最优化第一次作业

大数据 001

郅啸淇

学号：2184114639

2022 年 5 月 5 日

目录

1 保凸运算 **2**

1.1 保凸运算 1 2

1.2 保凸运算 2 3

1.3 保凸运算 3 3

1.4 保凸运算 4 3

2 无穷范数满足范数性质 **4**

2.1 正定性 4

2.2 齐次性 4

2.3 三角不等式 4

3 向量范数为凸函数 **4**

4 $log - sum - exp$ 函数为凸函数 **5**

5 严格凸函数极小值唯一 **5**

6 一阶必要性定理证明 **5**

1 保凸运算

1.1 保凸运算 1

假设 A, B 为凸集,，且 $x_1, x_2 \in A \cap B$

因为 A 为凸集，所以 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in A$

同理 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in B$

所以 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in A \cap B$

所以 $A \cap B$ 为凸集

1.2 保凸运算 2

$\forall x_1, x_2 \in aC + b$

$\exists y_1, y_2 \in C$

使得 $\begin{cases} x_1 = ay_1 + b \\ x_2 = ay_2 + b \end{cases}$

则 $\forall \theta \in [0, 1]$

有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 = \theta(ay_1 + b) + (1-\theta)(ay_2 + b) = a[\theta y_1 + (1-\theta)y_2] + b$

因为 $y_1, y_2 \in C$，故 $\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in C$

故 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in aC + b$

故 $aC + b$ 为凸集

1.3 保凸运算 3

设 $g(x) = f(Ax + b)$

$domg = \{x|Ax + b \in domf\}$

设 $x, y \in domg, \theta \in [0, 1]$

有 $g(\theta x + (1-\theta y)) = f(A(\theta x + (1-\theta y)) + b) = f(A\theta x + Ay - A\theta y + b)$

$= f(\theta(Ax + b) + (1-\theta)f(Ay + b)) \leq \theta f(Ax + b) + (1-\theta)f(Ax + b)$

$= \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$

故 $g(x)$ 为凸函数

1.4 保凸运算 4

设 $f(x) = g(Ax + b), domf = \{x|Ax + b \in domg\}$

已知 $g(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta g(x) + (1 - \theta)g(y)$

有 $g(\theta x + (1 - \theta y)) = f(\theta(Ax + b) + (1 - \theta)(Ax + b))$

又 $\theta g(x) + (1 - \theta)g(y) = \theta f(Ax + b) + (1 - \theta)f(Ax + b)$

故 $f(\theta(Ax + b) + (1 - \theta)(Ax + b)) \leq \theta f(Ax + b) + (1 - \theta)f(Ax + b)$

$f(x)$ 为凸函数得证

2 无穷范数满足范数性质

2.1 正定性

$max|x_i| \geq 0$

并且若 $\|x\|_\infty = 0$ 则 $max|x_i| = 0$ 因此 $x = 0$

2.2 齐次性

$\|tx\|_\infty = max|tx_i|$

$|t|max|x_i| = |t| \, \|x\|_\infty$

2.3 三角不等式

$\|x + y\|_\infty^2 - \|x\|_\infty + \|y\|_\infty{}^2 = max|x + y|^2 - max|x^2| - max|y^2| - 2max|x|max|y|$

$2maxxy - 2max|x||y| \leq 0$

故 $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

3 向量范数为凸函数

设 $f(x) = \|x\|$

$\forall\theta \in [0,1], \forall x, y\ indomf$

有 $f(\theta x + (1-\theta)y) = \|\theta x + (1-\theta)y\|$

由范数性质：

$\|\theta x + (1-\theta)y\| \leq \|\theta x\| + \|(1-\theta)y\| = \theta\,\|x\| + (1-\theta)\,\|x\|$

$= \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$

故向量范数为凸函数

4 $log - sum - exp$ 函数为凸函数

$f(x) = log(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k})\ \triangledown_2 f(x) = \frac{\mathbf{(1^T z)diag(z-zz^T)}}{\mathbf{1^T z^2}}$

$where\ \mathbf{z} = (e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}, e^{x_4} .....e^{x_{k-1}}, e^{x_k})$

根据柯西不等式 $(\mathbf{a^T a})(\mathbf{b^T b}) \geq (\mathbf{a^T b})^2$

$\forall\mathbf{f}, \mathbf{v^T}\triangledown^2 f(x)\mathbf{v} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} z_i)((\sum_{i=1}^{n} v_i^2 z_i) - (\sum_{i=1}^{n} v_i z_i))^2}{(\mathbf{1^T z})^2} \geq 0$

$with\ a_i = v_i\sqrt{z_i}, b_i = \sqrt{z_i}$

满足凸函数的二阶条件，故 $f(x)$ 为凸函数

5 严格凸函数极小值唯一

利用反证法，假设 $f(x)$ 为严格凸函数，x_1, x_2 为其两个极小值点

并且 $f(x_1) \leq f(x_2)$

由严格凸定义有 $f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) < \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2), \forall\theta \in [0,1]$

由条件有 $\theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \leq \theta f(x_2) + (1-\theta)f(x_2)$

即 $\theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \leq f(x_2)$

即 $f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) < f(x_2)$

与假设 x_2 为极小值点矛盾

故严格凸函数极小值唯一

6 一阶必要性定理证明

假设 x^* 为极小值点，但 $\nabla f(x^*) \neq 0$

设 $q = -\|\nabla f(x^*)\|$

则 $\exists p > 0$，使得 $f(x_* + pq) < f(x^*)$

与 x^* 为极小值点矛盾，故 $\nabla f(x^*) = 0$