过程之间的关系．

定理 2.1.8 设$\{N(t), t \ge 0\}$为计数过程且 $N(0) = 0$，$\{S_n, n \ge 0\}$是与$\{N(t), t \ge 0\}$相联系的到达时刻流，$\{T_n, n \ge 1\}$为到达间隔序列，则下列命题等价：

(1) $\{T_n, n \ge 1\}$是相互独立且服从相同的指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$的随机序列；

(2) 对任意 $n \ge 1$，$(S_1, \cdots, S_n)$ 具有概率密度

$$f(s_1, \cdots, s_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda s_n}, & 0 < s_1 < \cdots < s_n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} ; \tag{2.1.8}$$

(3) $\{N(t), t \ge 0\}$是强度为 λ 的 Poisson 过程．

证 (1)$\Rightarrow$ (2 因

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = T_1 \\ S_2 = T_1 + T_2 \\ \cdots \\ S_n = T_1 + \cdots + T_n \end{array}\right\} \tag{2.1.9}$$

而 $(T_1, \cdots, T_n)$ 的概率密度为

$$g(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(t_1 + \cdots + t_n)}, & t_1, \cdots, t_n \ge 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故由连续型随机向量的变换公式(1.1.9)，可得 $(S_1, \cdots, S_n)$ 的概率密度

$$f(s_1, \cdots, s_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda s_n}, & 0 < s_1 < \cdots < s_n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2)$\Rightarrow$(1)． 由于变换(2.1.9)是可逆的，因而同理可由 f 求得 g．

(2)$\Rightarrow$(3)． 首先，求 S_k $(1 \le k \le n)$的概率密度 f_k．当 $k=1$ 时，由(2.1.8)式直接得到，$f_1(s_1) = \lambda e^{-\lambda s_1}\ (s_1 > 0)$．对 $1 < k \le n$，由(2.1.8)式，可得

$$\begin{aligned} f_k(s_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(s_1, \cdots, s_k) \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_{k-1} \\ &= \int_0^{s_k} \mathrm{d}s_1 \int_{s_1}^{s_k} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_{s_{k-2}}^{s_k} \lambda^k e^{-\lambda s_k} \mathrm{d}s_{k-1} \\ &= \frac{\lambda^k s_k^{k-1} e^{-\lambda s_k}}{(k-1)!} \quad (s_k > 0). \end{aligned}$$

故 $S_k\,(1 \le k \le n)$服从 $\Gamma(k, \lambda)$分布，亦即，S_k 具有概率密度

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

其次，考虑 $P\{N(s) = m, N(s+t) \ge m+k\}$．由(2.1.7)及(2.1.8)式，得

$$P\left\{N(s)=m, N(s+t)\ge m+k\right\}=P\left\{S_m\le s<S_{m+1}<\cdots<S_{m+k}\le s+t\right\}$$

$$=\int\underset{\substack{s_m\le s\\ s<s_{m+1}<\cdots<s_{m+k}\le s+t}}{\cdots}\int \lambda^{m+k}e^{-\lambda s_{m+k}}1_{\{0<s_1<\cdots<s_{m+k}\}}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{m+k}\,.$$

对上述 $m+k$ 重积分作变元替换：$x_i=s_i\ \ (i=1,\cdots,m),\ \ x_{m+j}=s_{m+j}-s\ \ (j=1,\cdots,k)$，得

$$\int\underset{\substack{s_m\le s\\ s<s_{m+1}<\cdots<s_{m+k}\le s+t}}{\cdots}\int \lambda^{m+k}e^{-\lambda s_{m+k}}1_{\{0<s_1<\cdots<s_{m+k}\}}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{m+k}$$
$$=\int_0^s\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^s\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_{m-1}}^s\mathrm{d}x_m\cdot\int_0^t\mathrm{d}x_{m+k}\int_0^{x_{m+k}}\mathrm{d}x_{m+k-1}\cdots\int_0^{x_{m+2}}\lambda^{m+k}e^{-\lambda(x_{m+k}+s)}\mathrm{d}x_{m+1}$$
$$=\frac{\lambda^m s^m e^{-\lambda s}}{m!}\int_0^t f_k(u)\mathrm{d}u\,,$$

故

$$P\left\{N(s)=m, N(s+t)\ge m+k\right\}=\frac{\lambda^m s^m e^{-\lambda s}}{m!}\int_0^t f_k(u)\mathrm{d}u\,, \tag{2.1.11}$$

从而

$$P\left\{N(s+t)-N(s)\ge k\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}P\left\{N(s)=m, N(s+t)\ge m+k\right\}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m s^m e^{-\lambda s}}{m!}\int_0^t f_k(u)\mathrm{d}u=\int_0^t f_k(u)\mathrm{d}u. \tag{2.1.12}$$

于是

$$P\left\{N(s+t)-N(s)=k\right\}=P\left\{N(s+t)-N(s)\ge k\right\}-P\left\{N(s+t)-N(s)\ge k+1\right\}$$
$$=\int_0^t f_k(u)\mathrm{d}u-\int_0^t f_{k+1}(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^t\left[\frac{\lambda^k u^{k-1}e^{-\lambda u}}{(k-1)!}-\frac{\lambda^{k+1}u^k e^{-\lambda u}}{k!}\right]\mathrm{d}u=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{2.1.13}$$

在(2.1.13)式中令 $s=0$，得

$$P\left\{N(t)=k\right\}=P\left\{N(t)-N(0)=k\right\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\,. \tag{2.1.14}$$

由(2.1.11)、(2.1.12)及(2.1.14)式知

$$P\left\{N(s)=m,\ N(s+t)-N(s)\ge k\right\}$$
$$=P\left\{N(s)=m,\ N(s+t)\ge m+k\right\}$$
$$=P\left\{N(s)=m\right\}P\left\{N(s+t)-N(s)\ge k\right\},$$

由此可得

$$P\left\{N(s)=m,\ N(s+t)-N(s)=k\right\}=P\left\{N(s)=m\right\}P\left\{N(s+t)-N(s)=k\right\},$$

即 $N(s)$与 $N(s+t)-N(s)$是独立的．用类似的推理，对任意的 n 及$0<t_1<\cdots<t_n$，可得

$$P\left\{N(s)=m,\ N(s+t_1)-N(s)=k_1,\cdots,N(s+t_n)-N(s+t_{n-1})=k_n\right\}$$
$$=P\left\{N(s)=m\right\}P\left\{N(s+t_1)-N(s)=k_1\right\}\cdots P\left\{N(s+t_n)-N(s+t_{n-1})=k_n\right\} \tag{2.1.15}$$

综合(2.1.13)、(2.1.15)，可知$\{N(t), t\ge 0\}$是强度为λ的 Poisson 过程.

(3)$\Rightarrow$(2). 对任意的 n 及任意的 $0<s_1<\cdots<s_n$，取充分小的正数 h_1，h_2，⋯，h_n，使 $s_j+h_j/2<s_{j+1}-h_{j+1}/2\ \ (j=1,\cdots,n-1)$，则

$$\begin{aligned}
&P\{s_1-h_1/2<S_1<s_1+h_1/2, s_2-h_2/2<S_2<s_2+h_2/2,\cdots,s_n-h_n/2<S_n<s_n+h_n/2\}\\
&=P\{N(s_1-h_1/2)=0, N(s_1+h_1/2)-N(s_1-h_1/2)=1, N(s_2-h_2/2)-N(s_1+h_1/2)=0,\\
&\quad\cdots,N(s_n-h_n/2)-N(s_{n-1}+h_{n-1}/2)=0, N(s_n+h_n/2)-N(s_n-h_n/2)\ge 1\}\\
&=P\{N(s_1-h_1/2)=0\}P\{N(h_1)=1\}P\{N(s_2-s_1-h_1/2-h_2/2)=0\}\\
&\quad\cdots P\{N(s_n-s_{n-1}-h_{n-1}/2-h_n/2)=0\}P\{N(h_n)\ge 1\}\\
&=e^{-\lambda(s_1-h_1/2)}\cdot\lambda h_1 e^{-\lambda h_1}\cdot e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1/2-h_2/2)}\cdots e^{-\lambda(s_n-s_{n-1}-h_{n-1}/2-h_n/2)}\cdot\left[\lambda h_n e^{-\lambda h_n}+o(h_n)\right]\\
&=\lambda^n h_1\cdots h_n e^{-\lambda(s_n+h_n/2)}+o(h_1\cdots h_n)
\end{aligned}$$

上式两端同除以 $h_1\cdots h_n$，并令 $h_1\to 0$，⋯，$h_n\to 0$，即得$(S_1,\cdots,S_n)$的概率密度

$$f(s_1,\cdots,s_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda s_n}, & 0<s_1<\cdots<s_n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证毕．□

推论 2.1.9 若$\{N(t), t\ge 0\}$是强度为λ的 Poisson 过程，$\{S_n, n\ge 0\}$是与之相伴的到达时刻流，则对任意 $n\ge 1$，$S_n\sim\Gamma(n,\lambda)$，即，S_n具有概率密度

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

在定理 2.1.8 的证明过程中已经获得了上述结果．不过，如果从推论的条件出发，那么可以更直接地得出该结论来．事实上，对 $n\ge 1$，由

$$\{S_n\le x\}=\{N(x)\ge n\}$$

及

$$F_n(x)=P\{S_n\le x\}=P\{N(x)\ge n\}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}\quad (x\ge 0),$$

得

$$f_n(x)=F_n'(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}x^k}{k!}e^{-\lambda x}=\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\quad (x>0).$$

定理 2.1.10 若$\{N(t), t\ge 0\}$是强度为λ的 Poisson 过程，$\{S_n, n\ge 0\}$是与之相伴的到达时刻流，则对任意 $n\ge 1$，$(S_1,\cdots,S_n)$关于 $N(t)=n$ 的条件概率密度为

$$f_{S_1,\cdots,S_n|N(t)}(s_1,\cdots,s_n|n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<s_1<\cdots<s_n<t,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{2.1.16}$$

证 对任意 $n\geqslant 1$ 及任意 $0<s_1<\cdots<s_n$，取充分小的正数 h_1，h_2，⋯，h_n，使得

$s_j + h_j/2 < s_{j+1} - h_{j+1}/2\ (j=1,\cdots,n-1),\ s_n + h_n/2 < t$. 因

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(s_j - h_j/2 < S_j < s_j + h_j/2\right)\middle| N(t)=n\right\}\\
&= \frac{P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(s_j - h_j/2 < S_j < s_j + h_j/2\right)\cap N(t)=n\right\}}{P\{N(t)=n\}}\\
&= \frac{P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(s_j - h_j/2 < S_j < s_j + h_j/2\right)\cap \left(S_{n+1}>t\right)\right\}}{P\{N(t)=n\}}
\end{aligned}
$$

由定理 2.1.8 知

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(s_j - h_j/2 < S_j < s_j + h_j/2\right)\cap \left(S_{n+1}>t\right)\right\}\\
&= \int_{s_1-h_1/2}^{s_1+h_1/2}\mathrm{d}x_1\int_{s_2-h_2/2}^{s_2+h_2/2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{s_n-h_n/2}^{s_n+h_n/2}\mathrm{d}x_n\int_t^{+\infty}\lambda^{n+1}e^{-\lambda x_{n+1}}\mathrm{d}x_{n+1}\\
&= \lambda^n e^{-\lambda t}h_1\cdots h_n,
\end{aligned}
$$

故

$$
P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(s_j - h_j/2 < S_j < s_j + h_j/2\right)\middle| N(t)=n\right\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}h_1\cdots h_n}{\dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} = \frac{n!}{t^n}h_1\cdots h_n
$$

上式两端同除以 $h_1\cdots h_n$，并令 $h_1\to 0$，…，$h_n\to 0$，即得$(S_1, \cdots, S_n)$关于 $N(t) = n$ 的条件概率密度

$$
f_{S_1,\cdots,S_n|N(t)}(s_1,\cdots,s_n|n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<s_1<\cdots<s_n<t,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

证毕. □

注 (1) 在定理 2.1.10 中取 $n = 1$，得

$$
f_{S_1|N(t)}(s_1|\,1)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & 0<s_1<t,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

即，$S_1|N(t)=1\sim U(0,t)$. 这一结果从直观上看是自然的. 如果已知在$(0, t]$时间里只有一位顾客到达，那么他(她)在该时段里的任一时刻到达都是等可能的，也就是到达时刻 S_1 在区间$(0, t]$上服从均匀分布.

(2) 熟悉数理统计的读者会感到(2.1.16)的概率密度似曾相识. 事实上，若从均匀总体$U(0,t)$中抽取简单随机样本 $U_1,\cdots,U_n$，按从小到大的次序排列：$U_{(1)}\le\cdots\le U_{(n)}$，则顺序统计量$(U_{(1)},\cdots,U_{(n)})$的概率密度就是(2.1.16). 因而，定理 2.1.10 实际上是在说：在 $N(t) = n$ 的条件下，n 个到达时刻 $S_1,\cdots,S_n$ 的联合分布与 n 个在$(0,t)$区间上均匀分布的独立随机变量的顺序

统计量 $U_{(1)},\cdots,U_{(n)}$的联合分布是相同的．下面两个例子在解题过程中都将用到这一事实．

例 2.1.11　设乘客按参数为 λ 的 Poisson 过程到达机场候机厅，如果飞机在 t 时刻起飞，求在 $(0, t]$ 时段到达候机厅的乘客的等候时间总和的数学期望．

解　设 $N(t)$为在$(0, t]$ 时段到达候机厅的乘客数，S_k 为第 k 位乘客的到达时刻，则在$(0, t]$时段到达候机厅的乘客的等候时间总和为

$$S=\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k).$$

由全期望公式，得

$$E(S)=E\left[E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)\right)\right].$$

先求条件期望

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)=n\right)&=E\left(\sum_{k=1}^{n}(t-S_k)\middle|N(t)=n\right)\\&=nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}S_k\middle|N(t)=n\right)\\&=nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}U_{(k)}\right)\quad\text{(由定理2.1.10的注(2))}\\&=nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}U_k\right)\qquad(\because \sum_{k=1}^{n}U_{(k)}=\sum_{k=1}^{n}U_k)\\&=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2},\end{aligned}$$

于是

$$E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)\right)=\frac{N(t)\cdot t}{2}.$$

故

$$E(S)=E\left[E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)\right)\right]=E\left[\frac{N(t)\cdot t}{2}\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.\ \square$$

例 2.1.12　设理赔单按参数为 λ 的 Poisson 过程送达保险公司．记 S_k，C_k 分别为第 k 个理赔单的送达时刻及相应的理赔金额，假设$\{C_k, k\ge1\}$是独立同分布的，其公共的分布函数为 F，均值为 μ，又设$\{C_k, k\ge1\}$与$\{S_k, k\ge1\}$相互独立．若以 $D(t)$表示在$(0, t]$时间内理赔的总金额的贴现值，则 $D(t)$被定义为

$$D(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}e^{-\alpha S_k}C_k,$$

其中 α 是贴现率，$N(t)$是在$(0, t]$时间内送达保险公司的理赔单的个数．问 $E[D(t)]=?$

同例 2.1.11 的解题思路类似，先求条件期望

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_k} C_k \middle| N(t)=n\right) &= E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha S_k} C_k \middle| N(t)=n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left(e^{-\alpha S_k} C_k \middle| N(t)=n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left(e^{-\alpha S_k} \middle| N(t)=n\right) E(C_k) \quad （由 C_k 与 \{S_n, n\geq 1\} 独立） \\
&= E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha S_k} \middle| N(t)=n\right) \cdot \mu \\
&= \mu E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha U_{(k)}}\right] \quad （由定理 2.1.10 的注(2)） \\
&= \mu E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha U_k}\right] \\
&= \mu n \int_0^t e^{-\alpha u} \frac{1}{t} \mathrm{d}u = n \frac{\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha t},
\end{aligned}
$$

于是

$$E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_k} C_k \middle| N(t)\right) = N(t) \frac{\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha t},$$

故

$$E\left[D(t)\right] = E\left[E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_k} C_k \middle| N(t)\right)\right] = E\left[N(t)\right] \frac{\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha t} = \frac{\lambda\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}.$$

2.2 Poisson 过程的推广

2.2.1 非齐次 Poisson 过程

定义 2.2.1 设$\{N(t), t\geq 0\}$是计数过程，若它满足条件

(1) $N(0)=0$；

(2) 具有独立增量；

(3) 对任意的 $t\geq 0$，$\Delta t>0$，

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \tag{2.2.1}$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\} = o(\Delta t) \tag{2.2.2}$$

其中 $\lambda(t)>0(t\geq 0)$，则称$\{N(t), t\geq 0\}$是**强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程**（**nonhomogeneous Poisson process**）.

注(1) 非齐次 Poisson 过程的增量不具有平稳性.

(2) 显然，若非齐次 Poisson 过程的强度函数 $\lambda(t)\equiv\lambda$，$t\geq 0$，则它即是强度为 λ 的 Poisson 过程．因而它是后者的推广.

(3) 令 $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$ 称 $\Lambda(t)$ $(t\geq 0)$为**累积强度函数**.

在非齐次 Poisson 过程场合也有与定理 2.1.3 类似的结论.

定理 2.2.2 若$\{N(t), t\geq 0\}$是强度函数为$\lambda(t)$的非齐次 Poisson 过程，则对任意的 $s\geqslant 0, t>0$，有

$$P\left\{N(s+t)-N(s)=n\right\}=\frac{\left[\Lambda(s+t)-\Lambda(s)\right]^n}{n!}e^{-\left[\Lambda(s+t)-\Lambda(s)\right]} \quad (n=0,1,2,\cdots), \qquad (2.2.3)$$

其中 $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$ 为累积强度函数.

该定理的证明留给读者作思考．另外，读者可仿照定义 2.1.4 写出非齐次 Poisson 过程的另一等价定义.

非齐次 Poisson 过程已广泛应用于工程技术各领域．例如，通信技术，控制工程，可靠性分析，生物医学工程，金融与保险等.

取强度函数 $\lambda(t)$为不同形式，就得到特殊的非齐次 Poisson 模型．例如，

(1) $\lambda(t)=\lambda\beta t^{\beta-1}\ (t>0)$, 其中 $\lambda>0, \beta>0$ 为常数，称$\{N(t), t\geq 0\}$为 **Weibull 过程**或**幂律过程**.

(2) $\lambda(t)=\dfrac{ab}{1+t}\left[\ln(1+t)\right]^{b-1}\ (t>0)$, 其中 $a>0, b>0$ 为常数，称$\{N(t), t\geq 0\}$为**对数幂律过程**.

2.2.2 复合 Poisson 过程

定义 2.2.3 设$\{N(t), t\geq 0\}$是强度为 λ 的 Poisson 过程，$\{Y_k, k=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机变量序列且与$\{N(t), t\geq 0\}$相互独立，若记

$$X(t)=\begin{cases}0, & N(t)=0\\ \sum_{k=1}^{N(t)}Y_k, & N(t)\geq 1\end{cases}$$

则称$\{X(t), t\geq 0\}$是**复合 Poisson 过程**（**compound Poisson process**）.

在日常生活中，复合 Poisson 过程的例子是比较常见的．例如，乘客依 Poisson 过程到达火车站，若 Y_k 表示第 k 位乘客随身携带的行李重量，则$\{X(t), t\geq 0\}$表示在$(0, t]$时间里到达车站的乘客的行李总重量．又如，各种车辆依 Poisson 过程通过某高速公路收费站，Y_k 表示第 k 辆汽车缴纳的通行费，那么$\{X(t), t\geq 0\}$表示在$(0, t]$时间里收费站收到的通行费总额．另外，在$(0, t]$时段内，股票市场的累计价格变动，保险公司对某一保险支付的累计理赔金，自然灾害所造成的累计损失等，也都可用复合 Poisson 过程来近似地描述.

利用全期望公式(1.1.18)与全方差公式(1.1.21)，可以求得复合 Poisson 过程$\{X(t), t\geq 0\}$的均值函数及方差函数.

因为

$$\begin{aligned}E\left[X(t)\middle|N(t)=n\right]&=E\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k\middle|N(t)=n\right]\\&=E\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k\right]\\&=nE(Y_1),\end{aligned}$$

类似地

$$D\left[X(t)\middle|N(t)=n\right]=nD(Y_1),$$

所以

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\left[X(t)\right] \\ &= E\left\{E\left[X(t)\middle|N(t)\right]\right\} \\ &= E\left[N(t)E(Y_1)\right] \\ &= E\left[N(t)\right]E(Y_1) = \lambda t E(Y_1), \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{aligned} D_X(t) &= D\left[X(t)\right] \\ &= E\left\{D\left[X(t)\middle|N(t)\right]\right\} + D\left\{E\left[X(t)\middle|N(t)\right]\right\} \\ &= E\left\{N(t)D(Y_1)\right\} + D\left\{N(t)E(Y_1)\right\} \\ &= E\left\{N(t)\right\}D(Y_1) + D\left\{N(t)\right\}\left[E(Y_1)\right]^2 \\ &= \lambda t D(Y_1) + \lambda t\left[E(Y_1)\right]^2 \\ &= \lambda t E(Y_1^2). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

这里假定 $E(Y_1^2) < +\infty$.

用矩母函数方法也能求得 $X(t)$的均值函数与方差函数：先求出 $X(t)$的矩母函数 $\psi_X(u;t) = E\left[e^{uX(t)}\right]$，再求偏导数 $\left.\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|_{u=0}, \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right|_{u=0}$，便可得到 $m_X(t), D_X(t)$. 读者不妨一试.

下面来考虑复合 Poisson 过程$\{X(t), t \ge 0\}$的一维分布函数. 设 Y_k (k =1,2,⋯)的共同的分布函数为 F，$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 的分布函数为F_n. 由于 $Y_1, Y_2, \cdots$,是独立同分布的，因而 F_n 为

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\left\{S_n \le x\right\} = P\left\{S_{n-1} + Y_n \le x\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{S_{n-1} + Y_n \le x \middle| Y_n = y\right\} \mathrm{d}F(y) \qquad (\text{由(1.1.20)式}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{S_{n-1} \le x - y \middle| Y_n = y\right\} \mathrm{d}F(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n-1}(x-y) \mathrm{d}F(y). \end{aligned}$$

称上式为 F_{n-1} 与 F 的卷积. 递推下去，F_n 是 F 自身的 n 重卷积.

同样由(1.1.20)式，得

$$\begin{aligned} P\left\{X(t) \le x\right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X(t) \le x \middle| N(t) = n\right\} P\left(N(t) = n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k \le x \middle| N(t) = n\right\} P\left(N(t) = n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k \le x\right\} P\left(N(t) = n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_n(x). \end{aligned}$$

因而$\{X(t), t \ge 0\}$在 t 时刻的一维分布函数 $F_t(x)$为

$$F_t(x) = P\{X(t) \le x\} = e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}F_n(x). \tag{2.2.6}$$

2.2.3 更新过程

1. 更新过程与更新函数

由定理 2.1.8 知，一个零初值计数过程为 Poisson 过程当且仅当到达间隔序列$\{T_n，n \ge 1\}$为独立同指数分布．若将 T_n 所服从的指数分布推广为任意分布，就得到所谓的更新过程．

定义 2.2.4 设$\{T_n，n \ge 1\}$是取值非负、独立同分布的随机变量序列，共同的分布函数为 $F(x)$且 $F(0)<1$．记 $S_0 = 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$，对任意的 $t \ge 0$，令

$$N(t) = \sup\{n：\ S_n \le t\},$$

则称$\{N(t), t \ge 0\}$为**更新过程**，称$\{S_n，n \ge 0\}$为**更新(时刻)流**，称$\{T_n，n \ge 1\}$为**更新间隔序列**．

注 (1) 定义中的条件 $F(0)<1$ 是为了避免不足道的情况出现，一般约定 $F(0) = 0$．另外，该条件还蕴含 $\mu=E(T_1) > 0$．

(2) 若 $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$，即，更新间隔序列$\{T_n，n \ge 1\}$为独立同指数分布，则更新过程就是 Poisson 过程．不过要注意的是，除了这种特殊情况以外，一般的更新过程不是独立增量过程，但更新过程$\{N(t), t \ge 0\}$与更新流$\{S_n，n \ge 0\}$之间仍有下列关系

$$\{N(t) \ge n\} = \{S_n \le t\},$$
$$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\}.$$

(3) 更新过程源于设备中的零件的连续更换问题．假定一台设备中的某种零件易损坏，现有充足备件可供更换．设在 $t = 0$ 时第一个新零件开始工作，其使用寿命为 T_1，它在 T_1 时损坏．即刻更换第二个新零件，其使用寿命为 T_2，它在 T_1+T_2 时损坏．一般地，第 n 个零件的使用寿命为 T_n，它在 $\sum_{k=1}^{n} T_k$ 时损坏．随即更换上一个新零件，如此不断地进行下去．假定这些零件的使用寿命是独立同分布的：$P\{T_n \le x\}=F(x)$ $(n=1,2,\cdots)$．若以 $N(t)$表示在时段$(0, t]$内更换零件的次数，则$\{N(t), t \ge 0\}$即为更新过程，称 $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ 为第 n 次更新时刻，T_n 为第 n 个更新间隔．

(4) 更新过程$\{N(t), t \ge 0\}$的均值函数 $m(t) = E[N(t)]$称为**更新函数**. 对更新过程的研究主要集中在更新函数的性质上．

定理 2.2.5 设$\{N(t), t \ge 0\}$为更新过程，$\{S_n, n \ge 0\}$为更新流，则对任意 $t \ge 0$，有

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \tag{2.2.7}$$

其中 $F_n(t) = P\{S_n \le t\}$ $(n \ge 1)$．

证 $m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \ge n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$． □

对任意的 $n\ge 1$，有

$$
\begin{aligned}
F_1(t) &= F(t),\\
F_n(t) &= P\{S_n \le t\} = P\{S_{n-1}+T_n \le t\}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{S_{n-1}+T_n \le t \mid T_n = s\}\mathrm{d}F_{T_n}(s)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{S_{n-1} \le t-s\}\mathrm{d}F_{T_n}(s)\\
&= \int_0^t F_{n-1}(t-s)\mathrm{d}F(s) \quad (\text{由 } S_{n-1}\text{取值非负及 } F_{T_n}=F\ ).
\end{aligned}
$$

由此可知，F_n 是 $F_{n\text{-}1}$ 与 F 的卷积，记作 $F_n = F_{n-1} * F$，递推可得，$F_n = \underbrace{F*\cdots*F}_{n}$，即 F_n 是 F 的 n 重卷积．不过，除了个别的特殊情形外，一般很难求得 F_n 的解析表达式．

命题 2.2.6 对任意的自然数 n、m，有

$$F_{n+m}(t) \le F_n(t)F_m(t) \quad (t \ge 0). \tag{2.2.8}$$

进而，有

$$F_n(t) \le [F(t)]^n \quad (t \ge 0).$$

证 固定 n，先对 m 用归纳法证明．当 m=1 时，

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}(t) &= (F_n * F_1)(t) = \int_0^t F_n(t-s)\mathrm{d}F_1(s)\\
&\le F_n(t)\int_0^t \mathrm{d}F_1(s) \quad (\text{由 } F_n \text{ 的单调性})\\
&= F_n(t)F_1(t).
\end{aligned}
$$

假设当 $m=k$ 时，不等式(2.2.8)成立．当 $m=k+1$ 时，因

$$
\begin{aligned}
F_{n+k+1}(t) &= (F_{n+k} * F_1)(t) = \int_0^t F_{n+k}(t-s)\mathrm{d}F_1(s)\\
&\le \int_0^t F_n(t-s)F_k(t-s)\mathrm{d}F_1(s) \quad (\text{由归纳假设})\\
&\le F_n(t)\int_0^t F_k(t-s)\mathrm{d}F_1(s)\\
&= F_n(t)F_{k+1}(t),
\end{aligned}
$$

故不等式(2.2.8)对任意的自然数 m 成立．由于 n 与 m 对称，因而不等式(2.2.8)对任意的自然数 n 也成立．

注意到 $F_1(t)=F(t)\ \ (t\ge 0)$，由不等式(2.2.8)即得

$$F_n(t) \le [F(t)]^n \quad (t \ge 0).\ \square$$

定理 2.2.7 对任意 $t \ge 0$，更新函数 $m(t)$满足下列更新方程

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u)\mathrm{d}F(u). \tag{2.2.9}$$

证 由定理 2.2.5 知

$$m(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t).$$

将 $F_n(t)=\int_0^t F_{n-1}(t-u)\mathrm{d}F(u)$ 代入上式并交换求和与积分顺序，即得(2.2.9)． □

当 T_1 具有概率密度 $f(=F')$ 时，因 S_n 的概率密度 $f_n=f_{n-1}*f$ ，故更新函数 $m(t)$具有导数 $m'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$. 此时可用 Laplace 变换求解方程(2.2.9)．对(2.2.9)式两边取 Laplace 变换，得

$$L_m(s)=L_F(s)+L_m(s)L_f(s),$$

其中记号 $L_g(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)\mathrm{d}t$ 表示 g 的 Laplace 变换．由分部积分可得 $sL_F(s)=L_f(s)$ ，故

$$L_m(s)=\frac{L_f(s)}{s\left[1-L_f(s)\right]}.$$

对上式求 Laplace 逆变换即得 $m(t)$.

一般地，称如下形式的积分方程为**更新方程**

$$g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}F(t) \qquad (t>0). \tag{2.2.10}$$

其中 h 为已知函数，F 为已知的分布函数，g 为未知函数.

在一定的条件下，上述更新方程的解可用更新函数 $m(t)$来表达：

$$g(t)=h(t)+\int_0^t h(t-s)\mathrm{d}m(s).$$

2．若干极限定理

定理 2.2.8　对更新过程$\{N(t), t\geq 0\}$，记 $\mu=E(T_n)$，则有

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right\}=1. \tag{2.2.11}$$

证　由 Kolmogorov 强大数定律即得． □

由定理 2.2.8 可得下面两个推论.

推论 2.2.9　$P\left\{\lim_{n\to\infty} S_n=\infty\right\}=\quad$.

证　对$\forall\omega\in\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right\}$, 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}=\mu>0$ 及 $\lim_{n\to\infty} n=\infty$,所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}\cdot n=\infty,$$

即$\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right\}\subset\left\{\omega:\lim_{n\to\infty} S_n=\infty\right\}$. 由定理 2.2.8 知$P\left\{\lim_{n\to\infty} S_n=\infty\right\}=1$. □

由推论 2.2.9 可知，对固定的 $t>0$，集合$\{n: S_n\leq t\}$的元素至多有有限个，因而更新过程可改记为 $N(t)=\max\{n:\ S_n\leq t\}$.

推论 2.2.10 对任意 $t \ge 0$，$m(t) < \infty$.

证 当 $t = 0$ 时，由命题 2.2.6 知 $F_n(0) \le [F(0)]^n$，再由 $F(0) < 1$，得

$$m(0) \le \frac{F(0)}{1-F(0)} < \infty.$$

当 $t > 0$ 时，由命题 2.2.6 可得，

$$F_{nk+m}(t) \le [F_k(t)]^n F_m(t) \quad (1 \le m \le k-1).$$

而由 $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty\right\} = 1$ 知，对任意的 $t > 0$，存在充分大的 $k \ge 1$，使 $P\{S_k > t\} = \alpha > 0$，即

$$F_k(t) = P\{S_k \le t\} = 1-\alpha < 1,$$

故

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{k} F_{nk+m}(t) \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{k} [F_k(t)]^n [F(t)]^m \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} [F_k(t)]^n kF(t) = \frac{kF(t)}{1-F_k(t)} < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

推论 2.2.10 告诉我们，更新过程在 t 时刻以前的平均更新次数是有限值.

记 $N(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} N(t)$，它表示在$[0, \infty)$内更新次数的总数．显然，$\{N(\infty) < \infty\}$当且仅当有某一更新间隔 $T_n = \infty$.

因为

$$P\{N(\infty) < \infty\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(T_n = \infty)\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n = \infty) = 0,$$

所以

$$P\{N(\infty) = \infty\} = P\left\{\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty\right\} = 1.$$

既然 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = \infty$，那么当 $t\to\infty$时，就应当考虑 $N(t)$趋于无穷大的速率.

在介绍下面的定理之前，先来探讨记号 $S_{N(t)}$所表示的含义．对于更新过程$\{N(t), t \ge 0\}$，如果 $N(t) = n$，即在$(0, t]$内累计发生 n 次更新，那么 $S_{N(t)} = S_n$ 表示第 n 次更新的发生时刻，显然，$S_n \le t < S_{n+1}$．由此可见，$S_{N(t)}$表示在 t 时刻以前（含 t 时刻）的最后一次更新的发生时刻，并且 $S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}$．而 $S_{N(t)+1}$ 表示在 t 时刻后首次更新的发生时刻.

定理 2.2.11（更新过程的强大数定律）对更新过程$\{N(t), t \ge 0\}$，记 $\mu = E(T_1)$，则有

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1. \tag{2.2.12}$$

证 因为 $S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}$，所以

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}.$$

由定理 2.2.8 知 $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right\}=1$，又知 $P\left\{\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\infty\right\}=1$，再由

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right\}\bigcap\left\{\lim_{t\to\infty}N(t)=\infty\right\}\subset\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\mu\right\},$$

得

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\mu\right\}=1,$$

即 $\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\xrightarrow{a.s.}\mu$．类似地，有 $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}=\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}\xrightarrow{a.s.}\mu$，于是 $\frac{t}{N(t)}\xrightarrow{a.s.}\mu$，故(2.2.12)式成立．□

定理 2.2.11 表明，长时间后更新发生的速率将概率 1 地等于 $1/\mu$，因此称 $1/\mu$ 为更新过程的速率．

例 2.2.12 某款 mp3 播放器由一节 7 号电池供电，该款播放器的使用说明书标称用一节 7 号电池可连续播放 17(h)．假定用于该款播放器的电池寿命在区间 (13, 17) 上服从均匀分布，当电池失效时即刻更换一节同品牌同型号的新电池．

(1) 问长时间连续工作后电池更新的速率是多少?

(2) 如果没有储备电池，每当播放器所用电池失效时，立即到附近商店购买一节同类型电池，假定用于购买电池的时间(h)在区间(1/3, 2/3)上服从均匀分布．求在长时间连续工作后，更换电池的速率．

解 (1) 记 $N(t)$为$(0, t]$内累计更换电池的次数．由定理 2.2.11 知，在长时间连续工作后，电池更新的速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

由 $\mu=\int_{13}^{17}\frac{x}{4}\mathrm{d}x=15$，得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{15}.$$

(2) 两次相继更新的平均间隔为 $\mu=\int_{13}^{17}\frac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_{1/3}^{2/3}3y\mathrm{d}y=15\frac{1}{2}$，故在长时间连续工作后，电池更新的速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}=\frac{2}{31}. \quad □$$

为了研究更新函数 $m(t)$的渐近性态，需要引进停时概念．

定义 2.2.13 设$\{X_n, n\ge 1\}$为随机序列，T 为取正整数的随机变量，若对任意 $n\ge 1$，事件$\{T = n\}$仅依赖于 X_1，X_2,⋯，X_n 而与 X_{n+1}，X_{n+2},⋯独立，则称 T 是关于$\{X_n, n \ge 1\}$的**停时**(**stopping time**)．

停时的直观含义是，如果依次观察一列随机变量$\{X_n\}$并以 T 表示在停止观察之前观察

的次数的话，那么 $T=n$ 就表示在观察到 $X_1, X_2,\cdots, X_n$ 之后便停止了观察，而 $X_{n+1}, X_{n+2},\cdots$ 等还未被观察.

定理 2.2.14（Wald 等式） 若$\{X_n, n\ge 1\}$是独立同分布的随机序列，$E(X_1)<\infty$，T 是关于$\{X_n, n\ge 1\}$的停时且$E(T)<\infty$，则

$$E\left(\sum_{n=1}^{T}X_n\right)=E(T)E(X_1). \tag{2.2.13}$$

证 令

$$I_n=\begin{cases}1, & T\ge n,\\ 0, & T<n.\end{cases}$$

由 $E(X_1)<\infty$ 知，期望运算与级数求和可交换次序，因而

$$E\left(\sum_{n=1}^{T}X_n\right)=E\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_nI_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E(X_nI_n).$$

另一方面，$\{I_n=0\}=\{T<n\}=\bigcup_{k=1}^{n-1}\{T=k\}$ 仅依赖于 $X_1,\cdots$，X_{n-1} 而与 X_n，$X_{n+1},\cdots$ 独立，又

$\{I_n=1\}=\overline{\{I_n=0\}}$ 也与 $X_n, X_{n+1},\cdots$ 独立，从而 I_n 与 X_n 独立，故

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{n=1}^{T}X_n\right)&=E\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_nI_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E(X_nI_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}E(X_n)E(I_n)=E(X_1)\sum_{n=1}^{\infty}P\{T\ge n\}\\&=E(X_1)E(T).\quad\square\end{aligned}$$

例 2.2.15 设$\{X_n, n\ge 1\}$是独立同分布的随机序列，$P\{X_1=1\}=p, P\{X_1=-1\}=1-p$. 若记

$$T=\min\left\{n:\ \sum_{k=1}^{n}X_k=1\right\},$$

则 T 是关于$\{X_n\}$的停时.

实际上，T 可视作一赌徒参加赌博的一个“策略”，该赌徒每次以概率 p 赢得 1 元，以概率 $1-p$ 输掉 1 元，其制定的策略为：首次赢得 1 元时就停止赌博．换言之，停时 T 也可看作是一个“停止规则”.

当 $p>1/2$ 时，可以证明 $E(T)<\infty$．此时，由 Wald 等式得

$$(2p-1)E(T)=E\left(X_1+\cdots+X_T\right)=1,$$

故 $E(T)=(2p-1)^{-1}$.

当 $p=1/2$ 时，若应用 Wald 等式，则得$0=E(X_1)E(T)=E\left(X_1+\cdots+X_T\right)=1$，矛盾！

由此可推断：$E(T)=\infty$.

引理 2.2.16 设$\{N(t), t\geq 0\}$为更新过程，则

(1) $N(t)+1$ 是关于$\{T_n, n\geq 1\}$的停时.

(2) 当 $\mu=E(T_1)<\infty$时，有

$$E\left[S_{N(t)+1}\right]=\mu\left[m(t)+1\right],$$

$$m(t)\geq \frac{t}{\mu}-1.$$

证 (1) 因为 $\{N(t)+1=n\}=\{T_1+\cdots+T_{n-1}\leq t<T_1+\cdots+T_n\}$，即，$N(t)+1$ 仅依赖于 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 而与 $T_{n+1},T_{n+2},\cdots$独立，所以 $N(t)+1$ 是关于$\{T_n, n\geq 1\}$的停时.

(2) 由(1)知 $N(t)+1$ 是关于$\{T_n, n\geq 1\}$的停时，且 $E[N(t)+1]=m(t)+1<\infty$（推论 2.2.10），故由 Wald 等式，得

$$E\left[S_{N(t)+1}\right]=E\left[\sum_{k=1}^{N(t)+1}T_k\right]=E(T_1)E\left[N(t)+1\right]=\mu\left[m(t)+1\right].$$

最后，由 $S_{N(t)+1}>t$ 及上面的等式，即可推出 $m(t)\geq \frac{t}{\mu}-1$. □

定理 2.2.17（基本更新定理） 设$\{N(t), t\geq 0\}$为更新过程，$\mu=E(T_n)$，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}, \tag{2.2.14}$$

这里允许 $\mu=\infty$，并规定 $\frac{1}{\infty}=0$.

证 先考虑 $\mu<\infty$的情形. 一方面，由引理 2.2.16 知

$$\frac{m(t)}{t}\geq \frac{1}{\mu}-\frac{1}{t},$$

于是

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\geq \frac{1}{\mu}. \tag{2.2.15}$$

另一方面，对任意固定的正数 M，引入一个新的更新过程. 记

$$\tilde{T}_n=T_n\wedge M\triangleq\begin{cases}T_n, & T_n\leq M,\\ M, & T_n>M.\end{cases}$$

显然，$\{\tilde{T}_n, n\geq 1\}$仍为独立同分布的随机序列，且 $\tilde{T}_n\leq M\ (n\geq 1)$. 令

$$\tilde{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{T}_k,$$

$$\tilde{N}(t)=\sup\{n:\ \tilde{S}_n\leq t\},$$

则有

$$\tilde{S}_{\tilde{N}(t)+1}\leq t+M.$$

记 $\tilde{m}(t)=E\left[\tilde{N}(t)\right]$, $\mu_M=E(\tilde{T}_n)$，由引理 2.2.16 及上式可得

$$\mu_M\left[\tilde{m}(t)+1\right]\le t+M\ ,$$

从而有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\tilde{m}(t)}{t}\le\frac{1}{\mu_M}\ .$$

因 $\tilde{S}_n\le S_n$，故 $\tilde{N}(t)\ge N(t)$，$\tilde{m}(t)\ge m(t)$，于是

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}\le\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\tilde{m}(t)}{t}\le\frac{1}{\mu_M}\ , \tag{2.2.16}$$

令 $M\to\infty$，得

$$\lim_{M\to\infty}\mu_M=\lim_{M\to\infty}\int_0^M\left[1-F(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[1-F(x)\right]\mathrm{d}x=\mu\ .$$

故当 $M\to\infty$时，有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}\ . \tag{2.2.17}$$

由(2.2.15)及(2.2.17)即得(2.2.14).

对 $\mu=\infty$的情形，由(2.2.16)式，令 $M\to\infty$，因 $\mu_M\to\mu=\infty$，故

$$0\le\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}\le\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{m(t)}{t}\le 0\ ,$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=0$． □

下面的定理刻画了 $N(t)$的渐近分布.

定理 2.2.18（正态近似定理）设$\{N(t),\ t\ge 0\}$为更新过程，$\mu=E(T_n)<\infty,\ \ \sigma^2=D(T_n)<\infty$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{t\to\infty}P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\ .$$

在证明定理 2.2.18 之前先介绍一个有用的引理.

引理 2.2.19 设 $G(x)$是分布函数且在 x_0 处连续，若 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{X_n\le x\right\}=G(x),\ \forall x\in\boldsymbol{R}^1$，则当 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{X_n\le x_n\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{X_n\le x_0\right\}=G(x_0)\ .$$

证 由$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$知，$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ge 1$，当$n\ge N$，有

$$x_0-\varepsilon<x_n<x_0+\varepsilon,$$

$$P\left\{X_n\le x_0-\varepsilon\right\}\le P\left\{X_n\le x_n\right\}\le P\left\{X_n\le x_0+\varepsilon\right\}.$$

在上式两边，令 $n\to\infty$，再令 $\varepsilon\to 0$ 即得引理的结论. □

定理 2.2.18 的证明思路是：利用关系式$\{N(t)<n\}=\{S_n>t\}$并对独立同分布的$\{T_n, n\geq 1\}$应用中心极限定理.

定理 2.2.18 的证明　记 $a(t, x)$为大于$t/\mu + x\sigma\sqrt{t/\mu^3}$的最小整数，则

$$P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\leq x\right\}=P\{N(t)<a(t,x)\}=P\left\{S_{a(t,x)}>t\right\}$$
$$=P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{a(t,x)}T_k-\mu a(t,x)}{\sigma\sqrt{a(t,x)}}>\frac{t-\mu a(t,x)}{\sigma\sqrt{a(t,x)}}\right\}$$
$$=1-P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{a(t,x)}T_k-\mu a(t,x)}{\sigma\sqrt{a(t,x)}}\leq\frac{t-\mu a(t,x)}{\sigma\sqrt{a(t,x)}}\right\}.$$

当$t\to\infty$时，有$a(t,x)\to\infty$及

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-\mu a(t,x)}{\sigma\sqrt{a(t,x)}}=-x,$$

故由中心极限定理及引理 2.2.19 得

$$\lim_{t\to\infty}P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\leq x\right\}=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}e^{-u^2/2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\mathrm{d}u. \quad \square$$

定义 2.2.20　若随机变量 X 具有如下性质：存在 $d>0$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=nd\}=1, \tag{2.2.18}$$

即 X 只取数 d 的整数倍，则称 X 是**格点**的，具有上述性质的最大的 d 称为 X 的周期. 此时亦简称 X 是 ***d*-格点**的. 当 X 是 d-格点时，称其分布函数 F 为 d-格点分布.

定理 2.2.21（Blackwell 定理）设更新间隔的分布函数为 F，期望为 μ，

(1) 若 F 不是格点分布，则对任意的 $s>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\left[m(t+s)-m(t)\right]=\frac{s}{\mu}. \tag{2.2.19}$$

(2) 若 F 是 d-格点分布，则

$$\lim_{t\to\infty}P\{\text{在 } t=nd \text{ 时更新}\}=\frac{d}{\mu}. \tag{2.2.20}$$

Blackwell 定理的证明请参阅文献[8].

定义 2.2.22　设 h 是定义在$[0,\infty)$上的函数，对任意 $\delta>0$，记

$$\underline{m}_n(\delta)=\inf\{h(t):(n-1)\delta\leq t\leq n\delta\},$$

$$\overline{m}_n(\delta)=\sup\{h(t):(n-1)\delta\leq t\leq n\delta\}.$$

若对任意 $\delta>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\underline{m}_n(\delta)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m}_n(\delta)$有限，且

$$\lim_{\delta\to 0}\delta\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m}_n(\delta)=\lim_{\delta\to 0}\delta\sum_{n=1}^{\infty}\underline{m}_n(\delta)$$

则称 h 是直接 Riemann 可积的.

易证：任何单调且绝对可积(即，$\int_0^{+\infty}|g(t)|\mathrm{d}t<\infty$)的函数 g 必是直接 Riemann 可积的.

定理 2.2.23（**关键更新定理**） 若 F 不是格点的且 h 是直接 Riemann 可积的，则

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)\mathrm{d}m(x)=\int_0^{+\infty}\frac{h(t)}{\mu}\mathrm{d}t\,, \tag{2.2.21}$$

其中 $m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x),\quad \mu=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}F(x)=\int_0^{+\infty}\overline{F}(x)\mathrm{d}x$.

注(1) 当更新间隔 T_n~Exp(λ)，亦即更新流为 Poisson 流时，(2.2.21)式是显然成立的.

(2) 在关键更新定理中令 $h(\cdot)=I_{(t,t+s]}(\cdot)$，即得 Blackwell 定理(1). 实际上，用严格的概率理论可以证明：Blackwell 定理(1)与关键更新定理是等价的.

3. 若干应用

先看一个有用的命题.

命题 2.2.24 设{$N(t)$, $t\geq 0$}为更新过程，其更新间隔的分布函数为 F，更新函数为 m，则当 $t\geq s\geq 0$ 时，有

$$P\left\{S_{N(t)}\leq s\right\}=\overline{F}(t)+\int_0^s\overline{F}(t-y)\mathrm{d}m(y)\,, \tag{2.2.22}$$

其中 $\overline{F}(t)=1-F(t)$.

证

$$\begin{aligned}
P\left\{S_{N(t)}\leq s\right\}&=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{S_{N(t)}\leq s, N(t)=n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{S_n\leq s, S_{n+1}>t\right\}\\
&=P\left\{S_1>t\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{S_n\leq s, S_{n+1}>t\right\}\\
&=\overline{F}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}P\left\{S_n\leq s, S_{n+1}>t\,\middle|\,S_n=y\right\}\mathrm{d}F_n(y)\\
&=\overline{F}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{s}\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}F_n(y)\\
&=\overline{F}(t)+\int_0^{s}\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}\left(\sum_{n=1}^{\infty}F_n(y)\right)\\
&=\overline{F}(t)+\int_0^{s}\overline{F}(t-y)\mathrm{d}m(y)\,.
\end{aligned}$$

因为所有的项非负，所以积分与求和可以交换顺序. □

例 2.2.25（**交错更新过程**）在更新过程的定义中，如果每一更新间隔 T_n 可分为前后两

个阶段，即 $T_n=X_n+Y_n$，其中 X_n 在前，Y_n 在后，彼此交错地到来，又假定$\{(X_n, Y_n), n\geq 1\}$是独立同分布的二维随机向量序列，那么这种过程称为**交错更新过程**.

交错更新过程的典型应用是描述随机开关模型. 设一系统只有两个状态:"开"、"关". 从 $t = 0$ 开始系统处于"开"状态，持续时间为 X_1，继而转入"关"状态，持续时间为 Y_1；接着系统又处于"开"状态，持续时间为 X_2，之后转入"关"状态，持续时间为 Y_2；如此交错地进行下去. 假定二维随机向量序列$\{(X_n, Y_n), n\geq 1\}$是独立同分布的（由此可知，$\{X_n, n\geq 1\}$、$\{Y_n, n\geq 1\}$分别是独立同分布的随机变量序列，但对每一 n，X_n 与 Y_n 可能是相依的.），令 $T_n=X_n+Y_n$（如果称一个相继的"先开后关"为一个"循环"的话，那么 T_n 表示第 n 个循环与第 $n-1$ 个循环之间的间隔.），由假定条件可知，$\{T_n, n\geq 1\}$是取值非负的独立同分布的随机变量序列. 对$\{T_n, n\geq 1\}$按更新过程的定义方式来定义一个过程，则这一过程就是交错更新过程.

对上述交错更新过程，设 X_n 的分布函数为 H，Y_n 的分布函数为 G，$T_n= X_n + Y_n$ 的分布函数为 F. 记

$$P(t) = P\{\text{系统在 } t \text{ 时刻处于“开”状态}\},$$
$$Q(t) = P\{\text{系统在 } t \text{ 时刻处于“关”状态}\},$$

则有如下结论.

命题 2.2.26　对交错更新过程，若 $E(T_n) < \infty$，且 F 不是格点分布，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{E(X_1)}{E(X_1)+E(Y_1)},$$
$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{E(Y_1)}{E(X_1)+E(Y_1)}.$$

证　由全概率公式

$$\begin{aligned}P(t) = &P\left\{\text{系统在} t \text{时刻处于“开”} \middle| S_{N(t)} = 0\right\} P\left\{S_{N(t)} = 0\right\}\\ &+ \int_0^{+\infty} P\left\{\text{系统在} t \text{时刻处于“开”} \middle| S_{N(t)} = y\right\} \mathrm{d}P\left\{S_{N(t)} \leq y\right\}.\end{aligned}$$

因为 $S_{N(t)}$表示 t 时刻之前（含 t 时刻）的最后一次更新的发生时刻，所以事件$\{ S_{N(t)} = 0\}$表示到 t 时刻第一个循环还未结束，即$\{ S_{N(t)} = 0\}=\{X_1+Y_1> t\}$. 于是

$$\begin{aligned}&P\left\{\text{系统在} t \text{时刻处于“开”} \middle| S_{N(t)} = 0\right\}\\ &= P\left\{\text{系统在} t \text{时刻处于“开”} \middle| X_1 + Y_1 > t\right\}\\ &= P\left\{X_1 > t\right\} / P\left\{X_1 + Y_1 > t\right\}.\end{aligned}$$

另外，因为$\{(X_n, Y_n), n \geq 1\}$是独立同分布的，系统一旦进入一个新的循环就意味着一切都重新开始（参见图 2.2.1），所以当 $y \leq t$ 时，有

$$\begin{aligned}&P\left\{\text{系统在} t \text{时刻处于“开”} \middle| S_{N(t)} = y\right\}\\ &= P\left\{X_1 > t - y \middle| X_1 + Y_1 > t - y\right\}\\ &= P\left\{X_1 > t - y\right\} / P\left\{X_1 + Y_1 > t - y\right\}.\end{aligned}$$

再由命题 2.2.24 知

$$\mathrm{d}P\left\{S_{N(t)} \leq y\right\} = \bar{F}(t-y)\mathrm{d}m(y).$$

将上面讨论的结果结合到一起，就有

$$P(t)=P\left\{X_1>t\right\}+\int_0^{+\infty}P\left\{X_1>t-y\right\}\big/P\left\{X_1+Y_1>t-y\right\}\bar{F}(t-y)\mathrm{d}m(y)$$
$$=\bar{H}(t)+\int_0^{+\infty}\bar{H}(t-y)\mathrm{d}m(y).$$

由于 $\bar{H}(\cdot)$ 是单调不增的，且 $\int_0^{+\infty}\bar{H}(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}P(X_1>t)\mathrm{d}t=E(X_1)<\infty$，即 $\bar{H}(\cdot)$ 是直接 Riemann 可积的，又 F 不是格点分布，因而由关键更新定理，得

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}\left[\bar{H}(t)+\int_0^t\bar{H}(t-y)\mathrm{d}m(y)\right]=\frac{\int_0^{+\infty}\bar{H}(t)\mathrm{d}t}{\mu_F}=\frac{E(X_1)}{E(X_1)+E(Y_1)}.$$

最后，因 $P(t)+Q(t)\equiv 1,\ \forall t\ge 0$，故

$$\lim_{t\to\infty}Q(t)=\frac{E(Y_1)}{E(X_1)+E(Y_1)}.\quad\square$$

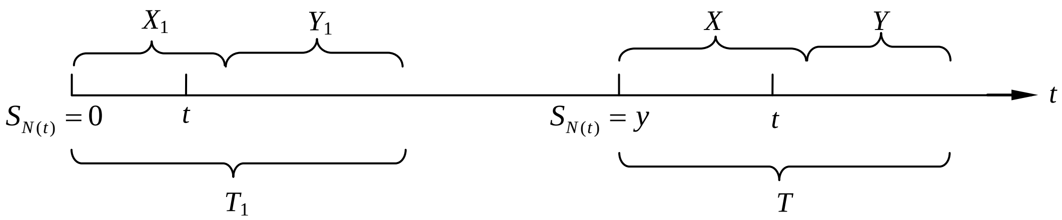

图 2.2.1

例 2.2.27（**年龄与剩余寿命**）设$\{N(t),\,t\ge 0\}$为更新过程，对固定的 $t>0$，称

$$a_t=t-S_{N(t)}$$

为（第 $S_{N(t)}$个更新元的）**年龄**．称

$$r_t=S_{N(t)+1}-t$$

为（第 $S_{N(t)}$个更新元的）**剩余寿命**．

如果更新过程$\{N(t),\,t\ge 0\}$是强度为 λ 的 Poisson 过程，那么不难证明下列结论(习题 2.6)

(1) $a_t\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$；

(2) r_t 的分布函数为

$$F_{r_t}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & 0\le x<t,\\ 1, & x\ge t.\end{cases}$$

对于一般的更新过程，可以利用交错更新过程的相关结论来寻求剩余寿命及年龄的极限分布.

为求得 $\lim\limits_{t\to\infty}P\left\{r_t\le x\right\}$，设想更新时刻流$\{S_n,\,n\ge 0\}$将时间轴$[0,\infty)$划分为一串随机区间$[S_n, S_{n+1})$ ($n\ge 0$)，第 n 个随机区间（亦称为更新区间）的长度为 T_n．在一个更新区间上，若 t 时刻对应的剩余寿命不超过 x，则称系统在 t 时刻处于“关”. 否则，称系统在 t 时刻处于“开”. 换

言之，在一个更新区间的后 x 时间，系统处于“关”状态，而其余时间处于“开”状态．如此一来，每一更新间隔 T_n 可表示为

$$T_n=\left[T_n-\min(x,T_n)\right]+\min(x,T_n)\,.$$

若更新分布 F 不是格点分布，则由命题 2.2.26 得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P\left\{r_t\le x\right\}&=\lim_{t\to\infty}P\left\{\text{系统在}\,t\,\text{时刻处于“关”}\right\}=\frac{E\left[\min(x,T_1)\right]}{E(T_1)}\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}P\left\{\min(x,T_1)>y\right\}\mathrm{d}y=\frac{1}{\mu}\int_0^{x}\bar F(y)\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

对 $\lim\limits_{t\to\infty}P\left\{a_t\le x\right\}$，用类似的方法可得

$$\lim_{t\to\infty}P\left\{a_t\le x\right\}=\frac{1}{\mu}\int_0^{x}\bar F(y)\mathrm{d}y\,.\,.$$

例 2.2.28（**延迟更新过程**） 在更新过程的定义中假定更新间隔 T_1, T_2, T_3, …是独立同分布的，对此假定条件稍加修改就得到所谓的“延迟更新过程”．若 T_1 的分布为 G，其余随机变量 $T_2, T_3,\cdots$的分布均为 F，而独立性假定不变，则得到延迟更新过程：

$$N_D(t)=\sup\left\{n:S_n\le t\right\}$$

其中 $S_0=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}T_k$.

显然，在延迟更新过程中，如果 $G=F$，那么它就是普通的更新过程．对延迟更新过程而言，其更新函数（用 $m_D(t)$表示）仍满足更新方程

$$m_D(t)=G(t)+\int_0^t m(t-u)\mathrm{d}F(u)\,,$$

并且基本更新定理、Blackwell 定理和关键更新定理的形式仍然不变．

作为延迟更新过程的例子，我们来考虑这样一个问题：对于固定的时刻 $s>0$，考察更新过程$\{N(t), t\ge 0\}$在时间 s 后的更新情况，即令

$$\begin{aligned}\tilde T_1&=S_{N(s)+1}-s\,,\\\tilde T_n&=T_{N(s)+n}\quad(n\ge 2).\end{aligned}$$

不难看出 $\tilde T_n\ \ (n\ge 2)$ 分布函数同为 F (F 是原更新过程的更新间隔的分布函数)，而 $\tilde T_1$ 表示原更新过程在 s 时刻的剩余寿命，其分布显然不同于 F．对这样的间隔序列$\left\{\tilde T_n, n\ge 1\right\}$，其计数过程$\left\{\tilde N(t),\ t\ge 0\right\}$就是延迟更新过程．

例 2.2.29（**带酬更新过程**） 如果在每一次更新时都支付一定的“酬金”，那么这样的更新过程就称为带酬更新过程．确切地说，设$\{N(t), t\ge 0\}$为更新过程，$\{T_n, n\ge 1\}$为过程的更新间隔序列，其公共分布为 F．设每一次更新发生时要支付一份酬金，用 R_n 表示第 n 次更新时所支付的酬金．假设随机向量列$\{(T_n, R_n), n\ge 1\}$是独立同分布的．令

$$R(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}R_k\quad(t\ge 0),$$

则称$\{(N(t), R(t)), t \geq 0\}$为带酬更新过程，称$\{R(t), t \geq 0\}$为酬金过程.

注 条件“随机向量列$\{(T_n, R_n), n \geq 1\}$是独立同分布的”蕴含“$\{T_n, n \geq 1\}$、$\{R_n, n \geq 1\}$分别是独立同分布的”. 但对每一 n，允许 R_n 与 T_n 相依.

酬金过程$\{R(t), t \geq 0\}$表示 t 时刻前所支付的总酬金. 我们不加证明地给出酬金过程的下列性质.

命题 2.2.30 若 $E(T_1) < \infty,\ E(R_1) < \infty$，则

(1) $P\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{R(t)}{t} = \dfrac{E(R_1)}{E(T_1)}\right\} = 1$.

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{E\left[R(t)\right]}{t} = \dfrac{E(R_1)}{E(T_1)}$.

习题 2

2.1 设$\{N(t),\ t \geq 0\}$为计数过程，$\{S_n,\ n \geq 0\}$为与之相伴的到达时刻流，试指出下列事件之间的关系：

(1) $\{N(t) > n\}$与$\{S_n < t\}$；

(2) $\{N(t) < n\}$与$\{S_n > t\}$；

(3) $\{N(t) \leq n\}$与$\{S_n \geq t\}$。

2.2 证明：定义 2.1.4 的条件与定义 2.1.2 的条件等价。

2.3 设$\{N(t),\ t \geq 0\}$是强度为λ的 Poisson 过程，求该过程的自协方差函数。

2.4 设$\{S_n,\ n \geq 0\}$是强度为λ 的 Poisson 过程的到达时刻流，证明：

$S_0 < S_1 < S_2 < \cdots,\ (a.s.)$

2.5 设$\{N_1(t),\ t \geq 0\}$和$\{N_2(t),\ t \geq 0\}$是相互独立、强度分别为λ_1 与 λ_2 的 Poisson 过程，证明$\{N_1(t)+N_2(t),\ t \geq 0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程。

2.6 设$\{N(t),\ t \geq 0\}$是强度为λ的 Poisson 过程，$t > 0$，求

(1) $P\left\{N(t/2) = m \mid N(t) = n\right\}$；

(2) $P\left\{N(2t) = k \mid N(t) = n\right\}$。

2.7 小王居住的小区门口有条横马路，每个工作日小王都要到马路对面的公

交车站乘车上班。尽管距离小区门口 150 米远就有过街天桥，但小王嫌麻烦每次都选择从小区门口直接横穿马路（该处道路上无红绿灯）。设汽车以强度 $\lambda = 7$（辆/分钟）的 Poisson 过程通过小区门口。如果小王鲁莽从事，用时 8 秒横穿马路，那么他过马路时不被车撞的概率是多少?（假设人、车来不及作避让，因而在小王过马路时有车经过便被车撞。）

2.8　某景区提供电瓶车供游客游览时乘用，发车规则为：坐满 5 位游客即刻发车。假设游客以速率 2/5（人/分钟）的 Poisson 过程依序到达发车点，且无人争抢或等候半途离去，又假定景区有足够多的电瓶车以履行其发车承诺，求第二位到达发车点的游客等候发车的平均等待时间。

2.9　某加油站为一次消费满一定金额的车辆提供一次免费洗车服务，假定参与免费洗车的汽车构成强度为 $\lambda = 1/8$（辆/分钟）的 Poisson 过程。每次洗车需要 10 分钟。求第二辆接受洗车服务的汽车不用等待的概率，并计算其平均等待时间。

2.10　设 $\{N(t),\ t \ge 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，$\{S_n,\ n \ge 0\}$ 是与过程相伴的到达时刻流，求

(1)　$\mathrm{E}(S_n), n \ge 1$；

(2)　$\mathrm{E}\left(S_3 \middle| N(2) = 1\right)$；

(3)　$\mathrm{E}\left(N(4) - N(3) \middle| N(2) = 1\right)$

2.11　设 $\{N(t),\ t \ge 0\}$ 是一个强度为 λ 的 Poisson 过程，它与均值为 μ 、方差为 σ^2 的非负随机变量 T 独立，求

(1)　$\mathrm{Cov}(T, N(T))$;

(2)　$\mathrm{D}(N(T))$。

2.12　设 $\{N(t),\ t \ge 0\}$ 是一个强度为 λ 的 Poisson 过程，它与均值为 μ、方差为 σ^2 的独立同分布的随机变量序列 $\{X_n, n \ge 1\}$ 独立，求 $\mathrm{Cov}\left(N(t), \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)$。

2.13　设 $\{N(t),\ t \ge 0\}$ 是一个强度为 λ 的 Poisson 过程，$\{S_n,\ n \ge 0\}$ 是与过程相伴的到达时刻流，证明对于任意的 $0 \le s \le t$ 和 $n \ge 1$，有

$$P\{S_1 \le s \mid N(t) = n\} = 1 - \left(1 - \frac{s}{t}\right)^n 。$$

2.14　设 $\{X(t),\ t \ge 0\}$，$\{Y(t),\ t \ge 0\}$ 是两个相互独立的 Poisson 过程，强度分别为 λ 和 μ，$\{S_n,\ n \ge 0\}$ 是第一个过程的到达时刻流，令

$$M = Y(S_2) - Y(S_1),$$

证明 M 的概率分布为 $P\{M=m\} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^m,\ m=0,1,2,\cdots$。

2.15 设 $\{N(t),\ t\ge 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，$\{S_n,\ n\ge 0\}$ 是与过程相伴的到达时刻流，令 $T = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$。

(1) 证明 T 的分布函数为 $F_T(y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ 1-e^{-\lambda y}-\lambda y e^{-\lambda y}, & 0\le y<t, \\ 1-e^{-\lambda y}-\lambda t e^{-\lambda y}, & t\le y. \end{cases}$

(2) 求 E(T)。

2.16 设非齐次 Poisson 过程 $\{N(t),\ t\ge 0\}$ 的强度函数 $\lambda(t) = \dfrac{1}{1+t},\ t\ge 0$，$\{T_n, n\ge 1\}$ 为过程的到达间隔序列，

(1) 分别求 T_1 与 T_2 的概率密度；

(2) 问 $\{T_n, n\ge 1\}$ 是否相互独立?

2.17 设 $\{N(t),\ t\ge 0\}$ 为更新过程，更新间隔 $T_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$，分别求 $N(1)$与 $N(3)$的概率分布。

2.18 设 $\{N(t),\ t\ge 0\}$ 为更新过程，更新间隔序列 $\{T_n, n\ge 1\}$ 的公共分布具有概率密度 $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x},\ x\ge 0$，求该过程的更新函数。

2.19 设 $\{N(t),\ t\ge 0\}$ 为更新过程，更新间隔服从双参数指数分布，即

$T_n \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\delta)}, & x>\delta, \\ 0, & x\le\delta, \end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，$\delta>0$，求 $P\{N(t)\ge n\}$。

证明：更新过程为参数 λ 的 Poisson 过程的充要条件是更新函数 $m(t)=\lambda t$。