Riemann-Roch Theory of Number Fields

Xiaorui YIN (Advisors: Shanwen Wang, Liguang LIU)

Feb. 2024

Introduction

Let K be a number field, i.e. a subfield of $\mathbb{C}$ that is finite dimensional as $\mathbb{Q}$-vector space. The algebraic integers in K forms a Dedekind ring $\mathcal{O}$. A classical theorem of algebraic number theory states that each fractional ideal of $\mathcal{O}$ factors into a product of prime ideals, which allow us to identify a fractional ideal of $\mathcal{O}$ as a divisor over $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, cf.2.1. In 1974, S. Arakelov proposed in his article [1] that one can extend this point of view to include the infinite places of K cf. 2.23, based on a well-known theorem 2.2 of A. Ostrowski. We follow this ideal to introduce the Arakelov Picard group and the Arakelov Grothendieck group of a number field K and develop a Riemann-Roch theory of number fields. As a result, we prove the following Riemann-Roch formula:

Theorem. (**Riemann-Roch I**, cf.3.10) For a projective metrized $\mathcal{O}$-module M, we have

$$\chi(i_*M) = \deg(\det M) + \mathrm{rk}_K M \chi(i_*\mathcal{O}),$$

where $\chi = \chi_{\mathbb{Q}}$, $i_* : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{K}_0(\mathbb{Z})$. In particular, for any Arakelov ideal $\mathfrak{a}$ of $\mathcal{O}$, we have the formula

$$\chi(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + \chi(\mathcal{O}).$$

Based on this formula, we prove two formulae which have profound implications.

Theorem. (**Riemann-Roch II**, cf.3.19) For any Arakelov ideal $\mathfrak{a}$ of $\mathcal{O}$, we have the formula

$$l(\mathfrak{a}) - i(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + l(\mathcal{O}) - g,$$

where

$$i(\mathfrak{a}) = \mathrm{O}(\exp(\frac{-\deg(\mathfrak{a})}{[K:\mathbb{Q}]})).$$

In particular, $i(\mathfrak{a}) \to 0$ as $\deg(\mathfrak{a}) \to +\infty$.

Theorem. (**Riemann-Roch III**, cf.4.6) Denote C to be the inverse of the different ideal $D_{K/\mathbb{Q}}$. For any Arakelov ideal $\mathfrak{a}$ of $\mathcal{O}$, we have the equation

$$\theta_K(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\sqrt{|d_K|}\theta_K(C\mathfrak{a}^{-1}).$$

As an application of the second Riemann-Roch formula, we prove that $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ is compact, which implies the finiteness of class number and Dirichlet's unit theorem. We also make use of the third Riemann-Roch formula to give an alternative proof of the functional equation of the Dedekind ζ function of K.

The proofs in this note mainly follow those in [9]. We also refer to [10], especially for the generized *theta* function. We explain more details and correct some potential mistakes. As it is difficult to find related detailed mateials, we prove in detail the functional equation of the Dedekind ζ function by the Riemann-Roch theory of number field.

引言

设 K 是一个数域, 即它是复数域的子域, 而且作为 $\mathbb{Q}$-线性空间是有限维的. K 中的全部代数整数形成一个 Dedekind 环 (命题1.16), 记为 $\mathcal{O}$. 代数数论的传统考虑是 $\mathcal{O}$ 中的理想分解为素理想的乘积, 这等价于一个 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 上的除子 (参见2.1). 而 S. Arakelov 在他发表于 1974 年的文章 [1] 中提出, 基于 A. Ostrowski 在 19 世纪末证明的定理2.2, 我们可以将上面对素理想的考虑囊括进更大的框架中, 即对所有位的考虑 (定义2.23). 我们将遵循这个想法, 通过研究所谓 Arakelov Picard 群和 Arakelov Grothendieck 群建立数域的 Riemann-Roch 理论. 作为结果, 证明下面的 Riemann-Roch 公式, 其中未定义的概念都将在正文定义.

Theorem. (**Riemann-Roch I**, cf.3.10) 对于投射度量 $\mathcal{O}$-模 M, 我们有

$$\chi(i_*M) = \deg(\det M) + \mathrm{rk}_K M\chi(i_*\mathcal{O}),$$

这里 $\chi = \chi_{\mathbb{Q}}$, $i_* : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{K}_0(\mathbb{Z})$. 特别地, 对于 $\mathcal{O}$ 的任何 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$,

$$\chi(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + \chi(\mathcal{O}).$$

以这个公式为基础, 我们将进一步证明下面两个公式:

Theorem. (**Riemann-Roch II**, cf.3.19) 对 $\mathcal{O}$ 的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, 成立着

$$l(\mathfrak{a}) - i(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + l(\mathcal{O}) - g,$$

其中

$$i(\mathfrak{a}) = \mathrm{O}(\exp(\frac{-\deg(\mathfrak{a})}{[K:\mathbb{Q}]})).$$

特别地 $i(\mathfrak{a}) \to 0$ 当 $\deg(\mathfrak{a}) \to +\infty$.

Theorem. (**Riemann-Roch III**, cf.4.6) 记差积理想 $D_{K/\mathbb{Q}}$ 的逆为 C, 那么对任何 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$,

$$\theta_K(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\sqrt{|d_K|}\theta_K(C\mathfrak{a}^{-1}).$$

作为第二个公式的应用, 我们证明 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是紧的. 作为第三个公式的应用, 我们导出 Dedekind ζ 函数的函数方程.

有关这个 Riemann-Roch 理论的大部分命题及其证明遵循 [9]. 我们也参考 [10], 尤其是这篇文献所提出的推广的 θ 函数的概念. 基于以上文献, 我们解释了更多细节, 并且纠正了一些可能的错误. 关于通过此理论建立 Dedekind ζ 函数的函数方程的详尽的资料难以找到, 因此我们细致地描述其证明.

致谢

我首先要向王善文和刘丽光老师表达深切的感谢. 这篇报告是在他们的指导下完成的. 尽管由于笔者经验的匮乏与水平的限制, 本文完成之初存在很多问题, 但他们仍然不厌其烦地指导和鼓励了我, 而且在我的学习与生活中都给予了我许多十分有用的建议. 我也要感谢我的班主任周泽民老师. 如果没有我刚进入大学时他的鼓励和建议, 我可能在那时就已经选择了放弃学数学. 在我截至目前的大学生活中, 他不断关照我和班级里的同学们的学习状况. 不仅如此, 在本文的写作方面, 他也主动为我提出了许多意见. 我也要感谢中国人民大学中法学院教务处的各位老师在行政程序上提供的诸多帮助.

我向我的父母、外公和外婆表达衷心的感谢. 在任何时候, 他们都不计回报地为我提供经济和情感上的关切和支援. 我也向豆表达感谢, 他陪伴我走过我最困难的时光. 我要感谢我的朋友们: 吴宇$\boxed{F}$、S. Okada 和谷恒毅等, 无论是否与学业有关, 他们的陪伴是独自一人在异国求学时不可或缺的精神力量; 蒋文馨, 作为我的前辈, 她向我传授了许多法国生活与学习方面的经验.

目录

1 前置知识

为了建立所需的理论必须使用诸多的前置知识, 它们将在下文被频繁地使用. 关于局部化, 主理想整环上的有限生成模, 模的张量积以及 Dedekind 环的基本内容大多可以在标准的代数教材 (例如, [2] 和 [12]) 找到完备的叙述, 因此对于这样的结果将不加证明而是仅列出它们并指出参考. 我们也将用到拓扑群上的 Haar 积分, 有关它的基本知识可以在 [4] 找到.

此外, 理解 Riemann 曲面上经典的 Riemann-Roch 理论对于本文中所述的它的算术类似物是有益的, 为此我们遵循这方面的专门教材如 [13] 或 [6]. 但在正文中这个理论本身没有以任何形式被使用, 并且受篇幅限制, 我们无法叙述其中的诸多细节, 仅随着主题的展开勾勒其轮廓.

1.1 局部化

设 R 是含 1 交换环.

定义 1.1. *我们说 $S \subset R$ 是乘法子集, 如果 $1 \in S$, 而且对任何 $a \in S$, $b \in S$ 有 $ab \in S$.*

定义 1.2. *R 对乘法子集 S 的局部化 $S^{-1}R$ 是指 $R \times S$ 商去等价关系*

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \text{存在} u \in S, u(at - bs) = 0.$$

(a, s) 所在的等价类被记为 a/s. 这个商对于运算

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st};\ \frac{a}{s} \times \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

形成交换环, 称为 R 对 S 的局部化.

定义 1.3. *R-模 M 对 R 的乘法子集 S 的局部化 $S^{-1}M$ 是指 $R \times M$ 商去等价关系*

$$(a, s)\ (b, t) \Leftrightarrow \text{存在} u \in S, u(at - bs) = 0.$$

(a, s) 所在的等价类被记为 a/s. 这个商对于运算

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

和数乘

$$\frac{a}{s}\frac{m}{t} = \frac{am}{st}$$

形成 $S^{-1}R$-模, 称为 M 对 S 的局部化.

局部化对于模的各种操作具有良好的保持性. 下面命题的证明可以参看 [2, Corollary 3.4].

命题 1.4. *设 M 是 R-模而 N,P 是其子模, 那么对乘法子集 S,*

1) $S^{-1}(N\cap P)=S^{-1}N\cap S^{-1}P$,

2) $S^{-1}(N+P)=S^{-1}N+S^{-1}P$,

3) $S^{-1}(M/N)\simeq S^{-1}M/S^{-1}N$.

乘法子集的基本例子是 $R\backslash\mathfrak{p}$, 其中 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 这按照素理想的定义是显然的. 对于这种乘法子集的局部化就称为对 $\mathfrak{p}$ 的局部化. 当 R 是整环时, 0 是一个素理想, 对它的局部化正是 R 的分式域.

此外, 我们经常使用过到局部的方法去证明一些性质. 我们称一个性质是局部性质, 如果它成立当且仅当它对所有对素理想的局部化成立. 下面命题表明同态的单和满是局部性质, 参看 [2, Proposition 3.9].

命题 1.5. *对于 R-模同态 $M\to N$ 而言以下命题等价.*

1) $M\to N$ 是单射 (或满射);

2) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, $M_\mathfrak{p}\to N_\mathfrak{p}$ 是单射 (或满射);

3) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $M_\mathfrak{m}\to N_\mathfrak{m}$ 是单射 (或满射).

1.2 主理想整环上的有限生成模

主理想整环上的有限生成模具有比较简单的结构.

命题 1.6. *主理想整环上的有限生成模是自由的当且仅当它无挠.*

这个命题的证明可以看 [12, §6.1, 定理 2].

定理 1.7. *对主理想整环 R 上任何有限生成模 M, 存在唯一的正整数 n 和一族主理想 $((d_i))_{1\le i\le n}$ 满足 $(d_{i+1})\subset(d_i)$, 使得*

$$M\simeq R^k\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^n R/(d_i)\right).$$

这个定理的证明可以看 [12, §6.4, 定理 10].

1.3 模的张量积和外幂

设 R 是交换环.

定义 1.8. *对两个 R-模 M 和 N, 它们的张量积 (T,ρ) 是指一个 R-模 T 以及一个双线性映射 (称为中间线性映射) $\rho: M\times N\to T$, 使得对任何 R-模 P 以及双线性映射 $f: M\times N\to P$ 存在唯一的模同态 $\tilde{f}: T\to P$ 使得 $f=\tilde{f}\circ\rho$, 也就是说下面图表交换:*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & P \\ M\times N \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

通常省略中间线性映射而直接将 T 记作 $M\otimes_R N$. $M\times N$ 的元素 (m,n) 在中间线性映射下的像记为 $m\times n$.

命题 1.9. *有限多个 R-模的张量积存在并且在同构意义下唯一.*

这个命题的证明可看 [2, Proposition 2.12].

命题 1.10. *对于 R-模 M, N, P 有典范的 R-模同构:*

1) $M\otimes_R N\simeq N\otimes_R N$,

2) $(M\otimes_R N)\otimes_R P\simeq M\otimes_R (N\otimes_R P)$,

3) $(M\oplus N)\otimes_R P\simeq (M\otimes_R P)\oplus(N\otimes_R P)$.

这个命题的证明可看 [2, Proposition 2.14].

命题 1.11. *对于 R-模 M 和 N 以及 R 的乘法子集 S 有典范的 $S^{-1}R$-模同构*

$$S^{-1}M\otimes_(S^{-1}R)S^{-1}N\simeq S^{-1}(M\otimes_R N).$$

这个命题可看 [2, Proposition 3.7].

定义 1.12. *设 M 是 R-模. M 的 n 次外幂 $\bigwedge^n M$ 是指 $\bigotimes^n M$ 商去其中由所有形如 $m_1\otimes\ldots\otimes m_n$, 其中存在一对 $1\le i,j\le n$ 使得 $m_i=m_j$ 的元素所生成的子模得到的 R-模.*

对于自由模而言显然它的某一个次数的外幂是 0 当且仅当次数高于这个自由模的秩. 另外由于局部化保持张量积和商, 所以外幂也是如此. 这允许我们稍后在正文中讨论局部自由模的外幂.

1.4 Dedekind 环及其理想的算术

在 19 世纪 40 年代, Kummer 为了证明 Fermat 大定理考虑了更广泛的代数整数, 并且指出: 尽管一般的数域的代数整数环不像整数那样成立唯一分解, 但在考虑更广泛的“理想数”的概念时它

仍然成立. 这个概念随后由 Dedekind 发展为今天我们所熟悉的环中的理想的语言, 其中成立着素理想唯一分解的那些被称为 Dedekind 环. 虽然 Kummer 没能用这个理论完全证明 Fermat 大定理, 但是今天 Dedekind 环中理想的算术仍然是代数数论的基本内容之一.

定义 1.13. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 是指一个诺特整环, 满足如下条件:*

1) $\mathcal{O}$ 的所有素理想都是极大理想;

2) $\mathcal{O}$ 的分式域是 K, 那么对任何 $x \in K$, $x \in \mathcal{O}$ 的充要条件是它是某些 $\mathcal{O}$ 系数的首一多项式的根.

局部地看, Dedekind 环具有下面的等价刻画, 参看 [2, Proposition 9.3].

命题 1.14. *一个诺特整环是 Dedekind 环当且仅当它对所有素理想的局部化都是离散赋值环.*

在考虑一个局部性质时, 由于离散赋值环是主理想整环, 上面的命题允许我们假设我们的环是主理想整环, 这在许多情况下是十分方便的.

Dedekind 环最重要的是其理想的唯一分解性质.

命题 1.15. *设 $\mathcal{O}$ 是 Dedekind 环, 那么任何它的理想是素理想的乘积, 而且把它写成素理想乘积的写法是唯一的.*

证明. [2, Corollary 9.4]. □

从 Dedekind 环的历史看到, 它被发明最初就是为了解决数域的问题, 因此有必要指出, 数域的代数整数环总是 Dedekind 环.

命题 1.16. *设 K 是数域, 那么 K 中代数整数 (即 $\mathbb{Z}[X]$ 中首一的多项式的根) 的全体形成一个 Dedekind 环.*

证明. [2, Theorem 9.5]. 事实上, 代数整数环对于其素理想的商总是有限的, 而有限整环是域. □

定义 1.17. *一个整环 R 的分式理想 I 是指一个 R 的分式域 F 的子模, 满足存在 $x \in F$ 使得 $xI \subset R$. 由 $f \in K$ 生成的主分式理想是指 fR. 一个分式理想 I 被称为是可逆的, 如果存在分式理想 J 使得 $IJ = R$.*

根据 [2, Theorem 9.8], Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 的分式理想都是可逆的, 因此它的分式理想按照乘法形成一个群, 它对于所有主分式理想形成的子群的商称为理想类群. 对于数域而言, 有下面重要的结果. 它的证明可以看 [9, Chapter I, Theorem 6.3].

定理 1.18. *数域 K 的代数整数环的理想类群 Cl_K 是有限群.*

1.5 局部紧群上的 Haar 测度和积分

在考虑 Dedekind ζ 函数的函数方程时, 我们将会考虑在局部紧群 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 上积分, 因此需指明它上面的测度.

设 G 是局部紧 Hausdorff 的 Abel 群.

定义 1.19. *群 G 上的一个 Haar 测度 μ 是指一个定义在 Borel 集 (拓扑所生成的 σ-代数) 上的测度, 对所有 Borel 集 A 满足如下条件:*

1) 平移不变, 即对 $x \in G$ 有 $\mu(A) = \mu(xA)$;

2) $\mu(A) = \inf\mu(U)$, U 取遍所有含 A 的开集; $\mu(A) = \sup\mu(K)$, K 取遍所有 A 包含的紧集.

定理 1.20. *群 G 上存在 Haar 测度, 并且在相差常数倍的情况下是唯一的.*

这个定理的证明见 [4, Theorem 1.3.5].

由测度论的基本知识知道, $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}x$, $\mathbb{R}^{\times}_{>0}$ 的测度 $\mathrm{d}x/x$, $\mathbb{Z}$ 上的计数测度这些都是 Haar 测度.

命题 1.21. *紧集的 Haar 测度有限.*

这个命题见 [4, Corollary 1.3.6].

设 G 上的一个 Haar 测度 μ. 对任何 G 的闭子群 H, 商 G/H 也是局部紧 Hausdorff 的, 因此它上面也有相差一个常数倍意义下唯一的 Haar 测度 $\tilde{\mu}$.

定理 1.22. *给定 G 上的 Haar 测度 μ 和 H 上的 Haar 测度 ν. 存在唯一的 G/H 上的 Haar 测度 $\tilde{\mu}$ 使得下面的公式对所有 $f \in L^1(G)$ 成立:*

$$\int_G f(g)\mu(\mathrm{d}g) = \int_{G/H}\int_H f(xh)\nu(\mathrm{d}h)\tilde{\mu}(\mathrm{d}x).$$

这个定理的证明见 [4, Themrem 1.4.1(b)] 和 [4, Themrem 1.5.3].

2 Arakelov Picard 群和 Grothendieck 群

2.1 Picard 群和 Grothendieck 群

在建立紧 Riemann 曲面的 Riemann-Roch 理论时, 首先需要借助于 Riemann 曲面上的除子和向量丛的语言来翻译亚纯函数的性质. 我们通过下面的观点将紧 Riemann 曲面的理论和数域的理论所对应 (这将在下一小节被具体地阐述): 一个紧 Riemann 曲面 X 对应于 $\mathcal{O}$ 的素理想全体形成的集合 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, 一个亚纯函数对应一个 K 的元素, 而一个全纯函数对应于一个 $\mathcal{O}$ 的元素. 在这一小节中, 我们引进除子和向量丛在数域情形所对应的类似的概念, 并且考虑它们的等价类所形成的群, 从而完成上面所述的类比.

定义 2.1. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 上的除子群 $\mathrm{Div}(\mathcal{O})$ 是指由它的素理想全体形成的集合 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 所生成的自由 Abel 群. 形如 $\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O})}\nu_{\mathfrak{p}}(f)\mathfrak{p}$ 的除子被称为主除子, 其中 $f\in K^{\times}$, $\nu_{\mathfrak{p}}$ 是由素理想 $\mathfrak{p}$ 所定义的 K 上的赋值. 除子类群 $\mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ 是指除子群商去主除子所形成的子群.*

我们熟知在 Dedekind 环中一个分式理想唯一地分解成素理想的乘积. 对于 $\mathcal{O}$ 的分式理想 $\mathfrak{a}$ 我们设它有分解式 $\mathfrak{a}=\prod_{i=1}^{s}\mathfrak{p}_i^{\nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})}$, 这给出一个除子 $\mathrm{div}(\mathfrak{a})=\sum_{i=1}^{s}\nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{a})\mathfrak{p}_i$. 这个从分式理想群到除子群的映射 div 显然是同构. 因此对于 Dedekind 环而言, 一个除子无异于一个分式理想, 而除子类群即理想类群 Cl_K.

接下来考虑向量丛. 粗略地说, 紧 Riemann 曲面 X 上的向量丛即是在 X 的每个点上均附着一个 n 维复线性空间, 这启发我们考虑 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 上在每点处附着一个 n 秩自由 $\mathcal{O}$-模. 回到环 $\mathcal{O}$ 上, 我们给出下面的定义 (注意该定义不适用于一般的环 R).

定义 2.2. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 上的有限生成模 M 被称为是投射 $\mathcal{O}$-模, 如果存在正整数 n, M 对任何素理想 $\mathfrak{p}$ 的局部化 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 n 秩自由模. 此正整数被称为 M 的秩, 记作 $\mathrm{rk}(M)$.*

在接下来的讨论中, 我们将格外关注有限生成投射 $\mathcal{O}$-模. 出于使用的便利, 我们给出有限生成投射 $\mathcal{O}$-模的等价刻画 (这将是我们唯一一次考虑 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 的拓扑).

命题 2.3. *设 M 是 Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 上的有限生成模, 那么以下命题等价:*

1) M 投射;

2) M 局部自由;

3) 存在有限生成 $\mathcal{O}$-模 N 使得 $M\oplus N$ 自由.

证明. 2) $\Rightarrow$ 3). 设 M 局部自由. 因为 M 有限生成, 取一组生成元 $(m_i)_{1\le i\le n}$ 并且考虑 $\mathcal{O}^{\oplus n}\to M, (x_i)_{1\le i\le n}\mapsto\sum_{1\le i\le n}x_im_i$, 记这个满射的核为 N. 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, $M_{\mathfrak{p}}$ 和 $N_{\mathfrak{p}}\subset(\mathcal{O}^{\oplus n})_{\mathfrak{p}}$ 都自由

(后者是因为 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环, 更是主理想整环), 因此我们有分裂的正合列 $0 \to M_\mathfrak{p} \to (\mathcal{O}^{\oplus n})_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p} \to 0$. 根据 [2, Proposition 3.9] 取 $N = \bigcap_\mathfrak{p} N_\mathfrak{p}$ 就有 $N \oplus M \simeq \mathcal{O}^{\oplus n}$.

3) $\Rightarrow$ 2). 设 $M \oplus N$ 自由, 因为局部化与直和可以交换顺序, 对任何素理想 $\mathfrak{p}$ 我们有 $(M\oplus N)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \oplus N_\mathfrak{p}$, 因而 $M_\mathfrak{p} \oplus N_\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 上的自由模 (其秩有限, 因为 M 和 N 皆有限生成). $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环, 更是主理想整环, 因此 $M_\mathfrak{p}$ 作为自由 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-模 $M_\mathfrak{p} \oplus N_\mathfrak{p}$ 的子模是自由的.

1) $\Leftrightarrow$ 2). 我们只需证明 $\mathrm{rk}(M_\mathfrak{p})$ 不依赖于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 的选取. 考虑映射 $\rho_M : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}, \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{M}_\mathfrak{p}$. 我们证明这个映射是连续的, 结合 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 连通 (因为 $\mathcal{O}$ 是整环) 的事实就证明了命题.

现证明 ρ_M 连续. 对任何 $k \in \mathbb{Z}$, 取整数 n 有限生成 $\mathcal{O}$-模 N 使得 $M \oplus N \simeq \mathcal{O}^{\oplus n}$ 我们有

$$\begin{aligned}
\rho_M^{-1}(k) &= \{\mathfrak{p} : \mathrm{rk}(M_\mathfrak{p}) \le k\} \cap \{\mathfrak{p} : \mathrm{rk}(M_\mathfrak{p}) \ge k\} \\
&= \{\mathfrak{p} : \mathrm{rk}(M_\mathfrak{p}) \le k\} \cap \{\mathfrak{p} : \mathrm{rk}(N_\mathfrak{p}) \le n-k\} \\
&= \{\mathfrak{p} : \wedge^{k+1}(M_\mathfrak{p}) = 0\} \cap \{\mathfrak{p} : \wedge^{n-k+1}(N_\mathfrak{p}) = 0\},
\end{aligned}$$

而根据 [2, Chapter III, Exercice 1] 以及 [2, Proposition 3.14], 我们有 $\{\mathfrak{p} : \wedge^{k+1}(M_\mathfrak{p}) = 0\} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})\backslash\mathrm{Supp}(\wedge^{k+1}M)$ 是开集, 类似地 $\{\mathfrak{p} : \wedge^{n-k+1}(N_\mathfrak{p}) = 0\}$ 也是开的, 所以它们的交 $\rho_M^{-1}(k)$ 是开的, 从而 ρ_M 连续. □

我们再次看向紧 Riemann 曲面的理论. 在所有向量丛当中具有特别重要地位的是线丛, 也就是 1 维的向量丛. 所以下面我们看秩 1 的有限生成投射模.

对 $\mathcal{O}$-模 M 记 $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{O})$.

命题 2.4. *对 $\mathcal{O}$-模 M, 以下三个命题等价:*

1) M 是有限生成投射模, $\mathrm{rk}(M) = 1$;

2) $M^\vee \otimes_\mathcal{O} M \simeq \mathcal{O}$;

3) 存在 $\mathcal{O}-$ 模 N 使得 $N \otimes_\mathcal{O} M \simeq \mathcal{O}$.

当 M 满足上述等价条件时称 M 可逆.

证明. 1) $\Rightarrow$ 2). 考虑映射 $M^\vee \otimes_\mathcal{O} M \to \mathcal{O}, \alpha \otimes m \mapsto \alpha(m)$, 这显然是满射, 我们来证明这也是单射. 因为单是局部性质 ([2, Proposition 3.9]) 我们只需证明在两边对任意的素理想 $\mathfrak{p}$ 局部化后的映射 $M_\mathfrak{p}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \to \mathcal{O}\mathfrak{p}$ 是单射. 事实上, 局部化之后左右两边都是秩 1 的自由 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-模, 因此从此映射满即刻推出它单.

2) $\Rightarrow$ 3) 是平凡的.

3) $\Rightarrow$ 1). 取一对互逆的同构 $\varphi : N \otimes_\mathcal{O} M \to \mathcal{O}$ 和 $\psi : \mathcal{O} \to N \otimes_\mathcal{O} M$, 并且设 $\psi(1) = \sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i$.

考虑按照复合 $M \to \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} M \to M \otimes_{\mathcal{O}} N \otimes_{\mathcal{O}} M \to M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \to M$ 定义的 $\alpha : M \to M$:

$$m \mapsto 1 \otimes m \mapsto \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i \otimes m \mapsto \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes \varphi(n_i \otimes m) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(n_i \otimes m) m_i,$$

由于复合的每一步都是同构, 所以 α 是同构. 继续考虑 $\iota : \mathcal{O}^{\oplus r} \to M, (x_i)_{1 \le i \le r} \mapsto \sum_{i=1}^{r} \alpha^{-1}(m_i) r_i$ 和 $\pi : M \to \mathcal{O}^{\oplus r}, m \mapsto (\varphi(n_i \otimes m))$, 那么 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_M$, 因此 M 是自由模 $\mathcal{O}^{\oplus r}$ 的直和项, 从而投射. 同理 N 投射. 因此我们在两边对任意的素理想 $\mathfrak{p}$ 局部化之后得到的等式 $N_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}\mathfrak{p}$ 中, 三个 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-模都自由. 从而两边的秩有等式 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mathrm{rk}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{p}}) = 1$, 这说明 M 是秩 1 的. □

至此, 我们可以定义环 $\mathcal{O}$ 的 Picard 群和 Grothendieck 群, 分别对应于我们所考虑的“线丛类群”和“向量丛类群”.

定义 2.5. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 的 Picard 群 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 是指可逆 $\mathcal{O}$-模的同构类装备乘法 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 形成的群.*

定义 2.6. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{O})$ 定义为 $\mathcal{F}_0/\mathcal{R}_0$, 其中 $\mathcal{F}_0$ 是有限生成投射 $\mathcal{O}$-模的同构类生成的自由 Abel 群, $\mathcal{R}_0$ 是由 $\mathcal{F}_0$ 中形如 $M - M \oplus N + N$ 的元素生成的子群. 一个有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M 在 $K_0(\mathcal{O})$ 中的等价类记作 $[M]$. $K_0(\mathcal{O})$ 装备乘法 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 形成交换环.*

在紧 Riemann 曲面上, 线丛类群和除子类群实际上是同构的. 这个同构在数域的情况依然成立, 换句话说对 Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 而言, 可逆模就是它的分式理想, 从而我们决定了它的 Picard 群. 为此我们证明下面的引理.

引理 2.7. *设 M 是有限生成投射 $\mathcal{O}$-模, 那么 M 可逆当且仅当 M 可以被嵌入数域 K.*

证明. 充分性: 因为 M 可逆, 所以 M 秩 1; 特别地 $\mathrm{rk}_K(M \otimes_{\mathcal{O}} K) = 1$ 即 $M \otimes_{\mathcal{O}} K \simeq K$, 因此 M 通过 $m \mapsto m \otimes 1$ 嵌入 K.

必要性: 设 $\iota : M \to K$ 是一个嵌入. 那么容易看到 $M \otimes_{\mathcal{O}} K \to K, m \otimes f \mapsto \iota(m) f$ 是同构, 因此 M 在 K 处秩 1, 根据命题2.3, 这推出 $\mathrm{rk}(M) = 1$. □

命题 2.8. $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}) = Cl_K$.

证明. 根据引理2.7, 把一个 $\mathcal{O}$ 的分式理想看作是可逆 $\mathcal{O}$-模给出 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 和 Cl_K 之间的双射, 而对任意的分式理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}, a \otimes b \mapsto ab$ 显然是同构. □

我们再来考虑 Grothendieck 群的结构. 为此我们注意到, 计算可逆模的秩的映射 rk 给出了一个环同态 $K_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}$. 这显然是一个满射. 记 $\ker(\mathrm{rk}) = I(\mathcal{O})$, 那么有 Abel 群正合列

$$0 \to I(\mathcal{O}) \to K_0\mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{rk}} \mathbb{Z} \to 0.$$

由于 $\mathbb{Z}$ 自由, 我们得到 Abel 群的同构 $K_0(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{Z} \oplus I(\mathcal{O})$.

我们考虑 $I(\mathcal{O})$ 的结构. 先建立一个引理.

引理 2.9. 任何非零的有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M 同构于可逆 $\mathcal{O}$-模的直和.

证明. 对 $\mathrm{rk}(M)$ 归纳. $\mathrm{rk}(M) = 1$ 时结论平凡. 设 $\mathcal{O}$-模 N 满足 $M \oplus N \simeq \mathcal{O}^n$, $\iota : M \to \mathcal{O}^n$ 是嵌入, $\pi : \mathcal{O}^n \to \mathcal{O}$ 是使得 $\pi \circ \iota(M)$ 非平凡的某个分量的投影, 那么 $\pi \circ \iota(M)$ 根据引理2.7是秩 1 的投射 $\mathcal{O}$-模, 并且因为 M 投射, 有 $M \simeq \ker(\pi \circ \iota) \oplus \pi \circ \iota(M)$. 由于 $\mathrm{rk}(\ker(\pi \circ \iota)) < \mathrm{rk}(M)$, 使用归纳假设知道它同构于可逆 $\mathcal{O}$-模的直和, 因此整个 M 同构于可逆 $\mathcal{O}$-模的直和. □

引理 2.10. 交换群 $I(\mathcal{O})$ 由形如 $[\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}]$ 的元素生成, 其中 $\mathfrak{a}$ 是可逆 $\mathcal{O}$-模.

证明. 根据引理2.9, $K_0(\mathcal{O})$ 的元素都可以写成 $\sum_{i=1}^{k} n_i[\mathfrak{a}_i]$ 的形状, 其中 $[M_i] \in K_0(\mathcal{O})$, $n_i \in \mathbb{Z}$. 而因为诸 $[\mathfrak{a}_i]$ 皆为秩 1, $\sum_{i=1}^{r} n_i[\mathfrak{a}_i] \in I(\mathcal{O})$ 意谓 $\sum_{i=1}^{r} n_i = 0$. 因此 $\sum_{i=1}^{r} n_i[\mathfrak{a}_i] = \sum_{i=1}^{r} n_i[\mathfrak{a}_i] - \sum_{i=1}^{r} n_i[\mathcal{O}] = \sum_{i=1}^{r} n_i([\mathfrak{a}_i] - [\mathcal{O}])$. □

现在记 $\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O}) = \mathbb{Z} \oplus I(\mathcal{O})$. 定义同态"第一陈类": $c_1 : K_0(\mathcal{O}) \to I(\mathcal{O}), [M] \mapsto [M] - \mathrm{rk}(M)[\mathcal{O}]$ 以及 "陈特征标" $\mathrm{ch} : K_0(\mathcal{O}) \to \mathrm{gr}K_0(\mathcal{O}), [M] \mapsto (\mathrm{rk}[M], c_1[M])$. 根据引理2.10, $(1, [\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}]) \mapsto \mathfrak{a}$ 足以定义同态 $\mathrm{gr}(K_0\mathcal{O}) \to K_0(\mathcal{O})$, 并且它是 ch 的逆映射. 因此 ch 就是上面所说的 Abel 群同构. 利用这个同构将 $K_0(\mathcal{O})$ 的乘法转移给 $\mathrm{gr}(K_0\mathcal{O})$ 使得这是一个环同构. 这样我们只需要决定 $\mathrm{gr}(K_0\mathcal{O})$ 上的环结构就掌握了 $K_0(\mathcal{O})$ 的结构.

命题 2.11. 环 $\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$ 的乘法运算满足 $(r, \eta)(s, \xi) = (rs, r\xi + s\eta)$, 其中 $r, s \in \mathbb{Z}$, $\eta, \xi \in I(\mathcal{O})$.

证明. 设有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M, N 的秩分别是 m, n. 引理2.10 表明形如 $(m, [M] - m[\mathcal{O}])$ 的元素足以生成 $\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$. 按照定义, 我们有 $\mathrm{ch}([M \otimes_{\mathcal{O}} N]) = \mathrm{ch}([M])\mathrm{ch}([N])$, 即 $(mn, [M][N] - mn[\mathcal{O}]) = (m, [M] - m[\mathcal{O}])(n, [N] - n[\mathcal{O}])$, 因此我们只需证明 $[M][N] - mn[\mathcal{O}] = m([N] - n[\mathcal{O}]) + n([M] - m[\mathcal{O}])$, 即 $([M] - m[\mathcal{O}])([N] - n[\mathcal{O}])$. 再次根据引理2.10, 我们只需证明对任何 $\mathcal{O}$ 的分式理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, 在 $K_0(\mathcal{O})$ 中成立着 $([\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}])([\mathfrak{b}] - [\mathcal{O}]) = 0$. 因为有其他用处, 我们把它总结为2.12在下面证明. □

引理 2.12. 对任何 $\mathcal{O}$ 的分式理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, 在 $K_0(\mathcal{O})$ 中成立着 $([\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}])([\mathfrak{b}] - [\mathcal{O}]) = 0$.

证明. 当 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 是互素的整理想时, 满射 $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \to \mathcal{O}, (a, b) \mapsto a + b$ 的核同构于 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{ab}$, 因此结合 $\mathcal{O}$ 自由知道 $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \simeq \mathfrak{ab} \oplus \mathcal{O}$, 从而 $[\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}][\mathfrak{b}] + [\mathcal{O}]$ 即 $([\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}])([\mathfrak{b}] - [\mathcal{O}]) = 0$. 对于一般的分式理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, 根据引理2.13 我们可以通过乘以一个主理想在不改变其所在的等价类的情况下变成互素的整理想, 从而证明了我们的结论. □

引理 2.13. *对任何 $\mathcal{O}$ 的整理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$, 存在 $f\in K^\times$ 使得 $f\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 互素.*

证明. 任取 $x\in\mathfrak{a}$ 并设 $\mathfrak{ac}=x\mathcal{O}$. 由于 $\mathcal{O}/\mathfrak{bc}$ 是主理想环 (见下面的注), 我们可以设它的理想 $\mathfrak{c}/\mathfrak{bc}$ 由 $y+\mathfrak{bc}$ 生成, 于是 $y\mathcal{O}+\mathfrak{bc}=\mathfrak{c}$, 从而 $x\mathcal{O}=\mathfrak{ac}=y\mathfrak{a}+x\mathfrak{b}$. 令 $f=y/x$ 即可. □

注 2.14. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 对任何理想的商一定是主理想环. 这是因为根据中国剩余定理我们只需要考虑对素理想 $\mathfrak{p}$ 的幂的商, 而我们知道 ([2, Proposition 10.15]) $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n=\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$, 右边的 $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}$ 的 $\mathfrak{p}$-进完备化, 本身就是主理想整环.*

至此, 我们在数域 K 上构造了两个群 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 和 $K_0(\mathcal{O})$, 并且各自决定了其结构. 我们可以进一步考虑这两个群之间的关系.

引理 2.15. *行列式映射 $\det: K_0(\mathcal{O})\to\mathrm{Pic}(\mathcal{O}),[M]\mapsto\bigwedge^{\mathrm{rk}(M)}M$ 是群同态.*

证明. 只需证明对有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M,N 有 $\bigwedge^{m+n}(M\oplus N)\simeq\bigwedge^m M\otimes_\mathcal{O}\bigwedge^n N$, 其中 $m=\mathrm{rk}(M)$, $n=\mathrm{rk}(N)$. 令 $\kappa:\bigwedge^m M\otimes_\mathcal{O}\bigwedge^n N\to\bigwedge^{m+n}(M\oplus N),(a_1\wedge...\wedge a_m)\otimes(b_1\wedge...\wedge b_n)\mapsto(a_1,0)\wedge...\wedge(a_m,0)\wedge(0,b_1)\wedge...\wedge(0,b_n)$. 由于 $(x,y)\mapsto x\wedge y$ 双线性, κ 定义良好. 又对任何 $(a_1,b_1)\wedge...\wedge(a_{m+n},b_{m+n})\in\bigwedge^{m+n}(M\oplus N)$, 我们有

$$(a_1,b_1)\wedge...\wedge(a_{m+n},b_{m+n})=\sum_{I\subset\{1,2,...,m+n\},\#T=m}\varepsilon_T\big(\wedge_{i\in T}(a_i,0)\wedge_{i\notin T}(0,b_i)\big)$$

其中 $\varepsilon_T\in\{1,-1\}$. 因此我们可以定义映射满足

$$\wedge_{i\in T}(a_i,0)\wedge_{i\notin T}(0,b_i)\mapsto\wedge_{i\in T}a_i\otimes\wedge_{i\notin T}b_i$$

这就给出 κ 的逆. □

观察到如果 $\mathrm{rk}(M)=1$, 那么 $\det[M]=M$, 所以 $\det$ 是满的; 而显然有 $\det[\mathcal{O}^{\oplus n}]=\mathcal{O}$. 因为 $K_0(\mathcal{O})$ 商去由 $[\mathcal{O}]$ 生成的子群 (同构于 $\mathbb{Z}$) 正是 $I(\mathcal{O})$, 所以 $\det$ 诱导出映射 $I(\mathcal{O})\to\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$, 我们仍然把它记为 $\det$.

命题 2.16. *$\det: I(\mathcal{O})\to\mathrm{Pic}(\mathcal{O}),[M]-\mathrm{rk}(M)[\mathcal{O}]\mapsto\det M$ 是同构, 从而 $\mathrm{id}\oplus\det:\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})\to\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 是同构.*

证明. 考虑 $\lambda:\mathrm{Pic}(\mathcal{O})\to I(\mathcal{O}),\mathfrak{a}\mapsto[\mathfrak{a}]-[\mathcal{O}]$, 据引理2.12 这是一个群同态. 简单的计算表明 $\det\circ\lambda=\mathrm{id}_{\mathrm{Pic}(\mathcal{O})}$ 且 $\lambda\circ\det=\mathrm{id}_{I(\mathcal{O})}$, 所以 $\det$ 是同构. □

作为推论, 注意到 $\det\circ\lambda=c_1$, 我们有

推论 2.17. *$\mathrm{rk}\oplus\det:K_0(\mathcal{O})\to\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 是同构.*

2.2 Arakelov 理想和度量 $\mathcal{O}$-模

我们下面叙述由 S. Arakelov 在他于 1974 年的文章 [1] 当中所提出的观点. 就像一个 Riemann 曲面上的每一个点都给出了一个其亚纯函数域上的赋值一样, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 上的每一个点 (即 $\mathcal{O}$ 的素理想) 也对应着一个 K 上的赋值, 因此 K 应当被看作是 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 上的函数域. 然而在数域上不止有这些由素理想所给出的非 Archimedean 赋值, 还有由复嵌入所给出的 Archimedean 赋值. 精确地说, 我们回顾下面有关赋值的事实, 它的证明可见于数论教科书, 如 [3, Chapter II, 3].

Theorem. (A. Ostrowski) 对于数域 K, 下面的三种不重复且不遗漏地列出了 K 上所有互不等价的赋值:

1) 由素理想 $\mathfrak{p}$ 所诱导的非 Archimedean 赋值 $\nu_{\mathfrak{p}}$;
2) 由实嵌入 $\sigma : K \to \mathbb{R}$ 所诱导的 Archimedean 赋值 $\nu_\sigma : f \mapsto -\log|\sigma f|$;
3) 由复嵌入 $\sigma : K \to \mathbb{C}$ 及其共轭所诱导的同一个 Archimedean 赋值 $\nu_\sigma : f \mapsto -\log|\sigma f|$.

为了术语的统一, 我们将数域 K 的一个赋值的等价类称为 K 的一个位. 一个有限位是指非 Archimedean 赋值的等价类, 它相当于素理想. 一个无穷位是指一个 Achimedean 赋值的等价类, 它相当于嵌入 (商去共轭) $\sigma : K \to \mathbb{C}$, 记作 $\sigma|\infty$. 例如 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的两个实嵌入 id 和 $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ 是两个互不相同的实无穷位, 而 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 的两个复嵌入 id 和复共轭则是同一个复无穷位.

在上一小节中, 我们的考虑是只针对有穷位的, 而 Arakelov 的理论要求我们同时纳入无穷位的考虑, 其具体形式是考虑装备了复内积的所谓 Hermitian 向量丛. 在本文的语境下, 我们将要考虑装备了 Hermitian 度量 (尽管我们使用这个名字, 但它并不是 M 上的度量) 的 $\mathcal{O}$-模 M, 并且在上一小节的基础上重新建立这种装备了度量的 $\mathcal{O}$-模的等价类群的结构.

对有限生成 $\mathcal{O}$-模 M 及 $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, 用 $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O},\sigma} \mathbb{C}$ 表示复线性空间 $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$, 其中 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathcal{O}$-模的数乘作用以 $\mathcal{O} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (a, z) \mapsto \sigma(a)z$ 给出. 此外, 同态 $f : M \to N$ 自然地诱导 $f_\sigma : M_\sigma \to N_\sigma$.

一个直接的观察是: Frobenius 映射 $F : M_\sigma \to M_{\overline{\sigma}}, m \otimes z \mapsto m \otimes \overline{z}$ 是同构.

定义 2.18. *有限生成 $\mathcal{O}$-模 M 上的一个 Hermitian 度量 $(\langle -, - \rangle_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})}$ 是指在每一个复线性空间 M_σ 上装备 F-不变的复内积 $\langle -, - \rangle_\sigma : M_\sigma \times M_\sigma \to \mathbb{C}$, 即对任何 $x, y \in M_\sigma$ 有 $\overline{\langle x, y \rangle_\sigma} = \langle Fx, Fy \rangle_\sigma$. 装备有 Hermitian 度量的有限生成 $\mathcal{O}$-模被称为度量 $\mathcal{O}$-模.*

定义 2.19. *设 M, N 是度量 $\mathcal{O}$-模, 如果对每个 σ 都有 $\langle x, y \rangle_{M,\sigma} = \langle f_\sigma(x), f_\sigma(y) \rangle_{N,\sigma}$, 则称 f 等距. 称度量 $\mathcal{O}$-模 M, N 等距同构, 如果 M, N 之间存在等距的 $\mathcal{O}$-模同构.*

根据 F-不变的假设, 之前所说的 Frobenius 映射是等距同构. 这保证了一对相互共轭的复嵌入处的内积空间的结构总是一样的, 因此我们所定义的 Hermitian 度量的确只依赖于无穷位而不是嵌入.

为了完成和上一小节所类似的理论, 我们需要定义两个度量 $\mathcal{O}$-模的直和、张量积和行列式.

引理 2.20. *设 M, N 是 $\mathcal{O}$-模, 那么我们有自然的 $\mathcal{O}$-模同构 $(M\oplus N)_\sigma \simeq M_\sigma \oplus N_\sigma$, $(M\otimes_{\mathcal{O}} N)_\sigma \simeq M_\sigma \otimes_{\mathcal{O}} N_\sigma$, $\det(M_\sigma)\simeq (\det M)_\sigma$,*

证明. 对于任何 $\mathcal{O}$-模 P, 我们有 $P\otimes_{\mathcal{O}}(M\oplus N) = (P\otimes_{\mathcal{O}} M)\oplus(P\otimes_{\mathcal{O}} N)$, $M\otimes_{\mathcal{O}} N\otimes_{\mathcal{O}} P = (M\otimes_{\mathcal{O}} P)\otimes_{\mathcal{O}}(N\otimes_{\mathcal{O}} P)$, $\bigwedge^m M\otimes_{\mathcal{O}} P = (\bigwedge^m M)\otimes_{\mathcal{O}}(\bigwedge^m P)$. 本引理无非是张量积的这些性质对于 $P=\mathbb{C}$ 时的特例. □

根据上面的引理, 在 $M\oplus N$, $M\otimes_{\mathcal{O}} N$, $\det M$ 上分别定义:

$$\langle x\oplus u, y\oplus v\rangle_{M\oplus N} = \langle x,y\rangle_M + \langle u,v\rangle_N;$$

$$\langle x\otimes u, y\otimes v\rangle_{M\otimes N} = \langle x,y\rangle_M \langle u,v\rangle_N;$$

$$\langle \wedge_{i=1}^n x_i, \wedge_{i=1}^n y_i\rangle_{\det M} = \det(\langle x_i, y_j\rangle_M)_{1\le i,j\le n};$$

这些都是 F-不变的复内积, 从而 $M\oplus N$, $M\otimes_{\mathcal{O}} N$, $\det M$ 依照这些定义形成度量 $\mathcal{O}$-模.

作为度量 $\mathcal{O}$-模的最特殊情况, 我们考虑一个分式理想上的度量结构. 设 $\mathfrak{a}$ 是普通的分式理想, 这种情况下 $\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{a}\otimes_{\mathcal{O},\sigma}\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}$. 我们知道 $\mathbb{C}$ 上的一个复内积一定按照形式 $(x,y)\mapsto rx\overline{y}$ 给出, 其中 r 是某个正实数. 这提示我们作下面的定义.

定义 2.21. *$\mathcal{O}$ 的一个 Arakelov 理想是指形式的记号 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_f\mathfrak{a}_\infty$, 其中 $\mathfrak{a}_f$ 是普通的分式理想, $\mathfrak{a}_\infty\in\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}$. 由 $x\in\mathcal{O}$ 生成的主 Arakelov 理想是指 $x\mathcal{O}\times(\nu_{\mathfrak{p}}(x))_{\mathfrak{p}|\infty}$. Arakelov 理想类群 $\widehat{Cl}_K$ 是指 $\mathcal{O}$ 的 Arakelov 理想群商去主 Arakelov 理想的子群.*

按照之前一段的叙述, 我们规定一个 Arakelov 理想具有度量 $\mathcal{O}$-模结构如下: $\langle x,y\rangle_\sigma = \mathrm{e}^{2\nu_\sigma}\rho_\sigma(x)\overline{\rho_\sigma(y)}$, 其中 $\mathcal{O}$-模同构 $\rho_\sigma:\mathfrak{a}\otimes_\sigma\mathbb{C}\to\mathbb{C}, x\otimes z\mapsto\sigma(x)z$. 普通的分式理想 $\mathfrak{a}$ 装备平凡度量 $\mathfrak{a}_\infty=0$ 成为 Arakelov 理想.

注 2.22. *这样的人为规定保证了 Arakelov 意义下的理想类群和 Picard 群依然等同, 我们将在命题2.26的证明当中看到这一点.*

对应于普通的除子类群, 我们也引进 Arakelov 除子类群.

定义 2.23. *$\mathcal{O}$ 的 Arakelov 除子群是拓扑群 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})=\bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})}\mathbb{Z}\times\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}$, 它的拓扑是装备离散拓扑的 $\bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})}\mathbb{Z}$ 和装备欧氏拓扑的 $\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}$ 的乘积. 主除子是指形如 $\sum_{\mathfrak{p}}\nu_{\mathfrak{p}}(f)\mathfrak{p}$ 的除子, 其全体形成 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 的一个子群, Arakelov 除子类群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})$ 被定义为 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 商去主除子并装备相应的商拓扑.*

和只考虑有限位时的情况一样, 映射 $\mathrm{div}:\widehat{Cl_K}\to\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O}),\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}}\mapsto(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ 是同构. 在除子类群上我们有经典的同态 $\deg:\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})\to\mathbb{R},(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}\mapsto\sum_{\mathfrak{p}}\nu_{\mathfrak{p}}\log\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, 这里 $\mathfrak{N}$ 是指理想的绝对范数, 即在对有限位的情况 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})=[\mathcal{O}:\mathfrak{p}]$, 对于无穷位的情况, 我们依据此嵌入是实的或复的定义它为 e 或者 e^2. 对于 $\mathfrak{a}\in\widehat{Cl_K}$, 我们也记 $\deg(\mathfrak{a})=\deg(\mathrm{div}(\mathfrak{a}))$.

我们再次引进 Arakelov 意义下的 Picard 群和 Grothendieck 群. 这两个群到通常意义下的 Picard 群和 Grothendieck 群各自有通过“遗忘度量结构”所提供的满射.

定义 2.24. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 的 Arakelov Picard 群 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 是指可逆度量 $\mathcal{O}$-模的等距同构类装备 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 形成的群.*

定义 2.25. *Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 的 Arakelov Grothendieck 群 $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 定义为 $\widehat{\mathcal{F}}_0/\widehat{\mathcal{R}}_0$, 其中 $\widehat{\mathcal{F}}_0$ 是投射度量 R-模的等距同构类生成的自由 Abel 群, $\widehat{\mathcal{R}}_0$ 是由 $\widehat{\mathcal{F}}_0$ 中形如 M_1-M+M_2 的元素生成的子群, 其中 M 是 M_1 和 M_2 作为度量 $\mathcal{O}$-模的直和. 一个有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M 在 $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 中的等价类记作 $[M]$. $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 装备乘法 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 形成交换环.*

此外, 计算投射模的秩的映射通过遗忘度量结构定义在整个 Arakelov Grothendieck 群上成为同态 $\mathrm{rk}:\widehat{K}_0(\mathcal{O})\to\mathbb{Z}$. 和仅考虑有限位时相同地, 我们记 $\widehat{I}(\mathcal{O})=\ker(\mathrm{rk})$, 以及 $\mathbb{Z}\oplus\widehat{I}(\mathcal{O})=\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$.

本小节剩下的内容旨在验证我们在之前已经建立的 Picard 群和 Grothendieck 群的结构在 Arakelov 的意义下仍然是成立的. 我们先来证明可逆度量 $\mathcal{O}$-模依旧等同于 Arakelov 理想.

命题 2.26. $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})=\widehat{Cl}_K$.

证明. 两个 Arakelov 理想作为度量 $\mathcal{O}$-模等距同构当且仅当它们相差一个主 Arakelov 理想. 必要性是显然的; 充分性: 设有等距同构 $h:\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}$, 那么有 $\mathcal{O}$-模同构 $h:\mathfrak{a}_f\to\mathfrak{b}_f$, 因此存在 $x\in K^\times$ 使得 $h:a\mapsto xa$. 设 $\mathfrak{a}_\infty=(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|\infty}$, $\mathfrak{b}_\infty=(\mu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|\infty}$, 那么根据 h 等距我们得到

$$\mathrm{e}^{2\nu_\sigma}\rho_\sigma(a)\overline{\rho_\sigma(b)}=\langle a,b\rangle_{\mathfrak{a}}=\langle xa,xb\rangle_{\mathfrak{b}}=\mathrm{e}^{2\mu_\sigma}\rho_\sigma(xa)\overline{\rho_\sigma(xb)}=\mathrm{e}^{2\mu_\sigma}|\sigma(x)|^2\rho_\sigma(a)\overline{\rho_\sigma(b)}.$$

因此 $\nu_\sigma=\mu_\sigma+\log|\sigma x|$ 即 $(x)_\infty\mathfrak{a}_\infty=\mathfrak{b}_\infty$, 总之 $x\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

两个 Arakelov 理想的乘积等距同构于它们作为度量 $\mathcal{O}$-模的张量积. 这由度量 $\mathcal{O}$-模的张量积的定义直接得到.

任何可逆度量 $\mathcal{O}$-模同构于某个 Arakelov 理想. 设 M 是可逆度量 $\mathcal{O}$-模. 在引理2.7 已经证明 M 的不带度量结构的部分同构于某个分式理想 $\mathfrak{a}_f$. 由于 M 秩 1, $M \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$, 因此我们在定义 Arakelov 理想前的那一段论述仍然成立, 即可以选取合适的实数组 $\mathfrak{a}_\infty$ 使得 M 到 $\mathfrak{a}_f$ 的同构成为等距同构.

综合以上三个部分, 将一个 Arakelov 理想视为一个可逆度量 $\mathcal{O}$-模的映射给出了从 Arakelov 理想群到 Arakelov Picard 群的满同态, 并且其核恰是主 Arakelov 理想, 这便完成了证明. □

关于 Arakelov Picard 群最简单的例子是 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ 的情况. 因为 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环, 而且只有一个实无穷位, 一个 $\mathbb{Z}$ 的 Arakelov 理想形如 $(n\mathbb{Z}, x)$, 而 $n \in \mathbb{Z}$ 给出的主 Arakelov 理想是 $(n\mathbb{Z}, \log n)$, 所以上面的 Arakelov 理想等价于 $(\mathbb{Z}, x - \log n)$. 由于 $x \in \mathbb{R}$ 是任意选取的, 我们实际上看到任何一个 Arakelov 理想都等价于一个形如 $(\mathbb{Z}, x)$ 的 Arakelov 理想, 也就是说 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{R}$.

接下来我们决定 Arakelov Grothendieck 群的结构. 我们现在需要在 Arakelov 的语境下重新建立在决定 $K^0(\mathcal{O})$ 的结构时发挥主要作用的引理2.9和2.12.

引理 2.27. *任何非零的投射度量 $\mathcal{O}$-模 M 同构于可逆度量 $\mathcal{O}$-模的直和.*

证明. 对于投射度量 $\mathcal{O}$-模 M, 在引理2.9的证明中记 $f = \pi \circ \iota$, 那么作为普通 $\mathcal{O}$-模我们有 $\ker(f) \oplus f(M) \simeq M$. 对 $\ker(f) \subset M$ 使用归纳假设知道它同构于可逆度量 $\mathcal{O}$-模的直和. 选取某些实数组 $f(M)_\infty$ 使得对每个 $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, 1 维复线性空间 $f(M)_\sigma$ 与 $\ker(f)_\sigma$ 是正交直和, 那么 M 同构于 $f(M)$ 与 $\ker(f)$ 作为度量 $\mathcal{O}$-模的直和. □

引理 2.28. *对任何 $\mathcal{O}$ 的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, 在 $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 中成立着 $([\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}])([\mathfrak{b}] - [\mathcal{O}]) = 0$, 其中 $\mathcal{O}$ 装备平凡度量.*

证明. 我们首先证明 $[\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}_f] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_f] + [\mathcal{O}]$. 事实上我们有显然的普通 $\mathcal{O}$-模正合列 $0 \to \mathfrak{b}_f \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{b} \to 0$ 以及度量 $\mathcal{O}$-模的正合列 $0 \to \mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f\mathfrak{a}_\infty \to \mathfrak{a}_f\mathfrak{a}_\infty \to \mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f/\mathfrak{a}_f \to 0$, 其中映射 $\mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f\mathfrak{a}_\infty \to \mathfrak{a}_f\mathfrak{a}_\infty$ 等距, 它的像的正交补被等距地映到具有平凡度量的 $\mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f/\mathfrak{a}_f$. 利用引理2.13, 我们可以假设 $\mathfrak{a}_f$ 和 $\mathfrak{b}_f$ 是互素的整理想, 此时 $\mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f/\mathfrak{a}_f \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{b}_f$, 从而证明了这个等式.

我们再来证明 $[\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\infty] + [\mathfrak{b}_f 0]$. 固定一个 K 的复嵌入 σ, 设 $\mathfrak{a}_\infty$ 和 $\mathfrak{b}_\infty$ 的对应分量分别是 α 和 β.

为了叙述方便, 我们用记号 $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ 来表示 $\mathfrak{a}_f \oplus \mathfrak{b}_f$ 上的内积 $\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle_\sigma = s x_1 \overline{x_2} + t x_1 \overline{y_2} + u x_2 \overline{y_1} + v x_2 \overline{y_2}$, 的并且以 $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} s' & t' \\ u' & v' \end{pmatrix}$ 来表示 $\mathfrak{a}_f \oplus \mathfrak{b}_f$ 分别装备两个内积得到的复线性空间等距同构. 因为这是一个内积, 应有 s, t 为正实数而 u, v 互相共轭, 且 $sv - ut > 0$.

考虑 $\mathcal{O}$-模的正合列

$$0 \to \mathfrak{a}_f \to \mathfrak{a}_f \oplus \mathfrak{b}_f \to \mathfrak{b}_f \to 0.$$

为 $\mathfrak{a}_f$ 装备 α, $\mathfrak{a}_f \oplus \mathfrak{b}_f$ 装备 $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \overline{\gamma} & \beta \end{pmatrix}$. 因为 $\langle a \oplus 0, x \oplus y \rangle_\sigma = \alpha a \overline{x} + \gamma a \overline{y}$, 所以 $\mathfrak{a}_\sigma$ 以 $\{a \oplus 0 : a \in \mathfrak{a}_\sigma\}$ 嵌入 $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b})_\sigma$ 的子空间的正交补是 $\{x \oplus y : \alpha x + \overline{\gamma} y = 0\}$. 这个正交补到 $\mathfrak{b}_f$ 有同构 $-\frac{\overline{\gamma}}{\alpha} b \oplus b \mapsto b$, 而

$$\langle -\frac{\overline{\gamma}}{\alpha} b \oplus b, -\frac{\overline{\gamma}}{\alpha} b \oplus b \rangle = \alpha \frac{\overline{\gamma}}{\alpha} b \frac{\gamma}{\alpha} \overline{b} - \gamma \frac{\overline{\gamma}}{\alpha} b \overline{b} - \overline{\gamma} b \frac{\gamma}{\alpha} \overline{b} + \beta b \overline{b} = (\beta - \frac{\overline{\gamma}\gamma}{\alpha}) b \overline{b},$$

所以当我们在 $\mathfrak{b}_f$ 的对应分量装备实数 $\beta - \frac{\overline{\gamma}\gamma}{\alpha}$ 时, 上面的 $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ 成为正交直和, 因此

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \overline{\gamma} & \beta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \frac{\overline{\gamma}\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

在这个关系中以 $\beta + \frac{\overline{\gamma}\gamma}{\alpha}$ 代替原来的 β, 我们得到

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \overline{\gamma} & \beta + \frac{\overline{\gamma}\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

将上面讨论中 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 的地位互换, 我们得到对称的结果:

$$\begin{pmatrix} \alpha' + \frac{\overline{\gamma}\gamma}{\beta'} & \gamma \\ \overline{\gamma} & \beta' \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}.$$

令

$$\alpha' = \alpha - \frac{\gamma\overline{\gamma}}{\beta + \frac{\gamma\overline{\gamma}}{\alpha}} = \frac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\gamma\overline{\gamma}}{\alpha}}, \beta' = \beta + \frac{\gamma\overline{\gamma}}{\alpha},$$

那么上面两式左边相等, 从而

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\gamma\overline{\gamma}}{\alpha}} & 0 \\ 0 & \beta + \frac{\gamma\overline{\gamma}}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因此对任何实数 $\delta \geq \beta$, 我们有

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

而由 $\mathfrak{a}_f \oplus \mathfrak{b}_f$ 的自同构 $x \oplus y \mapsto \sqrt{\delta} x \oplus 1/\sqrt{\delta} y$ 可以看出

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

也就是说 $[\mathfrak{a}_f\mathfrak{a}_\infty] + [\mathfrak{b}_f\mathfrak{b}_\infty] = [\mathfrak{a}_f\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty] + [\mathfrak{b}_f 0]$, 这正是所需的结论.

在第一个等式当中取 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_\infty$, 我们得到 $[\mathfrak{b}_f] + [\mathfrak{b}_\infty] = [\mathfrak{b}] + [\mathcal{O}]$. 因此我们有 $[\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\infty] + [\mathfrak{b}_f] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\infty] + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_f] + [\mathcal{O}] - [\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}]([\mathfrak{b}] + [\mathcal{O}]) + [\mathcal{O}] - [\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathcal{O}]$. □

利用这两个引理, 我们与仅考虑有限位时完全相同地得到 $\widehat{I}(\mathcal{O})$ 由形如 $[\mathfrak{a}] - [\mathcal{O}]$ 的元素生成, 其中 $\mathfrak{a}$ 是可逆度量 $\mathcal{O}$-模. 我们以 "陈特征标" $\mathrm{ch} = \mathrm{rk} \oplus c_1 : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 把 $\widehat{K}_0\mathcal{O}$ 的乘法翻译到 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 上, 那么 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 的乘法运算满足 $(r,\eta)(s,\xi) = (rs, r\xi + s\eta)$, 其中 $r, s \in \mathbb{Z}$, $\eta, \xi \in I(\mathcal{O})$.

最后我们重复上一节的过程并且说明 Arakelov Picard 群和 Arakelov Grothendieck 群之间的关系2.17仍然成立, 其过程主要是计算验证我们在上一小节所建立的 $\mathcal{O}$-模之间的映射事实上等距.

引理 2.29. $\det : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}), [M] \mapsto \bigwedge^{\mathrm{rk}(M)} M$ *是群同态.*

证明. 只需对投射度量 $\mathcal{O}$-模 M, N 证明在引理2.15 中定义的映射 $\kappa : \det M \otimes_{\mathcal{O}} \det N \to \det(M \oplus N), (a_1 \wedge ... \wedge a_m) \otimes (b_1 \wedge ... \wedge b_n) \mapsto (a_1, 0) \wedge ... \wedge (a_m, 0) \wedge (0, b_1) \wedge ... \wedge (0, b_n)$ 等距, 其中 $m = \mathrm{rk}(M)$, $n = \mathrm{rk}(N)$. 事实上我们有

$$\begin{aligned}
\langle \wedge_{i=1}^m a_i \otimes \wedge_{i=1}^m c_i, \wedge_{i=1}^n b_i \otimes \wedge_{i=1}^n d_i \rangle_{\det M \otimes \det N_\sigma} &= \langle \wedge_{i=1}^m a_i, \wedge_{i=1}^m c_i \rangle_{\det M_\sigma} \langle \wedge_{i=1}^n b_i, \wedge_{i=1}^n d_i \rangle_{\det N_\sigma} \\
&= \det(\langle a_i, c_j \rangle_{M_\sigma})_{1 \le i,j \le m} \det(\langle b_i, d_j \rangle_{N_\sigma})_{1 \le i,j \le n} \\
&= \det \begin{pmatrix} (\langle a_i, c_j \rangle_{M_\sigma})_{1 \le i,j \le m} & 0 \\ 0 & (\langle b_i, d_j \rangle_{N_\sigma})_{1 \le i,j \le n} \end{pmatrix} \\
&= \det(\langle x_i, y_j \rangle_{M \oplus N_\sigma})_{1 \le i,j \le m+n} \\
&= \langle \wedge_{i=1}^{m+n} x_i, \wedge_{i=1}^{m+n} y_i \rangle_{\det(M \oplus N)_\sigma},
\end{aligned}$$

其中对 $1 \le i \le m$, $x_i = (a_i, 0)$, $y_i = (c_i, 0)$; 对 $m+1 \le i \le m+n$, $x_i = (0, b_{i-m})$, $y_i = (0, d_{i-m})$. □

命题 2.30. $\det : \widehat{I}(\mathcal{O}) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ *是同构, 从而* $\mathrm{id} \oplus \det : \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z} \oplus \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ *和* $\mathrm{rk} \oplus \det : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ *都是同构.*

证明. 考虑 $\lambda : \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}) \to \widehat{I}(\mathcal{O}), a \mapsto [a] - [\mathcal{O}]$, 据引理2.28 这是同态. 由引理2.27 知 $\widehat{I}(\mathcal{O})$ 由形如 $[M] - \mathrm{rk}(M)$ 的元素生成, 因此 $\det \circ \lambda = \mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}, \lambda \circ \det = \mathrm{id}_{\widehat{I}(\mathcal{O})}$, 从而 det 是同构. 命题的后面两部分自动成立. □

3 Riemann-Roch 理论

3.1 判别式与差积理想

正式开始之前, 我们需要介绍 Dedekind 环的有限扩张 $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ 的判别式和差积理想的概念. 在经典语境下它们被用作描述扩张的分歧, 但本文引入它们只是为了计算的需要. 我们回顾性质: 当 L/K 是有限可分扩张, 它们的整数环的扩张也是有限的.

记 $n=[L:K]$.

定义 3.1. *差积理想 $D_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ 是指 $\mathcal{O}_L$ 的理想 $\{x\in L:\mathrm{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L)\subset\mathcal{O}_K\}$ 之逆.*

由于对加法、$\mathcal{O}_L$ 的数乘封闭, $\{x\in L:\mathrm{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L)\subset\mathcal{O}_K\}$ 的确是 $\mathcal{O}_L$ 的分式理想, 而且它包含 $\mathcal{O}_L$, 因此作为其逆 $D_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ 的确是 $\mathcal{O}_L$ 的理想.

定义 3.2. *判别式 $d_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ 是指由所有形如 $\mathrm{discr}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\det((\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha_j))_{1\le i,j\le n})$ 的元素所生成的 $\mathcal{O}_K$ 的理想, 其中 $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ 是 L 作为 K-线性空间的一组含在 $\mathcal{O}_K$ 的基.*

如果不致混淆, 我们将直接把判别式和差积理想记作 $d_{L/K}$ 和 $D_{L/K}$. 对于此扩张是 $K/\mathbb{Q}$ 的情况, 判别式对应着一个确定的整数. 由于我们将不用到它的符号, 因此只考虑它成为 $\mathbb{Z}$ 的理想, 并且将这个理想的正的生成元记作 $|d_K|$. 例如当 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D\in\mathbb{Z}$ 无平方因子时, 熟知当 D 模 4 余 1 时它的整数环有一组整基 $1,(\sqrt{D}+1)/2$, 其余情况有整基 $1,\sqrt{D}$, 因此容易算出它们的判别式的绝对值分别是 $|D|$ 和 $4|D|$.

对于判别式而言, 一个简单的观察是我们可以写 $\mathrm{Tr}_{L/K}(xy)=\sum_{i=1}^n\sigma_i(x)\sigma_i(y)$, 其中 $(\sigma_i)_{1\le i\le n}$ 是 L 到 $\mathbb{C}$ 的 K-嵌入. 这样, 矩阵 $(\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha_j))_{1\le i,j\le n}$ 可以看作是矩阵 $(\sigma_i\alpha_j)_{1\le i,j\le n}$ 及其转置的乘积. 特别地, 我们有 $d_{L/K}=\big(\det(\sigma_i\alpha_j)_{1\le i,j\le n}\big)^2$.

为了证明定理3.12, 我们需要知道判别式和差积理想的关系: 前者是后者在范映射 $\mathrm{N}_{L/K}$ 下的像. 这个性质的证明需要局部地完成, 因此首先来证明判别式和差积理想都是在局部化之下保持的.

引理 3.3. *设 $S\subset\mathcal{O}_K$ 是乘性子集, 那么*

1) $S^{-1}d_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}=d_{S^{-1}\mathcal{O}_L/S^{-1}\mathcal{O}_K}$;

2) $S^{-1}D_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}=D_{S^{-1}\mathcal{O}_L/S^{-1}\mathcal{O}_K}$.

证明. 1) 我们只需对一个生成元验证. 设 $x\in S^{-1}d_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ 具有形式 $\mathrm{discr}(\alpha_1,...,\alpha_n)/s$ 对某些 $s^{-1}\in S$, 那么 $x=s^{2n-1}\mathrm{discr}(\alpha_1/s,...,\alpha_n/s)\in d_{S^{-1}\mathcal{O}_L/S^{-1}\mathcal{O}_K}$, 所以 $S^{-1}d_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}\subset d_{S^{-1}\mathcal{O}_L/S^{-1}\mathcal{O}_K}$.

反过来对 $x\in d_{S^{-1}\mathcal{O}_L/S^{-1}\mathcal{O}_K}$, 设 $x=\mathrm{discr}(\alpha_1,...,\alpha_n)$. 我们取 s 是诸 $\alpha_i\in S^{-1}\mathcal{O}_L$ 的一个公分母, 那么 $x=\mathrm{discr}(s\alpha_1,...,s\alpha_n)/s^{2n}\in S^{-1}d_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$.

2) 对有限生成 $\mathcal{O}_K$-模 $M \subset L$ 我们记 $M^* = \{x \in L : \mathrm{Tr}_{L/K}(xM) \subset \mathcal{O}_K\}$, 那么 $D_{L/K} = (\mathcal{O}_L^*)^{-1}$. 对分式理想取逆显然是在局部化下保持的, 我们只需证明 M^* 这个操作也被局部化保持, 即 $(S^{-1}M)^* = S^{-1}(M^*)$.

选择 M 的生成元 $(m_i)_{1\le i\le r}$. 对任何 $x \in (S^{-1}M)^*$, 我们有 $\mathrm{Tr}_{L/K}(xS^{-1}M) \subset S^{-1}\mathcal{O}_K$. 取 s 是 $\mathrm{Tr}_{L/K}(xm_i)$ 的一个公分母, 那么 $\mathrm{Tr}_{L/K}(sxm_i) \in \mathcal{O}_K$, 从而 $sx \in M^*$, $x \in S^{-1}M^*$.

反过来设 $x \in S{-}1M^*$, 那么存在 $s \in S$ 使得 $sx \in M^*$, 从而 $\mathrm{Tr}_{L/K}(sxm_i) \in \mathcal{O}_K$. 由此推出 $\mathrm{Tr}_{L/K}(xm_i) \in S^{-1}\mathcal{O}_K$. □

命题 3.4. $d_{L/K} = \mathrm{N}_{L/K}(D_{L/K})$.

证明. 透过局部化, 我们假设 $\mathcal{O}_K = A$ 和 $\mathcal{O}_L = B$ 是离散赋值环, 特别地, 它们是主理想整环. 我们仍然用 L 和 K 表示它们的分式域. B 作为 A 模当然是无挠的, 因此自由, 也就是说存在 B 的一组 A-基 $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$, 这也是 L 作为 K-线性空间的一组含在 A 中的基. 所以 $d_{B/A}$ 是由 $\mathrm{discr}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ 所生成的主理想. 因为它们线性无关, 映射 $\mathrm{T}_i : x \mapsto \alpha_i x$ 形成 $B^\vee$ 的一组基, 我们可以取一组对偶基 $\alpha_i^\vee$ 满足 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha_j^\vee)$ 仅在 $i = j$ 时取 1, 其余情况全取 0. 这些 $\alpha_i^\vee$ 生成 $\{x \in L : \mathrm{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L)$.

设 $\beta \in L$ 生成 $\{x \in L : \mathrm{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\}$, 那么 $\mathrm{N}_{L/K}(\beta) = \mathrm{N}_{L/K}(D_{B/A})^{-1}$, 而且 $(\beta\alpha_i)_{1\le i\le n}$ 也形成 $\{x \in L : \mathrm{Tr}_{L/K}(x\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\}$ 的一组 $\mathcal{O}_K$-基, 从而 $\mathrm{discr}(\beta\alpha_1, ..., \beta\alpha_n)$ 和 $\mathrm{discr}(\alpha_1^\vee, ..., \alpha_n^\vee)$ 生成相同的理想.

由于

$$(\sigma_i\alpha_j)_{1\le i,j\le n}(\sigma_j\alpha_i^\vee)_{1\le i,j\le n} = (\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha_j^\vee))_{1\le i,j\le n}$$

是单位矩阵, 我们得到 $\mathrm{discr}(\alpha_1^\vee, ..., \alpha_n^\vee) = d_{B/A}^{-1}$. 类似的方法可以算出

$$\mathrm{discr}(\beta\alpha_1, ..., \beta\alpha_n) = \mathrm{N}_{L/K}(\beta)^2\mathrm{discr}(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

所以

$$\mathrm{N}_{L/K}(D_{B/A})^2 = (\mathrm{discr}(\alpha_1, ..., \alpha_n))(\mathrm{discr}(\beta\alpha_1, ..., \beta\alpha_n))^{-1} = (\mathrm{discr}(\alpha_1, ..., \alpha_n))^2.$$

根据 Dedekind 环的性质, 我们由此推出 $\mathrm{N}_{L/K}(D_{B/A}) = (\mathrm{discr}(\alpha_1, ..., \alpha_n)) = d_{B/A}$. □

除此以外, 我们还需要建立一个判别式的性质, 它也将被用于定理3.12的证明.

命题 3.5. 我们有度量 $\mathcal{O}_K$-模的等距同构 $d_{L/K} = \det(\mathcal{O}_L) \otimes_{\mathcal{O}_K} \det(\mathcal{O}_L)$, 其中判别式 $d_{L/K}$ 装备平凡度量.

证明. 考虑映射 $T:\det(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathcal{O}_K}\det(\mathcal{O}_L)\to d_{L/K},\wedge_{i=1}^{[L:K]}a_i\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i\mapsto\det(\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib_j))$, 由 $d_{L/K}$ 的定义这显然是满射, 由两边都是秩 1 的知道这也是单射. 而我们有

$$
\begin{aligned}
&\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}a_i\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}c_i\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\det(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathcal{O}_K}\det(\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\det(\mathcal{O}_L),\sigma}\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}a_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}c_i\rangle_{\det(\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\det((\langle a_i,c_j\rangle_{\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\langle b_i,d_j\rangle_{\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(a_i)\overline{\tau(c_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(b_i)\overline{\tau(d_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(a_i)\tau(b_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\sum_{\tau|\sigma}\overline{\tau(c_i)\tau(d_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(a_ib_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\sum_{\tau|\sigma}\overline{\tau(c_id_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\overline{\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}\tau(c_id_j))_{1\le i,j\le[L:K]})}\\
=&\langle\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib_j))_{1\le i,j\le[L:K]}),\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}(c_id_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\rangle_{d_{L,K},\sigma}
\end{aligned}
$$

于是 T 是等距同构. □

3.2 Grothendieck-Riemann-Roch

现在我们要考虑当 L/K 是数域的有限扩张时, 它们各自的 Arakelov Grothendieck 群在该扩张下的行为, 并且得到 Grothendieck-Riemann-Roch 定理对数域而言的类似版本.

我们首先定义一对 $\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K)$ 和 $\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)$ 之间的同态.

定义 3.6. *$i_*:\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\to\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K),[M]_L\mapsto[M]_K$ 是将一个 (有限生成) 度量 $\mathcal{O}_L$-模视为一个 $\mathcal{O}_K$-模诱导的 Grothendieck 群的映射. 此映射的像的度量结构为: 对于 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ 定义 $\langle x,y\rangle_\sigma=\sum_{\tau|\sigma}\langle x,y\rangle_\tau$, 其中 $\tau|\sigma$ 是指 τ 是 L 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入, 而且其限制在 K 上是 σ.*

定义 3.7. *$i^*:\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K)\to\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L),[M]_K\mapsto[M\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L]_L$, 其中 $M\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L$ 的度量结构由自然的同构 $M\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L\otimes_{\mathcal{O}_L,\tau}\mathbb{C}=M\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}$ 给出.*

引理 3.8. *设 M 是投射度量 $\mathcal{O}_L$-模, N 是投射度量 $\mathcal{O}_K$-模, 那么*

$$i_*M\otimes_{\mathcal{O}_K}N=i_*(M\otimes_{\mathcal{O}_L}i^*N).$$

证明. 映射 $f:i_*(M\otimes_{\mathcal{O}_L}(N\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L))\to i_*M\otimes_{\mathcal{O}_K}N,m\otimes(n\otimes x)\mapsto xm\otimes n$ 是 $\mathcal{O}_K$-模同构, 而且

$$\langle x_1m_1\otimes n_1,x_2m_2\otimes n_2\rangle_{i_*M\otimes_{\mathcal{O}_K}N,\sigma}=\langle x_1m_1,x_2m_2\rangle_{i_*M,\sigma}\langle n_1,n_2\rangle_{N,\sigma}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\tau|\sigma} \langle x_1 m_1, x_2 m_2 \rangle_{M,\tau} \langle n_1, n_2 \rangle_{N,\sigma} \\
&= \sum_{\tau|\sigma} \langle m_1, m_2 \rangle_{M,\tau} x_1 \overline{x_2} \langle n_1, n_2 \rangle_{N,\sigma} \\
&= \sum_{\tau|\sigma} \langle m_1, m_2 \rangle_{M,\tau} \langle n_1 \otimes x_1, n_2 \otimes x_2 \rangle_{N \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L, \sigma} \\
&= \langle m_1, m_2 \rangle_{i_* M, \sigma} \langle n_1 \otimes x_1, n_2 \otimes x_2 \rangle_{N \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L, \sigma} \\
&= \langle m_1 \otimes (n_1 \otimes x_1), m_2 \otimes (n_2 \otimes x_2) \rangle_{i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_L} (N \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L)), \sigma}.
\end{aligned}
$$

因此我们有度量 $\mathcal{O}_K$-模的等距同构 $i_*M \otimes_{\mathcal{O}_K} N = i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_L} i^*N)$. □

回顾之前我们已经给出了陈特征标 $\mathrm{ch} : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$. Grothendieck-Riemann-Roch 在数域情况的类似问题应当是对 $\mathcal{O}_L$-模 M 计算 $\mathrm{ch}(i_*M)$. 我们通过 $\mathrm{rk} \oplus \det : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 将这个计算拆成如下两个命题.

命题 3.9. 设 M 是投射度量 $\mathcal{O}_L$-模, 那么 $\mathrm{rk}_K(i_*M) = [L:K]\mathrm{rk}_L(M)$.

证明. 首先说明 $K \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L) = L$. 事实上, 每一个 L 的元素具有 u/v 的形式, 其中 $u, v \in \mathcal{O}_L$. 因为 L/K 有限, 令 $v' \in \mathcal{O}_L$ 是所有 $\sigma(v)$ 的乘积, 其中 σ 是所有 L 到 $\mathbb{C}$ 的不同于恒等映射的 K-嵌入, 那么 $vv' = \mathrm{N}_{L/K}(v) \in \mathcal{O}_K$, 因此在分子和分母同时乘以 v' 就得到每个 L 的元素的分母都可以取为 $\mathcal{O}_K$ 的元素, 换句话说 L 是 $\mathcal{O}_L$ 作为 $\mathcal{O}_K$-模对素理想 0 的局部化, 也就是等式的左边.

我们知道 i_*M 作为 $\mathcal{O}_K$ 上投射模的秩是 K-线性空间 $i_*M \otimes_{\mathcal{O}_K} K)$ 的维数. 又由3.8我们有 $i_*M \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{K}} K = i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{L}} i^*K) = i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{L}} L)$, 所以

$$\mathrm{rk}_K(i_*M) = \dim_K(i_*M \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{K}} K) = [L:K]\dim_L(i_*M \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{K}} K) = \dim_L(M \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{L}} L) = [L:K]\mathrm{rk}_L(M).$$

□

命题 3.10. 设 M 是投射度量 $\mathcal{O}_L$-模, 那么

$$\det_K(i_*M) = \mathrm{N}_{L/K}(\det_L M) \otimes_{\mathcal{O}_K} \det_K(i_*\mathcal{O}_L)^{\mathrm{rk}_L(M)}.$$

证明. 根据引理2.27 和数学归纳法, 只需对 $\mathrm{rk}M = 1$ 即 $M = \mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{O}_L$ 的 Arakelov 理想的情况证明此结论. 为此考虑 $f : \mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{A}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \det_K(i_*\mathcal{O}_L) \to \det_K(i_*\mathfrak{A}), \mathrm{N}_{L/K}(a) \otimes \wedge_{i=1}^{[L:K]} b_i \mapsto \wedge_{i=1}^{[L:K]} ab_i$. 此映射是定义良好的单射, 因为若考虑 L 作为 K-线性空间的自同构 $l_a : x \mapsto ax$, 有 $\wedge_{i=1}^{[L:K]} ab_i = \wedge_{i=1}^{[L:K]} l_a(b_i) = \det(l_a) \wedge_{i=1}^{[L:K]} b_i = \mathrm{N}_{L/K}(a) \wedge_{i=1}^{[L:K]} b_i$. 由于满是局部性质, 我们不妨假设 $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K$

是主理想环且 a 生成 $\mathfrak{A}$, 在此条件下 f 显然是满射. 为证明 f 等距, 记 $\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{A})=\mathfrak{a}$, 并且设 $\mathfrak{A}_\infty=\prod_{\mathfrak{P}|\infty}\mathfrak{P}^{\nu_\mathfrak{P}}$, 那么 $\mathfrak{a}_\infty=\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}$, 其中 $\nu_\mathfrak{p}=\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}\nu_\mathfrak{P}$, $f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}=[L_\mathfrak{P}:K_\mathfrak{p}]$. 对于 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ 设它的无穷位 $\mathfrak{p}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{N}_{L/K}(a)\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\mathrm{N}_{L/K}(c)\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{A})\otimes_{\mathcal{O}_K}\det_K(i_*\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\langle \mathrm{N}_{L/K}(a),\mathrm{N}_{L/K}(c)\rangle_{\mathfrak{a},\sigma}\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\det_K(i_*\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\mathrm{e}^{2\nu_\mathfrak{p}}\mathrm{N}_{L/K}(a)\overline{\mathrm{N}_{L/K}(c)}\det(\langle b_i,d_j\rangle_{i_*\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]}\\
=&\det(\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{2\nu_\tau})_{\tau|\sigma})\det(l_a)\det(l_{\bar c})\det(\langle b_i,d_j\rangle_{i_*\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]}\\
=&\det(\langle ab_i,cd_j\rangle_{i_*\mathfrak{A},\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]}\\
=&\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}ab_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}cd_i\rangle_{\det_K(i_*\mathfrak{A}),\sigma}.
\end{aligned}$$

从而 f 是等距同构. □

经过上面的计算, 我们发现图表

$$\begin{tikzcd}
\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[r, "\mathrm{rk}\oplus\det"] \arrow[d, "i_*"] & \mathbb{Z}\oplus\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}_L) \arrow[d, "{[L:K]\oplus\mathrm{N}_{L/K}}"] \\
\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \arrow[r, "\mathrm{rk}\oplus\det"] & \mathbb{Z}\oplus\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}_K)
\end{tikzcd}$$

并不是交换的. 为此我们不得不引入下面的修正项.

定义 3.11. *Dedekind 环扩张 $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ 的 Todd 类 $\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)$ 是指 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 的元素 $(0,\frac{1}{2}([D_{L/K}]-[\mathcal{O}_L]))$. 不致混淆时我们仍然记 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 为 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)$.*

最后为了过渡到 ch 我们定义 $i_*:\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\to\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K)$ 为使得图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[r, "\mathrm{id}\oplus\det"] \arrow[d, "i_*"] & \mathbb{Z}\oplus\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}_L) \arrow[d, "{[L:K]\oplus\mathrm{N}_{L/K}}"] \\
\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \arrow[r, "\mathrm{id}\oplus\det"] & \mathbb{Z}\oplus\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}_K)
\end{tikzcd}$$

交换的映射. 在这样的记号下, 我们之前建立的各个命题融合成了下面的定理, 其证明无非是简单的计算验证.

定理 3.12. (Grothendieck-Riemann-Roch) 对投射度量 $\mathcal{O}_L$-模 M 有

$$\mathrm{ch}(i_*M) = i_*(\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)\mathrm{ch}(M)),$$

即下面图表交换:

$$\begin{tikzcd} \widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[r, "\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)\mathrm{ch}"] \arrow[d, "i_*"] & \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[d, "i_*"] \\ \widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \end{tikzcd}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned} i_*\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)\mathrm{ch}[M] &= i_*(1, \frac{1}{2}([D_{L/K}] - [\mathcal{O}_L]))(\mathrm{rk}_L M, c_1[M]) \\ &= i_*(\mathrm{rk}_L M, c_1[M] + \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]) \\ &= ([L:K]\mathrm{rk}_L M, i_*c_1[M] + \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[i_*D_{L/K}] - \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[i_*\mathcal{O}_L]), \end{aligned}$$

因此只需证明

$$2c_1(i_*[M]) = i_*(2c_1[M] + \mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]).$$

根据命题2.30 , 只需证明在两边作用 det 后的等式. 再利用命题3.5和3.4, 我们有

$$\begin{aligned} \det(2c_1(i_*[M])) = \det([i_*M])^2 &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)^2 \otimes_{\mathcal{O}_K} \det(i_*\mathcal{O}_L)^{2\mathrm{rk}_L + M}] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)^2 \otimes_{\mathcal{O}_K} d_{L/K}^{\mathrm{rk}_L M}] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)]^2 [d_{L/K}]^{\mathrm{rk}_L M}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det i_*(2c_1[M] + \mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]) &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det(2c_1[M] + \mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]))] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det(M)^2 \det(D_{L/K})^{\mathrm{rk}_L M})] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det(M)]^2 [\mathrm{N}_{L/K}(D_{L/K})]^{\mathrm{rk}_L M}) \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)]^2 [d_{L/K}]^{\mathrm{rk}_L M} \end{aligned}$$

这就完成了证明. $\square$

3.3 数域的 Riemann-Roch 理论

我们来说明上面的定理给出了数域的 Riemann-Roch 理论, 这可以看作是由上一节所叙述的 Grothendeick-Riemann-Roch 限制在扩张 $K/\mathbb{Q}$ 的情况得到的.

回顾紧 Riemann 曲面上经典的 Riemann-Roch 理论. 设 X 是亏格 g 的紧 Riemannn 曲面, 对于亚纯函数 $f: X \to S^2$, 我们记 f 决定的主除子为 $\mathrm{div}(f)$. 对于任何 X 上的除子 D, 我们定义层 $\mathcal{O}_D$ 为把开集 U 对应到 U 上满足 $\mathrm{div}(f) + D|_U \geq 0$ 的亚纯函数 f 全体形成的复线性空间. Riemann-Roch 定理表明

$$\mathrm{dim} H^0(X; \mathcal{O}_D) - \mathrm{dim} H^0(X; \mathcal{O}_{\omega - D}) = \deg(D) + 1 - g,$$

其中 ω 是由亚纯 1-形式决定的典范除子. 利用 Serre 对偶以及层的 Euler-Poincaré 特征 $\chi(\mathscr{F})$ 的记号, Riemann-Roch 定理被等价地写成 $\chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}) + \deg(D)$, 这里 $\mathcal{O}$ 是指全纯函数层.

为了与紧 Riemann 曲面上的理论保持记号的形式上的统一, 我们直接沿用 H^0 的记号, 尽管这在数域情况不能给出上同调理论. 对于 $\mathcal{O}$ 的一个 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, 记

$$H^0(\mathfrak{a}) = \{f \in K^{\times}:\ \nu_{\mathfrak{p}}(f) + \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \geq 0 \text{ 对于所有的位} \mathfrak{p}\}.$$

不难观察到 $H^0(\mathcal{O})$ 即 K 中单位根的全体 $\mu(K)$.

一般而言, $H^0(\mathfrak{a})$ 总是有限的. 这可以由下面的有限性得到.

引理 3.13. *对固定的 $n, M > 0$, 不超过 n 次代数整数当中只有至多有限多个数 θ 满足 $|\sigma(\theta)| \leq M$ 对任何 $\mathbb{Q}(\theta)$ 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ.*

证明. 对于 $k \leq n$ 次代数整数 θ 取不可约的整系数多项式 $f(X) = X^k + ... + a_1 X + a_0$ 使得 $f(\theta) = 0$, 那么熟知 $f(X) = \prod_\sigma (X - \sigma\theta)$, 从而每一个 f 的系数具有上界 $n! M^n$, 因此 f 只有有限多种选取方法. □

推论 3.14. *对于 $\mathcal{O}$ 的任何 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, $\# H^0(\mathfrak{a}) < \infty$.*

如同在紧 Riemann 曲面上我们计算 H^0 的维数, 数域上 Riemann-Roch 类似问题即计算或估计 $\# H^0(\mathfrak{a})$. 下面定义的数域 K 上的 Euler-Minkowski 特征对应于紧 Riemann 曲面上层的 Euler-Poincaré 特征, 它将导致一个与经典的 Riemann-Roch 公式形式上完全相同的结果.

定义 3.15. *数域 K 的 Euler-Minkowski 特征是指群同态 $\chi_K : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}, [M] \mapsto \deg(\det M)$.*

定理 3.16. (Riemann-Roch I) 对于投射度量 $\mathcal{O}$-模 M, 我们有

$$\chi(i_*M) = \deg(\det M) + \mathrm{rk}_K M \chi(i_*\mathcal{O}),$$

这里 $\chi = \chi_{\mathbb{Q}}$, $i_* : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{K}_0(\mathbb{Z})$ 已经在上面定义. 特别地, 对于 $\mathcal{O}$ 的任何 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, 我们有

$$\chi(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + \chi(\mathcal{O}).$$

证明. 在命题3.10 当中取 $M = \mathfrak{a}$, $L = K$ 和 $K = \mathbb{Q}$, 我们得到 $\det(\mathfrak{a}) = \mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{a}) \otimes_{\mathbb{Z}} \det(i_*\mathcal{O})$. 该等式作用 deg 就是所需的结论. $\square$

为了显式地计算 Euler-Minkowski 特征, 回顾体积的概念. n 秩的投射度量 $\mathbb{Z}$-模 (从而自由) M 以 $a \mapsto a \otimes 1$ 嵌入 $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ 成为一个格子, 它的基本区域是集合 $\Phi = \{\sum_{i=1}^n x_i a_i :\ 0 \leq x_i < 1\}$, 其中 $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ 是 M 的 $\mathbb{Z}$-基. $M_{\mathbb{R}}$ 上的内积是 M 的度量即 $M_{\mathbb{C}}$ 上的复内积的限制, 此内积唯一地决定了 $M_{\mathbb{R}}$ 上的一个 Haar 测度, $\mathrm{vol}(M)$ 被定义为 M 的基本区域的测度.

因为上面的基本区域可以通过 $f : a_i \mapsto e_i$(其中 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的典范的标准正交基) 的线性映射变为 $\mathbb{R}^n$ 的单位正方体, M 的体积就是 M 的一组 $\mathbb{Z}$-基到典范的基的转移矩阵的行列式乘以单位正方体的体积, 后者取决于 M 的度量结构. 根据判别式 d_K 的定义, 我们有 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}) = \sqrt{|d_K|}$.

如果 x 是 1 维实线性空间 $(\det M)_{\mathbb{R}}$ 的一个生成元, 那么 $\mathrm{vol}(M) = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\det M}}$, 从而我们有 $\chi(M) = -\mathrm{log}\mathrm{vol}(M)$. 结合 3.16 我们得到体积的计算公式

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{a}) = \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}),$$

它将在定理4.6的证明被用到.

下面我们将 Euler-Minkowski 特征的等式3.16 翻译成 $\#H^0(\mathfrak{a})$ 的结果. 为此起到关键作用的是如下由 S. Lang 证明的结果扮演 "Serre 对偶" 的角色, 它的证明仅依赖于类数的有限性, 因此不依赖于 Minkowski 格点定理.

定理 3.17. *对于任何的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$,*

$$\#H^0(\mathfrak{a}^{-1}) = \frac{2^r(2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) + \mathrm{O}(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-\frac{1}{n}}),$$

其中 $n = [K : \mathbb{Q}]$ r, s 分别是域 K 的实和复嵌入的个数.

引理 3.18. *设 $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq h}$ 是 K 的普通理想类群的代表元. 令 A_i 是满足如下条件的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 的集合: 作为通常的理想 $\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}_i$, 而对于 $\mathfrak{p}|\infty$ 有 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}} \leq c\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{f_{\mathfrak{p}}/n}$; 那么存在充分大的常数 c 使得 $\bigcup_{1 \leq i \leq h} A_i K$ 含有全部 Arakelov 理想.*

证明. 对于 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 满足 $\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_\infty = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}$, 令 $\mu_\mathfrak{p} = \nu_\mathfrak{p} - \frac{1}{n}\deg(\mathfrak{a}_\infty)$, 那么 $(f_\mathfrak{p}\mu_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty} \in H$, 其中 $f_\mathfrak{p}$ 依据 $\mathfrak{p}$ 是实的或复的取 1 或 2, $H = \{(x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty} \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R} :\ \sum_{\mathfrak{p}|\infty} x_\mathfrak{p} = 0\}$. $\mathcal{O}^\times$ 对角嵌入到 H 中形成一个格子 (这一点可以参考 [9, Chapter I, Theorem 7.3]), 因此存在 $u \in \mathcal{O}^\times$ 使得 $|\mu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u)| \le c_0$, 这里 c_0 是某个仅取决于 $\mathcal{O}$ 而与 $\mathfrak{a}$ 无关的常数. 从而我们有

$$\nu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u) = \mu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u) + \frac{1}{n}\deg(\mathfrak{a}_\infty) \le c_0 + \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\infty) = c_1 + \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}),$$

其中 $c_1 = c_0 - \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_i)$ 与 $\mathfrak{a}$ 无关. 现在令 $\mathfrak{b} = u^{-1}\mathfrak{a}$, 那么 $\mathfrak{b}_f = \mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}_i$, 而且对于 $\mathfrak{p}|\infty$ 有

$$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}) = \nu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u) \le c_1 + \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}),$$

因而对于 $\mathfrak{b}$ 有 $\mathfrak{N}(\mathfrak{b})^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})} \le c\frac{f_\mathfrak{p}}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ 当 $\mathfrak{p}|\infty$, 其中 $c = e^{nc_1}$ 与 $\mathfrak{a}$ 无关. 对于这样的常数 c 的选取就有 $\mathfrak{a} = u\mathfrak{b} \in A_iK$. □

现在我们可以证明定理3.17.

证明. 无妨假设 $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \ge 1$. 对于 $\mathfrak{a} = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}$ 设 $P_\mathfrak{a} = \{x \in K|\ |x|_\mathfrak{p} \le \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}} \text{ for all } \mathfrak{p}|\infty\}$, 那么 $\mathrm{vol}(P_\mathfrak{a}) = 2^r(2\pi)^s\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\infty)$. 设 Γ 是 $\mathfrak{a}_f^{-1}$ 对角嵌入 $K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ 的格子, 并且设 F 是它的一个基本区域. 根据命题3.16 我们知道 $\mathrm{vol}(F) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_f^{-1}) = \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f^{-1})$. 令

$$X = \{\gamma \in \Gamma :\ (\gamma + F) \cap P_\mathfrak{a} \ne \varnothing\},$$

$$Y = \{\gamma \in \Gamma :\ (\gamma + F) \subset P_\mathfrak{a} \text{ 的内部}\},$$

那么 $Y \subset H^0(\mathfrak{a}^{-1}) \subset X$ 以及 $\bigcup_{\gamma\in Y}(\gamma+F) \subset \mathrm{vol}(P_\mathfrak{a}) \subset \bigcup_{\gamma\in X}(\gamma+F)$, 从而 $\#Y \le \#H^0(\mathfrak{a}^{-1}) \le \#X$ 以及 $\#Y\mathrm{vol}(F) \le \mathrm{vol}(P_\mathfrak{a}) \le \#X\mathrm{vol}(F)$, 故

$$\left|\#H^0(\mathfrak{a}^{-1}) - \frac{\mathrm{vol}(P_\mathfrak{a})}{\mathrm{vol}(F)}\right| \le \#X - \#Y.$$

因此我们只需证明

$$\#(X\backslash Y) = \#\{\gamma \in \Gamma :\ (\gamma + F) \cap \partial P_\mathfrak{a} \ne \varnothing\} = \mathrm{O}(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-\frac{1}{n}}).$$

为此考虑 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 的单位正方体到 $P_\mathfrak{a}$ 的微分同胚, 对于实嵌入代表的分量它是线性映射 $x \mapsto 2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}}(x-0.5)$, 具有偏导数 $2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}}$; 对于复嵌入它代表的分量是 $(\rho,\theta) \mapsto \sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}}}\rho(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$, 两个偏导数都具有上界 $2\pi\sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}}}$. 由于乘以一个主理想不改变 $\#H^0(\mathfrak{a}^{-1})$, 根据上一个引理我们可以选取不依赖于 $\mathfrak{a}$ 的常数 $c > 0$ 和 $\mathfrak{a}$ 所在等价类的代表元使得 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}} \le c\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{f_\mathfrak{p}/n}$. 从而 φ 的导数具有上界 $c_1\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}$ 其中常数 c_1 不依赖于 $\mathfrak{a}$, 故我们有

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le c_1\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}\|x - y\|.$$

设 $m=[\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}]\geq 1$. 我们把组成 $[0,1]^n$ 的边界的每一个 $[0,1]^{n-1}$ 均匀地剖分成 m^{n-1} 个小正方体, 其中每一个正方体的直径为 $\sqrt{n-1}/m$, 因此其在 ϕ 下的像的直径不超过 $c_1\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}\sqrt{n-1}/m\geq 2c_1\sqrt{n-1}$ 与 $\mathfrak{a}$ 无关, 记此常数为 c_2. 取 (与 $\mathfrak{a}$ 无关) c_3 使得任何直径不超过 c_2 的点集至多与 c_3 个 $\gamma+F$ 相交, 其中 $\gamma\in\Gamma$. 由于 $[0,1]^n$ 的边界是由 $2nm^{n-1}$ 个上述的 $n-1$ 维小正方体组成的, $P_{\mathfrak{a}}$ 的边界是由 $2nm^{n-1}$ 个直径不超过 c_2 的点集组成的, 于是 $\#(X\backslash Y)\geq 2nm^{n-1}c_3\geq C\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{\frac{n-1}{n}}$, 其中 C 是与 $\mathfrak{a}$ 无关的常数, 这就证明了此命题. □

根据此定理, 我们对 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 引进记号

$$l(\mathfrak{a})=\log\frac{\#H^0(\mathfrak{a})}{2^r(2\pi)^s},$$

以及对数域 K 定义其亏格

$$g=l(\mathcal{O})-\chi(\mathcal{O})=\log\frac{\#\mu(K)\sqrt{|d_K|}}{2^r(2\pi)^s},$$

就得到

定理 3.19. (Riemann-Roch II) 对 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 成立着

$$l(\mathfrak{a})-i(\mathfrak{a})=\deg(\mathfrak{a})+l(\mathcal{O})-g,$$

其中

$$i(\mathfrak{a})=\mathrm{O}(\exp(\frac{-\deg(\mathfrak{a})}{[K:\mathbb{Q}]})).$$

特别地 $i(\mathfrak{a})\to 0$ 当 $\deg(\mathfrak{a})\to+\infty$.

证明. 记 $n=[K:\mathbb{Q}]$. 根据定理3.17存在有界函数 $\varphi(\mathfrak{a})$ 使得

$$\frac{\#H^0(\mathfrak{a})}{2^r(2\pi)^s}=\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}^{-1})}{\sqrt{|d_K|}}(1+\varphi(\mathfrak{a}^{-1})\mathfrak{N}(\mathfrak{a}^{-1})^{-\frac{1}{n}}).$$

我们知道 $\deg(\mathfrak{a})=-\log\mathfrak{N}(\mathfrak{a})=\log\mathfrak{N}(\mathfrak{a}^{-1})$, 所以有 $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-1/n}=\exp(-\deg(\mathfrak{a})/n)$. 结合 $\log(1+\mathrm{O}(t))=\mathrm{O}(t)$ 就证明了原命题. □

3.4 一个应用

作为上面所述的 Riemann-Roch 定理的应用, 我们证明一个关于 Arakelov 除子类群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})$ 的拓扑的结果. 我们记 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是次数为 0 的 Arakelov 除子全体.

我们将看到这个结果蕴含 Dirichlet 单位定理和类数的有限性.

定理 3.20. 群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是紧的.

证明. 首先我们说明主除子群在 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}) = \bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})} \mathbb{Z} \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$ 当中离散, 从而 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是 Hausdorff 的. 这是因为根据引理3.13 存在充分小的实数 m 使得如果对所有 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ 都有 $|\sigma(\theta)| \leq m$, 那么 $\theta = 0$, 因而 0 在 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 中的邻域 $0 \times B(0, \mathrm{e}^m)$ 只含 0 一个主除子.

其次我们证明存在一个 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 中的紧集, 其中含有每一个次数为 0 的除子的等价类的一个元素. 根据定理3.19, 存在常数 $c > 0$, 当我们取次数大于 c 的除子 D 时 $\#H^0(D)$ 含有非零元 $f \in K^\times$. 固定一个次数是 $2c$ 的除子 D. 对任何次数为 0 的除子 D', $D + D'$ 次数为 $2c$, 因此 $\#H^0(D + D')$ 含有非零元 $f \in K^\times$, 从而次数为 $2c$ 的除子 $\mathrm{div}(f) + D' + D \geq 0$ 而且 $\mathrm{div}(f) + D'$ 与 D' 是等价的除子. 次数为 $2c$ 且非负的除子显然是紧的, 这就完成了证明. □

我们对定理3.20的含义进行简单说明. 记 H 是 $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$ 的所有分量和为 0 的子空间. $\mathcal{O}$ 的单位群 $\mathcal{O}^\times$ 按照 $\lambda : x \mapsto (\nu_{\mathfrak{p}}(x))_{\mathfrak{p}|\infty}$ 嵌入 H 成为一个格子.

考虑映射

$$\alpha : \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R} \to \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}), (\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|\infty} \mapsto \sum \frac{\nu_{\mathfrak{p}}}{f_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p},$$

其中 $f_{\mathfrak{p}}$ 依据嵌入是实的或复的取 1 或 2. 此映射给出 Abel 群正合列

$$0 \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R} \to \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Div}(\mathcal{O}) \to 0.$$

限制它在主除子得到交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \lambda(\mathcal{O}^\times) & \longrightarrow & \text{主 Arakelov 除子群} & \longrightarrow & \text{主除子群} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})\text{中次数 0 的除子} & \longrightarrow & \mathrm{Div}(\mathcal{O}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其两行正合, 而每一列的映射皆是嵌入, 根据蛇引理我们得到正合列

$$0 \to H/\lambda(\mathcal{O}^\times) \to \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0 \to \mathrm{CH}^1(\mathcal{O}) \to 0.$$

在这个正合列中, 右侧的 $\mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ 无非是理想类群, 由于 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0 \to \mathrm{CH}^1(\mathcal{O})$ 是连续的, 所以后者作为一个紧的离散群必然有限, 这就是类数有限性. 此外, 这也表明左侧的 $H/\lambda(\mathcal{O}^\times)$ 在 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 当中一定是有限指数的, 从而 $H/\lambda(\mathcal{O}^\times)$ 也是紧的, 这就是说 $\lambda(\mathcal{O}^\times)$ 形成一个 H 中的完全格. 因为 H 是个 $r + s - 1$ 维的实线性空间, 所以 $\lambda(\mathcal{O}^\times) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r+s-1}$. 又注意到 λ 的核即 $H^0(\mathcal{O}) = \mu(K)$, 所以我们由此推出了 Dirichlet 单位定理:

推论 3.21. (Dirichlet 单位定理) 我们有群同构 $\mathcal{O}^\times \simeq \mu(K) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus r+s-1}$.

4 Dedekind ζ 函数

著名的 Riemann ζ 函数是

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

它解析延拓至整个复平面上, 仅在 $s = 1$ 处有单极点. Riemann ζ 函数联系局部与整体的信息, 因其蕴含的丰富数论信息而备受瞩目, 特别是有关素数分布的信息. 对各种 ζ 函数的研究往往具有重要意义, 其中首当其冲的问题是它的延拓以及函数方程.

回顾 Riemann ζ 函数的函数方程. 定义完全 ζ 为

$$\xi(s) = \Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

Riemann ζ 函数的函数方程就是说我们有等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$. 它的证明过程大致如下: 对于所有正整数 n 在

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

作变量替换 $x \mapsto \pi n^2 x$, 我们得到

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x}x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

对 n 求和得到

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

我们观察到被积项当中的求和恰好是 $(\theta(s)-1)/2$, 其中对于 $x > 0$, θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$$

满足 $\theta(1/x) = \sqrt{x}\theta(x)$ (见 [5, p.12], $\theta(\tau)$ 定义在整个上半平面, 而我们这里相当于在该文献中取了 $\tau = ix/2$), 这个性质的证明主要用到 $\mathbb{R}$ 上的 Poisson 求和公式, 参见 [4, Example 3.6.4]. 从而我们有

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (\theta(x)-1)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

对于所有 $s > 1$ 它满足

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\theta(x)-1)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int_0^1 (\theta(x)-1)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^\infty (\theta(x)-1)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \int_1^\infty (\theta(1/x)-1)x^{-s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^\infty (\theta(x)-1)x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \int_1^\infty (\theta(x)-1)(x^{s/2}+x^{(1-s)/2})\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^\infty (x^{(1-s)/2}-x^{-s/2})\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \int_1^\infty (\theta(x)-1)(x^{s/2}+x^{(1-s)/2})\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{s(1-s)}\end{aligned}$$

观察到这个等式关于 s 和 $1-s$ 对称, 就得到了函数方程. 可以看到, 在证明中发挥着核心作用的是 θ 函数的函数方程以及 Poisson 求和公式. 我们将要在这一节说明, 我们在本文前面所建立的 Riemann-Roch 理论正是 θ 函数的函数方程的适当推广, 它允许我们给出 Dedekind ζ 函数的函数方程. 这就完全阐释了数域上 Riemann-Roch 理论的含义.

4.1 ζ_K 和 θ_K

定义 4.1. *数域 K 的 Dedekind ζ 函数 ζ_K 定义为*

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s},$$

求和号过遍 $\mathcal{O}$ 的所有非零整理想.

我们直接承认这个函数对于 $s>1$ 定义良好. Riemann ζ 就是 Dedekind ζ 的 $K=\mathbb{Q}$ 的情况. 为了像 Riemann ζ 一样找到它的函数方程, 我们需要一个 θ 的类似物. 下面的定义来自 [10, Definition 6.9].

定义 4.2. *对数域 K 的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_f\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{a}_\infty=(\nu_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty}$ 定义*

$$\theta_K(\mathfrak{a}) = \sum_{f\in\mathfrak{a}_f} \exp\Big(-\pi\sum_\sigma e^{2\nu_\sigma}|\sigma f|^2\Big),$$

其中 σ 取遍无穷位.

当我们取 $K=\mathbb{Q}$ 以及 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathbb{Z}$ 加上无穷部分 $(\log x)/2\in\mathbb{R}$, 这就是上面提到过的 $\theta(x)$.

在继续进行之前需要确认上面的级数的确是收敛的. 另外, 我们也不难注意到等价的 Arakelov 理想取值相同, 由此 θ_K 定义在 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 上.

引理 4.3. *上面的 θ_K 定义良好, 并且等价的 Arakelov 理想取值都相同, 从而它定义函数 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})\to\mathbb{R}$.*

证明. 设 $n=[K:\mathbb{Q}]$. 因为 $\mathfrak{a}_f$ 的加法群具有形式 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}a_i$, 所以

$$\theta_K(\mathfrak{a})=\sum_{f\in\mathfrak{a}_f}\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma}|\sigma f|^2\Big)=\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n}\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma}\sum_{j=1}^n k_j^2|\sigma a_j|^2\Big),$$

右边这个级数是紧一致收敛.

设 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 等距同构, 那么存在 $x\in K^\times$, $\mathfrak{a}=x\mathfrak{b}$. 从而 (回顾 $\nu_\sigma(f)=-\log|\sigma f|$)

$$\begin{aligned}\theta_K(\mathfrak{a})&=\sum_{f\in\mathfrak{a}_f}\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{a})}|\sigma(f)|^2\Big)\\&=\sum_{f\in\mathfrak{b}_f}\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{a})}|\sigma(xf)|^2\Big)\\&=\sum_{f\in\mathfrak{b}_f}\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{b})}|\sigma(f)|^2\Big)\\&=\theta_K(\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

在本节剩余部分, 我们以 V 记 $\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$, 其中 r_1 和 r_2 分别是数域 K 的实无穷位和复无穷位的个数, 因此 V 是一个 $n=[K:\mathbb{Q}]$ 维实线性空间. K 的整数环 $\mathcal{O}$ 以 $a\mapsto(\sigma(a))_\sigma$ 嵌入 V 形成一个完全格, 其中 σ 过遍所有嵌入, 对于复嵌入我们只从一对共轭的嵌入中任意固定一个, 进一步所有 $\mathcal{O}$ 的普通理想也形成 V 中的一个完全格. 此外, 一个 $r=r_1+r_2$ 元实数组 $(\alpha_\sigma)_\sigma$ 给出 V 上的一个内积, 即对 $x,y\in V$ 定义它们的内积为 $\sum_\sigma e^{2\alpha_\sigma}x_\sigma\overline{y_\sigma}$, 从而一个 Arakelov 理想给出了空间 V 中的一个格子以及一个内积, 而且按照3.16下面一段叙述, 这个格子的测度就是 $\mathrm{vol}(\mathfrak{a})$.

现在来把 Riemann-Roch 公式3.16翻译成 θ 函数的关系, 得到 θ_K 的函数方程, 为此必须借助于实线性空间 V 上的 Poisson 求和公式的力量. 对于 V 上一个内积 $\langle -,-\rangle$, 由它确定的平移不变测度 μ, 以及 $f\in L^1(V)$, 它的 Fourier 变换

$$\hat{f}(x)=\int_V f(t)e^{-2i\pi\langle x,t\rangle}\mu(\mathrm{d}t).$$

再设 $\Gamma\subset V$ 是完全格, 它的对偶 Γ^* 定义为

$$\Gamma^*=\{g\in V:(g,g')\in\mathbb{Z}\ 对于所有 g'\in\Gamma\},$$

这里 $(-,-)$ 是按照分量相乘并求和的常用的内积. 不难验证这也是一个完全格. Poisson 求和公式是说, 只要 $\sum_{x\in\Gamma}f(x)<\infty$, 就有

$$\sum_{x\in\Gamma}f(x)=\frac{1}{\mu(V/\Gamma)}\sum_{x\in\Gamma^*}\hat{f}(x).$$

我们直接承认这个公式, 它的详细证明可看 [9, Chapter VII, Proposition 3.2], 一个更加一般的版本可看调和分析的书 [4, Theorem 3.6.3]. 还需建立一个计算性的引理.

引理 4.4. 设 $\mathbb{R}^n$ 装备 *Lebesgue* 测度, $(\alpha_j)_{1\leq j\leq n}\in\mathbb{R}^n$, 函数

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, x\mapsto \exp\Big(-\pi\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2\Big)$$

的 *Fourier* 变换是

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\prod_{j=1}^n\sqrt{\alpha_j}}\exp\Big(-\pi\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j}y_j^2\Big)$$

证明. 对于 $y\in\mathbb{R}^n$ 根据 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(y)&=\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2i\pi\langle y,t\rangle}\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\exp\Big(-\pi\sum_{j=1}^n\alpha_j t_j^2+2iy_jt_j\Big)\mathrm{d}t_1...\mathrm{d}t_n\\&=\prod_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi\alpha_j t^2}e^{-2iy_jt}\mathrm{d}t\\&=\prod_{j=1}^n\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}\exp\Big(-\frac{\pi}{\alpha_j}y_j^2\Big)\\&=\frac{1}{\prod_{j=1}^n\sqrt{\alpha_j}}\exp\Big(-\pi\sum_{i=1}^n\frac{1}{\alpha_j}y_j^2\Big).\end{aligned}$$

□

推论 4.5. 固定 V 上内积 $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^r e^{2\nu_j}x_j\overline{y_j}$ 以及这个内积所决定的测度, 那么函数 $x\mapsto\exp(-\pi\langle x,x\rangle)$ 的 *Fourier* 变换是

$$x\mapsto\exp\Big(-\pi\sum_{j=1}^r e^{-2\nu_j}x_j\overline{x_j}\Big).$$

证明. 直接利用前一个引理, 并且注意到 $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^r e^{2\nu_j}x_j\overline{y_j}$ 所决定的测度是把 V 与 $\mathbb{R}^n$ 等同时的 Lebesgue 测度的 $\prod_{j=1}^r e^{\nu_j}$ 倍, 恰好与前面的系数相互抵消, 就证明了该结论. □

定理 4.6. ***(Riemann-Roch III)*** 记差积理想 $D_{K/\mathbb{Q}}$ 的逆为 C, 那么对任何 *Arakelov* 理想 $\mathfrak{a}$,

$$\theta_K(C\mathfrak{a}^{-1})=\sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})\theta_K(\mathfrak{a}).$$

证明. 在上文的讨论中已经看到 $\theta_K(\mathfrak{a})$ 是 V 装备 $\mathfrak{a}_\infty$ 决定的内积后对形如 $\exp(-\pi\langle f,f\rangle)$ 的元素在格子 $f\in\mathfrak{a}_f$ 进行求和. 注意到对 $a\in\mathfrak{a}_f$ 和 $x\in K$ 我们有

$$(a,x)=\sum_\sigma \sigma(a)\sigma(x)=\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(ax),$$

它对所有 a 是整数当且仅当 $x\in C\mathfrak{a}_f^{-1}$, 所以 $C\mathfrak{a}_f^{-1}$ 正是 $\mathfrak{a}_f$ 的对偶. 由于 $C_\infty=0$, 这个格子决定的内积的系数与 $\mathfrak{a}_f^{-1}$ 相同, 是 $(e^{-2\nu_\sigma})_\sigma$, 从而根据 Poisson 求和公式, 4.5, 以及 3.16 就证明了这个命题. □

4.2 ζ_K 的函数方程

现在我们希望像之前的完全 Riemann ζ 一样, 以某个积分的形式给出一个完全 Dedekind ζ, 并且由此导出函数方程. 因为 θ_K 是定义在 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 上的函数, $K=\mathbb{Q}$ 时有同构 $\mathfrak{N}:\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathbb{Z})\to\mathbb{R}_{>0}^\times$, 而完全 Riemann ζ 是

$$\xi(s)=\int_{\mathbb{R}_{>0}^\times}\frac{\theta(x)-1}{2}x^{s/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

注意到 $\mathrm{d}x/x=\mathrm{dlog}x$ 是 $\mathbb{R}_{>0}^\times$ 上的平移不变测度, $\theta_\mathbb{Q}(\mathbb{Z},(\log x)/2)=\theta(x)$ 以及 $\mathfrak{N}(\mathbb{Z},(\log x)/2)=x^{1/2}$, 这提示我们考虑积分

$$\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s\mathrm{d}\mathfrak{a}. \tag{4.1}$$

回顾 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 上的拓扑是由它和 Arakelov 除子类群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})$ 的同构确定的, 后者是局部紧 Hausdorff 群 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})=\bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})}\mathbb{Z}\times\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}$ 的对于主 Arakelov 除子群 $\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})$ (这是离散群, 更是闭子群) 的商, 因而局部紧 Hausdorff. 我们把 Arakelov 理想群记作 $\widehat{J}(\mathcal{O})$, 其中主 Arakelov 理想群也记作 $\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})$, 它们各自的拓扑结构均与对应的除子群相同. 给 $\widehat{J}(\mathcal{O})=J(\mathcal{O})\times\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}_{>0}^\times$ 装备普通分式理想群 $J(\mathcal{O})$ 上计数测度和 $\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}_{>0}^\times$ 上每个分量平移不变测度 $\mathrm{d}x/x$ 的乘积, 而 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})=\widehat{J}(\mathcal{O})/\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})$ 上的测度则按照定理1.22选取.

现在计算积分4.1. 注意到

$$\begin{aligned}\theta_K(\mathfrak{a})-1&=\sum_{f\in\mathfrak{a}_f}\exp\Big(-\pi\sum_\sigma e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{a})}|\sigma f|^2\Big)-1\\&=\sum_{f\in\mathfrak{a}_f\setminus\{0\}}\exp\Big(-\pi\sum_\sigma e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{a})}|\sigma f|^2\Big)\\&=\sum_{f\in\mathfrak{a}_f\setminus\{0\}}\exp\Big(-\pi\sum_\sigma e^{2\nu_\sigma(f^{-1}\mathfrak{a})}\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\#\mu(K)\sum_{(f)\in\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})}\mathbf{1}_{\mathfrak{a}_f}(f)\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(f^{-1}\mathfrak{a})}\Big)\\
&=\#\mu(K)\sum_{(f)\in\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})}\mathbf{1}_{\mathfrak{a}_f}(f^{-1})\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(f\mathfrak{a})}\Big)\\
&=\#\mu(K)\int_{\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})}\mathbf{1}_{\mathfrak{a}_f}(f^{-1})\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(f\mathfrak{a})}\Big)\mathrm{d}(f)
\end{aligned}
$$

这里 $\mathbf{1}_A$ 是指集合 A 的示性函数, 即 $\mathbf{1}_A(x)=1$ 当且仅当 $x\in A$, 否则取 0. 注意到 $f^{-1}\in\mathfrak{a}_f$ 当且仅当 $\mathcal{O}\subset f\mathfrak{a}_f$. 我们对所有 $A\subset K$ 定义 $\delta(A)$ 为 1 如果 $\mathcal{O}\subset A$, 否则取 0, 那么 $\mathbf{1}_{\mathfrak{a}_f}(f^{-1})=\delta(f\mathfrak{a}_f)$. 应用定理1.22和非负函数的 Fubini 定理, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\#\mu(K)\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}\int_{\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})}\delta(f\mathfrak{a}_f)\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(f\mathfrak{a})}\Big)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s\mathrm{d}(f)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\#\mu(K)\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}\int_{\widehat{\mathrm{Prin}}(\mathcal{O})}\delta(f\mathfrak{a}_f)\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(f\mathfrak{a})}\Big)\mathfrak{N}(f\mathfrak{a})^s\mathrm{d}(f)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\#\mu(K)\int_{\widehat{J}(\mathcal{O})}\delta(\mathfrak{a}_f)\exp\Big(-\pi\sum_{\sigma}e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{a})}\Big)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\#\mu(K)\int_{J(\mathcal{O})\times\prod_\sigma\mathbb{R}_{>0}^\times}\delta(\mathfrak{a}_f)\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f)^s\prod_{\sigma}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\sigma)^s\exp(-\pi e^{2\nu_\sigma(\mathfrak{a})})\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\#\mu(K)\sum_{\mathfrak{a}_f\in J(\mathcal{O})}\delta(\mathfrak{a}_f)\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f)^s\prod_{\sigma}\int_0^\infty\mathfrak{a}_\sigma^{f_\sigma s/2}e^{-f_\sigma\pi\mathfrak{a}_\sigma}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{a}_\sigma}{\mathfrak{a}_\sigma}\\
=&\#\mu(K)\sum_{\mathfrak{a}_f\in J(\mathcal{O})}\delta(\mathfrak{a}_f)\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f)^s\prod_{\sigma}\int_0^\infty x^{f_\sigma s/2}e^{-f_\sigma\pi x}\frac{\mathrm{d}x}{x},
\end{aligned}
$$

其中 f_σ 按照 σ 是实嵌入或者复嵌入分别取 1 或 2, 这两种情况下我们分别有

$$\int_0^\infty x^{s/2}e^{-\pi x}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\Gamma(s/2)\pi^{-s/2},$$

$$\int_0^\infty x^{s}e^{-2\pi x}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\Gamma(s)(2\pi)^{-s}.$$

又注意到

$$\sum_{\mathfrak{a}_f\in J(\mathcal{O})}\delta(\mathfrak{a}_f)\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f)^s=\sum_{\mathfrak{a}_f\in J(\mathcal{O})}\delta(\mathfrak{a}_f^{-1})\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f)^{-s}=\zeta_K(s),$$

所以

$$\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})} \frac{\theta_K(\mathfrak{a})-1}{\#\mu(K)} \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s \mathrm{d}\mathfrak{a} = 2^{-r_2 s}\pi^{-ns/2}\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s).$$

现在我们就可以得到 Dedekind ζ 的函数方程了.

定理 4.7. (函数方程) 对数域 K 和 $s>1$ 令完全 Dedekind ζ 为

$$\xi_K(s) = \sqrt{|d_K|}^s 2^{-r_2 s}\pi^{-ns/2}\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s)$$

那么 $\xi_K(s)=\xi_K(1-s)$.

证明. 记 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 当中范数大于 $1/\sqrt{|d_K|}$ 的理想类的集合为 X, 小于 $1/\sqrt{|d_K|}$ 的记为 Y, 等于 $1/\sqrt{|d_K|}$ 的记为 Z. 根据4.6, $\mathfrak{N}(C)=1/|d_K|$ 以及平移不变性我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})} (\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s \mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\left(\int_X+\int_Y+\int_Z\right)(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\int_X(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s\mathrm{d}\mathfrak{a}+\int_X(\theta_K(C\mathfrak{a}^{-1})-1)\mathfrak{N}(C\mathfrak{a}^{-1})^s\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
+&\int_Z(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\sqrt{|d_K|}^{-s}\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\int_X\left((\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s+(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})\sqrt{|d_K|}\theta_K(\mathfrak{a})-1)\sqrt{|d_K|}^{-2s}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-s}\right)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
+&\int_Z(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\sqrt{|d_K|}^{-s}\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\int_X\left(\theta_K(\mathfrak{a})-1\right)\left(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s+\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-s}\sqrt{|d_K|}^{1-2s}\right)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
+&\int_X\left(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-s}\sqrt{|d_K|}^{1-2s}-\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-s}\sqrt{|d_K|}^{-2s}\right)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
+&\int_Z(\theta_K(\mathfrak{a})-1)\sqrt{|d_K|}^{-s}\mathrm{d}\mathfrak{a}
\end{aligned}$$

对 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 和其中范数 1 的元素形成的子群 $\widehat{\mathrm{Pic}}^0(\mathcal{O})$ 用公式1.22. 根据 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
&\int_X\left(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-s}\sqrt{|d_K|}^{1-s}-\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-s}\sqrt{|d_K|}^{-s}\right)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}\mathbf{1}_{\{\mathfrak{N}(\mathfrak{b})>1\}}(\mathfrak{a})(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-s}-\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-s})\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=&\int_0^\infty\left(\int_{\widehat{\mathrm{Pic}}^0(\mathcal{O})}\mathbf{1}_{\{t>1\}}(t)(t^{1-s}-t^{-s})\mathrm{d}\mathfrak{a}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M\int_1^{\infty}(t^{1-s}-t^{-s})\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \frac{M}{s(s-1)}
\end{aligned}
$$

其中 M 是 $\widehat{\mathrm{Pic}}^0(\mathcal{O})$ 自身在其使得公式1.22成立的测度选取下的测度, 因为这是紧的 (定理3.20), 根据命题1.21这一定是一个有限数. 综合以上结果得到

$$
\begin{aligned}
\xi_K(s) =& \sqrt{|d_K|}^s \int_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})} \frac{\theta_K(\mathfrak{a})-1}{\#\mu(K)} \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s \mathrm{d}\mathfrak{a}\\
=& \frac{1}{\#\mu(K)} \int_X \Big(\theta_K(\mathfrak{a})-1\Big)\Big(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s \sqrt{|d_K|}^s + \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-s} \sqrt{|d_K|}^{1-s}\Big)\mathrm{d}\mathfrak{a}\\
&+ \frac{1}{\#\mu(K)} \int_Z (\theta_K(\mathfrak{a})-1)\mathrm{d}\mathfrak{a} - \frac{M}{\#\mu(K)s(1-s)}.
\end{aligned}
$$

这个表达式对于 s 和 $1-s$ 是对称的, 从而证明了命题. □

4.3 与 Tate 的博士论文的比较

J. T. Tate 在 1950 年发表了他的博士论文 [3, Chapter XV]《数域上的 Fournier 分析与 Hecke ζ 函数. 概括而言, Tate 同样注意到了完全 ζ 函数与 K 的所有位之间的对应关系. 他在这篇文章中建立了局部域上的调和分析, 将这些结果合起来得到 idèle 类群上的调和分析, 最后用统一的办法解决了 ζ 函数的延拓和函数方程.

我们在上一节对于 ζ_K 的函数方程的证明差不多是对 Hecke 对函数方程的原始证明 ([8, XIII, §3]) 的重新形式化. 相比于 Tate 的论文, 我们这里的考虑更加粗糙 (例如对于 $\mathbb{Q}$ 有穷位 p, 我们实际上考虑的是 $\mathbb{Z}$, 而 Tate 是考虑 $\mathbb{Z}_p$), 但足以解决这个问题. 此外, 这套理论比起 Hecke 的原证明更清晰地体现了每一步计算的目的, 而且使得这种方法具有向一般的曲线上推广的可能.

然而我们也不得不指出, 尽管 Arakelov 理论提出的时间晚于 Tate 的博士论文, 但是限于本文所讨论的数域情况而言相较于后者它却没有多少优越性. 事实上, 这种办法相较于 Tate 的博士论文处理的细节更加繁琐, 而且只能得到这篇论文结果的特殊情况. 因此, 虽然考虑所有位以及联系局部与整体的精神是类似的, 但是对于数域而言这套理论完全被 Tate 的博士论文所取代, 笔者认为这可能也是今天想要找到使用这套语言的参考资料非常困难的原因.

至于 Arakelov 理论本身则在一般的算术曲线上有其价值, 这方面的进一步著作有 [7].

参考文献

[1] S. Arakelov. Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 8:1167, 10 1974.

[2] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction To Commutative Algebra.* Addison-Wesley series in mathematics. Avalon Publishing, 1994.

[3] J.W.S. Cassels, A. Frölich, London Mathematical Society, and International Mathematical Union. *Algebraic Number Theory: Proceedings of an Instructional Conference. Edited by J. W. S. Cassels and A. Fröhlich.* 1976.

[4] A. Deitmar and S. Echterhoff. *Principles of Harmonic Analysis.* Universitext. Springer New York, 2008.

[5] F. Diamond and J. Shurman. *A First Course in Modular Forms.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[6] B. Gilligan and O. Forster. *Lectures on Riemann Surfaces.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[7] S. Lang. *Introduction to Arakelov Theory.* Springer New York, 1988.

[8] S. Lang. *Algebraic Number Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1994.

[9] J. Neukirch and N. Schappacher. *Algebraic Number Theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[10] Damian Roessler. The riemann-roch theorem for arithmetic. 1993.

[11] Gerard van der Geer and René Schoof. Effectivity of arakelov divisors and the theta divisor of a number field, 1999.

[12] 丁石孙, 聂灵沼. 代数学引论. 面向 21 世纪课程教材. 高等教育出版社, 2000.

[13] 伍鸿熙, 吕以辇, 陈志华. 紧黎曼曲面引论. 现代数学基础. 高等教育出版社, 2016.

[14] 黎景辉. 代数数论. 现代数学基础. 高等教育出版社, 2016.