??

YIN Xiaorui

Nov 2023

摘要

111

1 Introduction

111

在本文中如不作说明, 我们将采用以下的记号:

R 是任意的交换环;

$R^\times$ 是指环 R 中所有可逆元对乘法形成的群.

$K \subset \mathbb{C}$ 是一个数域, 即 $\mathbb{Q}$ 的有限次扩张;

$\mathcal{O}_K$ 是指数域 K 中的代数整数全体形成的 Dedekind 环, 在不致混淆时我们省略下标 K;

Cl_K 指理想类群;

$R_\mathfrak{p}$ 是指 R 对其一个位 (i.e. 赋值的等价类) $\mathfrak{p}$ 完备化得到的离散赋值环;

$M_\mathfrak{p}$ 是指 $M \otimes_R R_\mathfrak{p}$, 其中 M 是 R-模;

$M^\vee$ 是指 $\mathrm{Hom}(M, R)$, 其中 M 是 R-模;

2 Arakelov Picard 群和 Grothendieck 群

2.1 Picard 群和 Grothendieck 群

引理 2.1. 设 M 是有限生成投射 R-模. 令 $\rho_M : \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{Z}, \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rk}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, 那么 ρ_M 连续.

推论 2.2. 若 R 是整环, 那么对任何有限生成投射 R-模 M, ρ_M 是常数, 称此常数是 M 的秩, 记为 $\mathrm{rk}(M)$.

引理 2.3. 对 R-模 M, 以下三个命题等价:
i）M 是有限生成秩 1 的投射模;
ii）$M^\vee \otimes_R M \simeq R$;
iii) 存在 $R-$ 模 N 使得 $N \otimes_R M \simeq R$.
当 M 满足上述条件时称 M 可逆.

上述引理的详细证明和我们的主题关系不大, 其具体过程可以参见 [3, Section 0AFW].

定义 2.1. 交换环 R 的 Picard 群 $\mathrm{Pic}(R)$ 是指可逆 R-模的同构类装备 $\otimes_R$ 形成的群.

引理 2.4. R 是整环, F 是 R 的分式域, M 是有限生成投射 R-模, 那么 M 可逆当且仅当 M 可以被嵌入 F.

证明. 充分性: 因为 M 可逆, 所以 M 秩 1; 特别地 $\mathrm{rk}_F(M \otimes_R F) = 1$, 即 $M^\vee \otimes_R M \simeq F$, 因此 M 通过 $m \mapsto 1 \otimes m$ 嵌入 F.

必要性: 设 $\iota : M \to F$ 是一个嵌入. 那么 $M \otimes_R F \to F, m \otimes f \mapsto \iota(m)f$ 是同构, 因此 M 在 F 处秩 1. 因为 R 是整环, 所以 M 可逆. □

命题 2.5. $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}) = Cl_K$.

证明. 根据引理 2.4, 把一个 $\mathcal{O}$ 的分式理想看作是可逆 $\mathcal{O}$-模给出 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 和 Cl_K 之间的双射, 而对任意的分式理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}, a \otimes b \mapsto ab$ 显然是同构. □

定义 2.2. 交换环 R 的 Grothendieck 群 $K_0(R)$ 定义为 $\mathcal{F}_0/\mathcal{R}_0$, 其中 $\mathcal{F}_0$ 是有限生成投射 R-模的同构类生成的自由 Abel 群, $\mathcal{R}_0$ 是由 $\mathcal{F}_0$ 中形如 $M - M \oplus N + N$ 的元素生成的子群. 一个有限生成投射 R-模 M 在 $K_0(R)$ 中的等价类记作 $[M]$. $K_0(R)$ 装备乘法 $\otimes_R$ 形成交换环.

引理 2.6. $\rho : K_0(R) \to \mathscr{C}(\mathrm{Spec}(R), \mathbb{Z}), [M] \mapsto \rho_M$ 是加法群同态. 特别地, 当 R 是 Dedekind 环 $\mathcal{O}$, 此同态成为 $\mathrm{rk} : K_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}$.

记 $\ker\rho = I(R)$.

引理 2.7. 任何非零的有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M 同构于可逆 $\mathcal{O}$-模的直和.

证明. 对 $\mathrm{rk}(M)$ 归纳. $\mathrm{rk}(M)=1$ 时结论平凡. 设 $\mathcal{O}$-模 N 满足 $M\oplus N\simeq\mathcal{O}^n$, $\iota:M\to\mathcal{O}^n$ 是嵌入, $\pi:\mathcal{O}^n\to R$ 是使得 $\pi\circ\iota(M)$ 非平凡的某个分量的投影, 那么 $\pi\circ\iota(M)$ 是秩 1 的投射 $\mathcal{O}$-模, 并且 $M\simeq\ker(\pi\circ\iota)\oplus\pi\circ\iota(M)$, $\mathrm{rk}(\ker(\pi\circ\iota))<\mathrm{rk}(M)$. □

引理 2.8. 对任何 $\mathcal{O}$ 的整理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$, 存在 $f\in K^\times$ 使得 $f\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 互素.

证明. 任取 $x\in\mathfrak{a}$ 并设 $\mathfrak{ac}=x\mathcal{O}$. 由于 $\mathcal{O}/\mathfrak{bc}$ 是主理想环, 我们可以设它的理想 $\mathfrak{c}/\mathfrak{bc}$ 由 $y+\mathfrak{bc}$ 生成, 于是 $y\mathcal{O}+\mathfrak{bc}=\mathfrak{c}$, 从而 $x\mathcal{O}=\mathfrak{ac}=y\mathfrak{a}+x\mathfrak{b}$. 令 $f=y/x$ 即可. □

引理 2.9. 对任何 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$, 在 $K_0(\mathcal{O})$ 中成立 $([\mathfrak{a}]-[\mathcal{O}])([\mathfrak{b}]-[\mathcal{O}])=0$.

证明. 当 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 是互素的整理想时, 满射 $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}\to\mathcal{O},(a,b)\mapsto a+b$ 的核同构于 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{ab}$, 因此 $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}\simeq\mathfrak{ab}\oplus\mathcal{O}$. 对于一般的分式理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$, 根据引理 2.8 我们可以通过乘以一个主理想在不改变其所在的等价类的情况下变成互素的整理想. □

引理 2.10. $\det:K_0(\mathcal{O})\to\mathrm{Pic}(\mathcal{O}),[M]\mapsto\bigwedge^{\mathrm{rk}(M)}M$ 是群同态.

证明. 只需证明对有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M,N 有 $\bigwedge^{m+n}(M\oplus N)\simeq\bigwedge^m M\otimes_{\mathcal{O}}\bigwedge^n N$, 其中 $m=\mathrm{rk}(M),n=\mathrm{rk}(N)$. 令 $\kappa:\bigwedge^m M\otimes_{\mathcal{O}}\bigwedge^n N\to\bigwedge^{m+n}(M\oplus N),(a_1\wedge...\wedge a_m)\otimes(b_1\wedge...\wedge b_n)\mapsto(a_1,0)\wedge...\wedge(a_m,0)\wedge(0,b_1)\wedge...\wedge(0,b_n)$. 由于 $(x,y)\mapsto x\wedge y$ 双线性, κ 定义良好. 又对任何 $(a_1,b_1)\wedge...\wedge(a_{m+n},b_{m+n})\in\bigwedge^{m+n}(M\oplus N)$, 我们有

$$(a_1,b_1)\wedge...\wedge(a_{m+n},b_{m+n})=\sum_{I\subset\{1,2,...,m+n\},\#T=m}\varepsilon_T\big(\wedge_{i\in T}(a_i,0)\wedge_{i\notin T}(0,b_i)\big)$$

对某些 $\varepsilon_T\in\{1,-1\}$. 因此 $\wedge_{i\in T}(a_i,0)\wedge_{i\notin T}(0,b_i)\mapsto\wedge_{i\in T}a_i\otimes\wedge_{i\notin T}b_i$ 给出 κ 的逆. □

定义 2.3. $c_1:K_0(\mathcal{O})\to I(\mathcal{O}),[M]\mapsto[M]-\mathrm{rk}(M)[\mathcal{O}]$.

我们记 $\mathbb{Z}\oplus I(\mathcal{O})=\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$. 定义 $\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$ 的乘法 $(r,[M])(s,[N])=(rs,r[N]+s[M])$. 不难验证此运算使得 $\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$ 成为一个环.

命题 2.11. $\mathrm{ch}=\mathrm{rk}\oplus c_1:K_0(\mathcal{O})\to\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$ 是环同构.

证明. c_1 显然是 Abel 群同态, 并且限制在 $I(\mathcal{O})$ 上是恒等映射, 又有

$$0\to I(\mathcal{O})\to K_0(\mathcal{O})\xrightarrow{\mathrm{rk}}\mathbb{Z}\to 0$$

正合, 于是 $\mathrm{ch}:K_0(\mathcal{O})\to\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$ 是 Abel 群同构. 又由引理 2.9 及 $\mathrm{gr}K_0(\mathcal{O})$ 的乘法运算的定义, 此映射也保持乘法, 因此是环同构. □

命题 2.12. $\det : I(\mathcal{O}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{O}), [M] - \mathrm{rk}(M)[\mathcal{O}] \mapsto \det M$ 是同构, 从而 $\mathrm{id} \oplus \det : \mathrm{gr}K_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 是同构.

证明. 据引理 2.7, $I(\mathcal{O})$ 由形如 $[M] - \mathrm{rk}(M)$ 的元素生成. 考虑 $\lambda : \mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \to I(\mathcal{O}), a \mapsto [a] - [\mathcal{O}]$, 据引理 2.9 这是同态, 并且 $\det \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathrm{Pic}(\mathcal{O})}, \lambda \circ \det = \mathrm{id}_{I(\mathcal{O})}$, 从而 det 是同构. □

** 实际上作为集合之间的映射 λ 就是 c_1 的限制, 这里不直接这样写是因为我们并没把 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 当作 $K_0(\mathcal{O})$ 的子结构.

推论 2.13. $K_0(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\mathcal{O})$.

2.2 Arakelov ideals 和 Metrized $\mathcal{O}-$Modules

Dedekind 环 $\mathcal{O}$ 的一个位 (place) 是指 $\mathcal{O}$ 上一个赋值的等价类. 一个有穷素位 (finite place) 等价于其一个素理想; 无穷素位 (infinite place) 是指其分式域 K 到 $\mathbb{C}$ 的一个嵌入, 但相差一个复共轭的两个嵌入被视为同一个素位; 嵌入 σ 诱导的赋值是 $\nu_\sigma : a \mapsto -\log|\sigma a|$. 我们将用 $\mathfrak{p}|\infty$ 来表示 $\mathfrak{p}$ 是无穷素位.

本节中对有限生成 $\mathcal{O}$-模 M 及 $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, 用 $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O},\sigma} \mathbb{C}$ 表示 $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$, 其中 $a \in \mathcal{O}$ 以数乘 σa 作用在 $\mathbb{C}$ 上. Frobenius 变换 $F : M_\sigma \to M_{\overline{\sigma}}, m \otimes z \mapsto m \otimes \overline{z}$ 是同构.

定义 2.4. 一个有限生成 $\mathcal{O}$-模 M 上的一个 Hermitian 度量 $(\langle -, - \rangle_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})}$ 是指一族 F-不变的复内积 $\langle -, - \rangle_\sigma : M_\sigma \times M_\sigma \to \mathbb{C}$, 即对任何 $x, y \in M_\sigma$ 有 $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle Fx, Fy \rangle$; 装备了 Hermitian 度量的有限生成 $\mathcal{O}$-模被称为度量 $\mathcal{O}$-模.

设 M, N 是度量 $\mathcal{O}$-模, 同态 $f : M \to N$ 自然地诱导 $f_\sigma : M_\sigma \to N_\sigma$. 如果对每个 σ 都有 $\langle x, y \rangle_{M_\sigma} = \langle f_\sigma(x), f_\sigma(y) \rangle_{N_\sigma}$, 则称 f 等距. 称度量 $\mathcal{O}$-模 M, N 等距同构, 如果 M, N 之间存在等距的 $\mathcal{O}$-模同构.

引理 2.14. 设 M, N 是 $\mathcal{O}$-模, 那么我们有自然的 $\mathcal{O}$-模同构 $(M \oplus N)_\sigma \simeq M_\sigma \oplus N_\sigma$, $(M \otimes_{\mathcal{O}} N)_\sigma \simeq M_\sigma \otimes_{\mathcal{O}} N_\sigma$, $\det(M_\sigma) \simeq (\det M)_\sigma$, $(M^\vee)_\sigma \simeq (M_\sigma)^\vee$.

设 M, N 是度量 $\mathcal{O}$-模. 在 $M \oplus N$, $M \otimes_{\mathcal{O}} N$, $\det M$, $M^\vee$ 上分别定义:

$$\langle x \oplus u, y \oplus v \rangle_{M \oplus N} = \langle x, y \rangle_M + \langle u, v \rangle_N;$$

$$\langle x \otimes u, y \otimes v \rangle_{M \otimes N} = \langle x, y \rangle_M \langle u, v \rangle_N;$$

$$\langle \wedge_{i=1}^n x_i, \wedge_{i=1}^n y_i \rangle_{\det M} = \det(\langle x_i, y_j \rangle_M)_{1 \le i,j \le n};$$

$$\langle f, g \rangle_{M^\vee} = \overline{\langle f^\vee, g^\vee \rangle_M}.$$

最后一个等式中 $f^\vee$ 确切含义是在每一个 $M_\sigma^\vee$ 上根据 Riesz 表示定理每个 $f_\sigma : M_\sigma \to \mathbb{C}$ 都具有 $\langle x_\sigma, - \rangle_\sigma$ 的形式. 简单的计算表明, $M \oplus N$, $M \otimes_{\mathcal{O}} N$, $\det M$, $M^\vee$ 依此定义形成度量 $\mathcal{O}$-模.

定义 2.5. 设 M, M_1, M_2 是度量 $\mathcal{O}$-模. 称 $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ 为分裂的度量 $\mathcal{O}$-模正合列, 如果它满足以下的条件:

i) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ 是分裂的 $\mathcal{O}$-模正合列;

ii) 对每个 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ, $f_\sigma : M_{1\sigma} \to M_\sigma$ 和 g_σ 限制在 $(\mathrm{im} f_\sigma)^\perp$ 都是等距的.

此时 M 和 $M_1 \oplus M_2$ (装备之前所叙述的直和的度量) 等距同构.

定义 2.6. $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 是指可逆度量 $\mathcal{O}$-模的等距同构类装备 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 形成的群.

定义 2.7. $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 定义为 $\widehat{\mathcal{F}}_0 / \widehat{\mathcal{R}}_0$, 其中 $\widehat{\mathcal{F}}_0$ 是投射度量 R-模的等距同构类生成的自由 Abel 群, $\widehat{\mathcal{R}}_0$ 是由 $\widehat{\mathcal{F}}_0$ 中形如 $M_1 - M + M_2$ 的元素生成的子群, 其中 $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ 是分裂的度量 $\mathcal{O}$-模正合列. 一个有限生成投射 $\mathcal{O}$-模 M 在 $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 中的等价类记作 $[M]$. $\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 装备乘法 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 形成交换环.

此外对 $\mathrm{rk} : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}$: 记 $\widehat{I}(\mathcal{O}) = \ker(\mathrm{rk})$, 以及 $\mathbb{Z} \oplus \widehat{I}(\mathcal{O}) = \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$.

定义 2.8. $\mathcal{O}$ 的一个 Arakelov 理想是指形式的记号 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_f \mathfrak{a}_\infty$, 其中 $\mathfrak{a}_f$ 是普通的分式理想, $\mathfrak{a}_\infty \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$. 由 $x \in \mathcal{O}$ 生成的主 Arakelov 理想是指 $x\mathcal{O} \times (\nu_{\mathfrak{p}}(x))_{\mathfrak{p}|\infty}$. Arakelov 理想类群 $\widehat{Cl}_K$ 是指 $\mathcal{O}$ 的 Arakelov 理想商去主 Arakelov 理想.

普通的分式理想 $\mathfrak{a}$ 按照 $\mathfrak{a}_\infty = 0$ 成为 Arakelov 理想. 一个 Arakelov 理想具有度量 $\mathcal{O}$-模结构如下: $\langle x, y \rangle_\sigma = \mathrm{e}^{2\nu_\sigma} \rho_\sigma(x) \overline{\rho_\sigma(y)}$, 其中 $\mathcal{O}$-模同构 $\rho_\sigma : \mathfrak{a} \otimes_\sigma \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \otimes z \mapsto \sigma(x) z$.

本节剩余的内容意在计算验证我们在第二节中建立的关系在度量 $\mathcal{O}$-模以及 Arakelov 理想的情况下仍然成立.

命题 2.15. $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}) = \widehat{Cl}_K$.

证明. 只需证明以下三个部分:

i) 两个 Arakelov 理想作为度量 $\mathcal{O}$-模等距同构当且仅当它们相差一个主 Arakelov 理想. 必要性是显然的; 充分性: 设有等距同构 $h:\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}$, 那么有 $\mathcal{O}$-模同构 $h:\mathfrak{a}_f\to\mathfrak{b}_f$, 因此存在 $x\in K^\times$ 使得 $h:a\mapsto xa$. 设 $\mathfrak{a}_\infty=(\nu_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty}$, $\mathfrak{b}_\infty=(\mu_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty}$, 那么 $\mathrm{e}^{2\nu_\sigma}\rho_\sigma(a)\overline{\rho_\sigma(b)}=\langle a,b\rangle_\mathfrak{a}=\langle xa,xb\rangle_\mathfrak{b}=\mathrm{e}^{2\mu_\sigma}\rho_\sigma(xa)\overline{\rho_\sigma(xb)}=\mathrm{e}^{2\mu_\sigma}|\sigma(x)|^2\rho_\sigma(a)\overline{\rho_\sigma(b)}$. 因此 $\nu_\sigma=\mu_\sigma+\log|\sigma x|$ 即 $(x)_\infty\mathfrak{a}_\infty=\mathfrak{b}_\infty$, 总之 $x\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

ii) 两个 Arakelov 理想的乘积等距同构于它们作为度量 $\mathcal{O}$-模的张量积. 这是度量 $\mathcal{O}$-模的张量积的定义.

iii) 任何可逆度量 $\mathcal{O}$-模同构于某个 Arakelov 理想. 在引理 2.5 已经证明任何可逆 $\mathcal{O}$-模 M 同构于某个分式理想 $\mathfrak{a}_f$, 我们可以选取合适的实数组 $\mathfrak{a}_\infty$ 使得此同构成为等距同构. □

引理 2.16. $\det:\widehat{K}_0(\mathcal{O})\to\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}),[M]\mapsto\bigwedge^{\mathrm{rk}(M)}M$ 是群同态.

证明. 只需对投射度量 $\mathcal{O}$-模 M,N 证明在引理 2.10 中定义的映射 $\kappa:\det M\otimes_\mathcal{O}\det N\to\det(M\oplus N),(a_1\wedge...\wedge a_m)\otimes(b_1\wedge...\wedge b_n)\mapsto(a_1,0)\wedge...\wedge(a_m,0)\wedge(0,b_1)\wedge...\wedge(0,b_n)$ 等距, 其中 $m=\mathrm{rk}(M)$, $n=\mathrm{rk}(N)$. 事实上我们有

$$\begin{aligned}
\langle\wedge_{i=1}^m a_i\otimes\wedge_{i=1}^m c_i,\wedge_{i=1}^n b_i\otimes\wedge_{i=1}^n d_i\rangle_{\det M\otimes\det N_\sigma}&=\langle\wedge_{i=1}^m a_i,\wedge_{i=1}^m c_i\rangle_{\det M_\sigma}\langle\wedge_{i=1}^n b_i,\wedge_{i=1}^n d_i\rangle_{\det N_\sigma}\\
&=\det(\langle a_i,c_j\rangle_{M_\sigma})_{1\le i,j\le m}\det(\langle b_i,d_j\rangle_{N_\sigma})_{1\le i,j\le n}\\
&=\det\begin{pmatrix}(\langle a_i,c_j\rangle_{M_\sigma})_{1\le i,j\le m} & 0\\ 0 & (\langle b_i,d_j\rangle_{N_\sigma})_{1\le i,j\le n}\end{pmatrix}\\
&=\det(\langle x_i,y_j\rangle_{M\oplus N_\sigma})_{1\le i,j\le m+n}\\
&=\langle\wedge_{i=1}^{m+n}x_i,\wedge_{i=1}^{m+n}y_i\rangle_{\det(M\oplus N)_\sigma},
\end{aligned}$$

其中对 $1\le i\le m$, $x_i=(a_i,0)$, $y_i=(c_i,0)$; 对 $m+1\le i\le m+n$, $x_i=(0,b_{i-m})$, $y_i=(0,d_{i-m})$. □

引理 2.17. 任何非零的投射度量 $\mathcal{O}$-模 M 同构于可逆度量 $\mathcal{O}$-模的直和.

证明. 在 Lemma 2.7 的证明中, 记 $f=\pi\circ\iota$ 并设 g 是 M 在 $\ker(f)$ 的一个截面. 在 $\ker(f)$ 和上装备 M 的度量的限制, 在 $f(M)$ 上装备度量 $\langle f(x),f(y)\rangle_{f(M)}=\langle x-g(x),y-g(y)\rangle_M$. 易于验证后者定义良好且使得 $0\to\ker(f)\to M\to f(M)\to 0$ 作为度量 $\mathcal{O}$-模的正合列分裂. □

命题 2.18. $\det:\widehat{I}(\mathcal{O})\to\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 是同构, 从而 $\mathrm{id}\oplus\det:\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})\to\mathbb{Z}\oplus\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 是同构.

证明. 考虑 $\lambda:\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})\to\widehat{I}(\mathcal{O}), a\mapsto[a]-[\mathcal{O}]$, 据引理 2.9 这是同态. 由引理 3.4 知 $\widehat{I}(\mathcal{O})$ 由形如 $[M]-\mathrm{rk}(M)$ 的元素生成, 因此 $\det\circ\lambda=\mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})}, \lambda\circ\det=\mathrm{id}_{\widehat{I}(\mathcal{O})}$, 从而 det 是同构. □

命题 2.19. $\mathrm{ch}=\mathrm{rk}\oplus c_1:\widehat{K}_0(\mathcal{O})\to\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 是环同构.

证明. c_1 显然是 Abel 群同态, 并且限制在 $\widehat{I}(\mathcal{O})$ 上是恒等映射, 又有

$$0\to\widehat{I}(\mathcal{O})\to\widehat{K}_0(\mathcal{O})\xrightarrow{\mathrm{rk}}\mathbb{Z}\to 0$$

正合, 于是 $\mathrm{ch}:\widehat{K}_0(\mathcal{O})\to\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 是 Abel 群同构. 又由引理 2.9 及 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O})$ 的乘法运算的定义, 此映射也保持乘法, 因此是环同构. □

最后我们引进 Arakelov 除子类群作为通常除子类群的对应, 它与推广后的 Picard 群仍然是相同的.

定义 2.9. $\mathcal{O}$ 的 Arakelov 除子群是拓扑群 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})=\bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})}\mathbb{Z}\times\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}$, 它的拓扑是装备离散拓扑的 $\bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})}\mathbb{Z}$ 和装备欧氏拓扑的 $\prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}$ 的乘积. 主除子是指形如 $\sum_{\mathfrak{p}}\nu_{\mathfrak{p}}(f)\mathfrak{p}$ 的除子, 其全体形成 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 的一个子群, Arakelov 除子类群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})$ 被定义为 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 商去主除子并装备相应的商拓扑.

命题 2.20. 映射 $\mathrm{div}:\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})\to\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O}),\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}}\mapsto(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ 是同构.

证明. Trivial. □

在除子类群上我们有经典的同态: $\deg:\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})\to\mathbb{R},(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}\mapsto\sum_{\mathfrak{p}}\nu_{\mathfrak{p}}\log\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, 这里 $\mathfrak{N}$ 是指理想的绝对范数, 即 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})=[\mathcal{O}:\mathfrak{p}]$, 对于无穷素位的情况, 我们依据此嵌入是实的或复的定义它为 1 或者 2. 此同态也根据上面的同构被定义在 $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O})$ 上, 即 $\deg(\mathfrak{a})=\deg(\mathrm{div}(\mathfrak{a}))$.

3 Riemann-Roch Theory

本节中, 我们假设 L/K 是数域的有限扩张.

3.1 Grothendieck-Riemann-Roch

对于 $\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K)$ 和 $\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)$, 我们考虑它们之间的环同态: $i_*:\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\to\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K),[M]_L\mapsto[M]_K$ 将一个 (有限生成) 度量 $\mathcal{O}_L$-模视为一个 $\mathcal{O}_K$-模, 度量结构为对于 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ 定义 $\langle x,y\rangle_\sigma=\sum_{\tau|\sigma}\langle x,y\rangle_\tau$, 其中 $\tau|\sigma$ 是指 τ 是 L 到 $\mathbb{C}$ 的限制在 K 上是 σ 的嵌入; 以及

$i^*: \widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \to \widehat{K}_0(\mathcal{O}_L), [M]_K \mapsto [M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L]_L$，其中 $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ 的度量结构由自然的同构 $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_L,\tau} \mathbb{C} = M \otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma} \mathbb{C}$ 给出.

引理 3.1. 设 M 是投射度量 $\mathcal{O}_L$-模, N 是投射度量 $\mathcal{O}_K$-模, 那么 $i_*M \otimes_{\mathcal{O}_K} N = i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_L} i^*N)$.

证明. 映射 $f: i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_L} (N \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L)) \to i_*M \otimes_{\mathcal{O}_K} N, m \otimes (n \otimes x) \mapsto xm \otimes n$ 是 $\mathcal{O}_K$-模同构, 而且

$$\begin{aligned}
\langle x_1m_1 \otimes n_1, x_2m_2 \otimes n_2\rangle_{i_*M\otimes_{\mathcal{O}_K}N,\sigma} &= \langle x_1m_1, x_2m_2\rangle_{i_*M,\sigma}\langle n_1, n_2\rangle_{N,\sigma} \\
&= \sum_{\tau|\sigma}\langle x_1m_1, x_2m_2\rangle_{M,\tau}\langle n_1, n_2\rangle_{N,\sigma} \\
&= \sum_{\tau|\sigma}\langle m_1, m_2\rangle_{M,\tau}x_1\overline{x_2}\langle n_1, n_2\rangle_{N,\sigma} \\
&= \sum_{\tau|\sigma}\langle m_1, m_2\rangle_{M,\tau}\langle n_1 \otimes x_1, n_2 \otimes x_2\rangle_{N\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L,\sigma} \\
&= \langle m_1, m_2\rangle_{i_*M,\sigma}\langle n_1 \otimes x_1, n_2 \otimes x_2\rangle_{N\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L,\sigma} \\
&= \langle m_1 \otimes (n_1 \otimes x_1), m_2 \otimes (n_2 \otimes x_2)\rangle_{i_*(M\otimes_{\mathcal{O}_L}(N\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L)),\sigma}.
\end{aligned}$$

因此我们有度量 $\mathcal{O}_K$-模的等距同构 $i_*M \otimes_{\mathcal{O}_K} N = i_*(M \otimes_{\mathcal{O}_L} i^*N)$. □

命题 3.2. 设 M 是投射度量 $\mathcal{O}_L$-模, 那么 $\mathrm{rk}_K(i_*M) = [L:K]\mathrm{rk}_K(i_*M)$.

证明. Trivial. □

命题 3.3. 设 M 是投射度量 $\mathcal{O}_L$-模, 那么 $\det_K(i_*M) = \mathrm{N}_{L/K}(\det_L M) \otimes_{\mathcal{O}_K} \det_K(i_*\mathcal{O}_L)^{\mathrm{rk}_L(M)}$.

证明. 根据引理 2.17 和数学归纳法, 只需对 $\mathrm{rk}M = 1$ 即 $M = \mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{O}_L$ 的 Arakelov 理想的情况证明此结论. 为此考虑 $f: \mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{A}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \det_K(i_*\mathcal{O}_L) \to \det_K(i_*\mathfrak{A}), \mathrm{N}_{L/K}(a) \otimes \wedge_{i=1}^{[L:K]} b_i \mapsto \wedge_{i=1}^{[L:K]} ab_i$. 此映射是定义良好的单射, 因为若考虑 L 作为 K-线性空间的自同构 $l_a: x \mapsto ax$, 有 $\wedge_{i=1}^{[L:K]} ab_i = \wedge_{i=1}^{[L:K]} l_a(b_i) = \det(l_a) \wedge_{i=1}^{[L:K]} b_i = \mathrm{N}_{L/K}(a) \wedge_{i=1}^{[L:K]} b_i$. 由于满是局部性质, 我们不妨假设 $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K$ 是主理想环且 a 生成 $\mathfrak{A}$, 在此条件下 f 显然是满射. 为证明 f 等距, 记 $\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{a}$, 并且设 $\mathfrak{A}_\infty = \prod_{\mathfrak{P}|\infty} \mathfrak{P}^{\nu_\mathfrak{P}}$, 那么 $\mathfrak{a}_\infty = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}$, 其中 $\nu_\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}\nu_\mathfrak{P}$,

$f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}=[L_{\mathfrak{P}}:K_{\mathfrak{p}}]$ 是惯性指数. 对于 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ 设它的无穷素位 $\mathfrak{p}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{N}_{L/K}(a)\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\mathrm{N}_{L/K}(c)\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{A})\otimes_{\mathcal{O}_K}\det_K(i_*\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\langle \mathrm{N}_{L/K}(a),\mathrm{N}_{L/K}(c)\rangle_{\mathfrak{a},\sigma}\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\det_K(i_*\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\mathrm{e}^{2\nu_{\mathfrak{p}}}\mathrm{N}_{L/K}(a)\overline{\mathrm{N}_{L/K}(c)}\det(\langle b_i,d_j\rangle_{i_*\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]}\\
=&\det(\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{2\nu_\tau})_{\tau|\sigma})\det(l_a)\det(l_{\overline{c}})\det(\langle b_i,d_j\rangle_{i_*\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]}\\
=&\det(\langle ab_i,cd_j\rangle_{i_*\mathfrak{A},\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]}\\
=&\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}ab_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}cd_i\rangle_{\det_K(i_*\mathfrak{A}),\sigma}.
\end{aligned}$$

从而 f 是等距同构. □

命题 3.4. 我们有度量 $\mathcal{O}_K$-模的等距同构 $d_{L/K}=\det(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathcal{O}_K}\det(\mathcal{O}_L)$, 其中 L/K 的判别式 (discriminant) $d_{L/K}$ 以 $(d_{L/K})_\infty=0$ 成为 Arakelov 理想.

证明. 考虑映射 $T:\det(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathcal{O}_K}\det(\mathcal{O}_L)\to d_{L/K},\wedge_{i=1}^{[L:K]}a_i\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i\mapsto\det(\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib_j))$, 这显然是满射, 由两边都是秩 1 的知道这也是单射. 此外我们有

$$\begin{aligned}
&\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}a_i\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}c_i\otimes\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\det(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathcal{O}_K}\det(\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}b_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}d_i\rangle_{\det(\mathcal{O}_L),\sigma}\langle\wedge_{i=1}^{[L:K]}a_i,\wedge_{i=1}^{[L:K]}c_i\rangle_{\det(\mathcal{O}_L),\sigma}\\
=&\det((\langle a_i,c_j\rangle_{\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\langle b_i,d_j\rangle_{\mathcal{O}_L,\sigma})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(a_i)\overline{\tau(c_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(b_i)\overline{\tau(d_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(a_i)\tau(b_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\sum_{\tau|\sigma}\overline{\tau(c_i)\tau(d_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det((\sum_{\tau|\sigma}\tau(a_ib_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\det((\sum_{\tau|\sigma}\overline{\tau(c_id_j)})_{1\le i,j\le[L:K]})\\
=&\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\overline{\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}\tau(c_id_j))_{1\le i,j\le[L:K]})}\\
=&\langle\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib_j))_{1\le i,j\le[L:K]}),\det(((\mathrm{Tr}_{L/K}(c_id_j))_{1\le i,j\le[L:K]})\rangle_{d_{L,K},\sigma}
\end{aligned}$$

于是 T 是等距同构. □

定义 3.1. Dedekind 环扩张 $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ 的 Todd 类 $\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)$ 是指 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 的元素 $(0,\frac{1}{2}([D_{L/K}]-[\mathcal{O}_L]))$, 其中 $D_{L/K}$ 是 $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ 的差积理想 (different). 不致混淆时我们仍然记 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 为 $\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L)$.

记号 $\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)$ 的几何意义可以由下面命题看出 (这里 $\Omega^1_{B/A}$ 是指环扩张 B/A 的 Kähler Differential 模):

命题 3.5. 有 $\mathcal{O}_L$-模正合列 $0 \to D_{L/K} \to \mathcal{O}_L \to \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \to 0$.

证明. 根据 [3, Section 00RM, Lemma 10.131.8] 以及 [1, Chapter III, Proposition 2.2] 正合列里的三项均在局部化下被保持, 因此我们不妨假设 $\mathcal{O}_K = A, \mathcal{O}_L = B$ 是离散赋值环. 此时由 [1, Chapter II, Proposition 10.2] 存在 $x \in B$ 使得 $B = A[x]$. 根据 [3, Section 00RM, Lemma 10.131.14], $\Omega^1_{B/A}$ 由 $\mathrm{d}x$ 生成; 此外由于 [1, Chapter III, Proposition 2.4], $D_{B/A}$ 是由 $f'(x)$ 生成的 B 的理想, 其中 $f(X) \in A[X]$ 是 $x \in B$ 的最小多项式. 由 $B = A[X]/(f(X))$ 不难验证 $\Omega^1_{B/A} = B[\mathrm{d}X]/(f'(X))$, 因此 d 的核正是 $D_{B/A}$. □

最后我们定义 Gysin map $i_* : \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \to \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K)$ 为使得下面图表交换的映射.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[r, "\mathrm{id}\oplus\det"] \arrow[d, "i_*"] & \mathbb{Z} \oplus \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}_L) \arrow[d, "{[L:K]\oplus\mathrm{N}_{L/K}}"] \\
\mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \arrow[r, "\mathrm{id}\oplus\det"] & \mathbb{Z} \oplus \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{O}_K)
\end{tikzcd}$$

在这样的记号下, 本节前面建立的命题可以融合为如下的事实.

定理 3.6. (Grothendieck-Riemann-Roch) 对投射度量 $\mathcal{O}_L$-模 M 有 $\mathrm{ch}(i_*M) = i_*(\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)\mathrm{ch}(M))$, 即下面图表交换:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[r, "\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)\mathrm{ch}"] \arrow[d, "i_*"] & \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_L) \arrow[d, "i_*"] \\
\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \mathrm{gr}\widehat{K}_0(\mathcal{O}_K)
\end{tikzcd}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
i_*\mathrm{Td}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)\mathrm{ch}[M] &= i_*(1, \frac{1}{2}([D_{L/K}] - [\mathcal{O}_L]))(\mathrm{rk}_L M, c_1[M]) \\
&= i_*(\mathrm{rk}_L M, c_1[M] + \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]) \\
&= ([L:K]\mathrm{rk}_L M, i_*c_1[M] + \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[i_*D_{L/K}] - \frac{1}{2}\mathrm{rk}_L M[i_*\mathcal{O}_L]),
\end{aligned}$$

只需证明

$$2c_1(i_*[M]) = i_*(2c_1[M] + \mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]).$$

据引理 2.18, 只需证明在两边作用 det 后的等式. 根据熟知的结果 $\mathrm{N}_{L/K}(D_{L/K}) = d_{L/K}$ 我们有

$$\begin{aligned}\det(2c_1(i_*[M])) = \det([i_*M])^2 &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)^2 \otimes_{\mathcal{O}_K} \det(i_*\mathcal{O}_L)^{2\mathrm{rk}_L + M}] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)^2 \otimes_{\mathcal{O}_K} d_{L/K}^{\mathrm{rk}_L M}] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)]^2 [d_{L/K}]^{\mathrm{rk}_L M};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det i_*(2c_1[M] + \mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]) &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det(2c_1[M] + \mathrm{rk}_L M[D_{L/K}] - \mathrm{rk}_L M[\mathcal{O}_L]))] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det(M)^2 \det(D_{L/K})^{\mathrm{rk}_L M})] \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det(M)]^2 [\mathrm{N}_{L/K}(D_{L/K})]^{\mathrm{rk}_L M}) \\ &= [\mathrm{N}_{L/K}(\det M)]^2 [d_{L/K}]^{\mathrm{rk}_L M}\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

3.2 一个算术的 Riemann-Roch 类似物

接下来说明此定理正是 Riemann-Roch 理论的算术的类似物.

回顾紧 Riemann 曲面上经典的 Riemann-Roch 理论, 该理论旨在寻找有多少亚纯函数具有给定的零点和极点. 设 X 是亏格 g 的紧 Riemann 曲面. 对于亚纯函数 $f : X \to S^2$, 我们记 f 决定的主除子为 $\mathrm{div}(f)$. 对于任何 X 上的除子 D, 我们定义层 $\mathcal{O}_D$ 为把开集 U 对应到 U 上满足 $\mathrm{div}(f) + D|_U \geq 0$ 的亚纯函数 f 全体形成的复线性空间. Riemann-Roch 定理表明

$$\dim H^0(X; \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X; \mathcal{O}_{\omega - D}) = \deg(D) + 1 - g,$$

其中 ω 是由亚纯微分决定的除子. 利用 Serre 对偶以及 Euler-Poincaré 特征的记号 $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X; \mathcal{F})$ Riemann-Roch 定理被等价地写成 $\chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}) + \deg(D)$, 这里 $\mathcal{O}$ 是指全纯函数层.

对于数域 K 及其整数环 $\mathcal{O}$, 把 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 看作是 X 的类似物; 这种观点下 $\mathcal{O}$-模 M 相当于 X 上的一个向量丛, 特别地其中可逆 $\mathcal{O}$-模相当于 X 上一个线丛. 此外, 可逆 $\mathcal{O}$-模的同构类群 (即理想类群或 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$) 和 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 的除子类群同构.

我们直接沿用 Riemann 曲面情况的记号, 对于 $\mathcal{O}$ 的一个 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, 定义

$$H^0(\mathfrak{a}) = \{f \in K^\times :\ \nu_\mathfrak{p}(f) + \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \geq 0 \text{ for all place } \mathfrak{p}\}.$$

可以观察到 $H^0(\mathcal{O})$ 即 K 中含有的单位根 $\mu(K)$.

引理 3.7. 对固定的 $n, M > 0$, 不超过 n 次代数整数当中只有至多有限多个数 θ 满足 $|\sigma(\theta)| \leq M$ 对任何 $\mathbb{Q}(\theta)$ 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ.

证明. 对于 $k \leq n$ 次代数整数 θ 取不可约的整系数多项式 $f(X) = X^k + ... + a_1 X + a_0$ 使得 $f(\theta) = 0$, 那么熟知 $f(X) = \prod_\sigma (X - \sigma\theta)$, 从而每一个 f 的系数具有上界 $n! M^n$, 因此 f 只有有限多种选取方法. □

推论 3.8. 对于 $\mathcal{O}$ 的任何 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, $\# H^0(\mathfrak{a}) < \infty$.

按照之前的叙述, 数域上 Riemann-Roch 的类似问题即计算或估计 $\# H^0(\mathfrak{a})$. 接下来我们对于数域 K 定义一个 Euler-Poincaré 特征的类似物并且给出一个与经典的 Riemann-Roch 公式形式上完全相同的结果.

定义 3.2. 数域 K 的 Euler-Minkowski 特征是指群同态 $\chi_K : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}, [M] \mapsto \deg(\det M)$.

为了显式地计算 Euler-Minkowski 特征回顾体积的概念. 投射度量 $\mathbb{Z}$-模 M 以 $a \mapsto a \otimes 1$ 嵌入 $M_\mathbb{R} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ 成为一个格子, 它的基本区域是集合 $\{\sum_{i=1}^{\mathrm{rk} M} x_i a_i :\ 0 \leq x_i < 1\}$, 其中 $(a_i)_{1 \leq i \leq \mathrm{rk} M}$ 是 M 的 $\mathbb{Z}$-基. $M_\mathbb{R}$ 上的内积是 M 的度量即 $M_\mathbb{C}$ 上的复内积的限制, 此内积唯一地决定了 $M_\mathbb{R}$ 上的一个 Haar 测度, $\mathrm{vol}(M)$ 被定义为 M 的基本区域的测度. 简单的计算表明如果 x 是 1 维实线性空间 $(\det M)_\mathbb{R}$ 的一个生成元, 那么 $\mathrm{vol}(M) = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\det M}}$, 从而我们有 $\chi(M) = -\log\mathrm{vol}(M)$. 此外根据判别式 d_K 的定义, 我们有 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}) = \sqrt{|d_K|}$.

命题 3.9. 对于投射度量 $\mathcal{O}$-模 M, 我们有 $\chi(i_* M) = \deg(\det M) + \mathrm{rk}_K M \chi(i_* \mathcal{O})$, 这里 $\chi = \chi_\mathbb{Q}$, $i_* : \widehat{K}_0(\mathcal{O}) \to \widehat{K}_0(\mathbb{Z})$ 已经在上面定义. 特别地, 对于 $\mathcal{O}$ 的任何 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$, 我们有 $\chi(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + \chi(\mathcal{O})$.

证明. 在命题 3.3 当中取 $M = \mathfrak{a}$, $L = K$ 和 $K = \mathbb{Q}$, 我们得到 $\det(\mathfrak{a}) = \mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{a}) \otimes_\mathbb{Z} \det(i_* \mathcal{O})$. 该等式作用 det 就是所需的结论. □

为了将上述 Euler-Minkowski 特征的等式翻译成 $\#H^0(\mathfrak{a})$ 的等式, 我们还需要如下由 Serge Lang 证明的结果作为 Serre 对偶的类似物. 此结果的证明根植于 Minkowski "数的几何"理论, 并且事实上依赖于上述理论的经典结果类数有限.

定理 3.10. 对于任何的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$,

$$\#H^0(\mathfrak{a}^{-1}) = \frac{2^r(2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) + \mathrm{O}(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-\frac{1}{n}}),$$

其中 $n = [K:\mathbb{Q}]$ r, s 分别是域 K 的实和复嵌入的个数.

引理 3.11. 设 $(\mathfrak{a}_i)_{1\le i\le h}$ 是 K 的普通理想类群的代表元. 令 A_i 是满足如下条件的 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 的集合: 作为通常的理想 $\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}_i$, 而对于 $\mathfrak{p}|\infty$ 有 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}} \le c\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{f_\mathfrak{p}/n}$; 那么存在充分大的常数 c 使得 $\bigcup_{1\le i\le h} A_iK$ 含有全部 Arakelov 理想.

证明. 对于 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 满足 $\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_\infty = \prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}$, 令 $\mu_\mathfrak{p} = \nu_\mathfrak{p} - \frac{1}{n}\deg(\mathfrak{a}_\infty)$, 那么 $(f_\mathfrak{p}\mu_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty} \in H$, 其中 $f_\mathfrak{p}$ 依据 $\mathfrak{p}$ 是实的或复的取 1 或 2, $H = \{(x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty} \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}:\ \sum_{\mathfrak{p}|\infty} x_\mathfrak{p} = 0\}$. 根据 Minkowski "数的几何"理论的结果, $\mathcal{O}^\times$ 对角嵌入到 H 中形成一个格子 (这一点可以参考 [1, Chapter I, Theorem 7.3]), 因此存在 $u \in \mathcal{O}^\times$ 使得 $|\mu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u)| \le c_0$, 这里 c_0 是某个仅取决于 $\mathcal{O}$ 而与 $\mathfrak{a}$ 无关的常数. 从而我们有

$$\nu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u) = \mu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u) + \frac{1}{n}\deg(\mathfrak{a}_\infty) \le c_0 + \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\infty) = c_1 + \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}),$$

其中 $c_1 = c_0 - \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_i)$ 与 $\mathfrak{a}$ 无关. 现在令 $\mathfrak{b} = u^{-1}\mathfrak{a}$, 那么 $\mathfrak{b}_f = \mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}_i$, 而且对于 $\mathfrak{p}|\infty$ 有

$$\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}) = \nu_\mathfrak{p} - \nu_\mathfrak{p}(u) \le c_1 + \frac{1}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}),$$

因而对于 $\mathfrak{b}$ 有 $\mathfrak{N}(\mathfrak{b})^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})} \le c\frac{f_\mathfrak{p}}{n}\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ 当 $\mathfrak{p}|\infty$, 其中 $c = \mathrm{e}^{nc_1}$ 与 $\mathfrak{a}$ 无关. 对于这样的常数 c 的选取就有 $\mathfrak{a} = u\mathfrak{b} \in A_iK$. $\square$

定理 3.10 的证明. 无妨假设 $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \ge 1$. 对于 $\mathfrak{a} = \prod_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}$ 设 $P_\mathfrak{a} = \{x \in K|\ |x|_\mathfrak{p} \le \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_\mathfrak{p}}$ for all $\mathfrak{p}|\infty\}$, 那么 $\mathrm{vol}(P_\mathfrak{a}) = 2^r(2\pi)^s\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_\infty)$. 设 Γ 是 $\mathfrak{a}_f^{-1}$ 对角嵌入 $K\mathbb{Q}\mathbb{R}$ 的格子, 并且设 F 是它的一个基本区域. 根据命题 3.10 我们知道 $\mathrm{vol}(F) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_f^{-1}) = \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_f^{-1})$. 令

$$X = \{\gamma \in \Gamma:\ (\gamma + F) \cap P_\mathfrak{a} \ne \varnothing\},$$

$$Y = \{\gamma \in \Gamma:\ (\gamma + F) \subset P_\mathfrak{a} \text{ 的内部}\},$$

那么 $Y\subset H^0(\mathfrak{a}^{-1})\subset X$ 以及 $\bigcup_{\gamma\in Y}(\gamma+F)\subset \mathrm{vol}(P_{\mathfrak{a}})\subset\bigcup_{\gamma\in X}(\gamma+F)$, 从而 $\#Y\leq\#H^0(\mathfrak{a}^{-1})\leq \#X$ 以及 $\#Y\mathrm{vol}(F)\leq\mathrm{vol}(P_{\mathfrak{a}})\leq\#X\mathrm{vol}(F)$, 故

$$\left|\#H^0(\mathfrak{a}^{-1})-\frac{\mathrm{vol}(P_{\mathfrak{a}})}{\mathrm{vol}(F)}\right|\leq\#X-\#Y.$$

因此我们只需证明

$$\#(X\backslash Y)=\#\{\gamma\in\Gamma:\ (\gamma+F)\cap\partial P_{\mathfrak{a}}\neq\varnothing\}=\mathrm{O}(\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1-\frac{1}{n}}).$$

为此考虑 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 的单位正方体到 $P_{\mathfrak{a}}$ 的微分同胚, 对于实嵌入代表的分量它是线性映射 $x\mapsto 2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}}(x-0.5)$, 具有偏导数 $2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}}$; 对于复嵌入它代表的分量是 $(\rho,\theta)\mapsto\sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}}}\rho(\cos2\pi\theta,\sin2\pi\theta)$, 两个偏导数都具有上界 $2\pi\sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}}}$. 由于乘以一个主理想不改变 $\#H^0(\mathfrak{a}^{-1})$, 根据引理 3.11 我们可以选取不依赖于 $\mathfrak{a}$ 的常数 $c>0$ 和 $\mathfrak{a}$ 所在等价类的代表元使得 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}}\leq c\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{f_{\mathfrak{p}}/n}$. 从而 φ 的导数具有上界 $c_1\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}$ 其中常数 c_1 不依赖于 $\mathfrak{a}$, 故我们有

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|\leq c_1\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}\|x-y\|.$$

设 $m=[\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}]\geq1$. 我们把组成 $[0,1]^n$ 的边界的每一个 $[0,1]^{n-1}$ 均匀地剖分成 m^{n-1} 个小正方体, 其中每一个正方体的直径为 $\sqrt{n-1}/m$, 因此其在 ϕ 下的像的直径不超过 $c_1\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{1/n}\sqrt{n-1}/m\geq 2c_1\sqrt{n-1}$ 与 $\mathfrak{a}$ 无关, 记此常数为 c_2. 取 (与 $\mathfrak{a}$ 无关) c_3 使得任何直径不超过 c_2 的点集至多与 c_3 个 $\gamma+F$ 相交, 其中 $\gamma\in\Gamma$. 由于 $[0,1]^n$ 的边界是由 $2nm^{n-1}$ 个上述的 $n-1$ 维小正方体组成的, $P_{\mathfrak{a}}$ 的边界是由 $2nm^{n-1}$ 个直径不超过 c_2 的点集组成的, 于是 $\#(X\backslash Y)\geq 2nm^{n-1}c_3\geq C\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{\frac{n-1}{n}}$, 其中 C 是与 $\mathfrak{a}$ 无关的常数, 这就证明了命题. □

根据此定理, 我们对 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 引进记号

$$l(\mathfrak{a})=\log\frac{\#H^0(\mathfrak{a})}{2^r(2\pi)^s},$$

以及

$$g=l(\mathcal{O})-\chi(\mathcal{O})=\log\frac{\#\mu(K)\sqrt{|d_K|}}{2^r(2\pi)^s},$$

就得到

定理 3.12. (Riemann-Roch) 对 Arakelov 理想 $\mathfrak{a}$ 成立着

$$l(\mathfrak{a})-i(\mathfrak{a})=\deg(\mathfrak{a})+l(\mathcal{O})-g,$$

其中

$$i(\mathfrak{a}) = \mathrm{O}(\exp(\frac{-\deg(\mathfrak{a})}{[K:\mathbb{Q}]})).$$

特别地 $i(\mathfrak{a}) \to 0$ 当 $\deg(\mathfrak{a}) \to +\infty$.

我们记 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是次数为 0 的 Arakelov 除子的集合. 作为上面所述的 Riemann-Roch 定理的一个应用, 我们来证明一个关于 Arakelov 除子类群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})$ 的拓扑的结果, 它将 Minkowski "数的几何" 理论的两个经典结果 Dirichlet 单位定理和类数的有限性融合在一起.

定理 3.13. 群 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是紧的.

证明. 首先主除子群在 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}) = \bigoplus_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})} \mathbb{Z} \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$ 当中离散, 从而 $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{O})^0$ 是 Hausdorff 的. 这是因为根据引理 3.7 存在充分小的实数 m 使得如果对所有 K 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 σ 都有 $|\sigma(\theta)| \leq m$, 那么 $\theta = 0$, 因而 0 在 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 中的邻域 $0 \times B(0, \mathrm{e}^m)$ 只含 0 一个主除子.

其次我们证明存在一个 $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O})$ 中的紧集, 其中含有每一个次数为 0 的除子的等价类的一个元素. 根据定理 3.12, 存在常数 $c > 0$, 当我们取次数大于 c 的除子 D 时 $\#H^0(D)$ 含有非零元 $f \in K^\times$. 固定一个次数是 $2c$ 的除子 D. 对任何次数为 0 的除子 D', $D + D'$ 次数为 $2c$, 因此 $\#H^0(D + D')$ 含有非零元 $f \in K^\times$, 从而次数为 $2c$ 的除子 $\mathrm{div}(f) + D' + D \geq 0$ 而且 $\mathrm{div}(f) + D'$ 与 D' 是等价的除子. 次数为 $2c$ 且非负的除子显然是紧的, 这就完成了我们的证明. □

不难注意到如果我们在此命题当中遗忘掉有穷 (resp. 无穷) 的部分, 此命题就成为 Dirichlet 单位定理 (resp. 类数的有限性).

参考文献

[1] J. Neukirch and N. Schappacher. *Algebraic Number Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[2] Damian Roessler. The riemann-roch theorem for arithmetic. 1993.

[3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.