最优化第一次作业

付星桐

2022 年 5 月 4 日

摘要

忆梅下西洲，折梅寄江北。

关键词： 爱情; 诗歌.

目录

1 作业

1.1 保凸运算 1

$aC + b = \{x|x = ay + b, y \in C\}$

$\forall x_1, x_2 \in aC + b, \exists y_1, y_2 \in C$

使 $\begin{cases} x_1 = ay_1 + b \\ x_2 = ay_2 + b \end{cases}$

$\forall \theta \in [0, 1]$

$\theta x_1 + (1-\theta)\, x_2 = \theta\,(ay_1 + b) + (1-\theta)\,(ay_2 + b) = a\,[\theta y_1 + (1-\theta)\, y_2] + b$

又 $\theta y_1 + (1-\theta)\, y_2 \in C$

所以原式 $=a\,[\theta y_1 + (1-\theta)\, y_2] + b \in aC + b$

即 aC+b 也是凸集

1.2 保凸运算 2

$g(x) = f(Ax + b), dom\ g = \{x|Ax + b \in dom\ f\}$

证明：

令 $x, y \in dom\ g, 0 \leq \theta \leq 1;$

$g(\theta x + (1-\theta)\, y) = f(\theta Ax + (1-\theta)\, Ay + b) = f(\theta\,(Ax + b) + (1-\theta)\,(Ay + b)) \leq \theta f(Ax + b) + (1-\theta)\, f(Ay + b) = \theta g(x) + (1-\theta)\, g(y)$

根据凸函数定义,g(x) 是凸函数，仿射映射得证

1.3 保凸运算 3

$f(x) = g(Ax + b), dom\ f = \{x|Ax + b \in dom\ g\}$

证明：

令 $x, y \in dom\ f, 0 \leq \theta \leq 1;$

已知 $g(\theta x + (1-\theta)\, y) \leq \theta g(x) + (1-\theta)\, g(y)$

又 $g(\theta x+(1-\theta)\,y)=f(\theta\,(Ax+b)+(1-\theta)\,(Ay+b)),\theta g(x)+(1-\theta)\,g(y)=\theta f(Ax+b)+(1-\theta)\,f(Ay+b)$

所以易得: $f(\theta\,(Ax+b)+(1-\theta)\,(Ay+b))\leq\theta f(Ax+b)+(1-\theta)\,f(Ay+b)$

根据凸函数定义,f(x) 是凸函数，得证

1.4 证明无穷范数满足范数的三个性质

证明：

(1) 正定性

$\|x\|_\infty=\underset{i}{max}\,|x_i|\geq 0$

$if\ \|x\|_\infty=\underset{i}{max}\,|x_i|=0,$

$0\leq|x_i|\leq\underset{i}{max}\,|x_i|=0$

$so\ |x_i|=0$

$so:if\ \|x\|_\infty=0,only\ while\ x_i=0$

(2) 奇次性

$\|tx\|_\infty=\underset{i}{max}\,|tx_i|=|t|\,\underset{i}{max}\,|x_i|=|t|\,\|x\|_\infty$

(3) 三角不等式

$\|x+y\|_\infty=\underset{i}{max}\,|x_i+y_i|\,,\|x\|_\infty=\underset{i}{max}\,|x_i|\,,\|y\|_\infty=\underset{i}{max}\,|y_i|\,,$

$\|x+y\|_\infty^2-(\|x\|_\infty+\|y\|_\infty)^2=\left(\underset{i}{max}\,|x_i+y_i|\right)^2-\left(\underset{i}{max}\,|x_i|+\underset{i}{max}\,|y_i|\right)^2=\underset{i}{max}\ \ (x_i+y_i)^2-\underset{i}{max}\ \ x_i^2-\underset{i}{max}\ \ y_i^2-2\underset{i}{max}\,|y_i|\,\underset{i}{max}\,|x_i|\ =\ 2\underset{i}{max}\ \ x_iy_i-2\underset{i}{max}\,|y_i|\,\underset{i}{max}\,|x_i|\leq 0$

所以 $\|x+y\|_\infty\leq(\|x\|_\infty+\|y\|_\infty)$

1.5 证明向量范数均是凸函数

$f(x)=\|x\|$

$\forall\theta\in[0,1]\,,\forall x,y\in domf$

$f(\theta x + (1-\theta)\,y) = \|\theta x + (1-\theta)\,y\| \le \|\theta x\| + \|(1-\theta)\,y\| = \theta\|x\| + (1-\theta)\,\|y\| = \theta f(x) + (1-\theta)\,f(y)$

满足凸函数的定义，向量范数均是凸函数

1.6 证明 Log-sum-exp 函数是凸函数

$f(x) = log\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}$

又 $\underset{i}{max}\ x_i \le log\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} \le \underset{i}{max}\ x_i + logn$, 求得:

$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{z})^2}\left(\left(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\right) diag\left(\mathbf{z}\right) - \mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\right)\ where\ \mathbf{z} = \left(e^{x_1},\quad e^{x_2},\quad \cdots\cdots e^{x_{k-1}},\quad e^{x_k}\right)$

根据柯西不等式：$\left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right) \ge \left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right)^2$

for all v,

$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x)\mathbf{v} = \frac{1}{(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{z})^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 z_i\right) - \left(\left(\sum_{i=1}^{n} v_i z_i\right)^2\right)\right) \ge 0\ with\ a_i = v_i\sqrt{z_i}, b_i = \sqrt{z_i}$

满足凸函数的二阶条件，该函数是凸函数

1.7 严格凸函数解集唯一

用反证法：

若严格凸函数不只有一个最小值点, 即有两个最小值点, 设为 x,y

则由严格凸函数定义有：$f(\theta x + (1-\theta)\,y) \le \theta f(x) + (1-\theta)\,f(y) - \frac{m}{2}\theta\,(1-\theta)\,\|x-y\|^2 = f(x) - \frac{m}{2}\theta\,(1-\theta)\,\|x-y\|^2 < f(x)$

与 x 是最小值点矛盾, 所以严格凸函数解集唯一

1.8 一阶必要性定理证明

$if: \nabla f(x^*) \ne 0, d = -\nabla f(x^*)$

$then: \nabla f(\mathbf{x}^*)^{\mathrm{T}} d = -\nabla f(\mathbf{x}^*)^{\mathrm{T}}\nabla f(\mathbf{x}^*) = -\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2 < 0$

$\exists\sigma > 0,\ while\ \lambda \in (0,\sigma), f(\mathbf{x}^* + \lambda d) < f(\mathbf{x}^*)$

与 x^* 处取得局部最小解矛盾，所以必要性成立，局部最小点处，一定有 $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$

参考文献

[1] 作者. 文献 [M]. 地点: 出版社, 年份.

[2] 作者. 文献 [M]. 地点: 出版社, 年份.

A 附录标题

这里是附录.