第 3 章　离散时间 Markov 链

3.1　离散时间 Markov 链的定义与例

定义 3.1.1　设$\{X(t),\ t\in T\}$是定义在$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的随机过程，其参数集 $T=\{0,1,2,\cdots\}$，状态空间 S 为可数集，不妨设 $S=\{1,2,\cdots\}$．若对任意的 $m\geq 1$ 及任意的 $i_0,i_1,\cdots,i_m,j\in S$，当 $P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(m)=i_m\}>0$ 时，有

$$\begin{aligned}&P\{X(m+1)=j\,|\,X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(m)=i_m\}\\&=P\{X(m+1)=j\,|\,X(m)=i_m\},\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

则称$\{X(t),\ t\in T\}$为离散时间 **Markov 链**（**Markov chain**，简记为 M.C.）.

注(1)　(3.1.1)式刻画了 Markov 链的特性，称之为 **Markov 性**．可以证明 Markov 性等价于下列性质：

对$\forall m\geq 1,\forall\ 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}(t_k\in T,k=1,2,\cdots,m+1)$及$\forall\ i_1,i_2,\cdots,i_m,j\in S$，当 $P\{X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_m)=i_m\}>$ 时，有

$$\begin{aligned}&P\{X(t_{m+1})=j\,|\,X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_m)=i_m\}\\&=P\{X(t_{m+1})=j\,|\,X(t_m)=i_m\}.\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

(2)　如果把事件$\{X(m+1)=j\}$，$\{X(m)=i_m\}$，$\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(m-1)=i_{m-1}\}$分别比作“将来”,“现在”和“过去”的话，那么形式上(3.1.1)式可改记为

$$P\{将来\,|\,过去，现在\}=P\{将来\,|\,现在\}.\tag{3.1.3}$$

由于上式等价于

$$P\{将来，过去\,|\,现在\}=P\{将来\,|\,现在\}P\{过去\,|\,现在\},\tag{3.1.4}$$

因而，Markov 性实际上是在说，在已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”条件独立.

(3) 在刻画 Markov 链的特性中，还可改用$\{(X(m+1),\cdots,X(m+k))\in A\}$表示“将来”，用$\{(X(0),X(1),\cdots,X(m-1))\in B\}$表示“过去”，其中 A，B 分别是 S^k，S^m 中的子集，仍用$\{X(m)=i_m\}$表示“现在”，当(3.1.3)式成立时，称$\{X(n),\ n\geq 0\}$为 Markov 链．但必须注意的是，“现在”不可以改为$\{X(m)\in C\}$，其中$C\subset S$ 且C 不是单点集．换言之，在 Markov 性中，必须确切地知道现在的状态，而不是现在状态的某个范围.

定义 3.1.2　对任意的 $m\leq n$，记

$$p_{ij}(m,n)\hat{=}P\{X(n)=j\,|\,X(m)=i\}\quad(i,j\in S),\tag{3.1.5}$$

称 $p_{ij}(m,n)$为 Markov 链在 m 时刻处于状态 i 至 n 时刻转移到状态 j 的**转移概率**．称矩阵

$$\boldsymbol{P}(m,n)=\left[p_{ij}(m,n)\right]_{i,j\in S} \tag{3.1.6}$$

为 Markov 链在 m 时刻的**转移（概率）矩阵**.

特别，称 $\boldsymbol{P}(m, m+1)$为 Markov 链在 m 时刻的**一步转移矩阵**，称 $\boldsymbol{P}(m, m+k)$为 Markov 链在 m 时刻的 ***k* 步转移矩阵**.

在以后的讨论中，为了简明起见，无论是一步转移矩阵还是多步转移矩阵均简称其为转移矩阵，它具体表示一步转移还是多步转移由当时的记号及上下文而定.

转移矩阵的维数取决于 Markov 链的状态个数. 若以$|S|$表示 Markov 链的状态个数，则当$|S|<\infty$时，$\boldsymbol{P}(m, n)$是$|S|\times|S|$维的方阵；当$|S|=\infty$ 时，$\boldsymbol{P}(m, n)$是无穷维矩阵.

显然，转移矩阵 $\boldsymbol{P}(m, n)$的元素 $p_{ij}(m, n)$满足

$$\left.\begin{array}{l} 0\le p_{ij}(m,n)\le 1,\quad i,j\in S, \\ \sum\limits_{j\in S}p_{ij}(m,n)=1,\quad i\in S. \end{array}\right\} \tag{3.1.7}$$

通常，若矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的所有元素 a_{ij} 为非负实数，且每一行的行和等于 1，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**随机矩阵**. 进一步地，若 $\boldsymbol{A}$ 的每一列的列和也等于 1，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**双重随机矩阵**.

由(3.1.7)知，转移矩阵 $\boldsymbol{P}(m, n)$为随机矩阵.

当 $n=m$ 时，规定

$$p_{ij}(m,m)=\delta_{ij}\,\hat{=}\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{3.1.8}$$

其中 δ_{ij} 称为 Kroneker 记号，因而 $\boldsymbol{P}(m, m)$为单位矩阵.

关于转移概率有如下的重要结论.

定理 3.1.3 对任意正整数 $m\le l\le n$，有

$$\boldsymbol{P}(m,n)=\boldsymbol{P}(m,l)\boldsymbol{P}(l,n). \tag{3.1.9}$$

上述矩阵方程的分量形式为

$$p_{ij}(m,n)=\sum_{r\in S}p_{ir}(m,l)p_{rj}(l,n)\quad (i,j\in S). \tag{3.1.10}$$

证 定理的证明思路是利用全概率公式及 Markov 性.

$$\begin{aligned} p_{ij}(m,n) &= P\{X(n)=j\,|\,X(m)=i\} \\ &= \frac{P\{X(n)=j,\,X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}} \\ &= \sum_{r\in S}\frac{P\{X(n)=j,\,X(l)=r,\,X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}} \\ &= \sum_{r\in S}P\{X(l)=r\,|\,X(m)=i\}P\{X(n)=j\,|\,X(l)=r,X(m)=i\} \\ &= \sum_{r\in S}P\{X(l)=r\,|\,X(m)=i\}P\{X(n)=j\,|\,X(l)=r\} \\ &= \sum_{r\in S}p_{ir}(m,l)p_{rj}(l,n). \quad \square \end{aligned}$$

(3.1.9)、(3.1.10)式称为 **Chapman-Kolmogorov 方程**（简称为 C-K 方程）.

定义 3.1.4 若 Markov 链在 m 时刻的转移矩阵 $\boldsymbol{P}(m, m+1)$不依赖于 m，则称它为**齐次 Markov 链**. 此时，改用 $\boldsymbol{P}\,\hat{=}\,\boldsymbol{P}^{(1)}=\left[p_{ij}\right]$表示 $\boldsymbol{P}(m, m+1)$，其中

$$p_{ij}\,\hat{=}\,P\{X(m+1)=j\,|\,X(m)=i\}=P\{X(1)=j\,|\,X(0)=i\}\quad (i,j\in S)$$

称为**一步转移概率**.

对于齐次 Markov 链，由 C-K 方程可知

$$\boldsymbol{P}(m,m+k)=\boldsymbol{P}(m,m+1)\boldsymbol{P}(m+1,m+2)\cdots\boldsymbol{P}(m+k-1,m+k)=\boldsymbol{P}^k, \qquad (3.1.11)$$

即 k 步转移矩阵 $\boldsymbol{P}(m, m+k)$也不依赖于 m．因而改用 $\boldsymbol{P}^{(k)}=\left[p_{ij}^{(k)}\right]$表示 $\boldsymbol{P}(m, m+k)$，其中

$$p_{ij}^{(k)} \triangleq P\left\{X(m+k)=j \middle| X(m)=i\right\}=P\left\{X(k)=j \middle| X(0)=i\right\} \quad (i, j \in S)$$

称为 ***k* 步转移概率**．由(3.1.11)式知

$$\boldsymbol{P}^{(k)}=\boldsymbol{P}^k . \qquad (3.1.12)$$

在齐次 Markov 链的场合，C-K 方程的矩阵形式及分量形式分别为

$$\boldsymbol{P}^{(k+l)}=\boldsymbol{P}^{(k)}\boldsymbol{P}^{(l)}, \qquad (3.1.13)$$

$$p_{ij}^{(k+l)}=\sum_{r\in S}p_{ir}^{(k)}p_{rj}^{(l)} \quad (i, j \in S). \qquad (3.1.14)$$

实际上，(3.1.13)式是显然成立的，因为它就是 $\boldsymbol{P}^{k+l}=\boldsymbol{P}^k\boldsymbol{P}^l$.

Markov 链的研究成果虽然非常丰富，但只有齐次的情形比较完善．以后若无特别申明，将只考虑齐次 Markov 链，并简称其为 Markov 链.

记

$$\pi_j(n) \triangleq P\left\{X(n)=j\right\} \ (j \in S),$$

称 $\pi_j(n)$ $(j\in S)$为 Markov 链在 n 时刻的**绝对概率**．由绝对概率 $\pi_j(n)$构成的行向量记作

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\left(\pi_j(n):\ j \in S\right),$$

它描述 Markov 链在 n 时刻的一维分布．特别，当 $n = 0$ 时，称 $\boldsymbol{\pi}(0)$为 Markov 链的**初始概率分布**.

下面的定理说明，转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及初始概率分布 $\boldsymbol{\pi}(0)$可决定 Markov 链的有限维分布.

定理 3.1.5（Markov 链的有限维分布） 若 Markov 链$\{X(n),\ n \ge 0\}$的初始概率分布为 $\pi_j(0)=P\left\{X(0)=j\right\}$ $(j \in S)$，转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=[p_{ij}]$，则$\{X(n), n\ge 0\}$的有限维分布为

$$\begin{aligned}&P\left\{X(0)=i_0, X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\right\}\\&=\pi_{i_0}(0)p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n} \quad (i_0,i_1,i_2,\cdots,i_n \in S).\end{aligned} \qquad (3.1.15)$$

由概率的乘法公式及 Markov 性即可证明该定理，留给读者作练习.

定理 3.1.6 若 Markov 链$\{X(n), n\ge 0\}$的转移矩阵为 $\boldsymbol{P}$，在 n 时刻的绝对概率分布为 $\boldsymbol{\pi}(n)$，则

$$\boldsymbol{\pi}(k+l)=\boldsymbol{\pi}(k)\boldsymbol{P}^l. \qquad (3.1.16)$$

从而

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}^n. \qquad (3.1.17)$$

证 因为

$$\pi_j(k+l)=P\left\{X(k+l)=j\right\}=\sum_{i\in S}P\left\{X(k)=i\right\}P\left\{X(k+l)=j\middle|X(k)=i\right\}$$
$$=\sum_{i\in S}\pi_i(k)p_{ij}^{(l)}\quad (j\in S),$$

所以 $\boldsymbol{\pi}(k+l)=\boldsymbol{\pi}(k)\boldsymbol{P}^{(l)}=\boldsymbol{\pi}(k)\boldsymbol{P}^{l}$. □

定理 3.1.5 和定理 3.1.6 表明，Markov 链$\{X(n), n\geq 0\}$的转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和初始概率分布 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 是两个重要的基本特征量，利用它们不仅能求得 Markov 链在任意的 n 时刻的绝对概率分布 $\boldsymbol{\pi}(n)$，还可以获得 Markov 链的有限维分布，从而掌握它的完整的概率规律.

如果我们把 Markov 链看成是作随机运动的某一系统的话，那么可以说初始概率分布决定了系统的初始状况，而转移矩阵决定了系统的运动过程.

例 3.1.7 假设某地的市场上只有 A、B、C 和 D 四种品牌的啤酒，且购买这四种啤酒的顾客的分布为(25%, 30%, 35%, 10%). 现在 A 品牌的啤酒经销商改变了以往的营销方式，为了解这种改变的成效究竟如何，经市场调查，他们发现购买这四种品牌啤酒的顾客每两个月的平均转换率为：

$A\to A$(95%)　B(2%)　C(2%)　D(1%)
$B\to A$(30%)　B(60%)　C(6%)　D(4%)
$C\to A$(20%)　B(10%)　C(70%)　D(0%)
$D\to A$(20%)　B(20%)　C(10%)　D(50%)

试问半年后购买这四种品牌啤酒的顾客的概率分布为何？

解 在本题中令单位时间为 2 个月并记 $X(n)$为 n 时刻顾客选择的啤酒品牌. 易见，当已知顾客在 n 时刻选择某啤酒品牌的情况下，下一时刻他（她）选择其它啤酒品牌的概率也随之确定，故$\{X(n), n\geq 0\}$为 Markov 链，且状态空间 S={1, 2, 3, 4}（用 1~ 4 依次表示品牌 A~D）. 由题设条件知，转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01\\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04\\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00\\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50\end{bmatrix},$$

初始概率分布为 $\boldsymbol{\pi}(0)$ = (0.25, 0.30, 0.35, 0.10). 经过半年后顾客在这四种品牌啤酒上的转移概率是 $\boldsymbol{P}^3$，计算矩阵的乘积得

$$\boldsymbol{P}^3=\begin{bmatrix}0.8894 & 0.0459 & 0.0466 & 0.0182\\ 0.6017 & 0.2559 & 0.0988 & 0.0436\\ 0.4834 & 0.1388 & 0.3658 & 0.0120\\ 0.5009 & 0.2134 & 0.1426 & 0.1431\end{bmatrix},$$

因而，半年后购买这四种品牌啤酒的顾客的概率分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(3)&=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}^3\\ &=\begin{pmatrix}0.25 & 0.30 & 0.35 & 0.10\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0.8894 & 0.0459 & 0.0466 & 0.0182\\ 0.6017 & 0.2559 & 0.0988 & 0.0436\\ 0.4834 & 0.1388 & 0.3658 & 0.0120\\ 0.5009 & 0.2134 & 0.1426 & 0.1431\end{bmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0.6221 & 0.1582 & 0.1836 & 0.0361\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可见，顾客选择 A 品牌啤酒的可能性由 25%提高到 62.21%，这说明营销方式的改变是比较有效的．□

对于任意给定的概率分布向量[1] $\boldsymbol{\pi}$ 和随机矩阵 $\boldsymbol{P}$（要求方阵 $\boldsymbol{P}$ 可右乘向量 $\boldsymbol{\pi}$），通过一系列的构造并结合随机矩阵的性质可以证明：存在概率空间(Ω，$\mathscr{F}$, P)及其上的齐次 Markov 链$\{X(n), n\geq 0\}$，使得$\{X(n), n\geq 0\}$的初始概率分布恰为 $\boldsymbol{\pi}$，转移矩阵恰为 $\boldsymbol{P}$．这就是 Markov 链的存在定理．

定理 3.1.8 设 S 为可数集，若给定$\left\{p_j, j\in S\right\}$满足 $p_j\geq 0\,(\forall j\in S), \sum\limits_{j\in S} p_j=1$ 以及随机矩阵 $\boldsymbol{P}=\left[p_{ij}\right]_{i,j\in S}$，则存在一个概率空间($\Omega$，$\mathscr{F}$,$P$)及定义于其上的齐次 Markov 链$\{X(n), n\geq 0\}$，使 S 为其状态空间，$\left\{p_j, j\in S\right\}$为其初始概率分布，$\boldsymbol{P}$ 为其转移矩阵．

下面介绍一些 Markov 链的例子．

例 3.1.9 设$\{\xi_n, n\geq 1\}$是独立同分布的随机变量序列，且 $\xi_n\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \cdots & m \cdots \\ p_0 & p_1 \cdots & p_m \cdots \end{pmatrix}$，令 $X(0)=0,\ X(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$．由独立性不难验证$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链，其一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} p_{j-i}, & j\geq i, \\ 0, & j<i. \end{cases}$$

另外，$\{\xi_n, n\geq 1\}$本身也是 Markov 链．

例 3.1.10（直线上的无限制随机游动）考虑在直线上作随机运动的质点．若某个时刻质点位于 ia（i 为整数，a 为数直线的坐标单位），则下一时刻质点以概率 p 向右移动一格到$(i+1)a$，以概率 q（$q=1-p$）向左移动一格到$(i-1)a$．为简明起见，不妨取 $a=1$，并以 $X(n)$表示 n 时刻质点所处位置的坐标，则$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链，且

$$p_{ij}=\begin{cases} p, & j=i+1, \\ q, & j=i-1, \quad (0<p<1,\ q=1-p). \\ 0, & |j-i|\geq 2, \end{cases}$$

事实上，令

$$\xi_k=\begin{cases} 1, & \text{若第 } k \text{ 次移动向右移一格}, \\ -1, & \text{若第 } k \text{ 次移动向左移一格}, \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots),$$

令 $X(0)=\xi_0$，它表示质点在初始时刻的状态．比如，若设 $\xi_0\equiv 0$，则表示初始时刻质点以概率 1 从坐标原点出发．一般地，设

$$\xi_0\sim\begin{pmatrix} \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & p_{-1} & p_0 & p_1 & \cdots \end{pmatrix},$$

即初始时刻质点以概率 p_j 从 j 出发．显然$\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$是独立同分布的且与 ξ_0 也独立．

---

(1) 称向量 $\boldsymbol{a}$ 为概率分布向量，若它的所有分量为非负实数且总和为 1．

因 $X(n)=\xi_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\ (n\ge 1)$，故与例 3.1.9 的讨论类似，可知$\{X(n), n\ge 0\}$是 Markov 链.

再来看该 Markov 链的 k 步转移概率 $p_{ij}^{(k)}$．如果用 $\boldsymbol{P}^{(k)}=\boldsymbol{P}^k$ 的方法来计算的话，那么运算过程会比较繁琐，这里介绍一种简便方法．注意到 $p_{ij}^{(k)}$ 表示从状态 i 出发经过 k 次转移到达状态 j 的概率．若以 x、y 分别表示这 k 次移动中向右、向左的移动次数，则它们满足

$$\begin{cases} x+y=k, \\ x-y=j-i. \end{cases}$$

因在这 k 次移动中，向右移动的次数服从二项分布，故

$$p_{ij}^{(k)}=\begin{cases} \dbinom{k}{\frac{k+j-i}{2}} p^{\frac{k+j-i}{2}} q^{k-\frac{k+j-i}{2}}, & \text{若 } |j-i|\le k \text{ 且 } k+j-i \text{ 为偶数}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

当例 3.1.10 中的 $p=q=1/2$ 时，称这种游动为**对称随机游动**.

直线上的对称随机游动概念可以推广到平面乃至更高维空间上. 设质点在 l 维空间的如下所示的格点处作随机游动，

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\cdots,x_l),\quad x_j=n_j a_j,\ \ j=1,2,\cdots,l,$$

其中 n_j 为整数，a_j 为第 j 坐标的坐标单位．对点 $\boldsymbol{x}$ 的某一坐标加上或减去一个坐标单位，其余坐标固定不变，就得到 $\boldsymbol{x}$ 的 $2l$ 个邻点．质点的游动规则是：若某一时刻质点位于点 $\boldsymbol{x}$，则下一时刻质点以相同的概率 $1/(2l)$ 到达 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻点，这就是 ***l* 维对称随机游动**．不失一般性，取各坐标单位为 1，即考虑 l 维欧氏空间上的整数格点，并以 $X(n)$表示 n 时刻质点所处格点的坐标，则$\{X(n), n\ge 0\}$是 l 维 Markov 链.

再回到直线上的随机游动问题．如果将直线上的随机游动限制在 $S=\{0,1,2,\cdots,N\}$，并对质点游动到状态 0 或 N 后做出不同规定的话，那么就得到不同的随机游动模型.

(1) 具有全反射壁的随机游动　当质点到达 0（相应地，N）后，下一时刻必游动到 1（相应地，N−1），即 $p_{01}=1,\ \ p_{N,N-1}=1$．质点在其余状态之间的游动规则同例 3.1.10．此时，称$\{X(n), n\ge 0\}$为具有两个全反射壁（0 和 N）的随机游动，这是一个有限状态 Markov 链，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 具有吸收壁的随机游动　当质点到达 0（相应地，N）后就永久地停留在该位置，即 $p_{00}=1,\ \ p_{N,N}=1$．质点在其余状态之间的游动规则仍同例 3.1.10．称$\{X(n), n\ge 0\}$为具有两个吸收壁（0 和 N）的随机游动，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & & \cdots & 0\\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0\\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

若将质点在状态 $1,2,\cdots,N-1$ 之间的游动规则修改为：$p_{i,i-1}=q, p_{i,i}=r, p_{i,i+1}=p$，其中 p、q、$r>0$ 且 $p+q+r=1$，则称这样的游动为**允许停留的随机游动**.

将允许停留的游动规则与在状态 0、N 处的吸收或反射情况相结合，又可以写出若干不同的随机游动模型．例如，具有两个吸收壁（0 和 N）且允许停留的随机游动的转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & & \cdots & 0\\ q & r & p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & q & r & p & \cdots & 0\\ & & & \cdots & & \\ 0 & & & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例 3.1.11（Ehrenfest 模型）这是粒子通过薄膜进行扩散的一个数学模型．设有 $2a$ 个粒子在某一容器内作随机运动，设想用一张薄膜将容器从中间分割为相等的左、右两部分，记 $X(n)$为 n 时刻右半部分所含粒子数与 a 的差．假定：

(1) 每过单位时间发生一次粒子从一部分游动到另一部分，并且同一时刻不能有两个或两个以上粒子作这样的游动；

(2) 粒子从粒子数占优的那部分游动到另一部分的概率大于反向游动的概率，其大的程度与两部分粒子数之差成正比.

在上述假定条件下，则$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链，其状态空间 $S=\{-a,\cdots,-1,0,1,\cdots,a\}$，一步转移概率为

$$\begin{cases} p_{i,i-1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{i}{a}\right), \quad p_{i,i+1}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{i}{a}\right), & -a+1\leq i\leq a-1,\\ p_{a,j}=1,\ p_{-a,j}=1, & j=a-1,-a+1,\\ p_{i,j}=0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在这一模型中人们感兴趣的是粒子在每一部分的平稳分布.

例 3.1.12（离散分支过程）考虑某一群体，设$\{Y_{n,k}, n,k\geq 1\}$是一族独立同分布且取非负整数值的随机变量，用 $Y_{n,k}$ 表示第 n 代的第 k 个个体产生的下一代个体的数目（假定在它产生下一代后就立刻死亡）．记 $X(n)$为第 n 代个体的总数，显然，若 $X(n)=0$，则 $X(n+1)=0$；若 $X(n)\geq 1$，则

$$X(n+1)=Y_{n,1}+Y_{n,2}+\cdots+Y_{n,X(n)}=\sum_{k=1}^{X(n)}Y_{n,k}\ .$$

设 $X(0)=1$，即初始时刻有一个个体（称为祖先），下面来证明$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链．事实上，因为

$$
\begin{aligned}
&P\left\{X(n+1)=j \middle| X(n)=i,\cdots,X(0)=1\right\}\\
&=P\left\{Y_{n,1}+Y_{n,2}+\cdots+Y_{n,X(n)}=j \middle| X(n)=i,\cdots,X(0)=1\right\}\\
&=P\left\{Y_{n,1}+Y_{n,2}+\cdots+Y_{n,i}=j \middle| X(n)=i,\cdots,X(0)=1\right\}\\
&=P\left\{Y_{n,1}+Y_{n,2}+\cdots+Y_{n,i}=j\right\} \quad \text{（由}\left\{Y_{n,k},\ n,k\geq 1\right\}\text{的相互独立性）}\\
&=P\left\{Y_{1,1}+Y_{1,2}+\cdots+Y_{1,i}=j\right\} \quad \text{（由}\left\{Y_{n,k},\ n,k\geq 1\right\}\text{的同分布性）},
\end{aligned}
$$

同理

$$P\left\{X(n+1)=j \middle| X(n)=i\right\}=P\left\{Y_{1,1}+Y_{1,2}+\cdots+Y_{1,i}=j\right\},$$

所以$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链，其一步转移概率为

$$p_{ij}=P\left\{Y_{1,1}+Y_{1,2}+\cdots+Y_{1,i}=j\right\}.$$

离散分支过程的思想是由 F.Galton（1874）最先提出的，当时他研究的是家族姓氏的消失问题．现在这一数学模型在生物遗传、原子核的连锁反应等问题中都有应用．对分支过程来讲，人们比较感兴趣的是群体的消亡概率．

我们用下面的定理来结束本节的讨论．这一定理提供了一种比较实用的构造 Markov 链的方法，另外，它也是判断某一过程是否为 Markov 链的充分条件．

定理 3.1.13 设$\{X(n), n\geq 0\}$是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机过程，若它满足

(1) $\{\varepsilon_n, n\geq 1\}$是定义在同一概率空间上的独立同分布的随机序列且与$X(0)$独立，

(2) $X(n)=f\left(X(n-1),\varepsilon_n\right)$，其中$f$是二元 Borel 可测函数，

则$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链，其一步转移概率为$p_{ij}=P\left\{f(i,\varepsilon_1)=j\right\}$.

证 当$n\geq 1$时，由(2)知，ε_{n+1}与$X(0)$，$X(1)$，⋯，$X(n)$相互独立．因

$$
\begin{aligned}
&P\left\{X(n+1)=j \middle| X(n)=i, X(n-1)=i_{n-1},\cdots,X(0)=i_0\right\}\\
&=P\left\{f\left(X(n),\varepsilon_{n+1}\right)=j \middle| X(n)=i, X(n-1)=i_{n-1},\cdots,X(0)=i_0\right\}\\
&=P\left\{f\left(i,\varepsilon_{n+1}\right)=j \middle| X(n)=i, X(n-1)=i_{n-1},\cdots,X(0)=i_0\right\}\\
&=P\left\{f\left(i,\varepsilon_{n+1}\right)=j\right\}\\
&=P\left\{f\left(i,\varepsilon_1\right)=j\right\},
\end{aligned}
$$

同理

$$P\left\{X(n+1)=j \middle| X(n)=i\right\}=P\left\{f\left(i,\varepsilon_1\right)=j\right\},$$

故$\{X(n), n\geq 0\}$是 Markov 链，一步转移概率为$p_{ij}=P\left\{f\left(i,\varepsilon_1\right)=j\right\}$. □

借助上述定理便较容易判断例 3.1.9 ~ 例 3.1.11 中的过程为 Markov 链．

3.2 Markov 链的状态分类

本节将依据概率特性对 Markov 链的状态进行分类并讨论这些分类的判别准则．

3.2.1 相通与周期

定义 3.2.1 若存在某个 $n \ge 0$，使 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则称从状态 i **可达**状态 j(accessible)，记作 $i \to j$．若既有 $i \to j$ 又有 $j \to i$，则称 i 与 j **相通**(communicate)，记作 $i \leftrightarrow j$．

定理 3.2.2 相通是一种等价关系，即

(1) (自反律) $i \leftrightarrow i$；

(2) (对称律) 若 $i \leftrightarrow j$，则 $j \leftrightarrow i$；

(3) (传递律) 若 $i \leftrightarrow j$ 及 $j \leftrightarrow k$，则 $i \leftrightarrow k$．

证 (1)和(2)是显然的，只需证明(3)．设 $i \leftrightarrow j$ 及 $j \leftrightarrow k$，则存在 m, n，使得 $p_{ij}^{(m)} > 0, p_{jk}^{(n)} > 0$. 因此

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(m)} p_{rk}^{(n)} \ge p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$$

即 $i \to k$．类似可证 $k \to i$，故 $i \leftrightarrow k$．□

称相通的两个状态属于同一类．Markov 链的所有状态因相通关系而划分为不同的等价类．由定理 3.2.2 可知，两个等价类要么不相交要么重合．

定义 3.2.3 若 Markov 链的所有状态都属于同一等价类，则称这个 Markov 链是**不可约的**(irreducible)．

例3.2.4 设 Markov 链的状态空间 S={1, 2, 3, 4}，转移矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

在相通关系下，该链可划分为两个等价类{1,2}，{3,4}．这个 Markov 链是可约的，各状态之间的转移如图 3.2.1 所示．

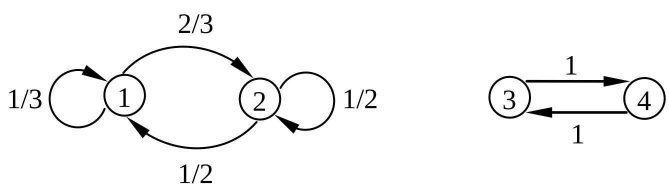

图 3.2.1

例3.2.5 设 Markov 链的状态空间 S={1,2,3,4}，转移矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

各状态之间的转移如图 3.2.2 所示．这个 Markov 链是不可约的．

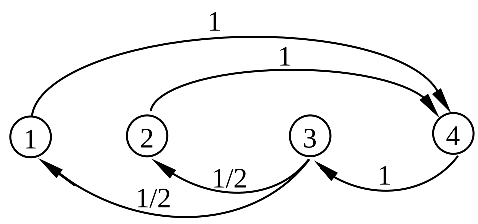

图 3.2.2

定义 3.2.6 若数集$\left\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\right\}$非空，则称该数集的最大公约数为状态 i 的周期，记作 $d(i)$．$d(i)>1$ 的状态 i 称为是**周期**的；$d(i)=1$ 的状态 i 称为是**非周期**的.

例 3.2.4 中，因为$\left\{n: n\geq 1, p_{11}^{(n)}>0\right\}=\{1,2,3,\cdots\}$，$d(1)=1$，所以状态 1 是非周期的．因为$\left\{n: n\geq 1, p_{33}^{(n)}>0\right\}=\{2,4,6,\cdots\}$，$d(3)=2$，所以状态 3 是周期的.

例 3.2.5 中，因为$\left\{n: n\geq 1, p_{11}^{(n)}>0\right\}=\{3,6,9,\cdots\}$，$d(1)=3$，所以状态 1 是周期的.

也许有人会问，上面的举例中只考虑了个别状态的周期，其余状态的周期是多少？下面的定理将告诉我们：Markov 链的一个等价类中的每一个状态具有相同的周期.

定理 3.2.7 若 $i\leftrightarrow j$，则$d(i)=d(j)$.

证 由 $i\leftrightarrow j$ 知，存在 $m, n\geq 1$，使 $p_{ij}^{(m)}>0$, $p_{ji}^{(n)}>0$，则

$$p_{jj}^{(n+m)}\geq p_{ji}^{(n)}p_{ij}^{(m)}>0.$$

对任取的$s\in\left\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\right\}$，有 $p_{ii}^{(s)}>0$，则

$$p_{jj}^{(n+s+m)}\geq p_{ji}^{(n)}p_{ii}^{(s)}p_{ij}^{(m)}>0.$$

由 $d(j)$的含义知，$(n+s+m)\mid d(j)$ 及 $(n+m)\mid d(j)$，从而 $s=\left[(n+s+m)-(n+m)\right]\mid d(j)$，故 $d(j)\leq d(i)$．类似可证，$d(i)\leq d(j)$，所以 $d(i)=d(j)$. □

3.2.2 常返态与非常返态

为了便于后面的讨论，这里引入两个概念——“首达时”与“首达概率”.

令

$$T_j \triangleq \begin{cases}\min\{n: n\geq 1, X(n)=j\}, & 若\{n: n\geq 1, X(n)=j\}\neq\varnothing,\\ \infty, & 若\{n: n\geq 1, X(n)=j\}=\varnothing.\end{cases} \tag{3.2.1}$$

称 T_j 为首次到达状态 j 的时刻（简称**首达时**）.

令

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &\triangleq P\left\{T_j = n \middle| X(0)=i\right\} \\ &= P\left\{X(n)=j, X(k)\neq j, 1\le k\le n-1 \middle| X(0)=i\right\} \quad (n\ge 1). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

称 $f_{ij}^{(n)}$ 为从状态 i 出发，在 n 时刻首次到达状态 j 的概率（简称**首达概率**）.

令

$$f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} . \tag{3.2.3}$$

称 f_{ij} 为从状态 i 出发，经过有限步到达状态 j 的概率. 注意，这里的"经过有限步到达状态 j"与"迟早要到达状态 j"或者"至少有一次到达状态 j"的含义是相同的.

下面的定理刻画了转移概率与首达概率之间的关系.

定理 3.2.8 对任意状态 i, j，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} . \tag{3.2.4}$$

证 $p_{ij}^{(n)} = P\left\{X(n)=j \middle| X(0)=i\right\} = \sum_{k=1}^{n} P\left\{X(n)=j, T_j=k \middle| X(0)=i\right\}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} P\left\{T_j=k \middle| X(0)=i\right\} P\left\{X(n)=j \middle| T_j=k, X(0)=i\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P\left\{X(n)=j \middle| X(k)=j, X(h)\neq j, 1\le h\le k-1, X(0)=i\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P\left\{X(n)=j \middle| X(k)=j\right\} \qquad \text{（由Markov性）} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} . \square \end{aligned}$$

在(3.2.4)式中，令 $i=j$，注意到 $p_{jj}^{(0)}=1$，则(3.2.4)式可改写为

$$f_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} .$$

上式以递归的形式给出了由转移概率 $\left\{p_{jj}^{(n)}, n\ge 0\right\}$ 计算首达概率 $f_{jj}^{(n)}$ 的一种方法.

由定理 3.2.8，不难得到下面的结论.

定理 3.2.9 $i\to j$ 的充要条件为 $f_{ij}>0$.

证 设 $i\to j$，即存在 $n>0$，使 $p_{ij}^{(n)}>0$. 由定理 3.2.8 知 $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} > 0$，故存在

$m\ (1\le m\le n)$，使 $f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} > 0$，从而 $f_{ij}^{(m)}>0$，于是

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(m)}>0.$$

反之，设 $f_{ij}>0$，则存在 $n>0$，使 $f_{ij}^{(n)}>0$． 因

$$\{T_j=n\}=\{X(n)=j, X(k)\neq j, 1\leq k<n\}\subset\{X(n)=j\},$$

故

$$0<f_{ij}^{(n)}=P\{T_j=n \mid X(0)=i\}\leq P\{X(n)=j \mid X(0)=i\}=p_{ij}^{(n)},$$

即，$i\to j$． □

定义 3.2.10 若 $f_{jj}=1$，则称 j 是**常返状态**(recurrent state)；若 $f_{jj}<1$，则称 j 是**非常返状态**或**瞬态**(transient state)．

在介绍判别状态 j 是常返态还是非常返态的准则之前，我们先要作一些辅助工作．为此，对数列 $\{p_{ij}^{(n)}, n\geq 0\}$、$\{f_{ij}^{(n)}, n\geq 0\}$ 分别作 **z** 变换，即

$$P_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n,$$

$$F_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n,$$

其中约定 $p_{ij}^{(0)}\triangleq\delta_{ij}$，$f_{ij}^{(0)}\triangleq 0$． 由(3.2.4)式可得

$$P_{ij}(z)=\delta_{ij}+F_{ij}(z)P_{jj}(z) \quad (i, j\in S). \tag{3.2.5}$$

在上式中令 $i=j$，解得

$$P_{jj}(z)=\frac{1}{1-F_{jj}(z)}. \tag{3.2.6}$$

从而

$$P_{ij}(z)=\frac{F_{ij}(z)}{1-F_{jj}(z)} \quad (i\neq j). \tag{3.2.7}$$

定理 3.2.11 **(1)** j 为常返态的充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty$；

(2) j 为非常返态的充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\dfrac{1}{1-f_{jj}}<\infty$.

在证明该定理之前，先介绍一个引理.

引理 3.2.12(Abel 定理) 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 $R>0$，若级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ 收敛，则

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \ .$$

这一引理的证明可以在任何一本数学分析的教材中找到，此处从略.

定理 3.2.11 的证明　由(3.2.6)式及引理 3.2.12 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \lim_{z \to 1^-} P_{jj}(z) = \lim_{z \to 1^-} \frac{1}{1 - F_{jj}(z)} = \frac{1}{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)}} = \frac{1}{1 - f_{jj}}.$$

故当 j 为常返态，即 $f_{jj} = 1$ 时，等价于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$. 当 j 为非常返态，即 $f_{jj}<1$ 时，等价于

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \dfrac{1}{1 - f_{jj}} < \infty$. □

为了便于理解定理 3.2.11 中级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 的概率意义，记

$$C_j(m) \triangleq \sum_{n=m}^{\infty} 1_{\{X(n)=j\}}(\omega), \tag{3.2.8}$$

其中 $1_A(\cdot)$ 为集合 A 的示性函数. $C_j(m)$表示从 m 时刻起系统到达状态 j 的次数. 求 $C_j(0)$对 $X(0) = j$ 的条件期望，得

$$\begin{aligned} E\left[C_j(0) \middle| X(0) = j\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[1_{\{X(n)=j\}}(\omega) \middle| X(0) = j\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{X(n) = j \middle| X(0) = j\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}. \end{aligned}$$

由此可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 表示在已知 $X(0) = j$ 条件下，系统返回 j 的平均次数. 因而，定理 3.2.11 表明：j 为常返态当且仅当返回 j 的平均次数为无穷大； j 为非常返态当且仅当返回 j 的平均次数为有限.

对于常返态 j，因 $f_{jj} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$，故 $\left\{f_{jj}^{(n)},\ n \ge 1\right\}$ 构成一个概率分布. 对此概率分布可定义数学期望，即令

$$\mu_j \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n P\left\{T_j = n \middle| X(0) = j\right\} \triangleq E\left[T_j \middle| X(0) = j\right], \tag{3.2.9}$$

μ_j 表示从状态 j 出发，首次返回 j 的**平均回转时间**. 利用 μ_j 可对常返态 j 作进一步地细分.

定义 3.2.13 设 j 为常返态，若 $\mu_j < +\infty$，则称 j 是**正常返**的（positive recurrent）；若 $\mu_j = +\infty$，则称 j 是**零常返**的（null recurrent）.

若 j 是正常返的且是非周期的，则称 j 为**遍历状态**（Ergodic state）.

现在，我们根据上述概念来判断例 3.2.4 与例 3.2.5 中各状态的类型．例 3.2.4 中，因为

$$f_{11}^{(1)} = \frac{1}{3},\ f_{11}^{(2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2},\cdots,\ f_{11}^{(n)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-1}},\cdots,$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1,$$

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = 2\frac{1}{3} < +\infty,$$

及

$$f_{33}^{(1)} = 0,\ f_{33}^{(2)} = 1,\ f_{33}^{(3)} = 0,\cdots,\ f_{33}^{(n)} = 0,\ n \geq 3,$$

$$f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 1,$$

$$\mu_3 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{33}^{(n)} = 2 < +\infty,$$

所以状态 1、3 都是常返态，并且都是正常返的，其中状态 1 还是遍历的.

例 3.2.5 中，因为

$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^{k-1}}, & \text{当 } n = 3k\text{，} \\ 0, & \text{其他，} \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots,$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{k-1}} = 1,$$

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k}{2^k} = 6 < +\infty,$$

所以状态 1 是正常返的.

对于常返态 j，除了用定义外，还有无其他准则来判断它是正常返、零常返还是遍历的？下面介绍的一组定理就回答了这一问题.

定理 3.2.14 若 j 为常返态，周期为 d，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_j}, \tag{3.2.10}$$

其中 μ_j 为 j 的平均回转时间．当 $\mu_j = +\infty$时，约定 $\dfrac{d}{\mu_j} = 0$．特别地，若 j 为遍历状态（d=1），则

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} > 0.$$

该定理的证明要用到较多的分析技巧（见文献[5]或[8]），此处从略．定理 3.2.14 称为 Markov 链的基本极限定理.

定理 3.2.15 设 j 为常返态，则

(1) j 为零常返的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$；

(2) j 为正常返的充要条件是 $\overline{\lim_{n\to\infty}} p_{jj}^{(n)}>0$；

(3) j 为遍历的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=1/\mu_j>0$.

证 (1) 设 j 为零常返，由定理 3.2.14，$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)}=0$．另一方面，若 n 不是 d 的倍数，由周期性，则 $p_{jj}^{(n)}=0$，故总有 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$．反之，设 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$．假若 j 为正常返态，由定理 3.2.14，得 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)}>0$，与已知条件矛盾，故 j 只能为零常返态.

(2) 由反证法及(1)的结论即得.

(3) 只需证明充分性．设 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=1/\mu_j>0$，则 μ_j<+∞，即 j 为正常返，再由(3.2.10)知，$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)}=d/\mu_j$，根据极限的唯一性得：$d$=1，从而 j 是遍历的．□

总结前面的定义(3.2.10、3.2.13)及相关的定理(3.2.11、3.2.12、3.2.14、3.2.15)，可得 Markov 链的状态特性的判别法：

$$j\text{ 为非常返态}\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}<1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0;$$

$$j\text{ 为零常返态}\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}=1\right)\text{且 }\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0;$$

$$j\text{ 为正常返态}\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}=1\right)\text{且 }\overline{\lim_{n\to\infty}} p_{jj}^{(n)}>0;$$

$$j\text{ 为遍历态}\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}=1\right)\text{且 }\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=1/\mu_j>0.$$

与定理 3.2.7 指出相通的状态具有相同的周期一样，下面的定理表明相通的状态还具有相同的类型.

定理 3.2.16 若 $i\leftrightarrow j$，则它们或同为常返态或同为非常返态；在前一种情形下，或同为正常返态或同为零常返态.

证 因 $i\leftrightarrow j$，故存在 $l, m\ge 1$，使 $p_{ij}^{(l)}=\alpha>0,\ p_{ji}^{(m)}=\beta>0$．由 C-K 方程可得

$$\left.\begin{aligned} p_{ii}^{(l+m+n)} &\ge p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(m)}=\alpha\beta p_{jj}^{(n)} \\ p_{jj}^{(l+m+n)} &\ge p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(l)}=\alpha\beta p_{ii}^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.11}$$

从(3.2.11)式知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 同敛散，因而状态 i, j 或同为常返态或同为非常返态．当

i, j 同为常返态时，若 i 为零常返态，由定理 3.2.15 及(3.2.11)式，则 j 为零常返态；反之亦然．这就证明了 i, j 或同正常返态或同为零常返态．□

定理 3.2.7 与定理 3.2.16 表明，Markov 链的状态的周期性与状态的分类性质均表现为类的特性，即，在按相通关系组成的一个等价类中，每一个状态具有同一周期、同一类型．

由上述结论及前面的讨论结果可知，例 3.2.4 中有两个等价类{1,2}和{3,4}，前者包含两个遍历态，后者包含两个正常返态．例 3.2.5 中的 Markov 链是不可约链，它只有一个等价类{1,2,3,4}，所有状态均为正常返态．

由定理 3.2.16 可得一个简单的推论：**不可约 Markov 链的状态或者全是常返态或者全是非常返态**．

例 3.2.17（直线上的无限制随机游动）由例 3.1.10 知，该模型可以用一个 Markov 链表示，其状态空间为 $S=\{0, \pm1, \pm2,\dots\}$，一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} p, & j=i+1, \\ q, & j=i-1, \\ 0, & |j-i|\geq 2. \end{cases} \qquad \text{其中}\, 0<p<1,\ q=1-p.$$

显然，链中的任意两个状态都相通，所以该链是不可约的．根据前面的说明，只需考察状态 0 的周期性、常返性与非常返性即可．易知

$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n q^n,\ p_{00}^{(2n-1)}=0,\quad n\geq 1,$$

所以状态 0 的周期为 2．

由 Stirling 公式：

$$n! \sim^{(1)} n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi} \tag{3.2.12}$$

得

$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n q^n=\frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(2n)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$ 同敛散，因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(2n)}\begin{cases}=\infty, & \text{当}\, 4pq=1,\ \text{即}\ p=q=1/2\ \text{时}, \\ <\infty, & \text{当}\, 4pq<1,\ \text{即}\ p\neq q\ \text{时}. \end{cases}$$

于是，当且仅当质点在直线上作对称随机游动时，状态 0 为常返态并且是零常返的；在其他游动情形下，状态 0 为非常返态．

例 3.2.18（l 维空间上的对称随机游动）设某一质点在 l 维空间的整数格点处作对称随机游动．若以 $X(n)$表示 n 时刻质点的空间坐标，则$\{X(n),\ n\geq 0\}$是 Markov 链，状态空间为 $\boldsymbol{Z}^l=\left\{(z_1,z_2,\cdots,z_l):\ z_j\in \mathbf{Z},\ 1\leq j\leq l\right\}$．显然，该链是不可约链，故只需讨论状态 0 的周期性、常返性与非常返性即可．因 $p_{00}^{(2n-1)}\equiv 0,\ p_{00}^{(2n)}\neq 0$，故该链是周期为 2 的周期链．

---

(1) 对于数列$\{a_n, n\geq 1\}$、$\{b_n, n\geq 1\}$，当 $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=1$ 时，记作 $a_n\sim b_n$．

由于

$$p_{00}^{(2n)}=\sum_{2k_1+2k_2+\cdots+2k_l=2n}P\left\{\bigcap_{i=1}^{l}(\text{沿第}\,i\,\text{坐标方向的两侧独立地各走}\,k_i\,\text{步})\right\}$$
$$=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\frac{(2n)!}{(k_1!)^2(k_2!)^2\cdots(k_l!)^2}\left(\frac{1}{2l}\right)^{2n}$$
$$=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\frac{(n!)^2}{(k_1!)^2(k_2!)^2\cdots(k_l!)^2}\left(\frac{1}{l}\right)^{2n},$$

当 l=2 时，利用组合公式：$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$及 Stirling 公式，可得

$$p_{00}^{(2n)}=\frac{1}{4^{2n}}\left[\frac{(2n)!}{n!n!}\right]^2\sim\frac{1}{\pi n}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(2n)}=+\infty.$$

当 $l>2$ 时，利用等价关系

$$\max_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\left\{\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!}\right\}\sim\frac{n!}{\left(\frac{n}{l}\right)!\left(\frac{n}{l}\right)!\cdots\left(\frac{n}{l}\right)!}\overset{(3.2.12)}{\sim}\frac{l^{n+\frac{l}{2}}}{n^{\frac{l}{2}-\frac{1}{2}}(\sqrt{2\pi})^{l-1}}$$

及多项式定理

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!}\left(\frac{1}{l}\right)^n$$
$$=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\cdots\sum_{k_{l-1}=0}^{n}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots(n-k_1-\cdots-k_{l-1})!}\left(\frac{1}{l}\right)^n$$
$$=\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\cdots+\frac{1}{l}\right)^n=1^n=1,$$

可得

$$p_{00}^{(2n)}=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\frac{(n!)^2}{(k_1!)^2(k_2!)^2\cdots(k_l!)^2}\left(\frac{1}{l}\right)^{2n}$$
$$\le\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{l^n}\max_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\left\{\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!}\right\}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!}\left(\frac{1}{l}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{l^n}\max_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n}\left\{\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!}\right\}$$
$$\sim K\frac{1}{n^{l/2}}\quad(\text{用Stirling公式，这里的}K\text{是与}\,n\,\text{无关的常数}),$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(2n)}<+\infty.$$

综合上面的讨论以及例 3.2.17 的结论，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \begin{cases} =\infty, \text{ 当 } l \le 2 \text{ 时，} \\ <\infty, \text{ 当 } l > 2 \text{ 时，} \end{cases}$$

即，对 $\boldsymbol{Z}^l$ 上的对称随机游动来说，当维数 $l \le 2$ 时，它的一切状态都是常返态；当维数 $l > 2$ 时，它的一切状态都是非常返态．直观上可以这样理解，l 愈大，可选择的方向愈多，返回原处的可能性就变小了．$l = 2$ 则是在这一现象中由量变到质变的临界值．

下面，我们借助(3.2.8)式引入的 $C_j(m)$对常返态的性质作进一步地分析．$C_j(m)$表示从 m 时刻起 Markov 链到达状态 j 的次数，其可能取值为所有非负整数包括$+\infty$. 从严格意义上讲，$C_j(m)$不是随机变量，但它却是定义在$(\Omega, \mathscr{F})$上取值于$\left(\bar{R}, \mathscr{B}(\bar{R})\right)$的可测函数，因而诸如$\left\{C_j(m) \ge n\right\}, \left\{C_j(m) = +\infty\right\} (m \ge 0)$等都是随机事件，可以求它们的概率或者条件概率.

定理 3.2.19　若 j 为常返态，则

$$P\left\{C_j(1) = +\infty \middle| X(0) = i\right\} = f_{ij} \quad (i \in S).$$

证　证明的方法是，将事件$\left\{C_j(1) \ge n\right\}$表示为首达时 T_j 的互斥事件之和，然后由全概率公式计算这一概率(这种方法也称为“停时方法”)．对任意给定的 $i \in S$，有

$$\begin{aligned}
&P\left\{C_j(1) \ge n \middle| X(0) = i\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{C_j(1) \ge n,\ T_j = k \middle| X(0) = i\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{T_j = k \middle| X(0) = i\right\} P\left\{C_j(1) \ge n \middle| T_j = k, X(0) = i\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{T_j = k \middle| X(0) = i\right\} P\left\{C_j(k) \ge n \middle| X(k) = j, X(l) \ne j, 1 \le l < k, X(0) = i\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{T_j = k \middle| X(0) = i\right\} P\left\{C_j(k+1) \ge n-1 \middle| X(k) = j\right\} \quad (\text{由Markov性}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{T_j = k \middle| X(0) = i\right\} P\left\{C_j(1) \ge n-1 \middle| X(0) = j\right\} \quad (\text{由齐次性}) \\
&= f_{ij} P\left\{C_j(1) \ge n-1 \middle| X(0) = j\right\},
\end{aligned}$$

反复运用上面等式，得

$$\begin{aligned}
&P\left\{C_j(1) \ge n \middle| X(0) = i\right\} \\
&= f_{ij} f_{jj} P\left\{C_j(1) \ge n-2 \middle| X(0) = j\right\} \\
&= \cdots = f_{ij} (f_{jj})^{n-1} P\left\{C_j(1) \ge 0 \middle| X(0) = j\right\} \\
&= f_{ij} (f_{jj})^{n-1} \quad (\because \left\{C_j(1) \ge 0\right\} = \Omega).
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

当 j 为常返态（即 $f_{jj} = 1$）时，在上式两端令 $n \to \infty$，由概率的上连续性得

$$P\left\{C_j(1) = +\infty \middle| X(0) = i\right\} = \lim_{n \to \infty} P\left\{C_j(1) \ge n \middle| X(0) = i\right\} = f_{ij}. \ \square$$

由(3.2.13)式可得常返态与非常返态的另一充要条件.

定理 3.2.20 **(1)** j 为常返态的充要条件是 $P\left\{C_j(1)=+\infty \middle| X(0)=j\right\}=1$.

(2) j 为非常返态的充要条件是 $P\left\{C_j(1)=+\infty \middle| X(0)=j\right\}=0$.

证 在(3.2.13)式中，令 i=j，得

$$P\left\{C_j(1)\ge n \middle| X(0)=j\right\}=(f_{jj})^n$$

于是

$$j\text{为常返态}\Leftrightarrow f_{jj}=1\Leftrightarrow P\left\{C_j(1)=+\infty \middle| X(0)=j\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{C_j(1)\ge n \middle| X(0)=j\right\}=1,$$

$$j\text{为非常返态}\Leftrightarrow f_{jj}<1\Leftrightarrow P\left\{C_j(1)=+\infty \middle| X(0)=j\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{C_j(1)\ge n \middle| X(0)=j\right\}=0.\ \square$$

这一定理也称为常返态的 0-1 律，其意义不在于又多了一个判断常返与否的准则，而在于它进一步揭示了常返与非常返的含义. j 为常返态等价于 $P\left\{C_j(1)=+\infty \middle| X(0)=j\right\}=1$，亦即从状态 j 出发必然要无穷次地返回 j. 从这个意义上讲，“常返”就是“经常返回”的意思. j 为非常返态等价于 $P\left\{C_j(1)=+\infty \middle| X(0)=j\right\}=0$，亦即 $P\left\{C_j(1)<+\infty \middle| X(0)=j\right\}=1$，这表明从状态 j 出发，在有限次地返回 j 之后便再也不回到 j，这就是非常返态也被称为“瞬态”或“滑过态”的缘故.

定理 3.2.21 若 i 为常返态且 $i\to j$，则

(1) j 为常返态且 $i\leftrightarrow j$；

(2) $f_{ij}=f_{ji}$ =1.

证 (1) 由 $i\to j$ 知，存在 $m>0$，使 $p_{ij}^{(m)}>0$. 又 i 为常返态，根据定理 3.2.20，有

$$\begin{aligned}
1&=P\left\{C_i(1)=+\infty \middle| X(0)=i\right\}\\
&=P\left\{C_i(m+1)=+\infty \middle| X(0)=i\right\}\qquad (\because \{C_i(1)=+\infty\}=\{C_i(m+1)=+\infty\})\\
&=P\left\{X(m)=j,C_i(m+1)=+\infty \middle| X(0)=i\right\}+P\left\{X(m)\ne j,C_i(m+1)=+\infty \middle| X(0)=i\right\}\\
&\le P\left\{X(m)=j \middle| X(0)=i\right\}P\left\{C_i(m+1)=+\infty \middle| X(m)=j,X(0)=i\right\}+P\left\{X(m)\ne j \middle| X(0)=i\right\}\\
&=p_{ij}^{(m)}f_{ji}+\left[1-p_{ij}^{(m)}\right]\qquad \text{（利用Markov性、齐次性及定理3.2.19）}\\
&=1+p_{ij}^{(m)}(f_{ji}-1).
\end{aligned}$$

由此推出，$p_{ij}^{(m)}(f_{ji}-1)\ge 0$，即 $f_{ji}\ge 1$，从而，f_{ji}=1. 而由定理 3.2.9 知，$j\to i$，因此 $i\leftrightarrow j$. 因为 i 为常返态，所以由定理 3.2.16 知 j 也是常返态.

(2) 在(1)中已证：f_{ji}=1. 在现有的条件下，可以交换 i 与 j 的位置，故有 f_{ij}=1. □

3.2.3 状态空间的分解

定义 3.2.22 设 C 是状态空间 S 的一个非空子集，若对任意 $i\in C$ 及 $j\notin C$ 都有 $p_{ij}=0$，则称 C 为**闭集**. 若闭集 C 中任何两个状态都相通，则称 C 为**不可约闭集**.

根据上述定义，Markov 链的状态空间 S 本身构成一个最大的闭集. 如果 Markov 链有吸收态 j (即满足：$p_{jj}=1$ 的状态)，那么{j}是该链的一个极小的闭集.

例 3.2.4 中{1,2}和{3,4}就是两个闭集．再举个例子．

例 3.2.23 设 Markov 链的状态空间 S={1,2,3,4}，转移矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

本例中的闭集有{1,2,3,4}，{1,2,3}，{1,3}，{2}．

定理 3.2.24 C 为闭集的充要条件是对任意的 $i\in C,\ j\notin C$ 都有

$$p_{ij}^{(n)}=0\quad(n\geq 1).$$

证 只需证明必要性．对任意的 $i\in C,\ j\notin C$，当 $n=1$ 时，由 C 为闭集，得

$$p_{ij}^{(1)}=p_{ij}=0.$$

归纳假设：当 $n=k$ (>2)时，$p_{ij}^{(k)}=0$．因当 $n=k+1$ 时，由 C-K 方程，可得

$$p_{ij}^{(k+1)}=\sum_{r\in S}p_{ir}^{(k)}p_{rj}=\sum_{r\in C}p_{ir}^{(k)}p_{rj}+\sum_{r\in S-C}p_{ir}^{(k)}p_{rj}=0,$$

故对任意 $n\geq 1$，都有 $p_{ij}^{(n)}=0$. □

推论 3.2.25 若 C 为闭集，则

$$\sum_{j\in C}p_{ij}^{(n)}=1\quad(i\in C).\tag{3.2.14}$$

上述推论的证明比较简单，留给读者作练习．

从上面的讨论可以看出，闭集 C 直观上表示：如果 Markov 链是从 C 中的某一状态出发的话，那么它只能在 C 的内部运动而无法到达 C 的外部；或者，Markov 链从某一时刻进入 C，那它在以后的时间里将永远在 C 中运动．换言之，Markov 链在 C 上的运动呈现某种“封闭性”．

根据定理 3.2.21，从常返态出发的 Markov 链只到达常返态，不可能到达非常返态，因而，由所有的常返态构成的集合是一个闭集．由此便可写出如下的定理：

定理 3.2.26 所有常返态构成一个闭集．

以下用 C 表示由所有常返态构成的集合，N 表示由所有非常返态构成的集合．于是，Markov 链的状态空间 S 可初步地分解为：

$$S=N\cup C,$$

其中 C 是闭集，而 N 未必是闭集．

例如，例 3.2.23 中的状态 4 是非常返态，其余的均为常返态，所以 N={4}，C={1, 2, 3}，状态空间 $S=N\cup C$ = {4} ∪ {1, 2, 3}．本例中的 N 不是闭集．另外，从这一分解中我们也发现，闭集 C 还可以进一步地被分解为：C={2} ∪ {1, 3}，其中集合{2}与{1, 3}为不可约闭集．一般地，有以下结论．

定理 3.2.27 若$C\neq\varnothing$，则$C=C_1\bigcup C_2\bigcup\cdots$，其中 C_1，C_2，⋯为互不相交的不可约闭集．

证 因$C\neq\varnothing$，任取 $i_1\in C$，令 $C_1=\{j\in C: j\leftrightarrow i_1\}$；若 $C-C_1\neq\varnothing$，再任取 $i_2\in C-C_1$，并

令 $C_2=\{j\in C-C_1: j\leftrightarrow i_2\}$；…如此构造下去，直至 $C-\bigcup_k C_k=\varnothing$. 显然，这样的$\{C_k\}$是互不相交的不可约闭集列，且 $C=C_1\cup C_2\cup\cdots$. □

根据定理 3.2.27，Markov 链的状态空间 S 一般可分解为：

$$S=N\cup C_1\cup C_2\cup\cdots,$$

其中 N 是由所有非常返态组成的集合（称之为**非常返集**），C_1，C_2，…为互不相交的不可约闭集．称上述分解中的 C_1，C_2，…为**基本常返闭集**.

在每个基本常返闭集内，所有状态都相通，但两个不同基本常返闭集之间互不相通．因此，当系统从某非常返态出发，它有可能一直在非常返集 N 中运动（例如，当 N 为闭集时），也可能进入某个基本常返闭集 C_k 中．如果系统从某个常返态出发，那么它就一直停留在该状态所在的基本常返闭集中运动.

如果 Markov 链的状态空间 S 为有限集（以后称这样的 Markov 链为**有限 Markov 链**），那么有以下结论：

定理 3.2.28　设$\{X(n), n\geq 0\}$为有限 Markov 链，则

(1)　非常返集 N 不是闭集；

(2)　如果链是不可约的，那么所有状态都是常返态，亦即，$N=\varnothing,\ S=C$.

证 (1) 因 $N\subset S$ 为有限集，由定理 3.2.20 知，系统至多有限次地返回非常返态，从而至多有限次地返回 N．这表明：系统迟早要离开 N 进入常返闭集 C.

(2) 假如链存在非常返态．因所有状态都相通，故所有状态都是非常返态，即 $S=N$，得 N 为闭集，这与(1)的结论矛盾．因而有限不可约 Markov 链的所有状态都是常返态．□

例 3.2.29 (续例 3.2.23) 对状态 1，因为

$$f_{11}^{(1)}=\frac{2}{3},\ f_{11}^{(n)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq 2),$$

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}^{(n)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1,$$

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}n\,f_{11}^{(n)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1\frac{2}{3}<+\infty,$$

所以状态 1 是正常返态，且是非周期的（因为 $d(1)=1$）．包含状态 1 的基本常返闭集为

$$C_1=\{i\in S:\ 1\leftrightarrow i\}=\{1,3\},$$

对状态 2，因为 $p_{22}=1$，所以 2 为吸收态．又因

$$p_{22}^{(n)}=1,\ n\geq 1,\ \sum_{n=1}^{\infty}p_{22}^{(n)}=+\infty,\lim_{n\to\infty}p_{22}^{(n)}=1>0,$$

所以状态 2 是非周期正常返态．包含状态 2 的基本常返闭集为

$$C_2=\{i\in S:\ 2\leftrightarrow i\}=\{2\}.$$

对状态 4，因为

$$f_{44}^{(1)} = p_{44} = \frac{2}{5},\ f_{44}^{(n)} = 0, n \ge 2,$$

$$f_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{44}^{(n)} = \frac{2}{5} < 1,$$

所以状态 4 是非周期非常返态.

状态空间 S 可分解为 $S = N + C_1 + C_2 = \{4\} + \{1, 3\} + \{2\}$.

3.3 Markov 链的极限定理及平稳分布

3.3.1 极限定理

在实际中常常要研究当 $n\to\infty$时，Markov 链转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性态，即要研究极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在？如果存在的话，是否与状态 i, j 有关？通过上一节的讨论，我们看到 $p_{jj}^{(n)}$ 的极限性态与状态 j 有关，那么对 $p_{ij}^{(n)}$ 自然会想到它的极限性态是否也与状态 i, j 的性质有关？的确如此．下面分两种情形加以讨论.

1. 状态 j 为非常返态或零常返态

定理 3.3.1 若 j 为非常返态或零常返态，则对任意 $i \in S$，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0. \tag{3.3.1}$$

证 由(3.2.4)式，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \le \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}$$

若 j 为非常返态或零常返态，由定理 3.2.11(2)或定理 3.2.15(1)，知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$，在上面不等式两端，先令 $n\to\infty$，由 $p_{jj}^{(n)} \to 0$ 及有限项求和，知不等式右端第一项趋于 0；再令 $m\to\infty$，第二项因 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \le 1$ 而趋于 0，故有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. □

推论 3.3.2 有限 Markov 链不存在零常返态，也不可能所有状态都是非常返态.

证 假设有限 Markov 链存在零常返态 i，令 $C_i = \{j \in S \ \ i \leftrightarrow j\}$，易见 C_i 为不可约常返闭集且为有限集，由推论 3.2.25，对任意 $n \ge 1$，有

$$\sum_{j\in C_i} p_{lj}^{(n)} = 1 \quad (l \in C_i).$$

在上式两端，令 $n\to\infty$，由定理 3.3.1，得

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C_i} p_{lj}^{(n)} = \sum_{j\in C_i} \lim_{n\to\infty} p_{lj}^{(n)} = 0$$

矛盾.

其次，假设有限 Markov 链的所有状态都是非常返的．因

$$\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad (i \in S),$$

在等式两端，令 $n\to\infty$，同上面证明的情形相似，可得矛盾的结果．□

2.　状态 j 为正常返态

此时的情况较为复杂，极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在也可能与状态 i 有关．

定理 3.3.3　若 j 为正常返态，周期为 d，则对任意 $i\in S$ 及 $0\le r\le d-1$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}, \tag{3.3.2}$$

其中 $f_{ij}(r)=\sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)}$，$0\le r\le d-1$.

证　当 $n\ne 0 \bmod (d)$，由周期概念，有 $p_{jj}^{(n)}=0$，故

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd+r-k)} = \sum_{l=0}^{n} f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{((n-l)d)}.$$

对 $1\le m<n$，

$$\sum_{l=0}^{m} f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{((n-l)d)} \le p_{ij}^{(nd+r)} \le \sum_{l=0}^{m} f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{((n-l)d)} + \sum_{l=m+1}^{n} f_{ij}^{(ld+r)}$$

在上面不等式中先令 $n\to\infty$，再令 $m\to\infty$，由定理 3.2.14，得

$$f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j} \le \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} \le f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j},$$

证毕．□

推论 3.3.4 (1) 若 j 是遍历状态，则对任意 $i\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}. \tag{3.3.3}$$

(2)　若 Markov 链是不可约遍历链，则对任意 $i, j\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}. \tag{3.3.4}$$

证 (1) 结论显然成立．(2) 当 Markov 链是不可约遍历链时，状态互通，由定理 3.2.21，得 f_{ij}=1，故结论为真．□

定理 3.3.3 说明当 j 为正常返态时，极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在．不过，其平均值的极限一定存在，这就是

定理 3.3.5　对任意 i, $j\in$ S 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0, & \text{当 } j \text{ 是非常返态或零常返态},\\ \dfrac{f_{ij}}{\mu_j}, & \text{当 } j \text{ 是遍历态}.\end{cases} \tag{3.3.5}$$

由微积分中的 Stolz 定理以及定理 3.3.1，定理 3.3.3，可证定理 3.3.5.

例 3.3.6　设 Markov 链的状态空间为 S={1, 2, 3, 4, 5}，转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/5 & 4/5 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

本例中的{1}、{2}都是吸收态（也都是遍历状态），它们是两个基本常返闭集，N={3, 4}．因

$$\begin{aligned}
p_{11}^{(n)}&=1,\\
p_{21}^{(n)}&=0,\\
p_{31}^{(n)}&=\sum_{k=1}^{n}f_{31}^{(k)}p_{11}^{(n-k)}=\sum_{k=1}^{n}f_{31}^{(k)}\\
&=f_{31}^{(1)}=\frac{1}{5},\\
p_{41}^{(n)}&=\sum_{k=1}^{n}f_{41}^{(k)}p_{11}^{(n-k)}=\sum_{k=1}^{n}f_{41}^{(k)}\\
&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{4}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}$ 存在但与状态 i 有关.

例 3.3.7　若 Markov 链的状态空间为 S={1, 2}，转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

则该 Markov 链是不可约的，每一状态周期 d=2，正常返．因

$$p_{11}^{(n)}=\begin{cases}0, & n \text{ 为奇数},\\ 1, & n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}$ 不存在．但对于适当选取的子列，如 $\left\{p_{i1}^{(2n)},n=1,2,\cdots\right\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(2n)}=1$ 存在 .

3.3.2　平稳分布与极限分布

定义 3.3.8　设 Markov 链的状态空间为 S，转移矩阵为 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{\pi}=\left\{\pi_j: j\in S\right\}$ 为定义在 S 上的概率分布，若 $\boldsymbol{\pi}$ 满足

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}, \tag{3.3.6}$$

即

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}\ ,\quad \forall\, j \in S, \tag{3.3.7}$$

则称 $\boldsymbol{\pi}$ 为 Markov 链的**平稳分布**.

注 (1) 对于平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$，显然有

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n, \tag{3.3.8}$$

若将上式写成分量形式，注意到 $\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}^{(n)}$，则有

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}\ ,\quad \forall\, j \in S.$$

(2) 设 Markov 链 $\{X(n), n \ge 0\}$ 的状态空间为 S，转移矩阵为 $\boldsymbol{P}$，初始分布为 $\boldsymbol{\pi}(0)$，若取 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 为平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$，则对任意 $n \ge 1$，由(3.1.17)、(3.3.8)式，得

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi},$$

即，Markov 链在任意 n 时刻的绝对概率分布 $\boldsymbol{\pi}(n)$ 仍是平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$. 另外，由(3.1.15)式，得

$$\begin{aligned}
&P\left\{X(0) = i_0, X(1) = i_1, \cdots, X(n) = i_n\right\} \\
&= \pi_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \\
&= \pi_{i_0}(m)\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \\
&= P\left\{X(m) = i_0, X(1+m) = i_1, \cdots, X(n+m) = i_n\right\}
\end{aligned}$$

说明 $\{X(n), n \ge 0\}$ 还是严平稳过程（关于严平稳过程概念请参见平稳过程一章的相关内容）.

定义 3.3.9 若 Markov 链是不可约遍历链，则

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} \ge 0, \quad j \in S \tag{3.3.9}$$

称 $\left\{1/\mu_j :\ j \in S\right\}$ 为 Markov 链的**极限分布**.

下面的定理说明对不可约遍历链，极限分布就是平稳分布并且还是唯一的平稳分布.

定理 3.3.10 对于不可约、非周期的 Markov 链，

(1) 若每一状态是正常返的，则 $\pi_j = \lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} > 0\ \ (j \in S)$ 是平稳分布且唯一.

(2) 若每一状态是非常返的或是零常返的，则平稳分布不存在.

证 (1) 设 Markov 链是不可约遍历链，由推论 3.3.4(2)，极限 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} > 0\ \ (j \in S)$ 存在，记作 $\pi_j \triangleq \lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$. 首先证明 $\left\{\pi_j : j \in S\right\}$ 是平稳分布. 对任意 $M \ge 1$，有

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij}^{(n)} \le \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$$

在上式中先令 $n \to \infty$，再令 $M \to \infty$，得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \le 1. \tag{3.3.10}$$

再由 C-K 方程，得

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \geq \sum_{k=1}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} .$$

在上面不等式中先令 $m\to\infty$，再令 $M\to\infty$，可得

$$\pi_j \geq \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k p_{kj}^{(n)} ,$$

而上面的不等式只能取等号．事实上，若对某个 j 成立严格不等式，在不等式两端对 j 求和，则得

$$1 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k p_{kj}^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\pi_k \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj}^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k$$

矛盾，故有

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k p_{kj}^{(n)} \quad (j \in S). \tag{3.3.11}$$

在上式两端令 $n\to\infty$，由控制收敛定理，得

$$\pi_j = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k\right) \pi_j ,$$

即 $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1$，再由(3.3.11)知，$\left\{\pi_j : j \in S\right\}$ 为平稳分布.

其次证明唯一性．假若 $\left\{\tilde{\pi}_j : j \in S\right\}$ 是另一个平稳分布，由定义 3.3.8 的注(1)，对任意 n，有

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\pi}_i p_{ij}^{(n)} \quad (j \in S),$$

令 $n\to\infty$，则有

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\pi}_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\pi}_i\right) \pi_j = \pi_j \quad (j \in S).$$

(2) 假设存在一个平稳分布 $\left\{\pi_j : j \in S\right\}$，对任意 n，因

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \ \forall j \in S,$$

令 $n\to\infty$，由 $p_{ij}^{(n)} \to 0$，得 $\pi_j = 0, \ \forall j \in S,$ 这与 $\left\{\pi_j : j \in S\right\}$ 是概率分布相矛盾．□

例 3.3.11　设 Markov 链的转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

由于所有状态相通，故该链为不可约链．又 $p_{11}>0$，得周期 d=1．由定理 3.2.28(2)及推论 3.3.2 知，这是一个不可约遍历链．于是它的平稳分布是如下方程的解

$$\begin{cases}(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix},\\ \sum\limits_{j=1}^{3}\pi_j=1.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\pi_1=\dfrac{1}{2}\pi_1+\dfrac{1}{2}\pi_2\\ \pi_2=\dfrac{1}{2}\pi_1+\dfrac{1}{2}\pi_3\\ \pi_3=\dfrac{1}{2}\pi_2+\dfrac{1}{2}\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解此方程，得该链的平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=\left(1/3\quad 1/3\quad 1/3\right)$．□

习题 3

3.1　若随机过程 $\{X(n),n\ge 0\}$ 的状态空间 S 为可数集，则下列命题等价：

(1)　$\{X(n),n\ge 0\}$ 是离散时间 Markov 链；

(2)　对任意的 $m\ge 1$，任意的 $k\ge 1$ 以及任意的 $i_0,i_1,\cdots,i_m,j_{m+1},\cdots,j_{m+k}\in S$，

当 $P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(m)=i_m\}$>0 时，都有

$$\begin{aligned}&P\{X(m+1)=j_{m+1},\cdots,X(m+k)=j_{m+k}\mid X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(m)=i_m\}\\ &=P\{X(m+1)=j_{m+1},\cdots,X(m+k)=j_{m+k}\mid X(m)=i_m\};\end{aligned}$$

(3)　对任意的 $m\ge 1$，任意的 $0\le t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}(t_k\in\{0,1,2,\cdots\},0\le k\le m+1)$

以及任意的 $i_0,i_1,\cdots,i_m,j\in S$，当 $P\{X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_m)=i_m\}$>0 时，都有

$$P\left\{X(t_{m+1})=j \middle| X(t_0)=i_0, X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_m)=i_m\right\}$$
$$=P\left\{X(t_{m+1})=j \middle| X(t_m)=i_m\right\}。$$

3.2　设 Markov 链$\{X(n), n\ge 0\}$的初始概率分布为$\pi_j(0)=P\{X(0)=j\}\ (j\in S)$，转移矩阵为$\boldsymbol{P}=[p_{ij}]$，证明：对任意的 $i_0,i_1,\cdots,i_n\in S$，有

$$P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}=\pi_{i_0}(0)p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}\ 。$$

3.3　设$\{X(n), n\ge 0\}$为 Markov 链，其转移矩阵为$\boldsymbol{P}=\left[p_{ij}\right]$，令

$$Y(n)=\left(X(n),X(n+1)\right),\ n\ge 0,$$

证明$\{Y(n), n\ge 0\}$为 Markov 链，并给出一步转移概率。

3.4　一次投掷两枚匀称硬币，独立重复这一试验，记 $X(n)$为第 n 投掷时正面向上的硬币数，证明$\{X(n),n\ge 0\}$是 Markov 链，写出其状态空间和一步转移矩阵。

3.5　已知$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$为独立同分布的随机变量，$\varepsilon_1\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$，令

$X(0)=0,\ X(n)=\left(\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}\right)/2,\ n\ge 1$，求条件概率

$$P\left\{X(n+1)=j \middle| X(n)=i\right\},$$

其中$i,j=-1,0,1$。举例说明$\{X(n), n\ge 0\}$不是 Markov 链。

3.6　设硬币 1、2 在一次投掷中出现正面的概率分别为 0.65、0.45。将其中的一枚硬币连续投掷直至出现背面，此时，轮换另一枚硬币进行连续投掷直至出现背面，再作轮换，如此循环。已知第一次投掷用的是硬币 1，求第五次投掷用的是硬币 2 的概率。

3.7　设 Markov 链$\{X(n), n\ge 0\}$的状态空间$S=\{1,2,3\}$，初始概率分布

$\pi(0)=\left(1/2\quad 1/4\quad 1/4\right)$，转移矩阵$P=\begin{bmatrix}3/4 & 1/8 & 1/8\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/8 & 1/8 & 3/4\end{bmatrix}$，

(1)　求概率$P\{X(0)=3,X(1)=1,X(2)=3\}$；

(2)　求 $p_{13}^{(2)}$。

3.8　已知 Markov 链$\{X(n),n\ge 0\}$具有状态空间$\{1,2,3\}$，转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix},$$

初始概率分布为$\boldsymbol{\pi}(0)=\left(1/4 \quad 1/4 \quad 1/2\right)$，计算如下概率：

(1) $P\left\{X(1)=2, X(2)=1, X(3)=3\right\}$；

(2) $P\left\{X(5)=2, X(6)=1 \mid X(3)=2\right\}$。

3.9 设 Markov 链的转移矩阵为：$\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$ $(0<p<1)$，求 $p_{ii}^{(n)}$，$i=1,2,3$。

3.10 设 Markov 链的状态空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

求该链的等价类及每个状态的周期。

3.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶随机矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^n(n\geq 2)$仍是 m 阶随机矩阵。如果 $\boldsymbol{A}$ 是双重随机矩阵，问 $\boldsymbol{A}^n(n\geq 2)$是否仍是双重随机矩阵？

3.12 设 Markov 链$\{X(n), n\geq 0\}$的状态空间 S={1,2,3}，转移矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

已知 $P\{X(0)=1\}=1/4=P\{X(0)=3\}$，求 $\mathrm{E}\left[X(2)\right]$。

3.13 设三个状态{1,2,3}的 Markov 链的转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix},$$

计算首达概率 $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, n=1,2,3,4$。

3.14 若 j 为 Markov 链的非常返态，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}<\infty,\ i\in S$。

3.15　有限不可约 Markov 链为非周期链的充分必要条件是存在 $n \geq 1$，使得对一切状态 j, k， $p_{jk}^{(n)} > 0$。

3.16　设下列 Markov 链的状态空间为{1,2,3,4}，写出 Markov 链的等价类，指出其中的常返态并求常返态的周期。

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

3.17　将具有以下转移矩阵的 Markov 链的状态进行分类：

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$。

3.18　设 C 为某 Markov 链的闭集，证明： $\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1,\ \ i \in C$。

3.19　设 Markov 链的状态空间 $S = \{1,2,3,4\}$，转移矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

写出该链的所有闭集。

3.20　设有以下四个 Markov 链，每个状态空间均为 $S=\{1,2,3,4\}$，相应的转移矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$ 分别为：

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1/2&1/2&0&0\\1/3&1/3&1/3&0\\1/4&1/4&1/4&1/4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1/2&1/2\\1/4&1/4&1/4&1/4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1/4&0&0&3/4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix}0&1/2&1/2&0\\0&1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3&0\\1/4&1/4&1/4&1/4\end{bmatrix},$$

给出状态空间 S 的分解。

3.21　某维修工负责维修两台设备。如果每台设备在任何一天中出故障的概率为 a，每台出故障的设备在第二天被维修工修复的概率为 b，假定设备完好与否以及故障设备能否被修复之间彼此独立，记 $X(n)$为第 n 天完好设备的台数。

(1)　说明$\{X(n),n\geq 0\}$是三个状态的 Markov 链，并确定其转移矩阵；

(2)　求该链的平稳分布。

3.22　设手机用户在三家移动通讯运营商 1，2，3 中的相继选择构成Markov 链，如果手机用户在当前年度选择第 i 家运营商，那么下一年度仍选择第 i 家运营商的概率为 $p_{ii},i=1,2,3$；转而选择别的运营商的概率为

$p_{ij}=(1-p_{ii})/2$，$j\neq i$。假若手机用户群的总规模是恒定的，求长时间后这三家运营商在手机用户群中的占有率。

3.23　已知某一质点在 $1,2,\cdots,N$ 上作随机游动，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\q&0&p&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&q&0&p\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix},$$

记$\pi_j(n)=P\{X(n)=j\}$，$j=1,2,\cdots,N$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\pi_j(n)$，$j=1,2,\cdots,N$；试问这些极限值与初始分布有关吗？

3.24　设 Markov 链的转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

求该链的平稳分布。

3.25　已知 Markov 链的转移矩阵为$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$，求该链的极限分布。