

有限元分析基础教程

Fundamentals of Finite Element Analysis

曾 攀

清华大学

2008-12

有限元分析基础教程

Fundamentals of Finite Element Analysis

曾 攀

(清华大学)

内容简介

全教程包括两大部分，共分 9 章；第一部分为有限元分析基本原理，包括第 1 章至第 5 章，内容有：绪论、有限元分析过程的概要、杆梁结构分析的有限元方法、连续体结构分析的有限元方法、有限元分析中的若干问题讨论；第二部分为有限元分析的典型应用领域，包括第 6 章至第 9 章，内容有：静力结构的有限元分析、结构振动的有限元分析、传热过程的有限元分析、弹塑性材料的有限元分析。本书以基本变量、基本方程、求解原理、单元构建、典型例题、MATLAB 程序及算例、ANSYS 算例等一系列规范性方式来描述有限元分析的力学原理、程序编制以及实例应用；给出的典型实例都详细提供有完整的数学推演过程以及 ANSYS 实现过程。本教程的基本理论阐述简明扼要，重点突出，实例丰富，教程中的二部分内容相互衔接，也可独立使用，适合于具有大学高年级学生程度的人员作为培训教材，也适合于不同程度的读者进行自学；对于希望在 MATLAB 程序以及 ANSYS 平台进行建模分析的读者，本教程更值得参考。

本基础教程的读者对象：机械、力学、土木、水利、航空航天等专业的工程技术人员、科研工作者。

作者简介

曾攀，男，1963 年生，海南省海口市人；1988 年在清华大学获博士学位，1988-1992 年先后在大连理工大学和西南交通大学从事两站博士后研究(领域为计算力学)，为国家杰出青年科学基金获得者(1998)、长江学者(2000)、德国“洪堡”学者(1994-1995)、“新世纪百千万人才工程”国家级人选。现为清华大学机械工程系主任、教授、博士生导师，为《机械工程学报》、《工程力学》、《塑性工程学报》等五个学术期刊的编委，为上海交通大学振动冲击噪声国家重点实验室、华中科技大学塑性成形模拟与模具国家重点实验室学术委员会委员，先后主持包括国家级重点基金项目、863 项目、霍英东基金项目等科研项目 30 多个，获教委科技进步二等奖、机械部一等奖、北京高等教育教学成果二等奖各一项，获国家发明专利授权两项；已出版及翻译学术著作有：《材料的概率疲劳损伤力学及现代结构分析原理》(曾攀，1993)、《有限元分析及应用》(曾攀，2004)、《工程中的有限元方法》(T.R.Chandrupatla，曾攀译)(2006)、《有限元方法第 1 卷：基本原理》(O.C.Zienkiewicz(第 5 版)，曾攀译)(2008)，发表论文 100 多篇。主要从事计算力学、结构设计与分析、材料加工中的数值模拟等方面的研究。

前 言

有限元分析已经在教学、科研以及工程应用中成为重要而又普及的数值分析方法和工具；该基础教程力求提供具备现代特色的实用教程。在教材的内容体系上综合考虑有限元方法的力学分析原理、建模技巧、应用领域、软件平台、实例分析这几个方面，按照教科书的方式深入浅出地叙述有限元方法，并体现出有限元原理“在使用中学习，在学习中使用”的交互式特点，在介绍每一种单元的同时，提供完整的典型推导实例、MATLAB 实际编程以及 ANSYS 应用数值算例，并且给出的各种类型的算例都具有较好的前后对应性，使学员在学习分析原理的同时，也进行实际编程和有限元分析软件的操作，经历实例建模、求解、分析和结果评判的全过程，在实践的基础上深刻理解和掌握有限元分析方法。

一本基础教材应该在培养学员掌握坚实的基础理论、系统的专业知识方面发挥作用，因此，教材不但要提供系统的、具有一定深度的基础理论，还要介绍相关的应用领域，以给学员进一步学习提供扩展空间，本教程正是按照这一思路进行设计的；全书的内容包括两个部分，共分 9 章；第一部分为有限元分析基本原理，包括第 1 章至第 5 章，内容有：绪论、有限元分析过程的概要、杆梁结构分析的有限元方法、连续体结构分析的有限元方法、有限元分析中的若干问题讨论；第二部分为有限元分析的典型应用领域，包括第 6 章至第 9 章，内容有：静力结构的有限元分析、结构振动的有限元分析、传热过程的有限元分析、弹塑性材料的有限元分析。在基本原理方面，以基本变量、基本方程、求解原理、单元构建等一系列规范的方式进行介绍；在阐述有限元分析与应用方面，采用典型例题、MATLAB 程序及算例、ANSYS 算例的方式，以体现出分析建模的不同阶段和层次，引导学员领会有限元方法的实质，还提供有大量的练习题。

本教程的重点是强调有限元方法的实质理解和融会贯通，力求精而透，强调学员综合能力(掌握和应用有限元方法)的培养，为学员亲自参与建模、以及使用先进的有限元软件平台提供较好的素材；同时，给学员进一步学习提供新的空间。

本教程力求体现以下特点。

(1)考虑教学适应性：强调对学员在数学原理、分析建模、软件应用几个方面的培养目标要求，注重学员在工程数值方面的基础训练，培养学员“使用先进软件+分析实际问题”的初步能力。

(2)考虑认知规律性：力求按照有限元分析方法的教学规律和认知规律，在教材中设计了“基本变量、基本方程、求解原理、单元构建”这样的模块；并体现出有限元原理“在使用中学习，在学习中使用”的交互式特点，在介绍每一种单元的同时，提供实用的 MATLAB 实际编程和数值实例；在每一章还进行要点总结，给出典型例题，以引导学员领会有限元方法的实质，体现教材的启发性，有利于激发学员学习兴趣和便于自学。

(3)考虑结构完整性：本教程提供完整的教材结构：绪论、正文、典型例题、基于 MATLAB 的编程算例与数值算例、具有一定深度的 ANSYS 算例、各章要点、习题、专业术语的英文标注、关键词中文和英文索引、参考文献，便于学员查阅。

(4)内容上的拓展性：除基本内容外，还介绍了较广泛的应用领域，包括：静力结构分析、结构振动分析、传热过程分析、弹塑性材料分析；提供了有关的典型问题的建模详细分析过程，基本上反映了有限元分析在一些主要领域的应用状况及建模方法。

(5)编排上的逻辑性：本教程力求做到具有分明的层次和清楚的条理，在每一章中重点突出有限元方法的思想、数理逻辑及建模过程，强调相应的工程概念，提供典型例题及详解，许多例题可作为读者进行编程校验的标准考题(Benchmark)，还提供了对应的 MATLAB 编程

算例与 ANSYS 算例，特别是介绍了基于 APDL 参数化的 ANSYS 建模方法，并给出具体的实例，力求反映有限元分析的内在联系及特有思维方式。

由于作者的水平有限，所写的教程一定会出现不少错误，敬请读者提出批评。

曾 攀

于清华大学

2008-12-11



有限元分析基础教程

Fundamentals of Finite Element Analysis

目 录

第一部分 有限元分析基本原理

第 1 章 绪论

- 1.1 概况 1
- 1.2 有限元方法的历史 1
- 1.3 有限元分析的作用 5

第 2 章 有限元分析过程的概要 7

- 2.1 有限元分析的目的和概念 7
- 2.2 一维阶梯杆结构问题的求解 9
- 2.3 有限元分析的基本流程 17
- 2.4 有限元分析的特点 20
- 2.5 本章要点 22

第 3 章 杆梁结构分析的有限元方法 23

- 3.1 杆梁结构分析的工程概念 23
- 3.2 杆件有限元分析的标准化表征与算例 24
 - 3.2.1 杆件分析的基本力学原理 24
 - 3.2.2 局部坐标系中的杆单元描述 28
 - 3.2.3 杆单元的坐标变换 32
 - 3.2.4 杆单元分析的 MATLAB 程序 35
 - 3.2.5 杆结构分析的算例 38
- 3.3 梁件有限元分析的标准化表征与算例 47
 - 3.3.1 梁件分析的基本力学原理 48
 - 3.3.2 局部坐标系中的平面梁单元 54
 - 3.3.3 平面梁单元的坐标变换 62
 - 3.3.4 空间梁单元及坐标变换 63
 - 3.3.5 梁单元的常用等效节点载荷 66
 - 3.3.6 梁单元分析的 MATLAB 程序 68
 - 3.3.7 梁结构分析的算例 70
- 3.4 应用：桥梁结构的 ANSYS 参数化分析 77



- 3.4.1 桥梁结构描述 77
- 3.4.2 基于 ANSYS 的桁架桥梁结构分析 78
- 3.5 本章要点 83**
- 3.6 习题 83**

第 4 章 连续体结构分析的有限元方法 89

- 4.1 连续体结构分析的工程概念 89**
- 4.2 连续体结构分析的基本力学原理 89**
- 4.3 平面问题有限元分析的标准化表征 95**
 - 4.3.1 平面问题的 3 节点三角形单元描述 95
 - 4.3.2 平面问题的 4 节点矩形单元描述 101
 - 4.3.3 平面问题 3 节点三角形单元的 MATLAB 程序 114
 - 4.3.4 平面问题 4 节点矩形单元的 MATLAB 程序 116
- 4.4 轴对称问题有限元分析的标准化表征 118**
 - 4.4.1 轴对称问题的基本变量及方程 118
 - 4.4.2 3 节点三角形轴对称单元(环形单元) 120
 - 4.4.3 4 节点矩形轴对称单元(环形单元) 122
- 4.5 空间问题有限元分析的标准化表征 123**
 - 4.5.1 空间问题的 4 节点四面体单元描述 123
 - 4.5.2 空间问题的 8 节点正六面体单元描述 126
 - 4.5.3 空间问题 4 节点四面体单元的 MATLAB 程序 128
 - 4.5.4 空间问题 8 节点正六面体单元的 MATLAB 程序 130
- 4.6 形状映射参数单元的一般原理和数值积分 133**
 - 4.6.1 两个坐标系之间的三个方面的变换 133
 - 4.6.2 参数单元的三种类型 137
 - 4.6.3 参数单元刚度矩阵计算的数值积分 137
- 4.7 平面问题分析的算例 143**
 - 4.7.1 平面 3 节点三角形单元分析的算例 143
 - 4.7.2 平面 4 节点四边形单元分析的算例 151
- 4.8 空间问题分析的算例 155**
 - 4.8.1 空间 4 节点四面体单元分析的算例 155
 - 4.8.2 空间 8 节点六面体单元分析的算例 161
- 4.9 本章要点 165**
- 4.10 习题 166**

第 5 章 有限元分析中的若干问题讨论 169

- 5.1 单元的节点编号与总刚度阵的存储带宽 169**
- 5.2 单元形状函数矩阵与刚度矩阵的性质 170**
 - 5.2.1 形状函数矩阵的性质 170
 - 5.2.2 刚度矩阵的性质 171
- 5.3 边界条件的处理与支反力的计算 177**

**5.4 单元位移函数构造与收敛性要求 188**

5.4.1 选择单元位移函数的一般原则 188

5.4.2 关于收敛性问题 189

5.4.3 位移函数构造的收敛性准则 190

5.5 C₀型单元与 C₁型单元 192**5.6 有限元分析结果的性质与节点应力的平均处理 193**

5.6.1 有限元分析结果的下限性质 193

5.6.2 共用节点上应力的平均处理 195

5.7 高阶单元的构建 196

5.7.1 一维高阶单元 196

5.7.2 二维高阶单元 199

5.7.3 三维高阶单元 202

5.8 提高计算精度的 h 方法和 p 方法 204**5.9 本章要点 205****5.10 习题 205**

第二部分 有限元分析的典型应用领域

第 6 章 静力结构的有限元分析 208

6.1 连续体平面问题的 MATLAB 有限元分析程序 208

6.1.1 程序原理 208

6.1.2 完整的 MATLAB 程序源代码 212

6.2 受均匀载荷方形板的有限元分析 216**6.3 自主程序开发与 ANSYS 前后处理器的衔接 222****6.4 工程应用：预应力万吨液压机机架的参数化建模与分析 228**

6.4.1 模锻液压机的描述 228

6.4.2 8 万吨模锻液压机主牌坊的简化模型的有限元分析 230

6.5 习题 235

第 7 章 结构振动的有限元分析 237

7.1 结构振动分析的基本原理 237

7.1.1 结构振动分析的基本方程 237

7.1.2 结构振动的有限元分析列式 239

7.1.3 常用单元的质量矩阵 241

7.2 汽车悬挂系统的振动模态分析 243**7.3 带有张拉的绳索的振动模态分析 247****7.4 机翼模型的振动模态分析 251****7.5 习题 255**

第 8 章 传热过程的有限元分析 258



8.1 传热过程分析的基本原理	258
8.1.1 传热过程的基本方程	258
8.1.2 稳态传热过程的有限元分析列式	259
8.1.3 热应力问题的有限元分析列式	262
8.2 平面矩形板的稳态温度场分析	264
8.3 金属材料凝固过程的瞬态传热分析	267
8.4 温度变化下的结构热应力分析	271
8.5 习题	275

第 9 章 弹塑性材料的有限元分析 279

9.1 弹塑性材料分析的基本原理	279
9.1.1 弹塑性材料的物理方程	279
9.1.2 基于全量理论的有限元分析列式	282
9.1.3 基于增量理论的有限元分析列式	282
9.1.4 非线性方程求解的 Newton-Raphson (N-R) 迭代法	283
9.2 三杆结构塑性卸载后的残余应力分析	284
9.3 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性分析	289
9.4 习题	294

参考文献 296

附录 A: MATLAB 程序基本操作 297

附录 B: ANSYS 程序基本操作 309

附录 C: 常用材料的力学性能 316

附录 D: 常用材料的热力学参数 317

附录 E: 计量单位换算 318

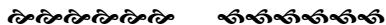
中文索引 319

英文索引 323

单元及编程索引 327

典型例题、求解原理、MATLAB 算例、ANSYS 算例

目 录



第 2 章

- 【典型例题】2.1(1) 一个一维函数的两种展开方式的比较
- 【典型例题】2.2(1) 1D 阶梯杆结构问题的材料力学求解
- 【典型例题】2.2(2) 1D 阶梯杆结构的节点位移求解及平衡关系
- 【典型例题】2.2(3) 1D 阶梯杆结构基于位移求解的通用形式
- 【典型例题】2.3(1) 1D 三连杆结构的有限元分析过程

第 3 章

- 【基本变量】3.2.1(1) 1D 问题的基本变量
- 【基本方程】3.2.1(2) 1D 问题的基本方程
- 【求解原理】3.2.1(3) 1D 问题的直接求解
- 【求解原理】3.2.1(4) 1D 问题的虚功原理求解
- 【求解原理】3.2.1(5) 1D 问题的最小势能原理求解
- 【典型例题】3.2.1(6) 变截面杆单元的推导
- 【单元构造】3.2.2(1) 杆单元的描述
- 【MATLAB 程序】3.2.4(1) 1D 杆单元的有限元分析程序(Bar1D2Node)
- 【MATLAB 程序】3.2.4(2) 2D 杆单元的有限元分析程序(Bar2D2Node)
- 【典型例题】3.2.5(1) 四杆桁架结构的有限元分析
- 【MATLAB 算例】3.2.5(2) 四杆桁架结构的有限元分析(Bar2D2Node)
- 【ANSYS 算例】3.2.5(3) 四杆桁架结构的有限元分析
- 【基本变量】3.3.1(1) 平面梁的基本变量
- 【基本方程】3.3.1(2) 平面梁的基本方程
- 【求解原理】3.3.1(3) 简支梁的微分方程解
- 【求解原理】3.3.1(4) 简支梁的虚功原理求解
- 【求解原理】3.3.1(5) 简支梁的最小势能原理求解
- 【单元构造】3.3.2(1) 平面纯弯梁单元的描述
- 【单元构造】3.3.2(2) 一般平面梁单元的描述
- 【典型例题】3.3.2(3) 受均布载荷平面梁单元的等效节点载荷
- 【典型例题】3.3.2(4) 悬臂-简支平面连续梁的有限元分析
- 【MATLAB 程序】3.3.6(1) 1D 梁单元的有限元分析程序(Beam1D2Node)
- 【MATLAB 程序】3.3.6(2) 2D 梁单元的有限元分析程序(Beam2D2Node)
- 【典型例题】3.3.7(1) 三梁平面框架结构的有限元分析
- 【MATLAB 算例】3.3.7(2) 三梁平面框架结构的有限元分析(Beam2D2Node)
- 【ANSYS 算例】3.3.7(3) 三梁平面框架结构的有限元分析
- 【ANSYS 算例】3.4.2(1) 基于图形界面(GUI)的桁架桥梁结构分析
- 【ANSYS 算例】3.4.2(2) 基于命令流方式的桁架桥梁结构分析

【ANSYS 算例】3.4.2(3) 基于参数化方式的桁架桥梁结构分析

第 4 章

- 【基本变量】4.2.1(1) 连续体问题的三大类变量
- 【基本方程】4.2.1(2) 连续体问题的三大类方程及边界条件
- 【求解原理】4.2.1(3) 直接法以及试函数法的求解思想
- 【求解原理】4.2.1(4) 连续体问题求解的虚功原理
- 【求解原理】4.2.1(5) 连续体问题求解的最小势能原理
- 【强度准则】4.2.1(6) 结构分析中的受力状态诊断(强度准则)
- 【单元构造】4.3.1(1) 平面问题的 3 节点三角形单元
- 【单元特征】4.3.1(2) 平面 3 节点三角形单元的位移坐标变换问题
- 【单元特征】4.3.1(3) 平面 3 节点三角形单元的常系数应变和应力
- 【单元构造】4.3.2(1) 平面问题的 4 节点矩形单元
- 【单元特征】4.3.2(2) 4 节点矩形单元的线性应变和应力
- 【典型例题】4.3.2(3) 三角形单元与矩形单元计算精度的比较
- 【ANSYS 算例】4.3.2(4) 三角形单元与矩形单元的精细网格的计算比较
- 【MATLAB 程序】4.3.3(1) 3 节点三角形单元的有限元分析程序(Triangle2D3Node)
- 【MATLAB 程序】4.3.4(1) 平面 4 节点矩形单元的有限元分析程序(Quad2D4Node)
- 【基本变量】4.4.1(1) 轴对称问题的三大类变量
- 【基本方程】4.4.1(2) 轴对称问题的三大类方程及边界条件
- 【单元构造】4.4.2(1) 3 节点三角形轴对称单元(环形单元)
- 【单元构造】4.4.3(1) 4 节点矩形轴对称单元(环形单元)
- 【单元构造】4.5.1(1) 空间问题的 4 节点四面体单元
- 【单元特征】4.5.1(2) 4 节点四面体单元的位移坐标变换问题
- 【单元特征】4.5.1(3) 4 节点四面体单元的常系数应变和应力
- 【单元构造】4.5.2(1) 空间问题的 8 节点正六面体单元
- 【单元特征】4.5.2(2) 8 节点正六面体单元的一次线性应变和应力
- 【MATLAB 程序】4.5.3(1) 4 节点四面体单元的有限元分析程序(Tetrahedron3D4Node)
- 【MATLAB 程序】4.5.4(1) 8 节点正六面体单元的有限元分析程序(Hexahedral3D8Node)
- 【基本原理】4.6.1(1) 两个坐标系之间的函数映射
- 【基本原理】4.6.1(2) 两个坐标系之间的偏导数映射
- 【基本原理】4.6.1(3) 两个坐标系之间的面(体)积元映射
- 【基本原理】4.6.2(1) 等参元、超参元以及亚参元
- 【基本原理】4.6.3(1) 数值积分的 Gauss 方法
- 【典型例题】4.6.3(2) 平面 4 节点四边形等参元的刚度矩阵的计算
- 【典型例题】4.7.1(1) 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析
- 【MATLAB 算例】4.7.1(2) 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析(Triangle2D3Node)
- 【ANSYS 算例】4.7.1(3) 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析
- 【MATLAB 算例】4.7.2(1) 基于 4 节点四边形单元的矩形薄板分析(Quad2D4Node)
- 【ANSYS 算例】4.7.2(2) 基于 4 节点四边形单元的矩形薄板分析
- 【MATLAB 算例】4.8.1(1) 基于 4 节点四面体单元的空间块体分析(Tetrahedron3D4Node)
- 【ANSYS 算例】4.8.1(2) 基于 4 节点四面体单元的空间块体分析
- 【MATLAB 算例】4.8.2(1) 基于 8 节点六面体单元的空间块体分析(Hexahedral3D8Node)

【ANSYS 算例】4.8.2(2) 基于 8 节点六面体单元的空间块体分析

第 5 章

- 【基本原理】5.2.1(1) 单元形状函数性质 1: 0/1 性质
- 【基本原理】5.2.1(2) 单元形状函数性质 2: 和 1 性质
- 【基本原理】5.2.2(1) 单元刚度矩阵性质 1: 对角线元素的 1/0 性质
- 【基本原理】5.2.2(2) 单元刚度矩阵性质 2: 非对角线元素的 1/0 性质
- 【基本原理】5.2.2(3) 单元刚度矩阵性质 3: 对称性质
- 【基本原理】5.2.2(4) 单元刚度矩阵性质 4: 半正定性质
- 【基本原理】5.2.2(5) 单元刚度矩阵性质 5: 奇异性性质
- 【基本原理】5.2.2(6) 单元刚度矩阵性质 6: 行(或列)的代数和为零的性质
- 【典型例题】5.2.2(7) 平面梁单元形状函数的性质
- 【基本原理】5.3(1) 处理边界条件的直接法
- 【基本原理】5.3(2) 处理边界条件的置“1”法
- 【基本原理】5.3(3) 处理边界条件的乘大数法
- 【基本原理】5.3(4) 支反力的计算
- 【基本原理】5.3(5) 处理耦合边界条件的拉格朗日 (Lagrange) 乘子法
- 【基本原理】5.3(6) 处理耦合边界条件的罚函数法
- 【典型例题】5.3(7) 平面问题斜支座的处理
- 【ANSYS 算例】5.3(8) 平面问题斜支座的处理
- 【基本原理】5.4.3(1) 收敛性准则 1: 完备性要求(针对单元内部)
- 【基本原理】5.4.3(2) 收敛性准则 2: 协调性要求(针对单元之间)
- 【典型例题】5.4.3(3) 平面单元位移函数选取的要求
- 【典型例题】5.4.3(4) 平面弯曲梁单元位移函数选取的要求
- 【典型例题】5.4.3(5) 平面 3 节点三角形单元的二次位移函数的选择与分析
- 【基本原理】5.5(1) C_0 型单元的位移函数连续性
- 【基本原理】5.5(2) C_1 型单元的位移函数连续性
- 【基本原理】5.6.1(1) 有限元位移结果的下限性质
- 【基本原理】5.6.1(2) 有限元模型的刚化性
- 【典型例题】5.6.1(3) 基于网格加密的求解精度估计
- 【基本原理】5.6.2(1) 共用节点上应力的直接平均
- 【基本原理】5.6.2(2) 共用节点应力的加权平均
- 【单元构造】5.7.1(1) 1D 高阶单元: 二次杆单元
- 【单元构造】5.7.1(2) 1D 高阶单元: 高次梁单元
- 【基本原理】5.7.2(1) (面积)自然坐标
- 【单元构造】5.7.2(2) 2D 高阶单元: 6 节点三角形二次单元
- 【单元构造】5.7.2(3) 2D 高阶单元: 矩形高阶 Lagrange 型单元
- 【单元构造】5.7.3(1) 3D 高阶单元: 10 节点四面体二次单元
- 【单元构造】5.7.3(2) 3D 高阶单元: 20 节点正六面体高阶单元
- 【基本原理】5.8(1) 提高计算精度的 h 方法(h-version 或 h-method)
- 【基本原理】5.8(2) 提高计算精度的 p 方法(p-version 或 p-method)

第 6 章

- 【MATLAB 程序】6.1.2(1) 平面问题有限元分析的通用程序 FEM2D.m
- 【MATLAB 算例】6.2(1) 受均匀载荷方形板的有限元分析(FEM2D.m)
- 【ANSYS 算例】6.2(2) 受均匀载荷方形板的有限元分析
- 【ANSYS 程序】6.3(1) ANSYS 前后处理器与自主程序的衔接
- 【ANSYS 算例】6.4.2(1) 8 万吨模锻液压机主牌坊的分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】6.4.2(2) 8 万吨模锻液压机主牌坊的参数化建模与分析(命令流)

第 7 章

- 【基本变量】7.1.1(1) 结构振动的三大类变量
- 【基本方程】7.1.1(2) 结构振动的三大类方程及边界/初始条件
- 【求解原理】7.1.1(3) 结构振动求解的虚功原理
- 【单元构造】7.1.2(1) 结构振动分析的单元构造的基本表达式
- 【单元构造】7.1.3(1) 杆单元的质量矩阵
- 【单元构造】7.1.3(2) 梁单元的质量矩阵
- 【单元构造】7.1.3(3) 平面三节点三角形单元的质量矩阵
- 【ANSYS 算例】7.2(1) 汽车悬挂系统的振动模态分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】7.2(2) 汽车悬挂系统的振动模态分析(命令流)
- 【ANSYS 算例】7.3(1) 带有张拉的绳索的振动模态分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】7.3(2) 带有张拉的绳索的振动模态分析(命令流)
- 【ANSYS 算例】7.4(1) 机翼模型的振动模态分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】7.4(2) 机翼模型的振动模态分析(命令流)

第 8 章

- 【基本方程】8.1.1(1) 传热过程的基本变量及方程
- 【求解原理】8.1.1(2) 传热过程分析的求解原理(求极值问题)
- 【单元构造】8.1.2(1) 稳态传热过程的单元构造基本表达式
- 【单元构造】8.1.2(2) 平面 3 节点三角形传热单元
- 【基本方程】8.1.3(1) 热应力问题中的物理方程
- 【求解原理】8.1.3(2) 热应力问题求解的虚功原理
- 【单元构造】8.1.3(3) 热应力问题分析的单元构造的基本表达式
- 【ANSYS 算例】8.2(1) 2D 矩形板的稳态热对流的自适应分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】8.2(2) 2D 矩形板的稳态热对流的自适应分析(命令流)
- 【ANSYS 算例】8.3(1) 金属材料凝固过程的瞬态传热分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】8.3(2) 金属材料凝固过程的瞬态传热分析(命令流)
- 【ANSYS 算例】8.4(1) 升温条件下杆件支撑结构的热应力分析(GUI)
- 【ANSYS 算例】8.4(2) 升温条件下杆件支撑结构的热应力分析(命令流)

第9章

- 【基本原理】9.1.1(1) 材料的弹塑性行为实验
- 【基本原理】9.1.1(2) 材料塑性行为的三方面准则
- 【单元构造】9.1.2(1) 基于全量理论的单元构造的基本表达式
- 【单元构造】9.1.3(1) 基于增量理论的单元构造的基本表达式
- 【求解原理】9.1.4(1) Newton-Raphson (N-R) 迭代法的原理
- 【ANSYS 算例】9.2(1) 三杆结构塑性卸载后的残余应力计算(GUI)
- 【ANSYS 算例】9.2(2) 三杆结构塑性卸载后的残余应力计算(命令流)
- 【ANSYS 算例】9.3(1) 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性计算(GUI)
- 【ANSYS 算例】9.3(2) 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性计算(命令流)



第一部分 有限元分析基本原理

第 1 章 绪论

1.1 概况

有限元方法(finite element method)或有限元分析(finite element analysis)^{[1][2]}, 是求取复杂微分方程近似解的一种非常有效的工具, 是现代数字化科技的一种重要基础性原理。将它用于在科学的研究中, 可成为探究物质客观规律的先进手段。将它应用于工程技术中, 可成为工程设计和分析的可靠工具。严格来说, 有限元分析必须包含三个方面: (1)有限元方法的基本数学力学原理, (2)基于原理所形成的实用软件, (3)使用时的计算机硬件。随着现代计算机技术的发展, 一般的个人计算机就能满足第(3)方面的要求; 因此, 本书的重点将在以上的第(1)和第(2)方面, 将通过一些典型的实例来深入浅出地系统阐述有限元分析的基本原理, 并强调原理的工程背景和物理概念; 基于 MATLAB 平台来系统演示基于有限元原理的编程方法和过程; 通过 ANSYS 分析平台来展示具体应用有限元方法的建模过程。

1.2 有限元方法的历史

有限元方法的思想最早可以追溯到古人的“化整为零”、“化圆为直”的作法, 如“曹冲称象”的典故, 我国古代数学家刘徽采用割圆法来对圆周长进行计算; 这些实际上都体现了离散逼近的思想, 即采用大量的简单小物体来“冲填”出复杂的大物体。

早在 1870 年, 英国科学家 Rayleigh 就采用假想的“试函数”来求解复杂的微分方程, 1909 年 Ritz 将其发展成为完善的数值近似方法, 为现代有限元方法打下坚实基础。

20 世纪 40 年代, 由于航空事业的飞速发展, 设计师需要对飞机结构进行精确的设计和计算, 便逐渐在工程中产生了矩阵力学分析方法; 1943 年, Courant 发表了第一篇使用三角形区域的多项式函数来求解扭转问题的论文^[3]; 1956 年波音公司的 Turner, Clough, Martin 和 Topp 在分析飞机结构时系统研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式^[4]; 1960 年 Clough 在处理平面弹性问题, 第一次提出并使用“有限元方法”(finite element method)的名称^{[5][6]}; 1955 年德国的 Argyris 出版了第一本关于结构分析中的能量原理和矩阵方法的书^[7], 为后续的有限元研究奠定了重要的基础, 1967 年 Zienkiewicz 和 Cheung 出版了第一本有关有限元分析的专著; 1970 年以后, 有限元方法开始应用于处理非线性和大变形问题; 我国的一些学者也在有限元领域做出了重要的贡献, 如胡海昌于 1954 提出了广义变分原理^[8], 钱伟长最先研究了拉格朗日乘子法与广义变分原理之间关系^[9], 钱令希在 20 世纪五十年代就研究了力学分析的余能原理, 冯康在 20 世纪六十年代就独立地、并先于西方奠定了有限元分析收敛性的理论基础。图 1-1 展示了有限元方法的发展过程。

随着计算机技术的飞速发展, 基于有限元方法原理的软件大量出现, 并在实际工程中发挥了愈来愈重要的作用; 目前, 专业的著名有限元分析软件公司有几十家, 国际上著名的通用有限元分析软件有 ANSYS, ABAQUS, MSC/NASTRAN, MSC/MARC, ADINA, ALGOR, PRO/MECHANICA, IDEAS, 还有一些专门的有限元分析软件, 如 LS-DYNA, DEFORM, PAM-STAMP, AUTOFORM, SUPER-FORGE 等; 国际上著名的主要有限元分析软件状况见表 1-1。有关有限元分析的学术论文, 每年也不计其数, 学术活动非常活跃, 表 1-2 列出的是刊登有限元分析论文的常见学术期刊。

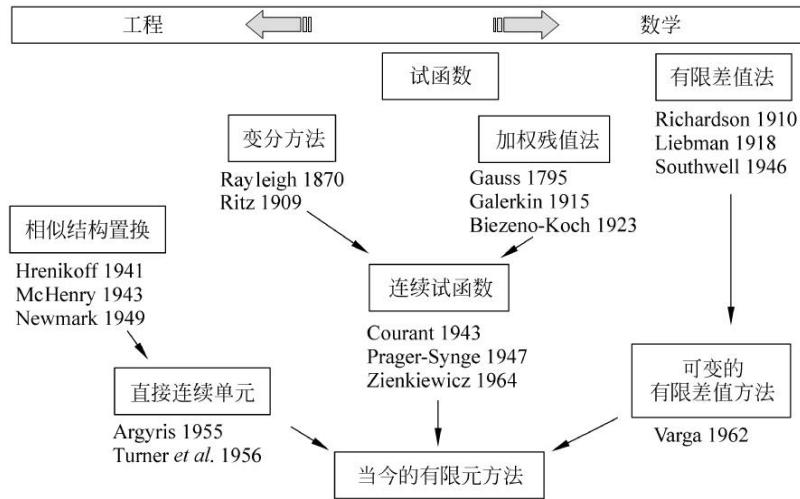


图 1-1 有限元方法的发展过程

表 1-1 国际上著名的有限元分析软件状况

年份	软件名称	开发者	网址
1965	ASKA (PERMAS)	IKOSS GmbH, (INTES), Germany	www.intes.de
	STRU_DL	MCAUTO, USA	www.gtstrudl.gatech.edu
1966	NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp., USA	www.macsch.com
1967	BERSAFE	CEGB, UK (restructured in 1990)	
	SAMCEF	Univer. of Liege, Belgium	www.samcef.com
1969	ASAS	Atkins Res.&Devel., UK	www.wsasoft.com
	MARC	MARC Anal. Corp., USA	www.marc.com
	PAFEC	PAFEC Ltd, UK now SER Systems	
	SESAM	DNV, Norway	www.dnv.no
1970	ANSYS	Swanson Anal. Syst., USA	www.ansys.com
	SAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.eerc.berkeley.edu/software_and_data
1971	STARDYNE	Mech. Res. Inc., USA	www.reiusa.com
	TITUS (SYSTUS)	CITRA, France; ESI Group	www.systus.com
1972	DIANA	TNO, The Netherlands	www.diana.nl
	WECAN	Westinghouse R&D, USA	
1973	GIFTS	CASA/GIFTS Inc., USA	
1975	ADINA	ADINA R&D, Inc., USA	www.adina.com
	CASTEM	CEA, France	www.castem.org:8001/HomePage.html
	FEAP	NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	www.eerc.berkeley.edu/software_and_data
1976	NISA	Eng. Mech. Res. Corp., USA	www.emrc.com
1978	DYNA2D, DYNA3D	Livermore Softw. Tech. Corp., USA	www.lstc.com
1979	ABAQUS	Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., USA	wwwabaqus.com
1980	LUSAS	FEA Ltd., UK	www.lusas.com



1982	COSMOS/M	Structural Res. & Anal. Corp., USA	www.cosmosm.com
1984	ALGOR	Algor Inc., USA	www.algor.com

表 1-2 刊登有限元分析论文的学术期刊

出版商	服务商	网址	期刊名称
<i>Academic Press</i>	IDEAL	www.idealibrary.com	J. of Sound and Vibration
<i>Elsevier</i>	ScienceDirect	www.elsevier.nl	Acta Materialia Advances in Eng. Software Applied Math. Modelling Composite Structures Composites A, B Composites Science and Technology Computational Materials Science Computer Meth. in Appl. Mech and Eng. Computers & Structures Eng. Analysis with Boundary Elements Eng. Failure Analysis Eng. Fracture Mechanics Eng. Structures European J. of Mechanics A, B Finite Elements in Analysis and Design Int. J. of Mechanical Sciences Int. J. of Solids and Structures Int. J. of Impact Eng. Int. J. of Fatigue Int. J. of Plasticity Int. J. of Non-Linear Mechanics J. of Constructional Steel Research J. of Material Processing Technology J. of the Mech. and Physics of Solids Materials Science and Eng. A Mechanics of Materials Mechanics Research Communications Nuclear Eng. And Design Probabilistic Eng. Mechanics Structural Safety Theoretical and Appl. Fracture Mech. Thin-Walled Structures
<i>IOP Publishing</i>	Electronic J.	www.iop.org/EJ	Smart Materials and Structures
<i>Kluwer Academic Publishing</i>	Kluwer Online	www.wkap.nl/journals	Applied Composite Materials Int. J. of Fracture Meccanica Mechanics of Composite Materials



MCB University Press	Emerald Library	www.mcb.co.uk/ portfolio.htm	Engineering Computations <i>Int. J. of Num. Meth. For Heat&Fluid Flow</i>
Springer Verlag	LINK	Link.springer.de/ ol/eol/index.htm	Archive of Applied Mechanics Computational Mechanics Engineering With Computers
J. Wiley & Sons	Interscience	www.interscience. wiley.com	Communicat. in Numer. Meth. in Eng. <i>Int. J. for Numerical Methods in Eng.</i> <i>Mech. of Cohesive-Frictional Mater.</i> <i>Progress in Structural Eng. and Mater.</i>

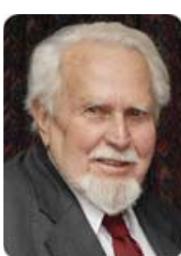
下面介绍几位有限元方法的创始人的情况。



Richard Courant(美国数学家, 1888.01.08-1972.01.27, 出生地: 德国Lublinitz), 1910 年在哥廷根大学获得博士学位, 1928 年创办了应用数学研究所, 并在 1928~1933 年担任所长, 开始应用数学的研究, 1936 年去纽约大学创立了数学研究所, 1964 年该研究所被命名为Courant数学科学研究所, 出版了数学物理方法教科书, 成为最有影响的书籍之一, 还出版了科普读物“什么是数学?”, 至今还再版发行, Courant的名字还与有限元方法紧密联系在一起, 是他给这种数值求解偏微分方程以坚实的理论基础, “Courant–Friedrichs–Lewy 条件”以及“Courant最小值原理”都是以他的名字命名的重要定理。



John Argyris(德国人, 1913.08.19-2004.04.02, 出生地: 希腊Volos)是公认的计算科学、航空航天、流体力学领域的杰出专家, 被誉为有限元分析的发明人和创始者之一, 所创立的力学分析的矩阵位移方法为有限元方法的前身, 被称为世界上最先进的数学工具, 先后因在有限元方法以及混沌理论方面的贡献而获得菲利普王子奖章、美国最高荣誉的爱因斯坦奖, 获得包括 5 个G8 国家在内的由 16 发达国家授予的杰出科技与工程奖; Argyris于 1950 年代在斯图加特大学创立计算机应用研究所, 并担任所长近 40 年, 立至于有限元分析的研究, 开发了几个著名的在欧洲广泛使用的有限元分析商业化软件, 在有限元方法的应用方面也作出了杰出的贡献。



Olgierd Cecil Zienkiewicz(英国人, 1921.05.18-, 出生地: 英国Caterham)。英国Swansea 大学的荣誉退休教授, 是该校工程数值方法研究所的原主任, 现在仍然是西班牙巴塞罗那Calalunya技术大学工程数值方法的UNESCO主席。从 1961 至 1989 年, 担任Swansea 大学土木工程系的主任, 使该系成为有限元研究的重要中心之一。在 1968 年, 创办了 *International Journal for Numerical Methods in Engineering*杂志并任主编, 该杂志至今仍然是该领域的主要刊物。他被授予 24 个荣誉学位和多种奖励。Zienkiewicz教授还是 5 所科学院的院士, 这是对他在有限元方法领域的奠基性发展和贡献的赞誉。1978 年, 成为皇家科学院和皇家工程院的院士; 并先后被选为美国工程院的外籍院(1981), 波兰科学院院士(1985), 中国科学院院士(1998)和意大利国家科学院院士(1999)。1967 年, 他出版了有限元领域的第一本专著《有限元方法》, 该书目前也出版到第 5 版, 可参见《有限元方法第 1 卷: 基本原理》(O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor(第 5 版), 曾攀译)(清华大学出版社, 2008)。



1.3 有限元分析的作用

基于功能完善的有限元分析软件和高性能的计算机硬件对设计的结构进行详细的力学分析，以获得尽可能真实的结构受力信息，就可以在设计阶段对可能出现的各种问题进行安全评判和设计参数修改，据有关资料，一个新产品的问题有 60% 以上可以在设计阶段消除，甚至有的结构的施工过程也需要进行精细的设计，要做到这一点，就需要类似有限元分析这样的分析手段。

下面举出几个涉及土木工程、车辆工程、航空工程以及生物工程的实例。

北京奥运场馆的鸟巢由纵横交错的钢铁枝蔓组成，它是鸟巢设计中最华彩的部分，见图 1-2，也是鸟巢建设中最艰难的。看似轻灵的枝蔓总重达 42000 吨，其中，顶盖以及周边悬空部位重量为 14000 吨，在施工时，采用了 78 根支柱进行支撑，也就是产生了 78 个受力区域，在钢结构焊接完成后，需要将其缓慢而又平稳地卸去，让鸟巢变成完全靠自身结构支撑；因而，支撑塔架的卸载，实际上就是对整个钢结构的加载，如何卸载？需要进行非常详细的数值化分析，以确定出最佳的卸载方案。2006 年 9 月 17 日成功地完成了整体钢结构施工的最后卸载。



图 1-2 北京奥运场馆鸟巢的钢铁枝蔓结构

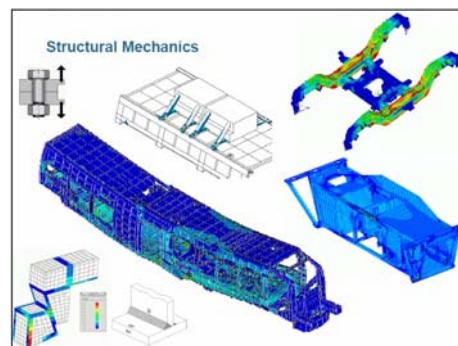


图 1-3 列车车厢整体结构的有限元模型

图 1-3 给出的是现代列车车厢整体结构的有限元分析模型^[10]；图 1-4 表明的是空客 A350 后机身第 19 框的设计与有限元分析过程^[11]；图 1-5 为人体肩部区域的骨骼有限元分析模型以及计算结果^[12]，并与实际测试结果进行了比较。所有这些表明了有限元方法的广泛适应性以及在科学研究与重大工程中的重要性。

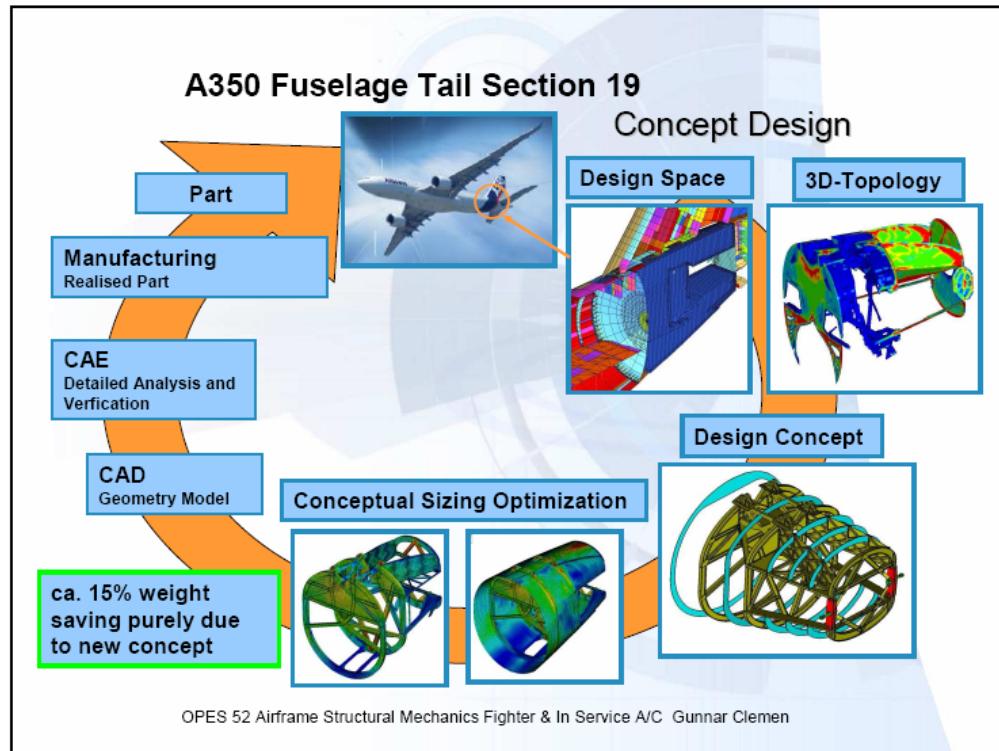


图 1-2 空客 A350 后机身第 19 框的设计与有限元分析过程

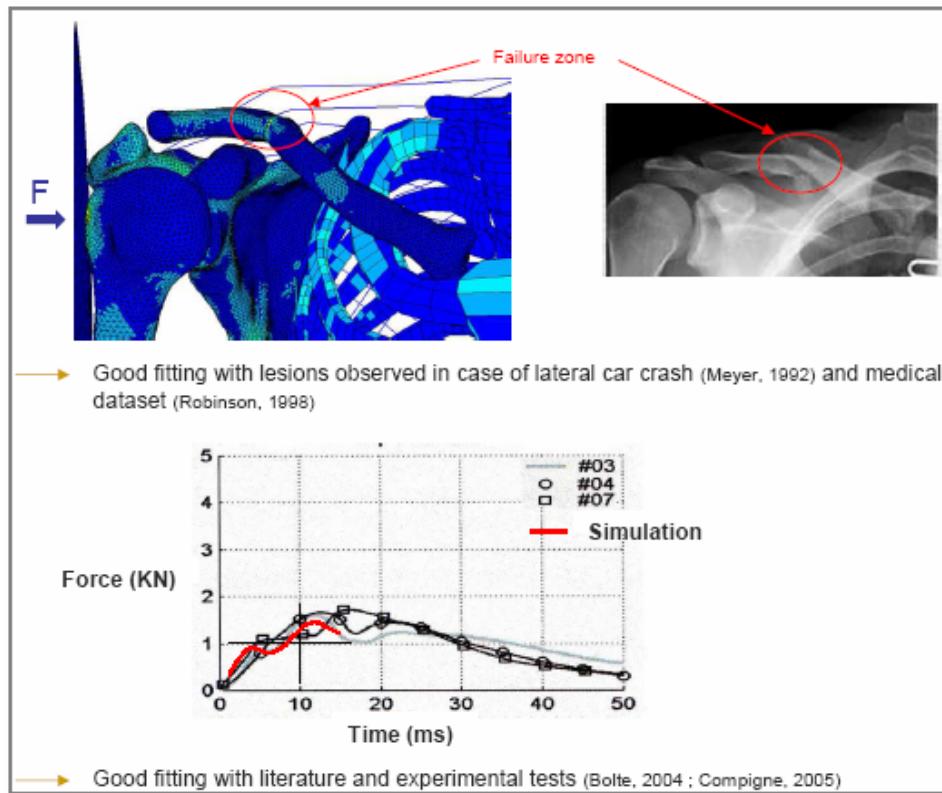


图 1-5 人体肩部区域的骨骼有限元分析模型及计算结果



第2章 有限元分析过程的概要

本章先通过一个简单的实例，采用直接的推导方法，逐步展示有限元分析的基本流程，从中可以了解有限元方法的思路形成过程，以及如何由具体的求解步骤归纳出一种通用的标准求解方法。

2.1 有限元分析的目的和概念

任何具有一定使用功能的构件(称为**变形体(deformed body)**)都是由满足要求的材料所制造的，在设计阶段，就需要对该构件在可能的外力作用下的内部状态进行分析，以便核对所使用材料是否安全可靠，以避免造成重大安全事故。描述可承力构件的力学信息一般有三类：

- (1) 构件中因承载在任意位置上所引起的移动(称为位移(displacement));
- (2) 构件中因承载在任意位置上所引起的变形状态(称为应变(strain));
- (3) 构件中因承载在任意位置上所引起的受力状态(称为应力(stress));

若该构件为简单形状，且外力分布也比较单一，如：杆、梁、柱、板就可以采用材料力学的方法，一般都可以给出解析公式，应用比较方便；但对于几何形状较为复杂的构件却很难得到准确的结果，甚至根本得不到结果。

有限元分析的目的：针对具有任意复杂几何形状变形体，完整获取在复杂外力作用下它内部的准确力学信息，即求取该变形体的三类力学信息(位移、应变、应力)。

在准确进行力学分析的基础上，设计师就可以对所设计对象进行强度(strength)、刚度(stiffness)等方面的评判，以便对不合理的设计参数进行修改，以得到较优化的设计方案；然后，再次进行方案修改后的有限元分析，以进行最后的力学评判和校核，确定出最后的设计方案。

图 2-1 给出一个针对大型液压机机架的设计过程以及采用有限元分析的状况。

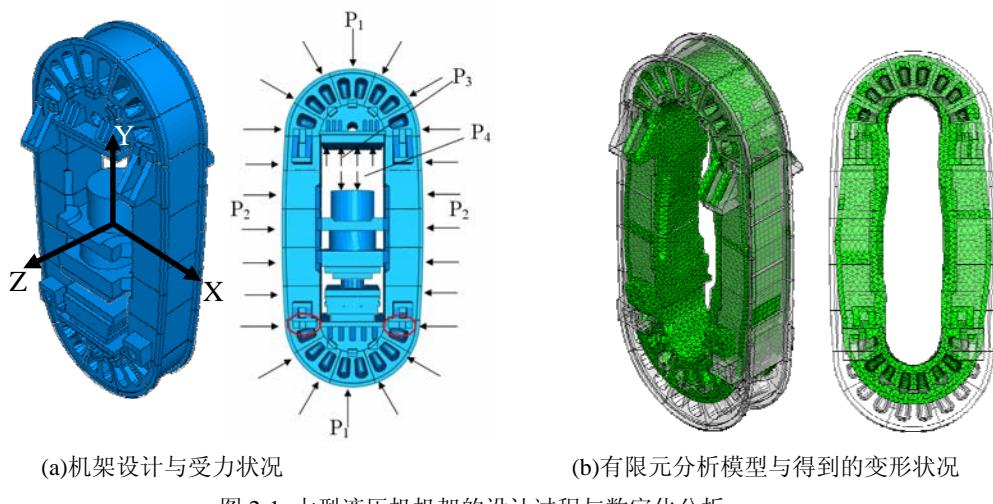


图 2-1 大型液压机机架的设计过程与数字化分析

为什么采用有限元方法就可以针对具有任意复杂几何形状的结构进行分析，并能够得到准确的结果呢？这时因为有限元方法是基于“**离散逼近(discretized approximation)**”的基本策略，可以采用较多数量的简单函数的组合来“近似”代替非常复杂的原函数。

一个复杂的函数，可以通过一系列的**基底函数(base function)**的组合来“近似”，也就是**函数逼近**，其中有两种典型的方法：(1)基于全域的展开(如采用傅立叶级数展开)，以及(2)



基于子域(sub-domain)的分段函数(pieces function)组合(如采用分段线性函数的连接); 下面, 仅以一个一维函数的展开为例说明全域逼近与分段逼近的特点。

【典型例题】2.1(1) 一个一维函数的两种展开方式的比较

设有一个一维函数 $f(x), x \in [x_0, x_L]$, 分析它的展开与逼近形式。

解答: 首先考虑基于全域的展开形式, 如采用傅立叶级数(Fourier series)展开, 则有

$$\begin{aligned} f(x) &\approx c_0 \cdot \varphi_0(x \in [x_0, x_L]) + c_1 \cdot \varphi_1(x \in [x_0, x_L]) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x \in [x_0, x_L]) \end{aligned} \quad (2-1)$$

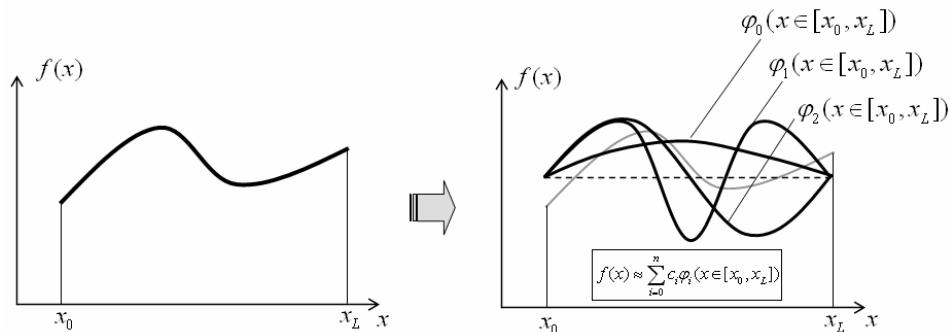
其中 $\varphi_i(x \in [x_0, x_L])$ 为所采用的基底函数, 它定义在全域 $[x_0, x_L]$ 上, $c_0, c_1, c_2 \dots$ 为展开的系数。

第二种是基于子域 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的分段展开形式, 若采用线性函数, 有

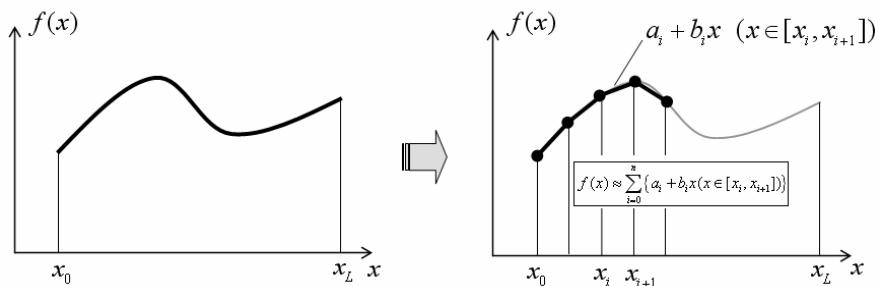
$$\begin{aligned} f(x) &\approx \{a_0 + b_0 x (x \in [x_0, x_1])\} + \{a_1 + b_1 x (x \in [x_1, x_2])\} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^n \{a_i + b_i x (x \in [x_i, x_{i+1}])\} \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中 $a_i + b_i x (x \in [x_i, x_{i+1}])$ 为所采用的基底函数, 它定义在子域 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, $a_0, b_0, a_1, b_1 \dots$ 为展开的系数。

这两种函数展开的方式如图 2-2 所示。



(a) 基于全域 $[x_0, x_L]$ 的函数展开与逼近



(b) 基于子域 $[x_i, x_{i+1}]$ 的函数展开与逼近



图 2-2 一个一维函数的两种展开方式

比较以上两种方式的特点,可以看出,第一种方式所采用的基本函数 $\varphi_i(x \in [x_0, x_L])$ 非常复杂,而且是在全域上 $[x_0, x_L]$ 定义的,但它是高次连续函数,一般情况下,仅采用几个基底函数就可以得到较高的逼近精度;而第二种方式所采用的基本函数 $a_i + b_i x(x \in [x_i, x_{i+1}])$ 非常简单,而且是在子域上 $[x_i, x_{i+1}]$ 定义的,它通过各个子域组合出全域 $[x_0, x_L]$,但它是线性函数,函数的连续性阶次较低,因此需要使用较多的分段才能得到较好的逼近效果,则计算工作量较大。

对于第一种的函数逼近方式,就是力学分析中的经典瑞利-里兹方法(Rayleigh-Ritz principle)的思想,而针对第二种的函数逼近方式,就是现代力学分析中的有限元方法的思想,其中的分段就是“单元”的概念。

基于分段的函数描述具有非常明显的优势:(1)可以将原函数的复杂性“化繁为简”,使得描述和求解成为可能,(2)所采用的简单函数可以人工选取,因此,可取最简单的线性函数,或取从低阶到高阶的多项式函数,(3)可以将原始的微分求解变为线性代数方程。但分段的做法可能会带来的问题有:(1)因采用了“化繁为简”,所采用简单函数的描述的能力和效率都较低,(2)由于简单函数的描述能力较低,必然使用数量众多的分段来进行弥补,因此带来较多的工作量。

综合分段函数描述的优势和问题,只要采用功能完善的软件以及能够进行高速处理的计算机,就可以完全发挥“化繁为简”策略的优势,有限元分析的概念就在于此。

2.2 一维阶梯杆结构问题的求解

一维问题,即 **1D(one dimension)** 问题,是最简单的分析对象,下面就以一个 1D 阶梯杆结构为例,详细给出各种方法求解的过程,直观地引入有限元分析的基本思路,并以此逐步介绍有限元分析的过程。

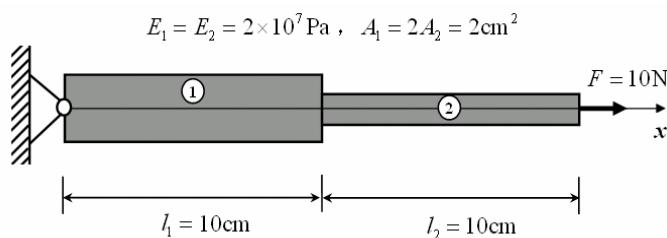


图 2-3 1D 阶梯杆结构

【典型例题】2.2(1) 1D 阶梯杆结构问题的材料力学求解

如图 2-3 所示为一个阶梯杆结构,已知相应的弹性模量和结构尺寸为

$$E_1 = E_2 = 2 \times 10^7 \text{ Pa}, \quad A_1 = 2A_2 = 2\text{cm}^2, \quad l_1 = l_2 = 10\text{cm}, \quad F = 10\text{N}$$

用材料力学方法求解该问题。



解答：首先对右端的杆件②进行力学分析，见图 2-4。

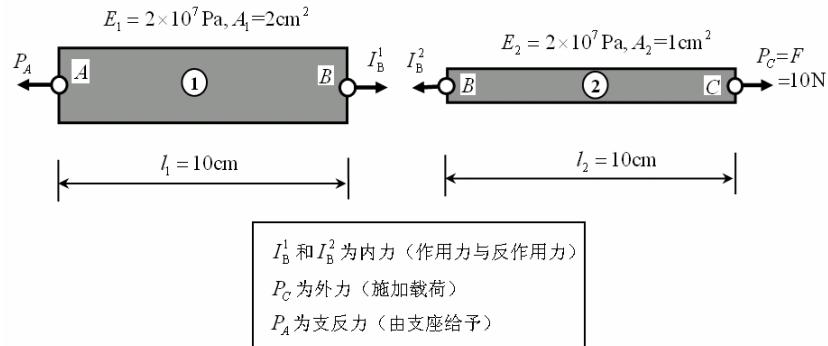


图 2-4 杆件分离体的受力分析

将两个杆件进行分解，并标出每一个关联节点处的受力状况，由于在 C 点处受有外力 F ，则

$$P_c = F = 10N \quad (2-3)$$

由杆件②的平衡关系可知，有

$$I_B^2 = P_c = F = 10N \quad (2-4)$$

由于 I_B^1 和 I_B^2 是一对内力，也为作用力与反作用力，因此，有关系 $I_B^1 - I_B^2 = 0$ ，则可计算出所有作用力与内力的值为

$$P_A = I_B^1 = I_B^2 = P_c = F = 10N \quad (2-5)$$

下面计算每根杆件的应力，这是一个等截面杆受拉伸的情况，则杆件①的应力 σ_1 为

$$\sigma_1 = \frac{P_A}{A_1} = \frac{10N}{2cm^2} = 5 \times 10^4 \frac{N}{m^2} = 5 \times 10^4 P_a \quad (2-6)$$

杆件②的应力 σ_2 为

$$\sigma_2 = \frac{P_c}{A_2} = \frac{10N}{1cm^2} = 1 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = 1 \times 10^5 P_a \quad (2-7)$$

由于材料是弹性的，由虎克定律(Hooke law)有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 \\ \sigma_1 &= E_2 \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

其中 ε_1 和 ε_2 为杆件①和②的应变，则有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{5 \times 10^4 P_a}{2 \times 10^7 P_a} = 2.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{1 \times 10^5 P_a}{2 \times 10^7 P_a} = 5 \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$



由应变的定义可知, 它为杆件的相对伸长量, 即 $\varepsilon = \Delta l / l$, 因此, $\Delta l = \varepsilon \cdot l$, 具体对杆件①和②, 有

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2.5 \times 10^{-3} \times 10 = 2.5 \times 10^{-2} \text{ cm} \\ \Delta l_2 &= \varepsilon_2 \cdot l_2 = 5 \times 10^{-3} \times 10 = 5 \times 10^{-2} \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

由于左端 A 为固定, 则该点沿 x 方向的位移为零, 记为 $u_A = 0$, 而 B 点的位移则为杆件①的伸长量 Δl_1 , 即 $u_B = \Delta l_1 = 2.5 \times 10^{-2} \text{ cm}$, C 点的位移为杆件①和②的总伸长量, 即 $u_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 7.5 \times 10^{-2} \text{ cm}$, 则归纳为以上结果, 有完整的解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 5 \times 10^4 \text{ Pa}, \sigma_2 = 1 \times 10^5 \text{ Pa} \\ \varepsilon_1 &= 2.5 \times 10^{-3}, \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-3} \\ u_A &= 0, u_B = 2.5 \times 10^{-2} \text{ cm}, u_C = 7.5 \times 10^{-2} \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

以上的求解结果如图 2-5 所示。

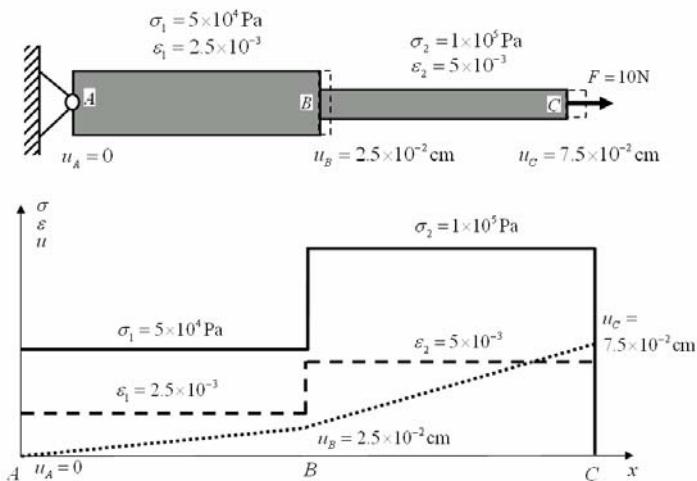


图 2-5 阶梯杆结构的材料力学解答

讨论: ①以上完全按照材料力学的方法, 将对象进行分解来获得问题的解答, 它所求解的基本力学变量是力(或应力), 由于以上问题非常简单, 而且是静定问题, 所以可以直接求出, 但对于静不定问题, 则需要变形协调方程(compatibility equation), 才能求解出应力变量, 在构建问题的变形协调方程时, 则需要一定的技巧; ②若采用位移作为首先求解的基本变量, 则可以使问题的求解变得更规范一些, 下面就基于 A、B、C 三个点的位移 u_A 、 u_B 、 u_C 来进行以上问题的求解。

【典型例题】2.2(2) 1D 阶梯杆结构的节点位移求解及平衡关系

所处理的对象与【典型例题】2.2(1)相同, 要求分别针对每个连接节点, 基于节点的位移来构建相应的平衡关系, 然后再进行求解。

解答: 考虑图 2-3 所示杆件的受力状况, 分别画出每个节点的分离受力图, 如图 2-6 所示。

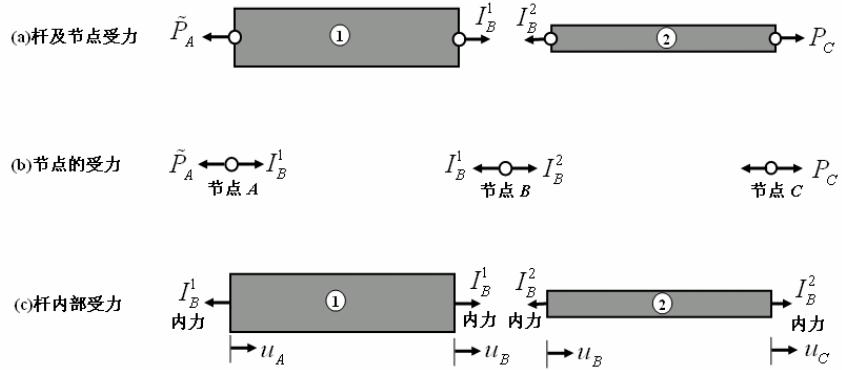


图 2-6 1D 阶梯杆结构的各种平衡关系

首先分析图 2-6(c)中杆①内部的受力及变形状况，它的绝对伸长量为 $(u_B - u_A)$ ，则相应伸长量 ε_1 为

$$\varepsilon_1 = \frac{u_B - u_A}{l_1} \quad (2-12)$$

由虎克定律，它的应力 σ_1 为

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = \frac{E_1}{l_1} (u_B - u_A) \quad (2-13)$$

杆①的内力 I_B^1 为

$$I_B^1 = \sigma_1 A_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} (u_B - u_A) \quad (2-14)$$

对于杆②进行同样的分析和计算，有它的内力 I_B^2 为

$$I_B^2 = \sigma_2 A_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} (u_C - u_B) \quad (2-15)$$

由图 2-6(b)节点 A、B、C 的受力状况，分别建立它们各自的平衡关系如下。
对于节点 A，有平衡关系

$$-\tilde{P}_A + I_B^1 = 0 \quad (2-16)$$

将式(2-14)代入，有

$$-\tilde{P}_A + \frac{E_1 A_1}{l_1} (u_B - u_A) = 0 \quad (2-17)$$

对于节点 B，有平衡关系

$$-I_B^1 + I_B^2 = 0 \quad (2-18)$$



将式(2-14)和式(2-15)代入，有

$$-\frac{E_1 A_1}{l_1} (u_B - u_A) + \frac{E_2 A_2}{l_2} (u_C - u_B) = 0 \quad (2-19)$$

对于节点 C，有平衡关系

$$P_C - I_B^2 = 0 \quad (2-20)$$

将式(2-15)代入上式，有

$$P_C - \frac{E_2 A_2}{l_2} (u_C - u_B) = 0 \quad (2-21)$$

将节点 A、B、C 的平衡关系写成一个方程组，有

$$\left. \begin{aligned} -\tilde{P}_A - \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} \right) u_A + \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} \right) u_B + 0 &= 0 \\ 0 + \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} \right) u_A - \left(\frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2} \right) u_B + \left(\frac{E_2 A_2}{l_2} \right) u_C &= 0 \\ P_C - 0 + \left(\frac{E_2 A_2}{l_2} \right) u_B - \left(\frac{E_2 A_2}{l_2} \right) u_C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_A \\ 0 \\ P_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

将材料弹性模量和结构尺寸代入(2-23)方程中，有以下方程（采用国际单位）

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^4 & -4 \times 10^4 & 0 \\ -4 \times 10^4 & 6 \times 10^4 & -2 \times 10^4 \\ 0 & -2 \times 10^4 & 2 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{P}_A \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

由于左端点为固定，即 $u_A = 0$ ，该方程的未知量为 u_B 、 u_C 、 \tilde{P}_A ，求解该方程，有

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 2.5 \times 10^{-4} \text{ m} \\ u_C &= 7.5 \times 10^{-4} \text{ m} \\ \tilde{P}_A &= 10 \text{ N} \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

可以看出这里的 \tilde{P}_A 就是支座反力(reaction force of support)，下面就很容易求解出杆①和②中的其它力学量，即



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u_B - u_A}{l_1} = 2.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_2 &= \frac{u_C - u_B}{l_2} = 5 \times 10^{-3} \\ \sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 = 5 \times 10^4 P_a \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_2 = 1 \times 10^5 P_a \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

这样得到的结果与【典型例题】2.2(1)所得到的结果完全一致。下面再对【典型例题】2.2(2)的方法作进一步的讨论。

讨论：还可以将式(2-23)写成

$$\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{P}} - \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{I}} = 0 \quad (2-27)$$

其中 $\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{P}}$ 称为外力列阵(load matrix), $\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{I}}$ 称为内力列阵(inner force matrix)或变形力列阵(deformed force matrix), 这里矩阵符号的下标表示行和列的维数, 这两个列阵分别为

$$\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -\tilde{P}_A \\ 0 \\ P_C \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

$$\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{l_1} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

式(2-27)的物理含义就是内力与外力的平衡关系, 由式(2-29)可知, 内力表现为各个节点上的内力, 并且可以通过节点位移(nodal displacement) u_A 、 u_B 、 u_C 来获取。

由方程(2-23)可知, 这是一个基于节点 A、B、C 描述的全结构的平衡方程, 该方程的特点为:

- (a) 基本的力学参量为节点位移 u_A 、 u_B 、 u_C 和节点力 \tilde{P}_A 、 P_C 。
- (b) 直接给出全结构的平衡方程, 而不是象【典型例题】2.2(1)那样, 需要针对每一个杆件去进行递推。
- (c) 在获得节点位移变量 u_A 、 u_B 、 u_C 后, 其它力学参量(如应变和应力), 都可以分别求出(见式(2-26))。

为了将方程(2-23)写成更规范、更通用的形式, 用来求解【典型例题】2.2(1)所示结构的更一般的受力状况, 下面在式(2-23)的基础上, 直接推导出通用平衡方程。

【典型例题】2.2(3) 1D 阶梯杆结构基于位移求解的通用形式

由方程(2-23), 可以发现它具有求解这类结构的通用形式, 讨论它的物理含义, 以总结出相应的规律。



解答：将式(2-23)写成

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{l_1} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

再将其分解为两个杆件之和，即写成

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

以上式(2-31)左端的第1项实质为

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{l_1} \begin{bmatrix} u_A - u_B \\ u_B - u_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_B^1 \\ I_B^1 \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

上式中的 $-I_B^1$ 及 I_B^1 见图2-6(c)，含义为杆件①中的左节点的内力和右节点的内力。同样地，

式(2-31)左端的第2项实质为

$$\begin{bmatrix} \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{l_2} \begin{bmatrix} u_B - u_C \\ u_C - u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_B^2 \\ I_B^2 \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

上式中的 $-I_B^2$ 及 I_B^2 见图2-6(c)，含义为杆件②中的左节点的内力和右节点的内力。

可以看出：方程(2-31)的左端就是杆件①的内力表达和杆件②的内力表达之和，这样就将原来的基于节点的平衡关系，变为通过每一个杆件的平衡关系来进行叠加。这里就自然引入单元的概念，即将原整体结构进行“分段”，以划分出较小的“构件”(component)，每一个“构件”上具有节点，还可以基于节点位移写出该“构件”的内力表达关系，这样的“构件”就叫做单元(element)，它意味着在几何形状上、节点描述上都有一定普遍性(generalization)和标准性(standardization)，只要根据实际情况将单元表达式中的参数(如材料常数、几何参数)作相应的代换，它就可以广泛应用于这一类构件(单元)的描述。

从式(2-32)和式(2-33)可以看出，虽然它们分别用来描述杆件①和杆件②的，但它们的表达形式完全相同，因此本质上是一样，实际上，它们都是杆单元(bar element)。

可以将杆单元表达为如图2-7所示的标准形式。

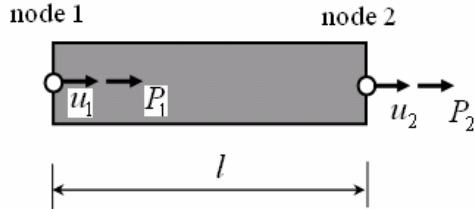


图 2-7 杆单元的表达

将单元节点位移写成

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2]^T \quad (2-34)$$

将单元节点外力写成

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = [P_1 \quad P_2]^T \quad (2-35)$$

由式(2-32), 该单元节点内力为

$$\begin{bmatrix} -I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

它将与单元的节点外力 \mathbf{P}^e 相平衡, 则有 $P_1 = -I_1$, $P_2 = I_2$ 因此, 该方程可以写成

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

进一步表达成

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (2-38)$$

其中

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

可以看出, 方程(2-38)是单元内力与外力的平衡方程(equilibrium equation), 它与单元的刚度方程(stiffness equation)是相同的(见式(3-41))。 \mathbf{K}^e 叫做单元的刚度矩阵(stiffness matrix), K_{11} 、 K_{12} 、 K_{21} 、 K_{22} 叫做刚度矩阵中的刚度系数(stiffness coefficient)。



2.3 有限元分析的基本流程

下面以一个 1D 三连杆结构为例，展现有限元分析的全部过程。

【典型例题】2.3(1) 1D 三连杆结构的有限元分析过程

采用杆单元的方法，求解如图 2-8 所示结构的所有力学参量。相关的材料参量和尺寸为

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}, 3A_1 = 2A_2 = A_3 = 0.06 \text{ m}^2$$
$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.1 \text{ m}$$

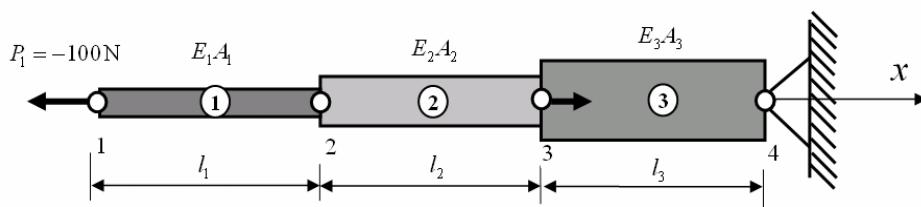


图 2-8 1D 三连杆结构的受力状况

解答：所谓基于单元的分析方法，就是将原整体结构按几何形状的变化性质划分节点并进行编号，然后将其分解为一个个小的构件（即：单元），基于节点位移，建立每一个单元的节点平衡关系（叫做单元刚度方程），对于杆单元来说就是式(2-38)；下一步就是将各个单元进行组合和集成，类似于式(2-31)，以得到该结构的整体平衡方程（也叫做整体刚度方程），按实际情况对方程中一些节点位移和节点力给定相应的值（叫做处理边界条件），就可以求解出所有的节点位移和支反力，最后在得到所有的节点位移后，就可以计算每一个单元的其它力学参量（如应变、应力）；下面给出该问题的有限元分析过程。

(1) 节点编号和单元划分

由于该结构由三根不同几何尺寸的杆件组成，并且在一些杆件连接处还作用有集中载荷，因此，需要在杆件连接处划分出节点，这样对于该结构就自动给出三个单元，其节点及单元编号(numbering of element)见图 2-9，将每一个单元分离出来，并标出每一个节点的位移和外力，如图 2-9 所示，注意，这里位移和力的方向都以 x 正方向来标注。

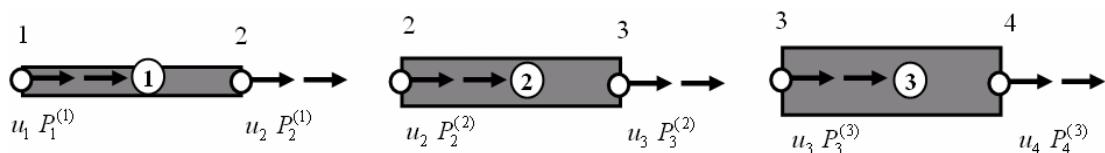


图 2-9 各个单元的节点位移和外力

(2) 计算各单元的单元刚度方程

可以看出，图 2-9 所示的每一个单元都和图 2-7 的单元类似，则所对应的刚度方程也应与式 (2-37) 类似，只需要将其中的各个参数进行代换，下面直接给出对应于单元①、②、③的单元刚度方程。

单元①的刚度方程为



$$\begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

单元②的刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

单元③的刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{E_3 A_3}{l_3} & -\frac{E_3 A_3}{l_3} \\ -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3^{(3)} \\ P_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

(3) 组装各单元刚度方程

由于整体结构是由各个单元按一定连接关系组合而成的，因此，需要按照节点的对应位置将以上方程 (2-40)、(2-41)、(2-42) 进行组装，以形成一个整体刚度方程，即

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{l_1} & \frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{E_3 A_3}{l_3} & -\frac{E_3 A_3}{l_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{l_3} & \frac{E_3 A_3}{l_3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} + P_3^{(3)} \\ P_4^{(3)} \end{bmatrix} \end{array} \quad (2-43)$$

为表达更清楚，在式 (2-43) 的刚度矩阵上方标明了所对应的变量。上面的组装过程，实际上就是将各个单元方程按照节点编号的位置进行集成。

式 (2-43) 中的 $P_1^{(1)}$ 、 $P_2^{(1)} + P_2^{(2)}$ 、 $P_3^{(2)} + P_3^{(3)}$ 、 $P_4^{(3)}$ 就是节点 1、2、3、4 上的合成节点力，即

$$P_1 = P_1^{(1)}, \quad P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)}, \quad P_3 = P_3^{(2)} + P_3^{(3)}, \quad P_4 = P_4^{(3)} \quad (2-44)$$

对照图 2-8 可知， $P_1 = -100N$ ， $P_2 = 0$ ， $P_3 = 50N$ ，而 P_4 为支座的支反力。将该结构的材料参数和几何尺寸参数代入式 (2-43) 中，则有



$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^4 & -4 \times 10^4 & 0 & 0 \\ -4 \times 10^4 & 1 \times 10^5 & -6 \times 10^4 & 0 \\ 0 & -6 \times 10^4 & 1.8 \times 10^5 & -1.2 \times 10^5 \\ 0 & 0 & -1.2 \times 10^5 & 1.2 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

上式中的 u_1 、 u_2 、 u_3 、 u_4 为节点位移， P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 为节点力，可以看出，图 2-9 中分别就单元①、②、③写出了各自的节点力，如对于节点 2，即写出了单元①中节点 2 的节点力 $P_2^{(1)}$ ，又给出了单元②中节点 2 的节点力 $P_2^{(2)}$ ，可以看出，在单元组装后，实际上只需要合成后的节点力（见 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 ）；因此，今后只需要对各个单元的刚度系数按对应节点位移的位置进行组装，而节点力只需直接写出即可，见方程式（2-45）。

(4) 处理边界条件并求解

图 2-8 所示结构的位移边界条件为： $u_4 = 0$ ，将已知的节点位移和节点力代入后，则方程（2-45）变为

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^4 & -4 \times 10^4 & 0 & 0 \\ -4 \times 10^4 & 1 \times 10^5 & -6 \times 10^4 & 0 \\ 0 & -6 \times 10^4 & 1.8 \times 10^5 & -1.2 \times 10^5 \\ 0 & 0 & -1.2 \times 10^5 & 1.2 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100N \\ 0 \\ 50N \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

由于 $u_4 = 0$ ，则划掉上述刚度矩阵的第 4 列和第 4 行，则有

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^4 & -4 \times 10^4 & 0 \\ -4 \times 10^4 & 1 \times 10^5 & -6 \times 10^4 \\ 0 & -6 \times 10^4 & 1.8 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

求解上述方程，有

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = -4.58333 \times 10^{-3} \text{ m} \\ u_2 = -2.08333 \times 10^{-3} \text{ m} \\ u_3 = -4.16667 \times 10^{-4} \text{ m} \end{array} \right\} \quad (2-48)$$

(5) 求支反力

在求得所有节点位移后，见式（2-48），并且 $u_4 = 0$ ，由方程组（2-46）的最后一行方程，可求出支反力 P_4 为

$$P_4 = -1.2 \times 10^5 \times u_3 = 50 \text{ N} \quad (2-49)$$

(6) 求各个单元的其它力学量（应变、应力）



由式(2-12), 可以求出各个单元的应变, 即

$$\varepsilon_1^{(1)} = \frac{u_2 - u_1}{l_1} = \frac{(-2.08333 + 4.5833) \times 10^{-3}}{0.1} = 2.49997 \times 10^{-2} \quad (2-50)$$

$$\varepsilon_2^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{l_2} = \frac{(-0.416667 + 2.08333) \times 10^{-3}}{0.1} = 1.6667 \times 10^{-2} \quad (2-51)$$

$$\varepsilon_3^{(3)} = \frac{u_4 - u_3}{l_3} = \frac{0 + 4.16667 \times 10^{-4}}{0.1} = 4.16667 \times 10^{-3} \quad (2-52)$$

由式(2-13), 可以求出各个单元的应力, 即

$$\sigma^{(1)} = E_1 \varepsilon^{(1)} = 4.999 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (2-53)$$

$$\sigma^{(2)} = E_2 \varepsilon^{(2)} = 3.3333 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (2-54)$$

$$\sigma^{(3)} = E_3 \varepsilon^{(3)} = 8.3333 \times 10^2 \text{ Pa} \quad (2-55)$$

这样可以得到一种直观的有限元分析思路, 就是将复杂的几何和受力对象划分为一个一个形状比较简单的标准“构件”, 称为单元, 然后给出单元节点的位移和受力描述, 构建起单元的刚度方程, 再通过单元与单元之间的节点连接关系进行单元的组装, 可以得到结构的整体刚度方程, 进而根据位移约束和受力状态, 处理边界条件, 并进行求解, 基本流程的示意见图 2-10。

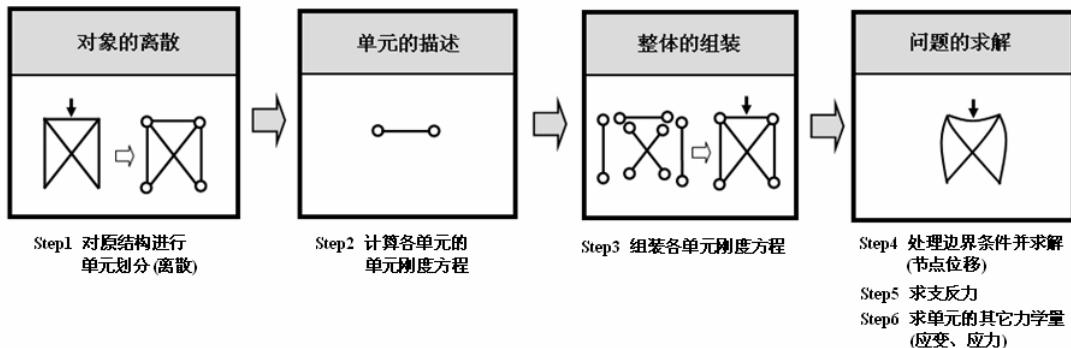


图 2-10 有限元分析的基本流程图示

2.4 有限元分析的特点

有限元分析的最大特点就是标准化和规范化, 这种特点使得大规模分析和计算成为可能, 当采用了现代化的计算机以及所编制的软件作为实现平台时, 则复杂工程问题的大规模分析就变为了现实。

实现有限元分析标准化和规范化的载体就是单元, 这就需要我们构建起各种各样的具有代表性的单元, 一旦有了这些单元, 就好像建筑施工中有了一些标准的预制构件(如梁、楼板等), 可以按设计要求搭建出各种各样的复杂结构, 如图 2-11 所示。

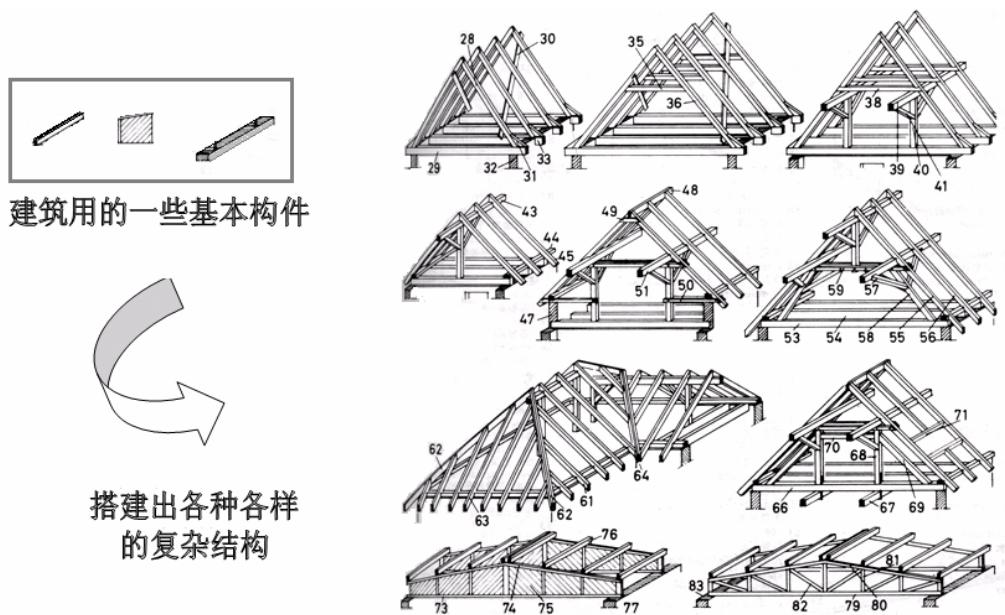


图 2-11 在建筑中采用一些基本构件可以搭建出各种各样的复杂结构

图 2-11 中所示的基本构件，实际上就是有限元分析中的“单元”，而搭建出的复杂结构就是我们需要分析的“对象”，下面用图示的方法列出有限元分析中常用的一些典型单元（见图 2-12）。

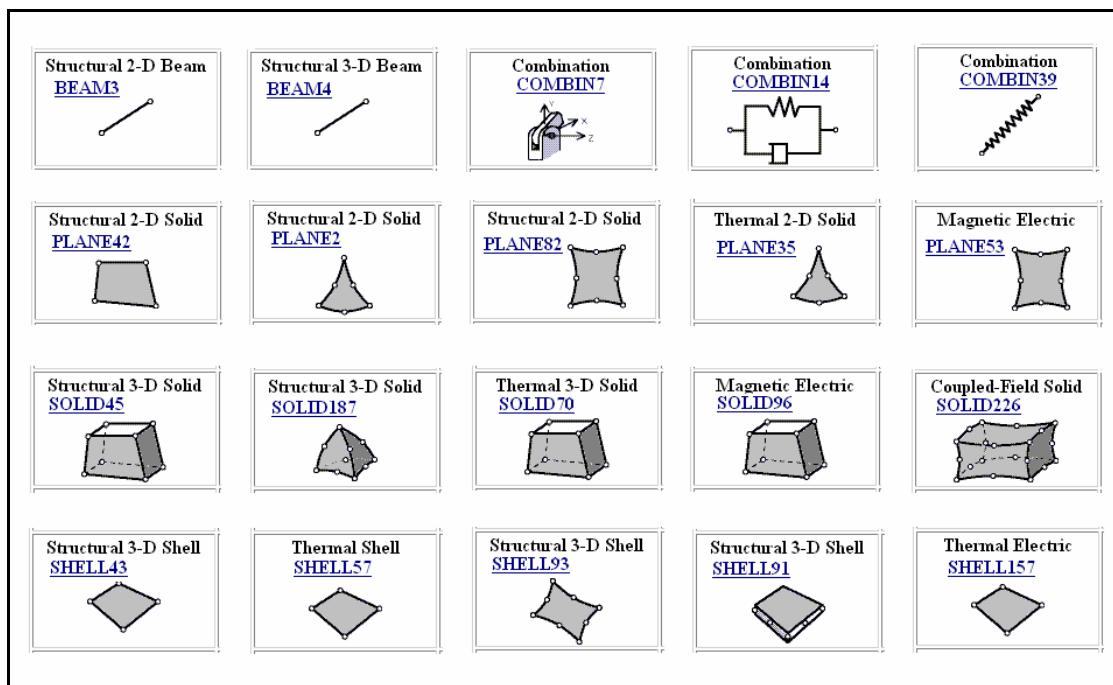


图 2-12 常用的一些典型单元(ANSYS 平台上)

有限元分析的最主要內容，就是研究单元，即首先给出单元的节点位移和节点力，然后基于单元节点位移与节点力的相互关系（见【典型例题】2.2(2)）可以直接获得相应的刚度系数，进而得到单元的刚度方程，实际上就是要得到针对单元节点的平衡方程，这就是单元



的刚度方程，就可以针对实际的复杂结构，根据实际的连接关系，将单元组装为整体刚度方程，这实际上也是得到整体结构的基于节点位移的整体平衡方程。

因此，有限元方法的主要任务就是对常用的各种单元（包括 1D、2D、3D 问题的单元）构造出相应的单元刚度矩阵^{[13][14]}；当然，如果还采用如【典型例题】2.2(2)所示的直接法来进行构造，会非常烦琐，而采用能量原理（如：虚功原理或最小势能原理）来建立相应的平衡关系则比较简单^[15]，这种方法可以针对任何类型的单元进行构建，以得到相应的刚度矩阵，这种推导单元刚度矩阵的方法的力学基础见第 3 章。

2.5 本章要点

- 函数的全域逼近与子域分段逼近的概念
- 将对象离散为一些标准的单元
- 将单元的节点位移作为基本力学变量
- 建立单元的节点的平衡关系
- 单元刚度矩阵以及直接求取的方法
- 有限元分析的标准流程(离散化、单元描述、整体组装、问题求解)



第3章 杆梁结构的有限元分析方法

下面先从简单的杆梁结构入手全面介绍有限元方法，接着在后面的章节就连续体问题进行讨论。

3.1 杆梁结构分析的工程概念

在建筑结构中，杆、梁、板是主要的承力构件，关于它们的计算分析对于建筑设计来说具有非常重要的作用，对杆、梁、板的建模将充分考虑到实际结构的几何特征及连接方式，并需要对其进行不同层次的简化，可以就某一特定分析目的得到相应的1D、2D、3D模型，由于在设计时并不知道结构的真实力学性能(或许还没有实验结果，或许还得不到精确的解析解)，仅有计算分析的一些结果，因此，一种进行计算结果校核或验证的可能方法，就是对所分析对象分别建立1D、2D、3D模型，来进行它们之间的相互验证和核对；图3-1给出一个建筑结构中的杆梁框架以及建模简化过程。

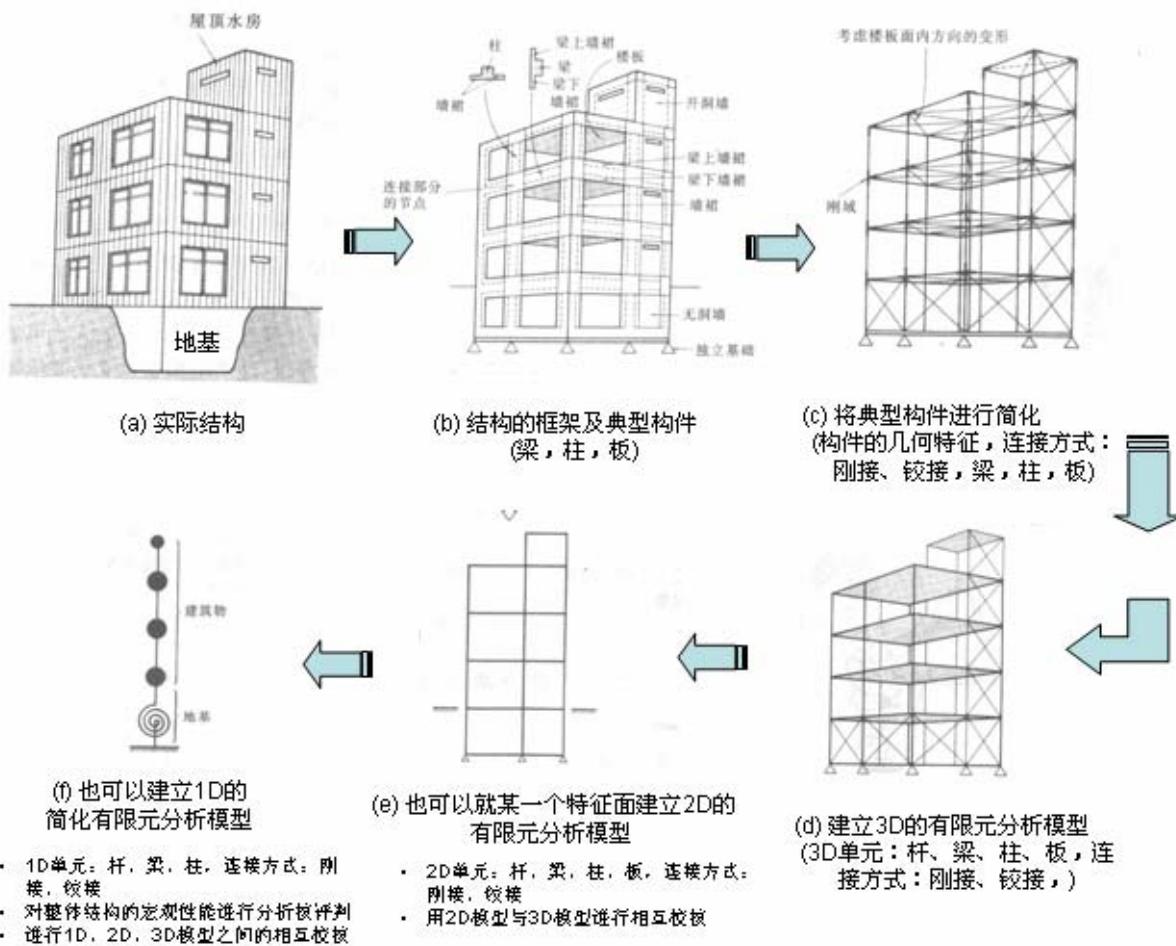


图3-1 建筑结构中的杆梁框架以及建模简化过程



3.2 杆件有限元分析的标准化表征与算例

3.2.1 杆件分析的基本力学原理

杆件是最常用的承力构件，它的特点是连接它的两端一般都是铰接接头，因此，它主要是承受沿轴线的轴向力，因两个连接的构件在铰接接头处可以转动，则它不传递和承受弯矩。

有一个左端固定的拉杆，其右端承受一外力 P 。该拉杆的长度为 l ，横截面积为 A ，弹性模量为 E ，如图 3-2 所示，这是一个一维问题，下面讨论该问题的力学描述与求解。

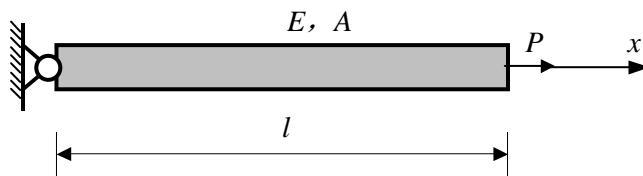


图 3-2 一端固定的拉杆

【基本变量】3.2.1(1) 1D 问题的基本变量

由于该问题是沿 x 方向的一维问题，因此只有沿 x 方向的基本变量，即

定义沿 x 方向移动为位移： $u(x)$

定义沿 x 方向的相对伸长(或缩短)量为应变： $\varepsilon_x(x)$

定义沿 x 方向的单位横截面上的受力为应力： $\sigma_x(x)$

【基本方程】3.2.1(2) 1D 问题的基本方程

该问题的三大类基本方程和边界条件如下。

① 取出杆件的任意一个截面，可得到平衡方程(无体力)为

$$\sigma_x = c_1 \quad \text{或} \quad \frac{d\sigma_x}{dx} = 0 \quad (3-1)$$

其中 c_1 为待定的常数。

② 取出杆件 x 位置处的一段长度 dx ，设它的伸长为 du ，则它的相对伸长量为

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (3-2)$$

该方程称为几何方程。

③ 由该材料的拉伸试验，可得到该材料的虎克定律为

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3-3)$$

该方程也称为物理方程。

④ 边界条件(BC, boundary condition)

$$\text{位移边界条件 BC}(u) \quad u(x)|_{x=0} = 0 \quad (3-4)$$



$$\text{力边界条件 } BC(p) \quad \sigma_x(x)|_{x=l} = \frac{P}{A} = \bar{p}_x \quad (3-5)$$

对于以上的力边界条件，只能作为一种近似，因为在 $x = l$ 的端面， $\sigma_x(x)$ 不应是均匀分布的。由圣维南原理(Saint-Venant's principle)，在远离 $x = l$ 的截面，力的边界条件才较好地满足。

从求解思路来说，可以有两类方法来对该问题进行求解，即

(1) 直接求解方法：该问题比较简单，因此，可以由 3 个方程来直接求解 3 个变量。

(2) 基于试函数的间接方法：可以先选取一个变量(如位移)作为最基本的待求变量，将其它变量都用它来表达，并采用间接的近似求解方法；具体的做法为：先对待求的位移变量假设一种事先满足位移边界条件的可能解(其中有一些待定的系数)，称为试函数(trail function)，让该受力系统的势能取最小值来最后确定出可能解(试函数)中的那些待定系数(unknown constant)；也可以让该受力系统的内部变形虚功等于外部施加力的虚功，来求出试函数中的那些待定系数。

下面针对图 3-2 所示的一端固定的拉杆问题，分别讨论基于直接求解方法以及基于试函数的间接方法的求解过程。

【求解原理】3.2.1(3) 1D 问题的直接求解

就所针对的问题，对方程(3-1)-(3-3)进行直接求解，可得到以下结果。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x(x) = c_1 \\ \varepsilon_x(x) = \frac{c_1}{E} \\ u(x) = \frac{c_1}{E}x + c_2 \end{array} \right\} \quad (3-6)$$

其中 c_1 及 c_2 为待定常数，由边界条件(3-4)和(3-5)，可求出(3-6)中的常数为 $c_2 = 0$ ， $c_1 = \frac{P}{A}$ 。因此，有最后的结果

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x(x) = \frac{P}{A} \\ \varepsilon_x(x) = \frac{P}{EA} \\ u(x) = \frac{P}{EA}x \end{array} \right\} \quad (3-7)$$

下面讨论基于试函数的间接方法的求解过程，先介绍相应的求解原理，然后就图 3-2 所示的一端固定的拉杆问题给出解答。

【求解原理】3.2.1(4) 1D 问题的虚功原理求解

先以一个简单的结构静力平衡问题来描述虚功原理的基本思想，然后再具体求解一端固定的拉杆问题。

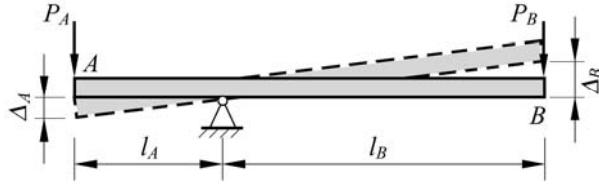


图 3-3 平衡力系由于微小扰动产生相应的虚位移

如图 3-3 所示的一个平衡力系, 由于该系统处于平衡状态, 则有

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{l_B}{l_A} \quad (3-8)$$

假想在该平衡力系上作用有微小的扰动(不影响原平衡条件), 且外力所作用的位置产生了微小的位移变化, 即 Δ_A, Δ_B 。该假想的位移如果不影响原平衡条件, 应满足以下几何关系

$$\frac{\Delta_B}{\Delta_A} = \frac{l_B}{l_A} \quad (3-9)$$

这就是任意扰动的位移应满足的条件, 称为许可位移条件, 我们把满足许可位移条件的、任意微小的假想位移称为虚位移(假想的)(virtual displacement)。

将式(3-9)代入式(3-8)中, 有

$$P_A \Delta_A - P_B \Delta_B = 0 \quad (3-10)$$

$P_A \Delta_A$ 为 A 点的虚功(virtual work)(即外力 P_A 在 A 点虚位移 Δ_A 上所做的功), $-P_B \Delta_B$ 为 B 点的虚功(即外力 P_B 在 B 点虚位移 Δ_B 上做的功, 注意负号表示力与位移的方向相反)。

实质上, 关系式(3-10)表达了基于虚位移的虚功原理(principle of virtual work), 即: 对于一个处于平衡状态的系统, 作用于系统上的所有外力在满足许可位移条件的虚位移上所做的虚功总和恒为零。

现在进一步讨论弹性力学中有关变形体的虚功原理, 这时的虚功应包括外力虚功 δW 和内力虚功 $-\delta U$, δU 叫做虚应变能(virtual strain energy)。由于弹性体在变形过程中, 内力是抵抗变形所产生的, 其方向总是与变形的方向相反, 所以内力虚功取负。由于虚功总和为零, 则有

$$\delta W - \delta U = 0 \quad (3-11)$$

所以

$$\delta U = \delta W \quad (3-12)$$

弹性力学中的虚功原理可表述为: 在外力作用下处于平衡状态的变形体, 当给物体以微小虚位移时, 外力所做的总虚功等于物体的总虚应变能(即应力在由虚位移所产生虚应变上所作的功)。注意这里的虚位移是指仅满足位移边界条件 $BC(u)$ 的许可位移。

下面应用虚功应力来具体求解如图 3-2 所示的一端固定的拉杆问题, 设有满足位移边界条



件的位移场

$$u(x) = cx \quad (3-13)$$

可以验证：它满足位移边界条件。这是一个待定函数，也称为试函数，所谓该函数是待定的，就是因为它中间有一个待定系数 c ，这就需要通过一个原理来确认它，下面由虚功原理来进行确认。基于式(3-13)的试函数，则它的应变、虚位移以及虚应变为

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon(x) = c \\ \delta u(x) = \delta c \cdot x \\ \delta \varepsilon(x) = \delta c \end{array} \right\} \quad (3-14)$$

其中 δc 为待定系数的增量。计算如图 3-2 所示算例的虚应变能以及外力虚功为

$$\delta U = \int_{\Omega} \sigma_x \delta \varepsilon_x d\Omega = \int_0^l \int_A E \cdot \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA \cdot dx = E \cdot c \cdot \delta c \cdot A \cdot l \quad (3-15)$$

$$\delta W = P \cdot \delta u(x=l) = P \cdot \delta c \cdot l \quad (3-16)$$

由虚功原理(3-12)，有

$$E \cdot c \cdot \delta c \cdot A \cdot l = P \cdot \delta c \cdot l \quad (3-17)$$

消去 δc 后，有解

$$c = \frac{P}{EA} \quad (3-18)$$

代回式(3-13)中，就可以得到该问题的解。

【求解原理】3.2.1(5) 1D 问题的最小势能原理求解

先介绍最小势能原理的基本表达式。设有满足位移边界条件 $BC(u)$ 的许可位移场 $u(x)$ ，计算该系统的势能(potential energy)为

$$\Pi(u) = U - W \quad (3-19)$$

其中 U 为应变能， W 为外力功，对于如图 3-2 所示的算例，有

$$\left. \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_x(u(x)) \cdot \varepsilon_x(u(x)) d\Omega \\ W = P \cdot u(x=l) \end{array} \right\} \quad (3-20)$$

对于包含有待定系数的试函数 $u(x)$ 而言，真实的位移函数 $u(x)$ 应使得该系统的势能取极小值，即

$$\min_{u(x) \in BC(u)} [\Pi(u) = U - W] \quad (3-21)$$



下面应用最小势能原理来具体求解如图 3-2 所示的一端固定的拉杆问题，同样取满足位移边界条件的位移场(3-13)，则计算应力、应变为

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = c \\ \sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = E \cdot c \end{array} \right\} \quad (3-22)$$

由式(3-20)则计算该系统的势能为

$$\Pi(u) = U - W = \frac{1}{2} E \cdot c^2 \cdot A \cdot l - P \cdot c \cdot l \quad (3-23)$$

由式(3-21)，应对式(3-23)求极值，即

$$\frac{\partial \Pi(u)}{\partial c} = 0 \quad (3-24)$$

则可以求出 $c = P / EA$ ，与式(3-18)的结果相同。

由上面的计算可以看出，基于试函数的方法，包括虚功原理以及最小势能原理(principle of minimum potential energy)，仅计算系统的能量，实际上就是计算积分(见式(3-15)以及(3-20))，然后转化为求解线性方程，不需求解微分方程，这样就大大地降低了求解难度。同时，也可以看出，试函数的方法的关键是如何构造出适合于所求问题的位移试函数，并且该构造方法还应具有规范性以及标准化，基于“单元”的构造方法就可以完全满足这些要求。

3.2.2 局部坐标系中的杆单元描述

最简单的标准单元就是杆单元，下面就要研究它的试函数描述，以及计算它的应变能和外力功。

【单元构造】3.2.2(1) 杆单元的描述

单元的描述包括单元的几何及节点描述、位移场、应变场、应力场、势能，也就是要充分利用描述问题的三大类变量以及三大类方程来计算单元的势能，然后，由最小势能原理(或虚功原理)来得到单元的方程。实际上，单元内位移场的描述就是它的试函数的选取。

(1) 单元的几何及节点描述

图 3-4 所示为一个在局部坐标系(local coordinate system)中的杆单元(bar element)，由于有两个端节点 (Node 1 和 Node 2)，则基本变量为节点位移(向量)列阵 \mathbf{q}^e

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad u_2]^T \quad (3-25)$$

将每一个描述物体位置状态的独立变量叫做一个自由度(DOF, degree of freedom)，显然，以上的节点位移为两个自由度。节点力(向量)列阵 \mathbf{P}^e 为



$$\mathbf{P}^e = [P_1 \quad P_2]^T \quad (3-26)$$

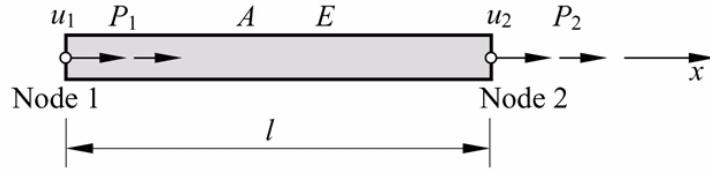


图 3-4 局部坐标系中的单元

若该单元承受有沿轴向的分布外载, 可以将其等效到节点上, 即表示为如式(3-26)所示的节点力。利用函数插值、几何方程、物理方程以及势能计算公式, 可以将单元的所有力学参量(即场变量: $u(x)$, $\varepsilon(x)$, $\sigma(x)$ 和 Π^e)用节点位移列阵 \mathbf{q}^e 及相关的插值函数来表示。

(2) 单元位移场的表达

设该单元的位移场为 $u(x)$, 由 Taylor 级数, 它可以表示为

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (3-27)$$

该函数将由两个端节点的位移 u_1 和 u_2 来进行插值确定, 可取式(3-27)的前两项来作为该单元的位移插值模式(interpolation model):

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (3-28)$$

其中 a_0 和 a_1 为待定系数(unknowns)。

单元节点条件为

$$\left. \begin{array}{l} u(x)|_{x=0} = u_1 \\ u(x)|_{x=l^e} = u_2 \end{array} \right\} \quad (3-29)$$

将节点条件(3-29)代入式(3-28), 可以求得 a_0 和 a_1 为

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = u_1 \\ a_1 = \frac{u_2 - u_1}{l^e} \end{array} \right\} \quad (3-30)$$

将其代入式(3-28)有

$$u(x) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{l^e}\right)x = \left(1 - \frac{x}{l^e}\right)u_1 + \left(\frac{x}{l^e}\right)u_2 = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q}^e \quad (3-31)$$

其中 \mathbf{N} 叫做形状函数矩阵(shape function matrix), 为



$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{l^e}) & \frac{x}{l^e} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

\mathbf{q}^e 叫做节点位移列阵(nodal displacement vector), 即

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad u_2]^T \quad (3-33)$$

(3) 单元应变场的表达

由弹性力学中的几何方程, 有 1D 问题的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \frac{du(x)}{dx} = \left[-\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{q}^e \quad (3-34)$$

其中

$$\mathbf{B}(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{N}(x) = \left[-\frac{1}{l^e} \quad \frac{1}{l^e} \right] \quad (3-35)$$

叫做几何矩阵(strain-displacement matrix)。

(4) 单元应力场的表达

由弹性力学中的物理方程, 有 1D 问题的应力

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = E^e \boldsymbol{\varepsilon}(x) = E^e \cdot \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{q}^e \quad (3-36)$$

其中

$$\mathbf{S}(x) = E^e \cdot \mathbf{B}(x) = \left[-\frac{E^e}{l^e} \quad \frac{E^e}{l^e} \right] \quad (3-37)$$

叫做应力矩阵(stress-displacement matrix)。

(5) 单元势能的表达

基于式(3-34)和式(3-36), 有单元势能的表达式

$$\begin{aligned} \Pi^e &= U^e - W^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x) \cdot d\Omega - (P_1^e \cdot u_1 + P_2^e \cdot u_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l^e} \mathbf{q}^{eT} \cdot \mathbf{S}^T(x) \cdot \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{q}^e \cdot A^e \cdot dx - (P_1^e \cdot u_1 + P_2^e \cdot u_2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E^e A^e}{l^e} & -\frac{E^e A^e}{l^e} \\ -\frac{E^e A^e}{l^e} & \frac{E^e A^e}{l^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1^e & P_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e - \mathbf{P}^{eT} \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (3-38)$$



其中 \mathbf{K}^e 叫做单元刚度矩阵(stiffness matrix of element), 即

$$\mathbf{K}^e = \frac{E A^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

\mathbf{P}^e 叫做节点力列阵(nodal force vector), 即

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

(6) 单元的刚度方程

对式(3-38)取极小值, 可以得到**单元的刚度方程**(stiffness equation of element)为

$$\underset{(2 \times 2)}{\mathbf{K}^e} \cdot \underset{(2 \times 1)}{\mathbf{q}^e} = \underset{(2 \times 1)}{\mathbf{P}^e} \quad (3-41)$$

【典型例题】3.2.2(2) 变截面杆单元的推导

如图 3-5 所示, 有一受轴载荷的线性变截面杆件, 两端的截面积为 A_1 和 A_2 , 长度为 l , 材料的弹性模量为 E , 试建立描述该杆件的一个杆单元。

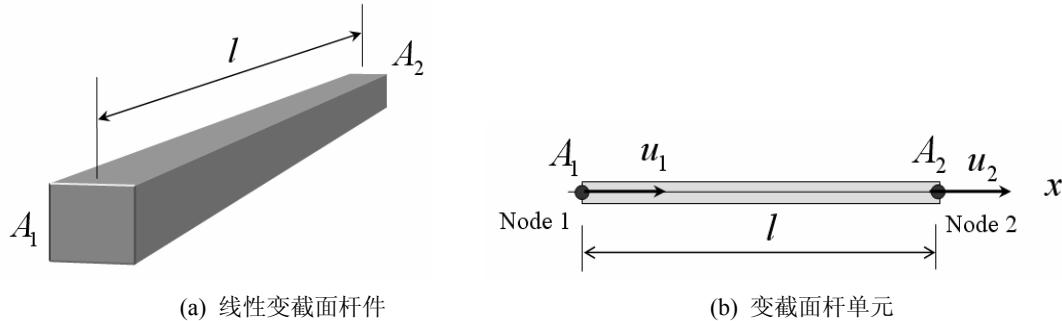


图 3-5 变截面杆件及单元

解答: 建立的变截杆单元如图 3-5(b)所示, 其中横截面积为

$$A(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) A_1 + \left(\frac{x}{l}\right) A_2 \quad (3-42)$$

其节点位移列阵为 $\mathbf{q}^e = [u_1 \ u_2]^T$, 节点力列阵为 $\mathbf{P}^e = [P_1 \ P_2]^T$

由于为两个节点, 则单元的位移模式取为

$$u(x) = a_0 + a_1 x = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q}^e \quad (3-43)$$

由节点条件, 可得到该单元的形状函数矩阵



$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

由几何方程，可得到该单元的几何矩阵

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

则该单元的刚度方程为

$$\underset{(2 \times 2)}{\mathbf{K}^e} \cdot \underset{(2 \times 1)}{\mathbf{q}^e} = \underset{(2 \times 1)}{\mathbf{P}^e} \quad (3-46)$$

其中刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \underset{(2 \times 2)}{\mathbf{K}^e} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \mathbf{B} \cdot d\Omega \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \cdot A(x) \cdot dx \\ &= \int_0^l \frac{E}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) A_1 + \left(\frac{x}{l}\right) A_2 \right] dx \\ &= \frac{E(A_1 + A_2)}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-47)$$

可以看出，与等截面杆单元相比，该线性变截面杆单元的截面取了平均面积。

3.2.3 杆单元的坐标变换

1. 平面杆单元的坐标变换

在工程实际中，杆单元可能处于整体坐标系(global coordinate system)中的任意一个位置，如图 3-6 所示，这需要将原来在局部坐标系(local coordinate system)中所得到的单元表达等价地变换到整体坐标系中，这样，不同位置的单元才有公共的坐标基准，以便对各个单元进行集成(即组装)。图 3-6 中的整体坐标系为(\bar{x} \bar{o} \bar{y})，杆单元的局部坐标系为(ox)。

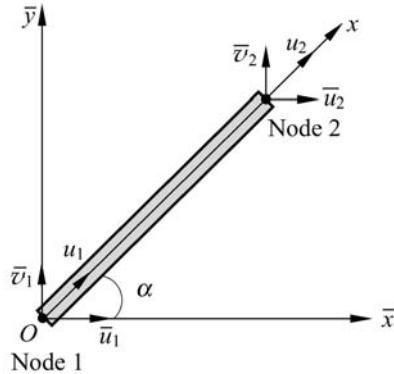


图 3-6 平面杆单元的坐标变换

局部坐标系中的节点位移为

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad u_2]^T \quad (3-48)$$

整体坐标系中的节点位移为

$$\bar{\mathbf{q}}^e = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2]^T \quad (3-49)$$

如图 3-6 所示, 在节点 1, 整体坐标系下的节点位移 \bar{u}_1 和 \bar{v}_1 , 其合成的结果应完全等效于局部坐标系中的 u_1 ; 在节点 2, 节点位移 \bar{u}_2 和 \bar{v}_2 合成的结果应完全等效于局部坐标系中的 u_2 , 即存在以下的等价变换关系

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \bar{u}_1 \cos \alpha + \bar{v}_1 \sin \alpha \\ u_2 = \bar{u}_2 \cos \alpha + \bar{v}_2 \sin \alpha \end{array} \right\} \quad (3-50)$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^e \cdot \bar{\mathbf{q}}^e \quad (3-51)$$

其中 \mathbf{T}^e 为坐标变换矩阵(transformation matrix), 即

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

下面推导整体坐标系下的刚度方程; 由于单元的势能是一个标量(能量), 不会因坐标系的不同而改变, 因此, 可将节点位移的坐标变换关系(3-51)代入原来基于局部坐标系的势能表达式中,



有

$$\begin{aligned}\Pi^e &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e - \mathbf{p}^{eT} \cdot \mathbf{q}^e \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^{eT} (\mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e) \bar{\mathbf{q}}^e - (\mathbf{T}^{eT} \cdot \mathbf{P}^e)^T \cdot \bar{\mathbf{q}}^e \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{q}}^e - \bar{\mathbf{P}}^{eT} \bar{\mathbf{q}}^e\end{aligned}\quad (3-53)$$

其中 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 为整体坐标系下的单元刚度矩阵, $\bar{\mathbf{P}}^e$ 为整体坐标系下的节点力列阵, 即

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \quad (3-54)$$

$$\bar{\mathbf{P}}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{P}^e \quad (3-55)$$

由最小势能原理(针对该单元), 将式(3-53)对待定的节点位移列阵 $\bar{\mathbf{q}}^e$ 取极小值, 可得到整体坐标系中的刚度方程

$$\bar{\mathbf{K}}^e \cdot \bar{\mathbf{q}}^e = \bar{\mathbf{P}}^e \quad (3-56)$$

对于如图 3-6 所示的杆单元, 由式(3-54)具体给出

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

2. 空间杆单元的坐标变换

空间问题中的杆单元如图 3-7 所示。

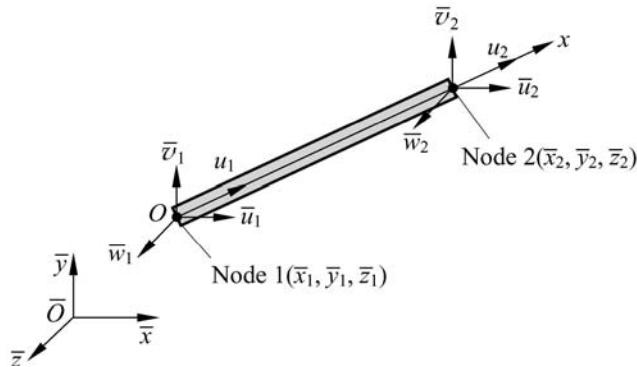


图 3-7 空间杆单元的坐标变换

该杆单元在局部坐标系下(Ox)的节点位移还是



$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \quad (3-58)$$

而整体坐标系中 $(\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ 的节点位移列阵为

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{w}_1 & \bar{u}_2 & \bar{v}_2 & \bar{w}_2 \end{bmatrix}^T \quad (3-59)$$

杆单元轴线在整体坐标系中的方向余弦为

$$\cos(x, \bar{x}) = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l}, \quad \cos(x, \bar{y}) = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{l}, \quad \cos(x, \bar{z}) = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{l} \quad (3-60)$$

其中 $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ 和 $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ 分别是节点 1 和节点 2 在整体坐标系中的位置, l 是杆单元的长度,

和平面情形类似, \mathbf{q}^e 与 $\bar{\mathbf{q}}^e$ 之间存在以下转换关系

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}^e \cdot \bar{\mathbf{q}}^e \end{aligned} \quad (3-61)$$

其中 \mathbf{T}^e 为坐标变换矩阵, 即

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

刚度矩阵和节点力的变换与平面情形相同, 即为

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{matrix} (6 \times 6) & (6 \times 2) & (2 \times 2) & (2 \times 6) \end{matrix} \mathbf{K}^e \begin{matrix} e^T \\ (6 \times 2) \\ (2 \times 1) \end{matrix} \quad (3-63)$$

$$\bar{\mathbf{P}}^e = \begin{matrix} (6 \times 1) & (6 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \mathbf{P}^e \begin{matrix} e^T \\ (6 \times 2) \\ (2 \times 1) \end{matrix} \quad (3-64)$$

3.2.4 杆单元分析的 MATLAB 程序

学习有限元方法的一个最佳途径, 就是在充分掌握基本概念的基础上亲自编写有限元分析程序, 这就需要一个良好的编程环境或平台, MATLAB 软件就是这样一个平台^[16], 它以功能强大、编程逻辑直观、使用方便见长, 从本节开始, 将提供有限元分析中主要单元完整的 MATLAB 程序, 并给出详细的说明, 有关 MATLAB 程序的基本操作可参见附录 A。

**【MATLAB 程序】3.2.4(1) 1D 杆单元的有限元分析程序(Bar1D2Node)**

最简单的线性杆单元的程序应该包括单元刚度矩阵、单元组装、单元应力等几个基本计算程序。下面给出编写的线性杆单元的四个 MATLAB 函数。

Bar1D2Node_Stiffness(E,A,L)

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，横截面积 A 和长度 L，输出单元刚度矩阵 k(2X2)。

Bar1D2Node_Assembly(KK,k,i,j)

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i, j，输出整体刚度矩阵 KK。

Bar1D2Node_Stress(k,u,A)

该函数计算单元的应力，输入单元刚度矩阵 k、单元的位移列阵 u(2×1)以及横截面积 A 计算单元应力矢量，输出单元应力 stress。

Bar1D2Node_Force(k,u)

该函数计算单元节点力矢量，输入单元刚度矩阵 k 和单元的位移列阵 u(2×1)，输出 2×1 的单元节点力矢量 forces。

基于第 3.2.2 节的基本公式，写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%%%%% Bar1D2Node %% begin %%%%%%
function k=Bar1D2Node_Stiffness(E,A,L)
%该函数计算单元的刚度矩阵
%输入弹性模量 E，横截面积 A 和长度 L
%输出单元刚度矩阵 k(2X2)
%-----
k=[E*A/L -E*A/L; -E*A/L E*A/L];
%%%%%%%
function z=Bar1D2Node_Assembly(KK,k,i,j)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i, j
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF(1)=i;
DOF(2)=j;
for n1=1:2
    for n2=1:2
        KK(DOF(n1),DOF(n2))= KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%-----
function stress=Bar1D2Node_Stress(k,u,A)
%该函数计算单元的应力
%输入单元刚度矩阵 k, 单元的位移列阵 u(2×1)
%输入横截面积 A 计算单元应力矢量
%输出单元应力 stress
%-----
stress=k*u/A;
```



```

%-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function forces=Bar1D2Node_Force(k,u)
%该函数计算单元节点力矢量
%输入单元刚度矩阵 k 和单元的位移列阵 u(2×1)
%输出 2×1 的单元节点力分量 forces
%-----
forces=k*u;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Bar1D2Node %% end %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

【MATLAB 程序】3.2.4(2) 2D 杆单元的有限元分析程序(Bar2D2Node)

编写如图 3-5 所示平面桁架单元的单元刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。编写的平面桁架单元的四个 MATLAB 函数如下。

Bar2D2Node Stiffness(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha)

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，横截面积 A，第一个节点坐标 (x1,y1)，第二个节点坐标 (x2,y2) 和角度 alpha（单位是度），输出单元刚度矩阵 k(4X4)。

Bar2D2Node_Assembly(KK,k,i,j)

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k ，单元的节点编号 i, j ，输出整体刚度矩阵 KK 。

Bar2D2Node_Stress(E,x1,y1,x2,y2,alpha,u)

该函数计算单元的应力，输入弹性模量 E，第一个节点坐标 (x1,y1)，第二个节点坐标 (x2,y2)，角度 alpha（单位是度）和单位节点位移矢量 u，返回单元应力标量。

Bar2D2Node_Forces(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha,u)

该函数计算单元的应力，输入弹性模量 E，横截面积 A，第一个节点坐标 (x1,y1)，第二个节点坐标 (x2,y2)，角度 alpha（单位是度）和单元节点位移矢量 u，返回单元节点力。

基于第 3.2.3 节中的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```

%%%%% Bar2D2Node %% begin %%%%%%
function k=Bar2D2Node_Stiffness(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha)
%该函数计算单元的刚度矩阵
%输入弹性模量 E, 横截面积 A
%输入第一个节点坐标 (x1,y1), 第二个节点坐标 (x2,y2), 角度 alpha (单位是度)
%输出单元刚度矩阵 k(4X4)
%-----
L=sqrt((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1));
x=alpha*pi/180;
C=cos(x);
S=sin(x);
k=E*A/L*[C*C C*S -C*C -C*S; C*S S*S -C*S -S*S;
-C*C -C*S C*C C*S; -C*S -S*S C*S S*S];
%%%%% Bar2D2Node_Assembly(KK,k,i,j)
function z = Bar2D2Node_Assembly(KK,k,i,j)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k, 单元的节点编号 i, j
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF(1)=2*i-1;

```



```
DOF(2)=2*i;
DOF(3)=2*j-1;
DOF(4)=2*j;
for n1=1:4
    for n2=1:4
        KK(DOF(n1),DOF(n2))= KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%%%%%%%%%%%%%%%
function stress= Bar2D2Node_Stress(E,x1,y1,x2,y2,alpha,u)
%该函数计算单元的应力
%输入弹性模量 E, 第一个节点坐标 (x1,y1), 第二个节点坐标 (x2,y2)
%输入角度 alpha (单位是度) 和单位节点位移矢量 u
%返回单元应力标量 stress
%-----
L=sqrt((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1));
x=alpha*pi/180;
C=cos(x);
S=sin(x);
stress=E/L*[-C -S C S]*u;
%%%%%%%%%%%%%%
function forces= Bar2D2Node_Forces(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha,u)
%该函数计算单元的应力
%输入弹性模量 E, 横截面积 A
%输入第一个节点坐标 (x1,y1), 第二个节点坐标 (x2,y2), 角度 alpha (单位是度)
%输入单元节点位移矢量 u
%返回单元节点力 forces
%-----
L=sqrt((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1));
x=alpha*pi/180;
C=cos(x);
S=sin(x);
forces= E*A/L*[-C -S C S]*u;
%%%%%%%%%%%%% Bar2D2Node %% end %%%%%%%%
```

3.2.5 杆结构分析的算例

【典型例题】3.2.5(1) 四杆桁架结构的有限元分析

如图 3-8 所示的结构，各杆的弹性模量和横截面积都为 $E = 29.5 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ，
 $A = 100 \text{ mm}^2$ ，试求解该结构的节点位移、单元应力以及支反力。

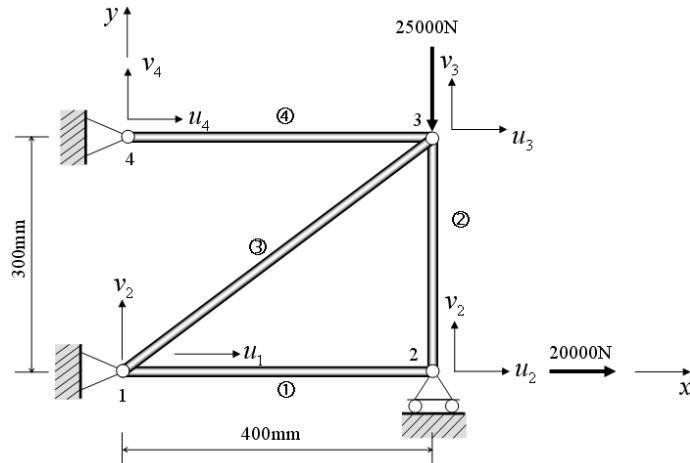


图 3-8 四杆桁架结构

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

对该结构进行自然离散，节点编号和单元编号如图 3-8 所示，有关节点和单元的信息见表 3-1 至表 3-3。

表 3-1 四杆桁架结构节点及坐标

节点	x	y
1	0	0
2	400	0
3	400	300
4	0	300

表 3-2 四杆桁架结构的单元编号及对应节点

单元	节点	2
①	1	2
②	3	2
③	1	3
④	4	3

表 3-3 各单元的长度及轴线方向余弦

单元	l	n_x	n_y
①	400	1	0
②	300	0	-1
③	500	0.8	0.6
④	400	1	0



(2) 各个单元的矩阵描述

由于所分析的结构包括有斜杆，所以必须在总体坐标下对节点位移进行表达，所推导的单元刚度矩阵也要进行变换，各单元经坐标变换后的刚度矩阵如下。

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{400} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow v_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow v_2 \end{array} \quad (3-65)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{300} \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_3 \\ \leftarrow v_3 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow v_2 \end{array} \quad (3-66)$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{500} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow v_1 \\ \leftarrow u_3 \\ \leftarrow v_3 \end{array} \quad (3-67)$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{400} \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_4 \\ \leftarrow v_4 \\ \leftarrow u_3 \\ \leftarrow v_3 \end{array} \quad (3-68)$$

(3) 建立整体刚度方程

将所得到的各个单元刚度矩阵按节点编号进行组装，可以形成整体刚度矩阵，同时将所有节点载荷也进行组装。

刚度矩阵： $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)} + \mathbf{K}^{(4)}$

节点位移： $\mathbf{q} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T$

节点力： $\mathbf{P} = \mathbf{R} + \mathbf{F} = [R_{x1} \quad R_{y1} \quad 2 \times 10^4 \quad R_{y2} \quad 0 \quad -2.5 \times 10^4 \quad R_{x4} \quad R_{y4}]^T$



其中 (R_{x1}, R_{y1}) 为节点1处沿x和y方向的支反力, R_{y2} 为节点2处y方向的支反力, (R_{x4}, R_{y4}) 为节点4处沿x和y方向的支反力。

整体刚度方程为

$$\frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{6000} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow \\ 22.68 & 5.76 & -15.0 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15.0 & 0 & 15.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20.0 & 0 & -20.0 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15.0 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20.0 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15.0 & 0 & 15.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ F_{x2} \\ R_{y2} \\ F_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 2 \times 10^4 \\ R_{y2} \\ 0 \\ -2.5 \times 10^4 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{bmatrix}$$

(3-69)

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

边界条件 BC(u)为: $u_1 = v_1 = v_2 = u_4 = v_4 = 0$, 代入方程(3-69)中, 经化简后有

$$\frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{6000} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 22.68 & 5.76 \\ 0 & 5.76 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 10^4 \\ 0 \\ -2.5 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

对该方程进行求解, 有

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2712 \\ 0.0565 \\ -0.2225 \end{bmatrix} \text{mm}$$

则所有的节点位移为

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0.2712 \ 0 \ 0.0565 \ -0.2225 \ 0 \ 0]^T \text{ mm}$$

(5) 各单元应力的计算

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{q} = \frac{E}{l} [-1 \ 1] \mathbf{T} \cdot \mathbf{q} \\ &= \frac{29.5 \times 10^4}{400} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2712 \\ 0 \end{bmatrix} = 200 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



其中 T 为坐标转换矩阵；同理，可求出其它单元的应力。

$$\sigma^{(2)} = -218.8 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma^{(3)} = 52.08 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma^{(4)} = 41.67 \text{ N/mm}^2 \quad (3-73)$$

(6) 支反力的计算

将节点位移的结果式(3-72)代入整体刚度方程(3-69)中，可求出

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{y2} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{bmatrix} &= \frac{29.5 \times 10^4 \times 100}{6000} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15.0 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20.0 & 0 & -20.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15.0 & 0 & 15.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2712 \\ 0 \\ 0.0565 \\ -0.2225 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15833.0 \\ 3126.0 \\ 21879.0 \\ -4167.0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} \end{aligned} \quad (3-74)$$

【MATLAB 算例】3.2.5(2) 四杆桁架结构的有限元分析(Bar2D2Node)

参见【典型例题】3.2.5(1)所给算例，如图 3-8 所示的结构，基于 MATLAB 平台求解该结构的节点位移、单元应力以及支反力。

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

对该结构进行自然离散，节点编号和单元编号如图 3-8 所示，有关节点和单元的信息见表 3-1 至表 3-3。

(2) 计算各单元的刚度矩阵(基于国际标准单位)

建立一个工作目录，将所编制的用于平面桁架单元分析的四个 MATLAB 函数放置于该工作目录中，分别以各自函数的名称给出文件名，即：Bar2D2Node_Stiffness, Bar2D2Node_Assembly, Bar2D2Node_Stress, Bar2D2Node_Forces。然后启动 MATLAB，将工作目录设置到已建立的目录中，在 MATLAB 环境中，输入弹性模量 E、横截面积 A，各点坐标 x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4，角度 alpha 1, alpha 2 和 alpha 3，然后分别针对单元 1, 2, 3 和 4，调用四次 Bar2D2Node_Stiffness，就可以得到单元的刚度矩阵。相关的计算流程如下。

```
>>E=2.95e11;
>>A=0.0001;
>>x1=0;
>>y1=0;
>>x2=0.4;
>>y2=0;
>>x3=0.4;
>>y3=0.3;
```



```
>>x4=0;
>>y4=0.3;
>>alpha1=0;
>>alpha2=90;
>>alpha3=atan(0.75)*180/pi;
>>k1=Bar2D2Node_Stiffness (E,A,x1,y1,x2,y2,alpha1)
k1 = 73750000          0    -73750000          0
          0          0            0          0
    -73750000          0    73750000          0
          0          0            0          0
>>k2=Bar2D2Node_Stiffness (E,A,x2,y2,x3,y3,alpha2)
k2 = 1.0e+007 *
    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000    9.8333   -0.0000  -9.8333
   -0.0000   -0.0000    0.0000   0.0000
   -0.0000   -9.8333    0.0000    9.8333
>>k3=Bar2D2Node_Stiffness (E,A,x1,y1,x3,y3,alpha3)
k3 = 1.0e+007 *
    3.7760    2.8320   -3.7760   -2.8320
    2.8320    2.1240   -2.8320   -2.1240
   -3.7760   -2.8320    3.7760    2.8320
   -2.8320   -2.1240    2.8320    2.1240
>>k4=Bar2D2Node_Stiffness (E,A,x4,y4,x3,y3,alpha1)
k4 = 73750000          0    -73750000          0
          0          0            0          0
    -73750000          0    73750000          0
          0          0            0          0
```

(3) 建立整体刚度方程

由于该结构共有 4 个节点，因此，设置结构总的刚度矩阵为 $KK(8 \times 8)$ ，先对 KK 清零，然后四次调用函数 `Bar2D2Node_Assembly` 进行刚度矩阵的组装。相关的计算流程如下。

```
>>KK=zeros(8,8);
>>KK=Bar2D2Node_Assembly (KK,k1,1,2);
>>KK=Bar2D2Node_Assembly (KK,k2,2,3);
>>KK=Bar2D2Node_Assembly (KK,k3,1,3);
>>KK=Bar2D2Node_Assembly (KK,k4,4,3)
KK= 1.0e+008 *
    1.1151    0.2832   -0.7375          0   -0.3776   -0.2832          0          0
    0.2832    0.2124          0          0   -0.2832   -0.2124          0          0
   -0.7375          0    0.7375    0.0000   -0.0000   -0.0000          0          0
          0          0    0.0000    0.9833   -0.0000   -0.9833          0          0
   -0.3776   -0.2832   -0.0000   -0.0000    1.1151    0.2832   -0.7375          0
   -0.2832   -0.2124   -0.0000   -0.9833    0.2832    1.1957          0          0
          0          0          0          0   -0.7375          0    0.7375          0
          0          0          0          0          0          0          0          0
```

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

由图 3-8 可以看出，节点 1 的位移将为零，即 $u_1 = 0$ ， $v_1 = 0$ ，节点 2 的位移 $v_2 = 0$ ，节点 4 的 $u_4 = 0$ ， $v_4 = 0$ 。节点载荷 $F_3 = 10N$ 。采用高斯消去法进行求解，注意：MATLAB 中的反



斜线符号“\”就是采用高斯消去法。

该结构的节点位移为: $\mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T$

而节点力为: $\mathbf{P} = \mathbf{R} + \mathbf{F} = [R_{x1} \ R_{y1} \ 2 \times 10^4 \ R_{y2} \ 0 \ -2.5 \times 10^4 \ R_{x4} \ R_{y4}]^T$

其中 (R_{x1}, R_{y1}) 为节点 1 处沿 x 和 y 方向的支反力, R_{y2} 为节点 2 处 y 方向的支反力, (R_{x4}, R_{y4})

为节点 4 处沿 x 和 y 方向的支反力。相关的计算流程如下。

```
>>k=KK([3,5,6],[3,5,6])
```

```
k =1.0e+008 *
```

0.7375	-0.0000	-0.0000
-0.0000	1.1151	0.2832
-0.0000	0.2832	1.1957

```
>>p=[20000;0;-25000];
```

```
>>u=k\p
```

```
u = 1.0e-003 *
```

0.2712	0.0565	-0.2225
--------	--------	---------

[这里将列排成了一行, 以节省篇幅]

由此可以看出, 所求得的结果 $u_2 = 0.2712\text{mm}$, $u_3 = 0.0565\text{mm}$, $v_3 = -0.2225\text{mm}$, 则所有节点位移为

$$\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0.2712 \ 0 \ 0.0565 \ -0.2225 \ 0 \ 0]^T \text{ mm} \quad (3-75)$$

与前面通过数学推导得到的结果相同, 见式(3-72)。

(5) 支反力的计算

在得到整个结构的节点位移后, 由原整体刚度方程就可以计算出对应的支反力。将整体的位移列阵 \mathbf{q} (采用国际标准单位) 代回原整体刚度方程, 计算出所有的节点力 \mathbf{P} , 按上面的对应关系就可以找到对应的支反力。相关的计算流程如下。

```
>>q=[0 0 0.0002712 0 0.0000565 -0.0002225 0 0]'
```

```
q = 1.0e-003 *
```

0	0	0.2712	0	0.0565	-0.2225	0	0
---	---	--------	---	--------	---------	---	---

[这里将列排成了一行, 以节省篇幅]

```
>>P=KK*q
```

```
P = 1.0e+004 *
```

-1.5833	0.3126	2.0001	2.1879	-0.0001	-2.5005	-0.4167	0
---------	--------	--------	--------	---------	---------	---------	---

[这里将列排成了行]

按对应关系, 可以得到对应的支反力为

$$\begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{y2} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15833.0 \\ 3126.0 \\ 21879.0 \\ -4167.0 \\ 0 \end{bmatrix} N \quad (3-76)$$



(6) 各单元的应力计算

先从整体位移列阵 \mathbf{q} 中提取出单元的位移列阵，然后，调用计算单元应力的函数 Bar2D2Node_Stress，就可以得到各个单元的应力分量。当然也可以调用上面的 Bar2D2Node_Forces(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha,u) 函数来计算单元的集中力，然后除以面积求得单元应力。相关的计算流程如下。

```
>>u1=[q(1);q(2);q(3);q(4)]
u1 = 1.0e-003 *
      0      0     0.2712      0
[这里将列排成了一行，以节省篇幅]
>> stress1=Bar2D2Node_Stress(E,x1,y1,x2,y2,alpha1,u1)
stress1 =2.0001e+008

>>u2=[q(3);q(4);q(5);q(6)]
u2 = 1.0e-003 *
      0.2712      0    0.0565   -0.2225
[这里将列排成了一行，以节省篇幅]

>> stress2=Bar2D2Node_Stress(E,x2,y2,x3,y3,alpha2,u2)
stress2 = -2.1879e+008

>>u3=[q(1);q(2);q(5);q(6)]
u3 = 1.0e-003 *
      0      0    0.0565   -0.2225
[这里将列排成了一行，以节省篇幅]
>> stress3=Bar2D2Node_Stress(E,x1,y1,x3,y3,alpha3,u3)
stress3 = -52097000

>>u4=[q(7);q(8);q(5);q(6)]
u4 = 1.0e-003 *
      0      0    0.0565   -0.2225
[这里将列排成了一行，以节省篇幅]
>> stress4=Bar2D2Node_Stress(E,x4,y4,x3,y3,alpha1,u4)
stress4 = 41668750
```

可以看出：计算得到的单元 1 的应力为 $\sigma = 2.0001 \times 10^8 \text{ Pa}$ ；单元 2 的应力为 $\sigma = -2.1879 \times 10^8 \text{ Pa}$ ，单元 3 的应力为 $\sigma = -5.2097 \times 10^7 \text{ Pa}$ ，单元 4 的应力为 $\sigma = 4.167 \times 10^7 \text{ Pa}$ 。与前面通过数学推导得到的结果相同，见式(3-73)。

ANSYS 是大型的通用有限元分析系统，从本节开始也针对本书的典型例题提供完整的 ANSYS 操作流程，包括基于图形界面的操作以及基于命令流的操作。这样将使得以基于详细推导的典型例题与基于 MATLAB 的编程实现、以及与基于 ANSYS 的分析都完整地结合起来，可以更好的理解和使用有限元方法这一工具^[20]。有关 ANSYS 软件的基本操作可参见附录 B。

【ANSYS 算例】3.2.5(3) 四杆桁架结构的有限元分析

下面针对【典型例题】3.2.5(1)的问题，在 ANSYS 平台上，完成相应的力学分析。

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

以下为基于 ANSYS 图形界面(GUI, graphic user interface)的菜单操作流程；注意：符号“→”



表示针对菜单中选项的鼠标点击操作。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 →ANSYS → ANSYS Interactive →Working directory (设置工作目录) →Initial jobname(设置工作文件名): planetruss→Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Element Type→Add/Edit/Delete... →Add... →Link: 2D spar 1 →OK (返回到 Element Types 窗口) →Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Material Props →Material Models→Structural →Linear →Elastic → Isotropic: EX:2.95e11 (弹性模量), PRXY: 0 (泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 定义实常数以确定单元的截面积

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Real Constants... →Add/Edit/Delete →Add →Type 1→ OK→Real Constant Set No:1 (第 1 号实常数), AREA:1e-4 (单元的截面积) →OK→Close

(6) 生成单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Modeling →Create→Nodes→ In Active CS→Node number1 → X:0,Y:0,Z:0 → Apply→Node number2 → X:0.4,Y:0,Z:0 → Apply→Node number3 → X:0.4,Y:0.3,Z:0→ Apply→Node number4 → X:0,Y:0.3,Z:0→OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements→Elem Attributes (接受默认值) →User numbered→Thru nodes→ OK→选择 node 1 和 node2→ Apply→选择 node 2 和 node3→ Apply→选择 node 1 和 node3→ Apply→选择 node 4 和 node3→ Apply→OK

(7) 模型施加约束和外载

添加位移的约束, 分别将 1 节点 X 和 Y 方向、2 节点 Y 方向、4 节点的 X 和 Y 方向位移约束。

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply →Structural → Displacement → On Nodes →用鼠标选择节点 1→ Apply → Lab2 DOFs: UX, UY , VALUE: 0 →Apply→用鼠标选择节点 2→ Apply → Lab2 DOFs: UY , VALUE: 0 →Apply→用鼠标选择节点 4→ Apply → Lab2 DOFs: UX,UY , VALUE: 0 →OK

加载集中力

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply →Structural → Force/moment→ On Nodes →用鼠标选择结构节点 2→ Apply →FX, VALUE: 20000 → Apply→用鼠标选择结构节点 3→ Apply →FY, VALUE: -25000 →OK

(9) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS →OK → Should The Solve Command be Executed? Y→ Close (Solution is done!) → 关闭文字窗口

(10) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results →Deformed Shape ... → Def + Undeformed →OK (返回到 Plot Results) → Contour Plot → Nodal Solu ... → DOF solution→Displacement vector sum (可以看到位移云图)



ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Nodal solution → DOF solution → Displacement vector sum (弹出的文本文件显示各个节点的位移)

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Reaction Solu → ALL items → OK (弹出的文本文件显示各个节点反力)

(11) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit ... → Save Everything → OK

2 完整的命令流

以下为命令流语句；注意：以“!”打头的文字为注释内容，其后的文字和符号不起运行作用。关于命令流的调用方式见附录 B。

```
%%%%%%%%% [典型例题]3.2.5(1) %%%% begin %%%%%%
/PREP7          !进入前处理
/PLOPTS,DATE,0   !设置不显示日期和时间
!=====设置单元、材料，生成节点及单元
ET,1,LINK1      !选择单元类型
UIMP,1,EX,,2.95e11, !给出材料的弹性模量
R,1,1e-4,        !给出实常数(横截面积)
N,1,0,0,0,        !生成 1 号节点,坐标(0,0,0)
N,2,0.4,0,0,      !生成 2 号节点,坐标(0.4,0,0)
N,3,0.4,0.3,0,    !生成 3 号节点,坐标(0.4,0.3,0)
N,4,0,0.3,0,      !生成 4 号节点,坐标(0,0.3,0)
E,1,2            !生成 1 号单元(连接 1 号节点和 2 号节点)
E,2,3            !生成 2 号单元(连接 2 号节点和 3 号节点)
E,1,3            !生成 3 号单元(连接 1 号节点和 3 号节点)
E,4,3            !生成 4 号单元(连接 4 号节点和 3 号节点)
FINISH          !前处理结束
!=====在求解模块中，施加位移约束、外力，进行求解
/SOLU            !进入求解状态(在该状态可以施加约束及外力)
D,1,ALL          !将 1 号节点的位移全部固定
D,2,UY,          !将 2 号节点的 y 方向位移固定
D,4,ALL          !将 4 号节点的位移全部固定
F,2,FX,20000,    !在 2 号节点处施加 x 方向的力(20000)
F,3,FY,-25000,   !在 3 号节点处施加 y 方向的力(-25000)
SOLVE           !进行求解
FINISH          !结束求解状态
!=====进入一般的后处理模块
/POST1           !进入后处理
PLDISP,1         !显示变形状况
FINISH          !结束后处理
%%%%%%%%% [典型例题]3.2.5(1) %%%% end %%%%%%
```

3.3 梁件有限元分析的标准化表征与算例



3.3.1 梁件分析的基本力学原理

设有一个受分布载荷作用的简支梁如图 3-9 所示, 由于简支梁的宽度较小, 外载沿宽度方向无变化, 该问题可以认为是一个 xoy 平面内的问题, 可以有以下两种方法来建立基本方程。

方法之一是采用一般的建模及分析方法, 即从对象取出 $dxdy$ 微元体进行分析, 建立最一般的方程, 见第 4.2 节中关于 2D 问题的基本变量及方程, 这样, 所用的变量较多, 方程复杂, 未考虑到这一具体问题的特征。

方法之二是针对细长梁用“特征建模”(characterized modeling) 的简化方法来推导三大方程, 其基本思想是采用工程宏观特征量来进行问题的描述; 图 3-9 所示问题的特征为: ①梁为细长梁(long beam), 因此可只用 x 坐标来刻画, ②主要变形为垂直于 x 的挠度, 可只用挠度(deflection)来描述位移场; 针对这两个特征, 可以对梁沿高度方向的变形做出以下设定: (1)变形后的直线假定; (2)小变形假定。这两个假定对于细长梁的实际情况也是符合的。

【基本变量】3.3.1(1) 平面梁的基本变量

位移: $v(x, \hat{y} = 0)$ (中性层的挠度)

应力: σ (采用 σ_x , 其它应力分量很小, 不考虑), 该变量对应于梁截面上的弯矩 M

应变: ε (采用 ε_x , 沿高度方向满足直线假定)

下面取具有全高度梁的 dx “微段” 来推导三大方程(见图 3-10)。

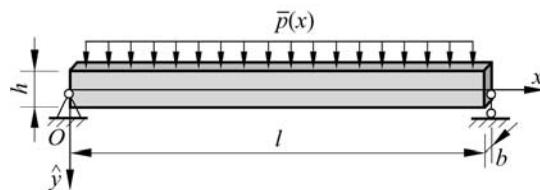


图 3-9 受分布载荷作用的简支梁

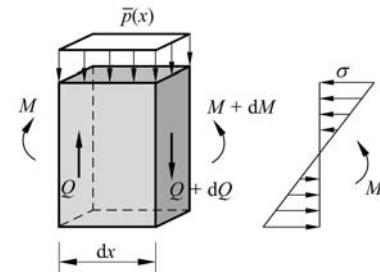


图 3-10 梁问题的 dx “微段” 及受力平衡

【基本方程】3.3.1(2) 平面梁的基本方程

该问题的三大类基本方程和边界条件如下。

(1) 平衡方程

针对图 3-10 中的“微段”, 应该有三个平衡方程, 首先由 x 方向的合力等效 $\sum X = 0$, 有

$$M = \int_A \sigma_x \cdot \hat{y} \cdot dA \quad (3-77)$$

其中 \hat{y} 是以梁的中性层(neutral layer)为起点的 y 坐标, M 为截面上的弯矩。

然后由 y 方向的合力平衡 $\sum Y = 0$, 有 $dQ + \bar{p}(x) \cdot dx = 0$, 即

$$\frac{dQ}{dx} + \bar{p} = 0 \quad (3-78)$$



其中 Q 为截面上的剪力，再由弯矩平衡 $\sum M_0 = 0$ ，有 $dM - Qdx = 0$ ，即

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (3-79)$$

(2) 几何方程

梁问题 dx “微段”的弯曲变形分析见图 3-11。

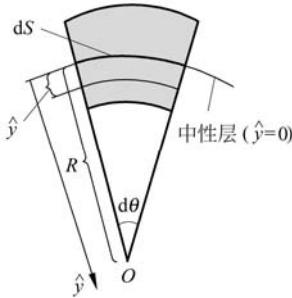


图 3-11 梁的纯弯变形图

考虑梁的纯弯变形(pure bending deformation)，如图 3-11 所示。由变形后的几何关系，可得到位于 \hat{y} 处纤维层的应变(即相对伸长量)为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(\hat{y}) &= \frac{(R - \hat{y}) \cdot d\theta - R \cdot d\theta}{R \cdot d\theta} \\ &= -\frac{\hat{y}}{R}\end{aligned} \quad (3-80)$$

其中 R 为曲率半径，而曲率 κ (curvature)与曲率半径 R 的关系为

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{R \cdot d\theta} = \frac{1}{R} \quad (3-81)$$

对于梁的挠度函数 $v(x, \hat{y} = 0)$ ，它的曲率 k 的计算公式为

$$\kappa = \pm \frac{v''(x)}{(1 + v'(x)^2)^{3/2}} \approx \pm v''(x) \quad (3-82)$$

这里就图 3-11 所示的情形，应取为

$$\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3-83)$$

将式(3-81)和式(3-83)代入式(3-80)中，有

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, \hat{y}) &= \\ &= -\hat{y} \frac{d^2 v}{dx^2}\end{aligned} \quad (3-84)$$

(3) 物理方程

利用虎克定律



$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3-85)$$

并对以上方程进行整理，有描述平面梁弯曲问题的基本方程

$$-EI \frac{d^4 v}{dx^4} + \bar{p}(x) = 0 \quad (\text{y 方向的平衡}) \quad (3-86)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A \sigma_x \hat{y} dA \\ &= \int_A -\hat{y}^2 E v'' dA \quad (\text{x 方向的平衡}) \end{aligned} \quad (3-87)$$

$$= -EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\sigma_x(x) = -E \hat{y} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{物理方程}) \quad (3-88)$$

$$\varepsilon_x(x) = -\hat{y} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{几何方程}) \quad (3-89)$$

方程(3-87)中 $I = \int_A \hat{y}^2 dA$ 为梁截面的惯性矩(moment of inertia)，可以看出：将原始基本变量定为

中性层的挠度 $v(x, \hat{y} = 0)$ ，而其它力学参量都可以基于它来表达。

(4) 边界条件

图 3-11 所示简支梁的边界为梁的两端，由于在建立平衡方程时已考虑了分布外载 $\bar{p}(x)$ (见方程(3-86))，因此不能再作为力的边界条件。

两端的位移边界：

$$\text{BC}(u): \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad (3-90)$$

两端的力(弯矩)边界：

$$\text{BC}(p): \quad M|_{x=0} = 0, \quad M|_{x=l} = 0 \quad (3-91)$$

由式(3-87)，可将弯矩以挠度的二阶导数来表示，即

$$\text{BC}(p): \quad v''|_{x=0} = 0, \quad v''|_{x=l} = 0 \quad (3-92)$$

【求解原理】3.3.1(3) 简支梁的微分方程解

若用基于 $dxdy$ 微体所建立的原始方程(即原平面应力问题中的三大类方程)进行直接求解，不仅过于繁琐，而且不易求解，若用基于以上“特征建模”简化方法所得到的基本方程进行直接求解则比较简单，对如图 3-9 所示的均匀分布外载的情况，其方程为：



$$-EI \frac{d^4 v}{dx^4} + \bar{p}_0 = 0 \quad (3-93)$$

$$\text{BC}(u): \quad v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \quad (3-94)$$

$$\text{BC}(p): \quad v''|_{x=0} = v''|_{x=l} = 0 \quad (3-95)$$

这是一个常微分方程，其解的形式为

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{\bar{p}_0}{24} x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \right) \quad (3-96)$$

其中 $c_0 \dots c_3$ 为待定系数，可由四个边界条件求出，最后有结果

$$v(x) = \frac{\bar{p}_0}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x) \quad (3-97)$$

则位于中点处的挠度为 $v(x = \frac{1}{2}l) = 0.013020833 \frac{\bar{p}_0 l^4}{EI}$ (3-98)

计算平面梁弯曲问题有关能量方面的物理量如下。

应变能

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_x \epsilon_x d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (-E \hat{y} \frac{d^2 v}{dx^2})(-\hat{y} \frac{d^2 v}{dx^2}) dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_l EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (3-99)$$

外力功

$$W = \int_l \bar{p}(x) \cdot v(x) dx \quad (3-100)$$

势能

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_l EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_l \bar{p}(x) \cdot v(x) dx \quad (3-101)$$

【求解原理】3.3.1(4) 简支梁的虚功原理求解

同样以如图 3-9 所示的简支梁为例，假设有一个只满足位移边界条件 BC(u)的位移场 $\hat{v}(x)$ 为

$$\hat{v}(x) = c_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3-102)$$



其中 c_1 为待定系数。则它的微小变化，即虚位移场为

$$\delta\hat{v}(x) = \delta c_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3-103)$$

δc_1 为微小变化量，可以验证，式(3-102)满足位移边界条件 $BC(u)$ ，将满足位移边界条件 $BC(u)$ 的试函数叫做许可位移(admissible displacement)。

该简支梁的虚应变能为

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{\Omega} \sigma_x \delta \varepsilon_x d\Omega \\ &= \int_0^l \int_A E \cdot \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA \cdot dx\end{aligned} \quad (3-104)$$

其中 A 为梁的横截面，对于梁的弯曲问题，由式(3-84)，有几何方程

$$\varepsilon_x = -\hat{y} \cdot \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \quad (3-105)$$

将其代入式(3-104)中，则有

$$\delta U = \int_0^l E \left(\int_A \hat{y}^2 dA \right) \cdot \left(\frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{d^2 \delta \hat{v}}{dx^2} \right) \cdot dx \quad (3-106)$$

将式(3-102)和式(3-103)代入上式，有

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^l EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot c_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \delta c_1 \cdot dx \\ &= \frac{EI l}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot c_1 \cdot \delta c_1\end{aligned} \quad (3-107)$$

其中 $I = \int_A \hat{y}^2 dA$ 为截面惯性矩。

该简支梁的外力虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_0^l \bar{p}_0 \delta \hat{v} dx \\ &= \bar{p}_0 \cdot \delta c_1 \cdot \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2l\bar{p}_0}{\pi} \cdot \delta c_1\end{aligned} \quad (3-108)$$

由虚功原理(3-12)，即 $\delta U = \delta W$ ，则

$$\frac{2l\bar{p}_0}{\pi} \cdot \delta c_1 = \frac{EI l}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot c_1 \cdot \delta c_1 \quad (3-109)$$

消去 δc_1 后，有



$$c_1 = \frac{4l^4}{EI\pi^5} \bar{P}_0 \quad (3-110)$$

那么，由式(3-102)所表示的位移模式中，真实的一组为满足虚功原理时的位移，即

$$\hat{v}(x) = \frac{4l^4}{EI\pi^5} \bar{P}_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3-111)$$

【求解原理】3.3.1(5) 简支梁的最小势能原理求解

仍以如图 3-9 所示的平面简支梁的弯曲问题为例，为提高计算精度，可以选取多项函数的组合，这里取满足位移边界条件 $BC(u)$ 的许可位移场 $\hat{v}(x)$ 为

$$\hat{v}(x) = c_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + c_2 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (3-112)$$

其中 c_1 和 c_2 为待定系数；计算应变能 U 为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \cdot \left(\frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[c_1^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) + c_2^2 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{3\pi x}{l} \right) + 2c_1 c_2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} \right] dx \\ &= \frac{EI}{2} \left[c_1^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} + c_2^2 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} \right] \end{aligned} \quad (3-113)$$

相应的外力功 W 为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^l \bar{P}_0 \cdot \left(c_1 \sin \frac{\pi x}{l} + c_2 \sin \frac{3\pi x}{l} \right) dx \\ &= \bar{P}_0 \left[c_1 \frac{2l}{\pi} + c_2 \frac{2l}{3\pi} \right] \end{aligned} \quad (3-114)$$

则总势能为 $\Pi = U - W$ ，为使 Π 取极小值，则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} &= \frac{EI}{2} \left[2c_1 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} \right] - \bar{P}_0 \frac{2l}{\pi} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} &= \frac{EI}{2} \left[2c_2 \left(\frac{3\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} \right] - \bar{P}_0 \frac{2l}{3\pi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-115)$$



解出 c_1 和 c_2 后，有 $\hat{v}(x)$ 的具体表达

$$\hat{v}(x) = \frac{4\bar{P}_0 l^4}{\pi^5 EI} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4\bar{P}_0 l^4}{243\pi^5 EI} \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (3-116)$$

可以看出，该方法得到的第一项与前面虚功原理求解出来的结果相同，与精确解(3-97)相比，该结果比前面由虚功原理得到的结果更为精确，这时因为选取两项函数作为试函数，这也是提高计算精度的重要途径。以上求解过程所用的试函数(3-112)为许可基底函数的线性组合，因此，上述求解方法也是瑞利-里兹方法。

以上的【求解原理】3.3.1(4)以及【求解原理】3.3.1(5)都是基于试函数的能量方法(也称为泛函极值方法)，基本要点是不需求解原微分方程，但需要假设一个满足位移边界条件 $BC(u)$ 的许可位移场。因此，如何寻找或构建满足所需求的许可位移场是一个关键，并且，还期望这种构建许可位移场的方法还应具有标准化和规范性。下面的重点将讨论通过基于“单元”的位移函数的构建就可以满足这些要求。

3.3.2 局部坐标系中的平面梁单元

【单元构造】3.3.2(1) 平面纯弯梁单元的描述

图 3-12 所示为一局部坐标系中的纯弯梁单元(beam element)，其长度为 l ，弹性模量为 E ，横截面的惯性矩为 I_z 。

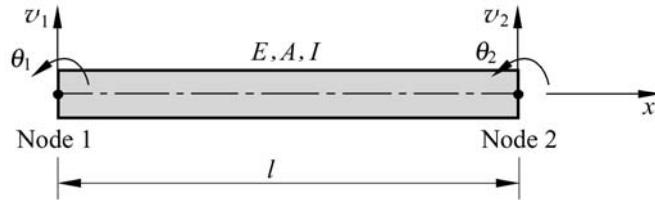


图 3-12 局部坐标系中的梁单元

(1) 单元的几何及节点描述

设有两个端节点 (Node 1 和 Node 2)，节点位移列阵 \mathbf{q}^e 为

$$\mathbf{q}^e = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (3-117)$$

这表明该单元的节点位移有 4 个自由度(DOF)。节点力列阵 \mathbf{P}^e 为

$$\mathbf{P}^e = [P_{v1} \quad M_1 \quad P_{v2} \quad M_2]^T \quad (3-118)$$

其中 $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ 分别为各节点的挠度(deflection)和转角(slope)，若该单元承受有分布外载，可以将其等效到节点上，即也可以表示为如式(3-118)所示的节点力；和前面推导杆单元时的情形



类似, 利用函数插值、几何方程、物理方程以及势能计算公式, 可以将单元的所有力学参量用节点位移列阵 \mathbf{q}^e 及相关的插值函数来表示。

(2) 单元位移场的表达

由于有 4 个位移节点条件, 可假设纯弯梁单元的位移场挠度为具有四个待定系数的函数模式, 即

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (3-119)$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3 为待定系数。由该单元的节点位移条件

$$\left. \begin{array}{l} v(x=0)=v_1, \quad v'(x=0)=\theta_1 \\ v(x=l)=v_2, \quad v'(x=l)=\theta_2 \end{array} \right\} \quad (3-120)$$

可求出式(3-119)中的 4 个待定系数, 即

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = v_1 \\ a_1 = \theta_1 \\ a_2 = \frac{1}{l^2}(-3v_1 - 2\theta_1 l + 3v_2 - \theta_2 l) \\ a_3 = \frac{1}{l^3}(2v_1 + \theta_1 l - 2v_2 + \theta_2 l) \end{array} \right\} \quad (3-121)$$

将式(3-121)代入式(3-119)中, 重写位移函数, 有

$$\begin{aligned} v(x) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + l(\xi^3 - \xi^2)\theta_2 \\ &= \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (3-122)$$

其中 $\xi = \frac{x}{l}$, $\mathbf{N}(\xi)$ 叫做单元的形状函数矩阵, 即

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix} \quad (3-123)$$

(3) 单元应变场的表达

由纯弯梁的几何方程, 有梁的应变表达式

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, \hat{y}) &= -\hat{y} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \\ &= -\hat{y} \left[\frac{1}{l^2} (12\xi - 6) \quad \frac{1}{l} (6\xi - 4) \quad -\frac{1}{l^2} (12\xi - 6) \quad \frac{1}{l} (6\xi - 2) \right] \cdot \mathbf{q}^e \\ &= \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (3-124)$$

其中 \hat{y} 是以中性层为起点的 y 方向的坐标, $\mathbf{B}(\xi)$ 叫做单元的几何矩阵, 即



$$\mathbf{B}(\xi) = -\hat{\mathbf{y}} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (3-125)$$

其中

$$B_1 = \frac{1}{l^2}(12\xi - 6), \quad B_2 = \frac{1}{l}(6\xi - 4), \quad B_3 = -\frac{1}{l^2}(12\xi - 6), \quad B_4 = \frac{1}{l}(6\xi - 2)$$

(4) 单元应力场的表达

由梁的物理方程

$$\sigma(x, \hat{y}) = E \cdot \varepsilon(x, \hat{y}) = E \cdot \mathbf{B}(x, \hat{y}) \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{S}(x, \hat{y}) \cdot \mathbf{q}^e \quad (3-126)$$

其中 E 为弹性模量, $\mathbf{S}(x)$ 叫做单元的应力矩阵。

(5) 单元势能 Π^e 的表达

该单元的势能为

$$\Pi^e = U^e - W^e \quad (3-127)$$

其中应变能

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma(x, \hat{y}) \cdot \varepsilon(x, \hat{y}) \cdot dA \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \left[\int_0^l \int_A \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \mathbf{B} \cdot dA \cdot dx \right] \mathbf{q}^e \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (3-128)$$

其中 \mathbf{K}^e 为刚度矩阵, 具体地有

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^l \int_A (-\hat{y}) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} (-\hat{y}) \cdot dA \cdot dx \\ &= \int_A (-\hat{y})^2 dA \cdot E \cdot \int_0^l \begin{bmatrix} B_1^2 & B_1 B_2 & B_1 B_3 & B_1 B_4 \\ B_1 B_2 & B_2^2 & B_2 B_3 & B_2 B_4 \\ B_1 B_3 & B_2 B_3 & B_3^2 & B_3 B_4 \\ B_1 B_4 & B_2 B_4 & B_3 B_4 & B_4^2 \end{bmatrix} \cdot dx \end{aligned}$$



$$= \frac{E \cdot I_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3-129)$$

I_z 为惯性矩, 式(3-127)中的外力功为

$$W^e = P_{v1} \cdot v_1 + M_1 \theta_1 + P_{v2} \cdot v_2 + M_2 \theta_2 = \mathbf{P}^{eT} \cdot \mathbf{q}^e \quad (3-130)$$

其中

$$\mathbf{P}^e = [P_{v1} \quad M_1 \quad P_{v2} \quad M_2]^T \quad (3-131)$$

(6) 单元的刚度方程

同样, 由最小势能原理, 将式(3-127)中的 Π^e 对 \mathbf{q}^e 取极小值, 有单元刚度方程

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (3-132)$$

其中刚度矩阵 \mathbf{K}^e 和力矩阵 \mathbf{P}^e 分别见式(3-129)和式(3-130)。

【单元构造】3.3.2(2) 一般平面梁单元的描述

为推导局部坐标系中的一般平面梁单元, 在图 3-13 所示的纯弯梁的基础上叠加进轴向位移(由于为线弹性问题, 满足叠加原理), 这时的节点位移自由度(DOF)共有 6 个, 见图 3-13。



图 3-13 平面梁单元

图 3-13 所示平面梁单元的节点位移列阵 \mathbf{q}^e 和节点力列阵 \mathbf{P}^e 为

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (3-133)$$

$$\mathbf{P}^e = [P_{u1} \quad P_{v1} \quad M_1 \quad P_{u2} \quad P_{v2} \quad M_2]^T \quad (3-134)$$

相应的刚度方程为

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (3-135)$$

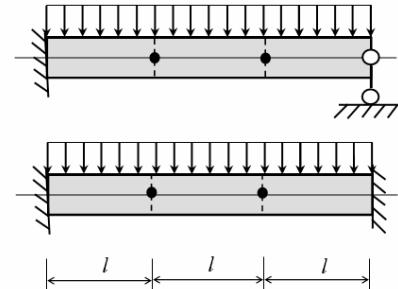
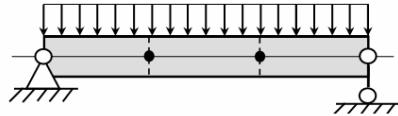
对应于图 3-13 的节点位移和式(3-133)式中节点位移列阵的排列次序, 将杆单元刚度矩阵与纯弯梁单元刚度矩阵进行组合, 可得到式(3-135)中的单元刚度矩阵, 即



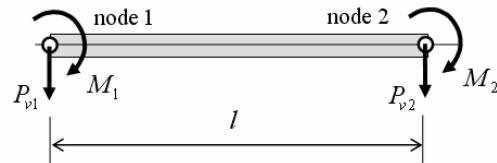
$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3-136)$$

【典型例题】3.3.2(3) 受均布载荷平面梁单元的等效节点载荷

工程中的构件，存在许多象图 3-14 (a) 所示的受均布载荷的情况，若就受均布载荷部分的梁构件建立单元，则需要就所建立的梁单元给出相应的节点等效载荷，就该问题进行讨论。



(a) 几种受均布载荷作用的梁构件



(b) 节点等效载荷

图 3-14 受均布载荷作用的梁构件以及节点等效载荷

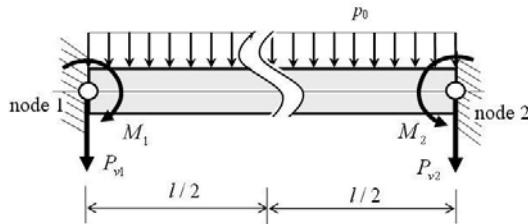


图 3-15 受均布载荷作用的直接静力等效的节点载荷(每个节点分一半)

解答：对于图 3-14(a)所示的几种受均布载荷的情况，若需要采用几个或一个梁单元，均可以建立如图 3-14(b)所示的单元，其节点位移列阵为 $\mathbf{q}^e = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$ ，节点力列阵为

$\mathbf{P}^e = [P_{v1} \quad M_1 \quad P_{v2} \quad M_2]^T$ ，单元的挠度位移场 $v(x)$ 为 $v(x) = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q}^e$ ，其中



$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix} \quad (3-137)$$

而 $\xi = \frac{x}{l}$ ；计算该单元的外力功为 W 为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^l \bar{\mathbf{p}}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx \\ &= \left[\int_0^l (-p_0) \cdot \mathbf{N}(x) \cdot dx \right] \cdot \mathbf{q}^e \\ &= \mathbf{P}^{eT} \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (3-138)$$

将式(3-137)的形状函数矩阵代入上式，可计算出节点力 \mathbf{P}^e 为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{eT} &= \int_0^l (-p_0) \cdot \mathbf{N}(x) \cdot dx \\ &= p_0 \int_0^l [(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \quad l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (3\xi^2 - 2\xi^3) \quad l(\xi^3 - \xi^2)] dx \\ &= [-p_0 l/2 \quad -p_0 l^2/12 \quad -p_0 l/2 \quad p_0 l^2/12] \end{aligned} \quad (3-139)$$

讨论 1：若凭一种直觉，直接按照静力等效的方式来进行计算，即，每个节点各分一半进行静力等效，见图 3-15，则计算出的节点等效力为

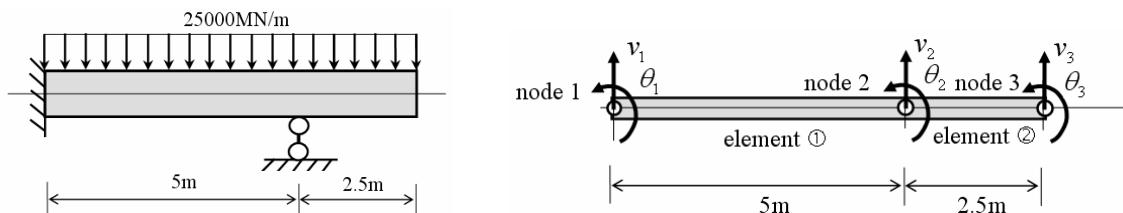
$$P_{v1} = -\frac{p_0 l}{2}, \quad M_1 = -\frac{p_0 l^2}{8}, \quad P_{v2} = -\frac{p_0 l^2}{2}, \quad M_2 = -\frac{p_0 l^2}{8} \quad (3-140)$$

将该结果与式(3-139)进行比较，显然这样计算出的 M_1 和 M_2 都是错误的。

讨论 2：该等效节点载荷是按照外力功 (3-138) 式进行计算的，是通用的均布载荷的节点等效载荷，与节点的实际约束状态没有关系。也就是说，图 3-14 (a) 中的几种情况的节点等效载荷都用式 (3-139)。

【典型例题】3.3.2(4) 悬臂-简支平面连续梁的有限元分析

有一个连续平面悬臂简支梁，截面面积 $A = 6650 \text{ mm}^2$ ，高度 $h = 317 \text{ mm}$ ，惯性矩 $I = 118.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ，如图 3-16 所示，梁的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ ，承受的均布荷载 $p_0 = 25000 \text{ N/m}$ 。试确定节点 3 的竖向位移、节点 2 和节点 3 的转角。同时计算节点 1 和节点 2 的反力。





(a) 连续平面悬臂简支梁

(b) 有限元分析模型

图 3-16 连续平面悬臂简支梁以及有限元分析模型

解答: 由于该梁在其中的一个位置有一个支撑, 因此采用两个梁单元。则该结构的整体节点位移列阵

$$\mathbf{q} = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2 \ v_3 \ \theta_3]^T \quad (3-141)$$

载荷列阵为

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{R} = [F_{v1} + R_{v1} \ F_{\theta1} + R_{\theta1} \ F_{v2} + R_{v2} \ F_{\theta2} \ F_{v3} \ F_{\theta3}]^T \quad (3-142)$$

其中 \mathbf{F} 为施加的外载, 见式(3-148), \mathbf{R} 为支反力。

由前面给出的梁的单元刚度矩阵的计算公式(3-129), 代入单元 (1) 的属性值, 有

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{200 \times 10^9 \times 1.186 \times 10^{-4}}{5^3} \times \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 6 \times (5) & -12 & 6 \times (5) \\ 6 \times (5) & 4 \times (5)^2 & -6 \times (5) & 2 \times (5)^2 \\ -12 & -6 \times (5) & 12 & -6 \times (5) \\ 6 \times (5) & 2 \times (5)^2 & -6 \times (5) & 4 \times (5)^2 \end{bmatrix} \quad (3-143)$$

计算单元 (2) 的刚度矩阵, 有

$$\mathbf{k}^{(2)} = \frac{200 \times 10^9 \times 1.186 \times 10^{-4}}{(2.5)^3} \times \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 12 & 6 \times (2.5) & -12 & 6 \times (2.5) \\ 6 \times (2.5) & 4 \times (2.5)^2 & -6 \times (2.5) & 2 \times (2.5)^2 \\ -12 & -6 \times (2.5) & 12 & -6 \times (2.5) \\ 6 \times (2.5) & 2 \times (2.5)^2 & -6 \times (2.5) & 4 \times (2.5)^2 \end{bmatrix} \quad (3-144)$$

计算总刚度矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)}$, 有

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 2277120 & 5692800 & -2277120 & 5692800 & 0 & 0 \\ 5692800 & 18976000 & -5692800 & 9488000 & 0 & 0 \\ -2277120 & -5692800 & 20494080 & 17078400 & -18216960 & 22771200 \\ 5692800 & 9488000 & 17078400 & 56928000 & 22771200 & 18216960 \\ 0 & 0 & -18216960 & -22771200 & 18216960 & -22771200 \\ 0 & 0 & 22771200 & 18976000 & -22771200 & 37952000 \end{bmatrix} \quad (3-145)$$

参考【典型例题】3.3.2(3), 对单元的分布载荷进行处理, 分别计算单元 (1) 和单元 (2) 的载荷列阵, 即



$$\mathbf{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25 \times 10^3 \times 5}{2} \\ \frac{25 \times 10^3 \times 5^2}{12} \\ \frac{25 \times 10^3 \times 5}{2} \\ \frac{25 \times 10^3 \times 5^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62500 \\ -52083 \\ -62500 \\ 52083 \end{bmatrix} \quad (3-146)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25 \times 10^3 \times 2.5}{2} \\ \frac{25 \times 10^3 \times 2.5^2}{12} \\ \frac{25 \times 10^3 \times 2.5}{2} \\ \frac{25 \times 10^3 \times 2.5^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31250 \\ -13021 \\ -31250 \\ 13021 \end{bmatrix} \quad (3-147)$$

合并上述两个荷载列阵，形成总载荷列阵，有

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} = \begin{bmatrix} -62500 \\ -52083 \\ -62200-31250 \\ -52083-13021 \\ -31250 \\ 13021 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62500 \\ -52083 \\ -93750 \\ 39062 \\ -31250 \\ 13021 \end{bmatrix} \quad (3-148)$$

这样可以得到该结构的整体刚度方程为

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (3-149)$$

考虑位移边界条件：在节点 1 处有 $v_1 = \theta_1 = 0$ ，在节点 2 处有 $v_2 = 0$ ，将上述刚度方程化为

$$\begin{bmatrix} 56958000 & -22771200 & 18976000 \\ -22771200 & 18216960 & -22771200 \\ 18976000 & -22771200 & 37952000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39062 \\ -31250 \\ 13021 \end{bmatrix} \quad (3-150)$$

求解上述方程组，则可求得各节点的位移值

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2 \ v_3 \ \theta_3]^T \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ -0.0013723(\text{rad}) \ -0.0085772(\text{m}) \ -0.004117(\text{rad})]^T \end{aligned} \quad (3-151)$$

然后，根据下述关系求解得各节点反力和弯矩

$$\mathbf{R} = \mathbf{Kq} - \mathbf{F} \quad (3-152)$$



其中 \mathbf{R} 为反力矩阵。将相关值代入式(3-152), 有

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= [R_{v1} \ R_{\theta 1} \ R_{v2} \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ &= [54687.8(\text{N}) \ 39062.6(\text{Nm}) \ 132814.8(\text{N}) \ 0 \ 0 \ 0]^T\end{aligned}\quad (3-153)$$

3.3.3 平面梁单元的坐标变换

图 3-17 所示为一整体坐标系中的平面梁单元, 它有两个端节点, 梁的长度为 l , 弹性模量为 E , 横截面的面积为 A , 惯性矩为 I_z 。

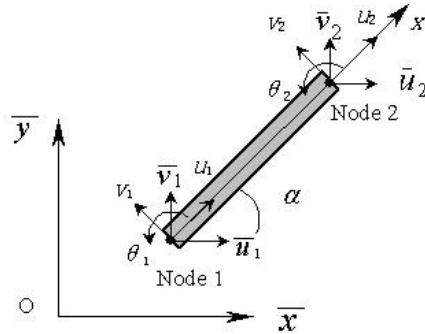


图 3-17 平面问题中梁单元的坐标变换

设局部坐标系下(Oxy)的节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \quad (3-154)$$

整体坐标系中(Oxy)的节点位移列阵为

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \theta_1 & \bar{u}_2 & \bar{v}_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \quad (3-155)$$

注意: 转角 θ_1 和 θ_2 在两个坐标系中是相同的。按照两个坐标系中的位移向量相等效的原则, 可推导出以下变换关系。

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \bar{u}_1 \cos \alpha + \bar{v}_1 \sin \alpha \\ v_1 = -\bar{u}_1 \sin \alpha + \bar{v}_1 \cos \alpha \\ u_2 = \bar{u}_2 \cos \alpha + \bar{v}_2 \sin \alpha \\ v_2 = -\bar{u}_2 \sin \alpha + \bar{v}_2 \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (3-156)$$

写成矩阵形式有

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e \cdot \bar{\mathbf{q}}^e \quad (3-157)$$



其中 \mathbf{T}^e 为单元的坐标变换矩阵, 即

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-158)$$

与平面杆单元的坐标变换类似, 梁单元在整体坐标系中的刚度方程为

$$\bar{\mathbf{K}}^e \cdot \bar{\mathbf{q}}^e = \bar{\mathbf{P}}^e \quad (3-159)$$

其中

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \mathbf{T}^{eT} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{T}^e \quad (3-160)$$

$$\bar{\mathbf{P}}^e = \mathbf{T}^{eT} \cdot \mathbf{P}^e \quad (3-161)$$

3.3.4 空间梁单元及坐标变换

1. 空间梁单元

空间梁单元除承受轴力和弯矩外, 还可能承受扭矩的作用, 而且弯矩可能同时在两个坐标面内存在。图 3-18 所示为一局部坐标系中的空间梁单元, 其长度为 l , 弹性模量为 E , 横截面的惯性矩为 I_z (绕平行于 z 轴的中性轴) 和 I_y (绕平行于 y 轴的中性轴), 横截面的扭转惯性矩为 J 。

对应于图 3-18 中梁单元, 设有两个端节点, 每一个节点的位移自由度有 6 个, 单元共有 12 个自由度; 其局部坐标系中的节点位移列阵 \mathbf{q}^e 和节点力列阵 \mathbf{P}^e 如下。

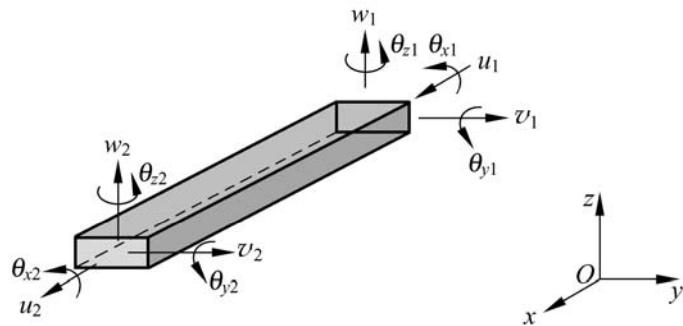


图 3-18 局部坐标系中的空间梁单元

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \end{bmatrix}^T \quad (3-162)$$



$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_{u1} & P_{v1} & P_{w1} & M_{x1} & M_{y1} & M_{z1} & P_{u2} & P_{v2} & P_{w2} & M_{x2} & M_{y2} & M_{z2} \end{bmatrix}^T \quad (3-163)$$

下面，基于前面杆单元和平面梁单元的刚度矩阵分别写出对应于图 3-18 中各对应节点位移的刚度矩阵，然后进行组合以形成完整的刚度矩阵。

(1) 对应于图 3-18 中的节点位移 (u_1, u_2)

这是轴向位移，由式(3-160)，有对应于杆单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_{(2 \times 2)}^{u_1 u_2} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-164)$$

(2) 对应于图 3-18 中的节点位移 (θ_{x1}, θ_{x2})

这是杆受扭转时的情形，如果将扭转角类似于拉伸杆的轴向位移，则它的分析结果与拉伸杆类似(见材料力学中的扭转问题)，所推导出的刚度矩阵和(3-164)式相似，即

$$\mathbf{K}_{(2 \times 2)}^{\theta_{x1} \theta_{x2}} = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-165)$$

其中 J 为横截面的扭转惯性矩， G 为剪切模量。

(3) 对应于图 3-18 中 Oxy 平面内的节点位移 ($v_1, \theta_{z1}, v_2, \theta_{z2}$)

这是梁在 Oxy 平面内的纯弯曲情形，有对应的刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{(4 \times 4)}^{(Oxy)} = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3-166)$$

其中 I_z 为绕并行于 z 轴的中性轴的惯性矩。

(4) 对应于图 3-18 中 Oxz 平面内的节点位移 ($w_1, \theta_{y1}, w_2, \theta_{y2}$)

这是梁在 Oxz 平面内的纯弯曲情形，可得到与(3-166)式类似的刚度矩阵，但所对应的节点位移是不同的。

(6) 将各分刚度矩阵进行组合以形成完整的单元刚度矩阵

对应于式(3-162)中的节点位移的次序，分别将上面各个部分的刚度阵的元素进行组合，可形成局部坐标系中空间梁单元的完整刚度矩阵，即



$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

(3-167)

2. 空间梁单元的坐标变换

空间梁单元坐标变换的原理和方法与平面梁单元的坐标变换相同，只要分别写出两个坐标系中的位移向量的等效关系则可得到坐标变换矩阵，即

局部坐标系中空间梁单元的节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}]^T \quad (3-168)$$

整体坐标系中的节点位移列阵为

$$\bar{\mathbf{q}}^e = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_{x1} \quad \bar{\theta}_{y1} \quad \bar{\theta}_{z1} \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\theta}_{x2} \quad \bar{\theta}_{y2} \quad \bar{\theta}_{z2}]^T \quad (3-169)$$

对应于式(3-168)中的各组位移分量，可分别推导相应的转换关系，具体地，对于端节点 1，有

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \cos(x, \bar{x}) + \bar{v}_1 \cos(x, \bar{y}) + \bar{w}_1 \cos(x, \bar{z}) \\ \bar{u}_1 \cos(y, \bar{x}) + \bar{v}_1 \cos(y, \bar{y}) + \bar{w}_1 \cos(y, \bar{z}) \\ \bar{u}_1 \cos(z, \bar{x}) + \bar{v}_1 \cos(z, \bar{y}) + \bar{w}_1 \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix} = {}_{(3 \times 3)} \lambda \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \end{bmatrix} \quad (3-170)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{x1} \cos(x, \bar{x}) + \bar{\theta}_{y1} \cos(x, \bar{y}) + \bar{\theta}_{z1} \cos(x, \bar{z}) \\ \bar{\theta}_{x1} \cos(y, \bar{x}) + \bar{\theta}_{y1} \cos(y, \bar{y}) + \bar{\theta}_{z1} \cos(y, \bar{z}) \\ \bar{\theta}_{x1} \cos(z, \bar{x}) + \bar{\theta}_{y1} \cos(z, \bar{y}) + \bar{\theta}_{z1} \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix} = {}_{(3 \times 3)} \lambda \cdot \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{\theta}_{z1} \end{bmatrix} \quad (3-171)$$



同样, 对于端节点 2, 有以下转换关系

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \underset{(3 \times 3)}{\lambda} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} \quad (3-172)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \underset{(3 \times 3)}{\lambda} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{x2} \\ \bar{\theta}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{bmatrix} \quad (3-173)$$

以上的 λ 为节点坐标变换矩阵, 即

$$\underset{(3 \times 3)}{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(y, \bar{z}) \\ \cos(z, \bar{x}) & \cos(z, \bar{y}) & \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix} \quad (3-174)$$

其中 $\cos(x, \bar{x}), \dots, \cos(z, \bar{z})$ 分别表示局部坐标轴 (x, y, z) 对整体坐标轴 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的方向余弦。

将式(3-170)~式(3-173)写在一起, 有

$$\underset{(12 \times 1)}{\mathbf{q}^e} = \underset{(12 \times 12)}{\mathbf{T}^e} \cdot \underset{(12 \times 1)}{\bar{\mathbf{q}}^e} \quad (3-175)$$

其中 \mathbf{T}^e 为坐标变换矩阵

$$\underset{(12 \times 12)}{\mathbf{T}^e} = \begin{bmatrix} \underset{(3 \times 3)}{\lambda} & \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{0} \\ \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{\lambda} & \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{0} \\ \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{\lambda} & \underset{(3 \times 3)}{0} \\ \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{0} & \underset{(3 \times 3)}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (3-176)$$

有了坐标变换矩阵, 就很容易写出整体坐标系下的刚度矩阵和刚度方程。

3.3.5 梁单元的常用等效节点载荷

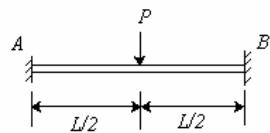
表 3-4 列出了常用的梁单元在承受非节点载荷下的节点载荷等效值, 该等效值是根据外力功的计算公式得到的, 因此, 它与梁单元的边界条件没有关系(表 3-4 中的图示虽为固支, 这些节点载荷等效值也可以用在其它边界情况)。

表 3-4 梁单元的常见等效节点荷载

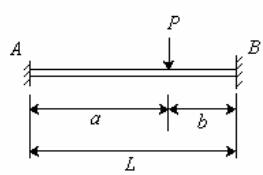
支承与外载情况	所等效节点荷载
---------	---------



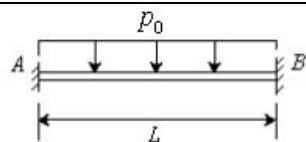
$$\begin{aligned} W^e &= \int_z \bar{p}(x) \cdot v(x) dx \\ \text{等效原理} \quad &= \left[\int_z \bar{p}(x) \cdot N(x) dx \right] \\ &= [R_A \quad M_A \quad R_B \quad M_B] q^e \end{aligned}$$



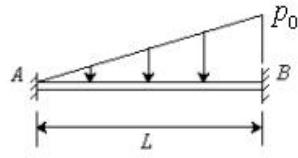
$$\begin{aligned} R_A &= -P/2 \\ R_B &= -P/2 \\ M_A &= -PL/8 \\ M_B &= PL/8 \end{aligned}$$



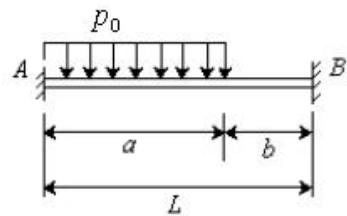
$$\begin{aligned} R_A &= -\left(\frac{Pb^2}{L^3}\right)(3a+b) \\ R_B &= -\left(\frac{Pa^2}{L^3}\right)(a+3b) \\ M_A &= -Pab^2/L^2 \\ M_B &= Pa^2b/L^2 \end{aligned}$$



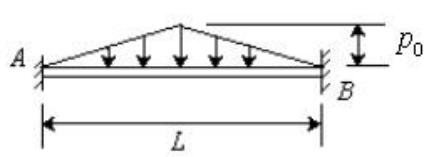
$$\begin{aligned} R_A &= -p_0L/2 \\ R_B &= -p_0L/2 \\ M_A &= -p_0L^2/12 \\ M_B &= p_0L^2/12 \end{aligned}$$



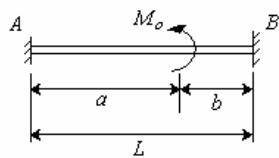
$$\begin{aligned} R_A &= -3p_0L/20 \\ R_B &= -7p_0L/20 \\ M_A &= -p_0L^2/30 \\ M_B &= p_0L^2/20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_A &= -\left(\frac{p_0a}{2L^3}\right)(a^3 - 2a^2L + 2L^3) \\ R_B &= -\left(\frac{p_0a^3}{2L^3}\right)(2L - a) \\ M_A &= -\left(\frac{p_0a^2}{12L^2}\right)(3a^2 - 8aL + 6L^2) \\ M_B &= \left(\frac{p_0a^3}{12L^2}\right)(4L - 3a) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_A &= -p_0L/4 \\ R_B &= -p_0L/4 \\ M_A &= -5p_0L^2/96 \\ M_B &= 5p_0L^2/96 \end{aligned}$$



$$R_A = -6M_0ab/L^3$$

$$R_B = 6M_0ab/L^3$$

$$M_A = -(M_0b/L^2)(3a-L)$$

$$M_B = -(M_0a/L^2)(3b-L)$$

3.3.6 梁单元分析的 MATLAB 程序

【MATLAB 程序】3.3.6(1) 1D 梁单元的有限元分析程序(Beam1D2Node)

编写如图 3-12 所示局部坐标系中的梁单元的刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。

解答：编写的 2 节点梁单元的五个 MATLAB 函数如下。

Beam1D2Node_Stiffness(E, I, L)

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，横截面的惯性矩 I，梁单元的长度 L，输出单元刚度矩阵 k(4×4)。

Beam1D2Node_Assembly(KK,k,i,j)

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i、j、m，输出整体刚度矩阵 KK。

Beam1D2Node_Strain(x,L,y)

该函数计算单元的几何矩阵，输入所测点距梁单元左节点的水平距离 x，输入所测点以中性层为起点的 y 方向的坐标，梁单元的长度 L，输出单元几何形状函数矩阵 B(1×4)。

Beam1D2Node_Stress(E,B,u)

该函数计算单元内某点的应力，输入弹性模量 E，几何矩阵 B，节点位移列阵 u，输出单元的应力 stress

Beam1D2Node_Deflection(x,L,u)

该函数计算单元内某点的挠度，输入所测点距梁单元左节点的水平距离 x，梁单元的长度 L，节点位移列阵 u，输出该点的挠度 v。

基于第 3.3.2 节中的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%% Beam1D2Node %%%%
function k = Beam1D2Node_Stiffness(E,I,L)
```

%该函数计算单元的刚度矩阵

%输入弹性模量 E，横截面的惯性矩 I，梁单元的长度 L

%输出单元刚度矩阵 k(4×4)

%-----

```
k = E*I/(L*L*L)*[12 6*L -12 6*L ; 6*L 4*L*L -6*L 2*L*L ;
-12 -6*L 12 -6*L ; 6*L 2*L*L -6*L 4*L*L];
```

```
%%%%% Beam1D2Node_Assembly %%%%
function z = Beam1D2Node_Assembly(KK,k,i,j)
```

%该函数进行单元刚度矩阵的组装

%输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i、j、m

%输出整体刚度矩阵 KK

%-----



```
DOF(1)=2*i-1;
DOF(2)=2*i;
DOF(3)=2*j-1;
DOF(4)=2*j;
for n1=1:4
    for n2=1:4
        KK(DOF(n1),DOF(n2))= KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%%%%%%%%%%%%%%%
function B= Beam1D2Node_Strain(x,L,y)
%该函数计算单元的几何矩阵
%输入所测点距梁单元左节点的水平距离 x
%输入所测点以中性层为起点的 y 方向的坐标, 梁单元的长度 L
%输出单元几何形状函数矩阵 B(1×4)
%-----
e=x/L;
B1=(12*e-6)/(L*L);
B2=(6*e-4)/L;
B3=-(12*e-6)/(L*L);
B4=(6*e-2)/L;
B=-y*[B1,B2,B3,B4];
%%%%%%%%%%%%%%
function stress= Beam1D2Node_Stress(E,B,u)
%该函数计算单元内某点的应力
%输入弹性模量 E, 几何矩阵 B, 节点位移列阵 u
%输出单元的应力 stress
%-----
stress = E*B*u;
%%%%%%%%%%%%%
function v=Beam1D2Node_Deflection(x,L,u)
%该函数计算单元内某点的挠度
%输入所测点距梁单元左节点的水平距离 x
%输入梁单元的长度 L, 节点位移列阵 u
%输出该点的挠度 v
%-----
e=x/L;
N1=1-3*e*e+2*e*e*e;
N2=L(e-2*e*e+e*e*e);
N3=3*e*e-2*e*e*e;
N4=L(e*e*e-e*e);
N=[N1,N2,N3,N4];
v=N*u;
%%%%%%%%% Beam1D2Node %%% end %%% %%% %%% %%% %%% %%%
```

【MATLAB 程序】3.3.6(2) 2D 梁单元的有限元分析程序(Beam2D2Node)

编写如图 3-13 所示平面梁单元的单元刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。

解答：

编写的平面 2 节点梁单元的三个 MATLAB 函数如下。

```
Beam2D2Node_Stiffness(E,I,A,L)
```



以上函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，横截面积 A，惯性矩 I，长度 L，输出单元刚度矩阵 k(6×6)。

Beam2D2Node_Assemble(KK,k,i,j)

以上函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i、j，输出整体刚度矩阵 KK。

Beam2D2Node_Forces(k,u)

以上函数计算单元的应力，输入单元刚度矩阵 k，节点位移 u，输出单元节点力 forces。

基于第 3.3.3 节的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%%%%%
function k = Beam2D2Node_Stiffness(E,I,A,L)
%以上函数计算单元的刚度矩阵
%输入弹性模量 E，横截面积 A，惯性矩 I，长度 L
%输出单元刚度矩阵 k(6×6)
%-----
k=[E*A/L,0,0,-E*A/L,0,0;0,12*E*I/(L^3),6*E*I/(L^2),0,-12*E*I/(L^3),6*E*I/(L^2);0,6*E*I/(L^2),4*E*I/L,0,-6*E*I/(L^2),2*E*I/L;-E*A/L,0,0,E*A/L,0,0;-12*E*I/(L^3),-6*E*I/(L^2),0,12*E*I/(L^3),-6*E*I/(L^2);0,6*E*I/(L^2),2*E*I/L,0,-6*E*I/(L^2),4*E*I/L]
%%%%%%%
function y = Beam2D2Node_Assemble(KK,k,i,j)
%以上函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i、j
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF(1)=3*i-2;
DOF(2)=3*i-1;
DOF(3)=3*i;
DOF(4)=3*j-2;
DOF(5)=3*j-1;
DOF(6)=3*j;
for n1=1:6
    for n2=1:6
        KK(DOF(n1),DOF(n2))=KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
y = KK;
%%%%%%%
function forces = Beam2D2Node_Forces(k,u)
%以上函数计算单元的应力，输入单元刚度矩阵 k，节点位移 u,
%输出单元节点力 forces
%-----
forces = k * u;
%%%%%%%
Beam2D2Node %% end %%%%%%
```

3.3.7 梁结构分析的算例

**【典型例题】3.3.7(1) 三梁平面框架结构的有限元分析**

如图 3-19 所示的框架结构，其顶端受均布力作用，用有限元方法分析该结构的位移。结构中各个截面的参数都为： $E = 3.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ， $I = 6.5 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ ， $A = 6.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。

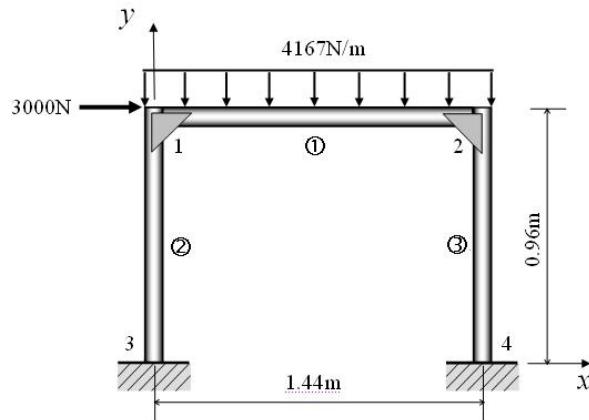
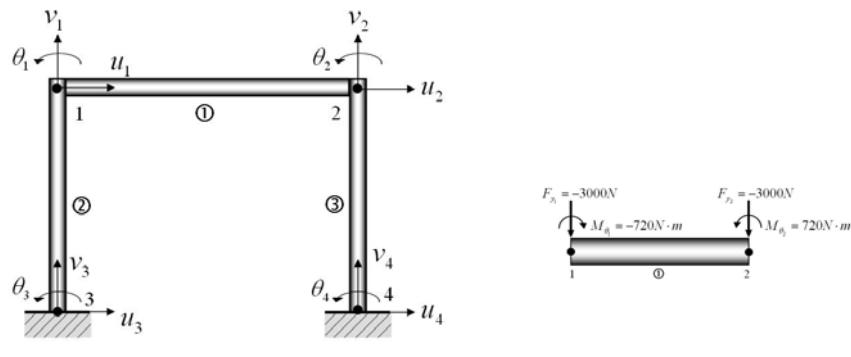


图 3-19 框架结构受一均布力作用



(a) 节点位移及单元编号

(b) 等效在节点上的外力

图 3-20 单元划分、节点位移及节点上的外载

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

将该结构离散为三个单元，节点位移及单元编号如图 3-20(a)所示，有关节点和单元的信息见表 3-5。

表 3-5 单元编号与节点编号

单元编号	节点编号	
①	1	2
②	3	1
③	4	2



节点位移列阵为

$$\mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ u_3 \ v_3 \ \theta_3 \ u_4 \ v_4 \ \theta_4]^T \quad (3-177)$$

节点外载列阵为（均布外载的等效计算见表 4.1）

$$\mathbf{F} = [F_{x1} \ F_{y1} \ M_{\theta 1} \ 0 \ F_{y2} \ M_{\theta 2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3-178)$$

支反力列阵为

$$\mathbf{R} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_{x3} \ R_{y3} \ R_{\theta 3} \ R_{x4} \ R_{y4} \ R_{\theta 4}]^T \quad (3-179)$$

其中： R_{x3} 、 R_{y3} 、 $R_{\theta 3}$ 为节点 3 的沿 x 方向支反力、沿 y 方向支反力和支反力矩， R_{x4} 、 R_{y4} 、 $R_{\theta 4}$ 为节点 4 的沿 x 方向支反力、沿 y 方向支反力和支反力矩，均为待求值。

总的节点载荷列阵为

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \\ = [3000 \ -3000 \ -720 \ 0 \ -3000 \ 720 \ R_{x3} \ R_{y3} \ R_{\theta 3} \ R_{x4} \ R_{y4} \ R_{\theta 4}]^T \quad (3-180)$$

(2) 各个单元的描述

单元①的局部坐标与整体坐标是一致的，则可以由式(3-136)直接得到

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^6 \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.784 & 0.564 & 0 & -0.784 & 0.564 \\ 0 & 0.564 & 0.542 & 0 & -0.564 & 0.271 \\ -141.7 & 0 & 0 & 141.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.784 & -0.564 & 0 & 0.784 & -0.564 \\ 0 & 0.564 & 0.271 & 0 & -0.564 & 0.542 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \quad (3-181)$$

单元②和单元③的情况相同，只是节点编号不同而已，其局部坐标系下的单元刚度矩阵为

$$\hat{\mathbf{K}}^{(2)} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.645 & 1.270 & 0 & -2.645 & 1.270 \\ 0 & 1.270 & 0.8125 & 0 & -1.270 & 0.4062 \\ -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2.645 & -1.270 & 0 & 2.645 & -1.270 \\ 0 & 1.270 & 0.4062 & 0 & -1.270 & 0.8125 \end{bmatrix} \quad (3-182)$$

这两个单元轴线的方向余弦为 $\cos(x, \bar{x}) = 0$ ， $\cos(x, \bar{y}) = 1$ ，有坐标转换矩阵



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-183)$$

则可以计算出整体坐标下的单元刚度矩阵（单元②和单元③）

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{T}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}^{(2)} \cdot \mathbf{T} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 2.645 & 0 & -1.27 & -2.645 & 0 & -1.27 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -1.27 & 0 & 0.8125 & 1.27 & 0 & 0.4062 \\ -2.645 & 0 & 1.27 & 2.645 & 0 & 1.27 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -1.27 & 0 & 0.4062 & 1.27 & 0 & 0.8125 \end{bmatrix} \quad (3-184)$$

注意这两个单元所对应的节点位移列阵分别为

$$\text{对于单元②: } [u_3 \ v_3 \ \theta_3 \ u_1 \ v_1 \ \theta_1]^T \quad (3-185)$$

$$\text{对于单元③: } [u_4 \ v_4 \ \theta_4 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T \quad (3-186)$$

(3) 建立整体刚度方程

组装整体刚度矩阵并形成整体刚度方程

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (3-187)$$

其中刚度矩阵的组装关系为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)} \quad (3-188)$$

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

该问题的位移边界条件为

$$u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0 \quad (3-189)$$

处理该边界条件后的刚度方程为

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 144.3 & 0 & 1.270 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 213.3 & 0.564 & 0 & -0.784 & 0.564 \\ 1.270 & 0.564 & 1.3545 & 0 & -0.564 & 0.271 \\ -141.7 & 0 & 0 & 144.3 & 0 & 1.270 \\ 0 & -0.784 & -0.564 & 0 & 213.3 & -0.564 \\ 0 & 0.564 & 0.271 & 1.270 & -0.564 & 1.3545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ -3000 \\ -720 \\ 0 \\ -3000 \\ 720 \end{bmatrix} \quad (3-190)$$



求解后的结果为

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 0.92\text{mm} \\ v_1 = -0.0104\text{mm} \\ \theta_1 = -0.00139\text{rad} \\ u_2 = 0.901\text{mm} \\ v_2 = -0.018\text{mm} \\ \theta_2 = 3.88 \times 10^{-5}\text{rad} \end{array} \right\} \quad (3-191)$$

【MATLAB 算例】3.3.7(2) 三梁平面框架结构的有限元分析(Beam2D2Node)

参见【典型例题】3.3.7(1)所给算例，对于如图 3-19 所示的结构，基于 MATLAB 平台求解该结构的节点位移以及支反力。

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

将该结构离散为三个单元，节点位移及单元编号如图 3-20 所示，有关节点和单元的信息见表 3-5。

(2) 各个单元的描述

首先在 MATLAB 环境下，输入弹性模量 E、横截面积 A、惯性矩 I、长度 L，然后针对单元 1 和单元 2 单元 3，分别二次调用函数 Beam2D2Node_Stiffness，就可以得到单元的刚度矩阵 k1(6×6)和 k2(6×6)，且单元 2 和单元 3 的刚度矩阵相同。

```
>> E=3E11;
>> I=6.5E-7;
>> A=6.8E-4;
>> L1=1.44;
>> L2=0.96;
>> k1=Beam2D2Node_Stiffness(E,I,A,L1);
>> k2=Beam2D2Node_Stiffness(E,I,A,L2);
```

(3) 建立整体刚度方程

将单元 2 和单元 3 的刚度矩阵转换成整体坐标下的形式。由于该结构共有 4 个节点，则总共的自由度数为 12，因此，结构总的刚度矩阵为 KK(12×12)，对 KK 清零，然后两次调用函数 Beam2D2Node_Assemble 进行刚度矩阵的组装。

```
>> T=[0,1,0,0,0,0;-1,0,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0;0,0,0,0,1,0;0,0,0,-1,0,0;0,0,0,0,0,1];
>> k3=T*k2*T;
>> KK=zeros(12,12);
>> KK=Beam2D2Node_Assemble(KK,k1,1,2);
>> KK=Beam2D2Node_Assemble(KK,k3,3,1);
>> KK=Beam2D2Node_Assemble(KK,k3,4,2)
KK = 1.0e+008 *
    1.4431    0    0.0127   -1.4167     0      0   -0.0264     0    0.0127     0      0      0
        0    2.1328    0.0056     0   -0.0078   0.0056     0   -2.1250     0      0      0      0
    0.0127   0.0056   0.0135     0   -0.0056   0.0027   -0.0127     0    0.0041     0      0      0
   -1.4167    0      0    1.4431     0    0.0127     0      0      0   -0.0264     0    0.0127
```



0	-0.0078	-0.0056	0	2.1328	-0.0056	0	0	0	0	-2.1250	0
0	0.0056	0.0027	0.0127	-0.0056	0.0135	0	0	0	-0.0127	0	0.0041
-0.0264	0	-0.0127	0	0	0	0.0264	0	-0.0127	0	0	0
0	-2.1250	0	0	0	0	0	2.1250	0	0	0	0
0.0127	0	0.0041	0	0	0	-0.0127	0	0.0081	0	0	0
0	0	0	-0.0264	0	-0.0127	0	0	0	0.0264	0	-0.0127
0	0	0	0	-2.1250	0	0	0	0	0	2.1250	0
0	0	0	0.0127	0	0.0041	0	0	0	-0.0127	0	0.0081

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

该问题的位移边界条件为 $u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$ 。因此，将针对节点 1 和节点 2 的位移进行求解，节点 1 和节点 2 的位移将对应 KK 矩阵中的前 6 行和前 6 列，则需从 KK(12×12)中提出，置给 k，然后生成对应的载荷列阵 p，再采用高斯消去法进行求解，注意：MATLAB 中的反斜线符号 “\” 就是采用高斯消去法。

```
>> k=KK(1:6,1:6);
>> p=[3000;-3000;-720;0;-3000;720];
>> u=k\p
u = 0.0009      -0.0000     -0.0014      0.0009      -0.0000      -0.0000      [将列排成了行]
```

(5) 支反力的计算

在得到整个结构的节点位移后，由原整体刚度方程就可以计算出对应的支反力；先将上面得到的位移结果与位移边界条件的节点位移进行组合(注意位置关系)，可以得到整体的位移列阵 U(12×1)，再代回原整体刚度方程，计算出所有的节点力 P(12×1)，按式(3-180)的对应关系就可以找到对应的支反力。

```
>> U=[u;0;0;0;0;0]
U = 0.0009      -0.0000     -0.0014      0.0009      -0.0000      -0.0000      [将列排成了行]
      0       0           0           0           0           0      [将列排成了行]
>> P=KK*U
P = 1.0e+003 *
      3.0000     -3.0000    -0.7200     0.0000    -3.0000    0.7200      [将列排成了行]
     -0.6658     2.2012    0.6014    -2.3342    3.7988   1.1283      [将列排成了行]
```

【ANSYS 算例】3.3.7(3) 三梁平面框架结构的有限元分析

针对【典型例题】3.3.7(1)的问题，在 ANSYS 平台上，完成相应的力学分析。

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): beam3 → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → beam: 2D elastic 3



→OK (返回到 Element Types 窗口) →Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Material Props →Material Models →Structural →Linear →Elastic

→ Isotropic: EX:3e11 (弹性模量) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 定义实常数以确定平面问题的厚度

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Real Constants... →Add/Edit/Delete →Add →Type 1 Beam3 → OK

→ Real Constant Set No: 1 (第 1 号实常数), Cross-sectional area:6.8e-4 (梁的横截面积) →OK →Close

(6) 生成几何模型

生成节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor →Modeling →Create →Nodes → In Active CS →Node number 1 → X:0,Y:0.96,Z:0 →Apply →Node number 2 → X:1.44,Y:0.96,Z:0 →Apply →Node number 3 → X:0,Y:0,Z:0 →Apply →Node number 4 → X:1.44,Y:0,Z:0 →OK

生成单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create →Element → Auto Numbered → Thru Nodes → 选择节点 1、2(生成单元 1) → apply → 选择节点 1、3(生成单元 2) → apply → 选择节点 2、4(生成单元 3) → OK

(7) 模型施加约束和外载

左边加 X 方向的受力

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply →Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择节点 1 → apply →Direction of force: FX →VALUE: 3000 → OK →

上方施加 Y 方向的均布载荷

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply →Structural → Pressure →On Beams →选取单元 1(节点 1 和节点 2 之间) → apply →VALI: 4167 →VALJ: 4167 →OK

左、右下角节点加约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply →Structural → Displacement → On Nodes → 选取节点 3 和节点 4 → Apply → Lab:ALL DOF → OK

(8) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS →OK → Should The Solve Command be Executed? Y → Close (Solution is done!) → 关闭文字窗口

(9) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results →Deformed Shape ... → Def + Undeformed → OK (返回到 Plot Results)

(10) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit ... → Save Everything →OK

(11) 计算结果的验证

与 MATLAB 支反力计算结果一致。

2 完全的命令流



```

!%%%%%%%%%%%%% [典型例题]3_3_7(3) %%% begin %%%%%%
/PREP7           !进入前处理
ET,1,beam3      !选择单元类型
R,1,6.5e-7,6.8e-4 !给出实常数(横截面积、惯性矩)
MP,EX,1,3e11    !给出材料的弹性模量
N,1,0,0.96,0    !生成 4 个节点,坐标(0,0.96,0), 以下类似
N,2,1.44,0.96,0
N,3,0,0,0
N,4,1.44,0,0
E,1,2           !生成单元(连接 1 号节点和 2 号节点), 以下类似
E,1,3
E,2,4
D,3,ALL         !将 3 号节点的位移全部固定
D,4,ALL         !将 4 号节点的位移全部固定
F,1,FX,3000     !在 1 号节点处施加 x 方向的力(3000)
SFBEAM,1,1,PRESS,4167 !施加均布压力
FINISH          !结束前处理状态
/SOLU            !进入求解模块
SOLVE           !求解
FINISH          !结束求解状态
/POST1           !进入后处理
PLDISP,1        !显示变形形状
FINISH          !结束后处理
!%%%%%%%%%%%%% [典型例题]3_3_7(3) %%% end %%%%%%

```

3.4 应用：桥梁结构的 ANSYS 参数化分析

3.4.1 桥梁结构描述

桥梁是现代建筑中最重要的结构形式之一，它对一个区域的政治、经济、文化有着重要的影响，现代桥梁正向着长距离、大跨度方向发展；目前的大跨度桥梁主要有斜拉桥以及悬索桥两种形式；例如，法国于 1995 年建成的 Normandie 大桥就是大跨度斜拉桥，有 184 根拉索，主跨长度达到 864m，桥面高度为 51m，使用了 1 万 9 千吨钢材，7 万立方米的混凝土，见图 3-21。



图 3-21 现代斜拉桥的结构

现代桥梁设计的一个重要特点就是需要采用精确的有限元方法对桥梁的静力、振动、风载、地震、四季温差等状况进行分析，并提出优化方案，并且还要就桥梁施工过程中因结构变化的



各种受力状态进行细致的分析，从而确定出可行的施工方案，可以毫不夸张地说，有限元分析在现代结构的设计和分析中正发挥着不可替代的作用。

下面以一个简单桁架桥梁为例，以展示有限元分析的全过程；背景素材选自位于密执安的 "Old North Park Bridge" (1904-1988)，见图 3-22；该桁架桥由型钢组成，顶梁及侧梁，桥身弦杆，底梁分别采用三种不同型号的型钢，结构参数见表 3-6。桥长 $L=32m$, 桥高 $H=5.5m$ 。桥身由 8 段桁架组成，每段长 4m。该桥梁可以通行卡车，若这里仅考虑卡车位于桥梁中间位置，假设卡车的质量为 4000kg，若取一半的模型，可以将卡车对桥梁的作用力简化为 P_1 ， P_2 ， P_3 ，其中 $P_1=P_3=5000\text{ N}$, $P_2=10000\text{ N}$ ，见图 3-23。



图 3-22 位于密执安的"Old North Park Bridge" (1904-1988)

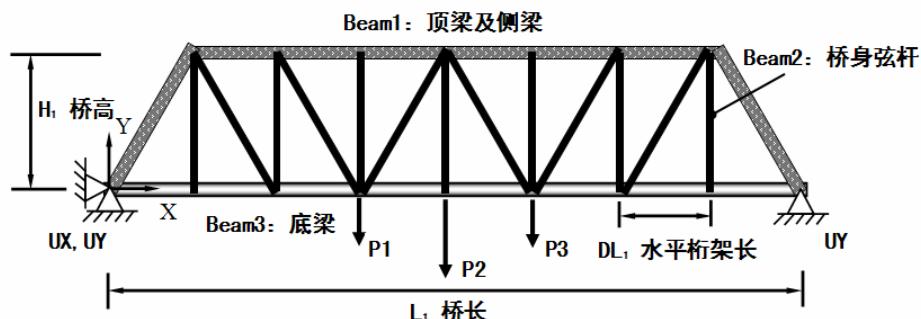


图 3-23 桥梁的简化平面模型(取桥梁的一半)

表 3-6 桥梁结构中各种构件的几何性能参数

构件	惯性矩	横截面积
顶梁及侧梁(beam1)	$3.83 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
桥身弦梁(beam2)	$1.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$1.185 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
底梁(beam3)	$8.47 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$3.031 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

下面分别给出该桥梁的三种分析方法：基于图形界面(GUI)的交互式操作、基于命令流方式以及基于参数化方式，这三种方式都是在 ANSYS 平台上完成的。

3.4.2 基于 ANSYS 的桁架桥梁结构分析



【ANSYS 算例】3.4.2(1) 基于图形界面(GUI)的桁架桥梁结构分析

解答：以下为基于 ANSYS 图形界面(GUI, Graphic User Interface)的菜单操作流程。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname (设置工作文件名) :TrussBridge → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Beam: 2d elastic 3 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(4) 定义实常数以确定梁单元的截面参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete → Add... → select Type 1 Beam 3 → OK → input Real Constants Set No.: 1, AREA: 2.19E-3, Izz: 3.83e-6 (1号实常数用于顶梁和侧梁) → Apply → input Real Constants Set No.: 2, AREA: 1.185E-3, Izz: 1.87E-6 (2号实常数用于弦杆) → Apply → input Real Constants Set No.: 3, AREA: 3.031E-3, Izz: 8.47E-6 (3号实常数用于底梁) → OK (back to Real Constants window) → Close (the Real Constants window)

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → input EX: 2.1e11, PRXY: 0.3 (定义泊松比及弹性模量) → OK → Density (定义材料密度) → input DENS: 7800, → OK → Close (关闭材料定义窗口)

(6) 构造桁架桥模型

生成桥体几何模型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → NPT Keypoint number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0, 0 → Apply → 同样输入其余 15 个特征点坐标 (最左端为起始点, 坐标分别为 (4,0), (8,0), (12,0), (16,0), (20,0), (24,0), (28,0), (32,0), (4,5.5), (8,5.5), (12,5.5), (16,5.5), (20,5.5), (24,5.5), (28,5.5)) → Lines → Lines → Straight Line → 依次分别连接特征点 → OK

网格划分

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → Mesh Attributes → Picked Lines → 选择桥顶梁及侧梁 → OK → select REAL: 1, TYPE: 1 → Apply → 选择桥体弦杆 → OK → select REAL: 2, TYPE: 1 → Apply → 选择桥底梁 → OK → select REAL: 3, TYPE: 1 → OK → ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → MeshTool → 位于 Size Controls 下的 Lines: Set → Element Size on Picked → Pick all → Apply → NDIV: 1 → OK → Mesh → Lines → Pick all → OK (划分网格)

(7) 模型加约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → 选取桥身左端节点 → OK → select Lab2: All DOF (施加全部约束) → Apply → 选取桥身右端节点 → OK → select Lab2: UY (施加 Y 方向约束) → OK

(8) 施加载荷

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Keypoints → 选取底梁上卡车两侧关键点 (x 坐标为 12 及 20) → OK → select Lab: FY, Value: -5000 →



Apply → 选取底梁上卡车中部关键点 (x 坐标为 16) → OK → select Lab: FY, Value: -10000 → OK

→ ANSYS Utility Menu: → Select → Everything

(9) 计算分析

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

(10) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Deformed shape → Def shape only → OK (返回到 Plot Results) → Contour Plot → Nodal Solu → DOF Solution, Y-Component of Displacement → OK (显示 Y 方向位移 UY) (见图 3-24(a))

定义线性单元 I 节点的轴力

ANSYS Main Menu → General Postproc → Element Table → Define Table → Add → Lab: [bar_I], By sequence num: [SMISC,1] → OK → Close

定义线性单元 J 节点的轴力

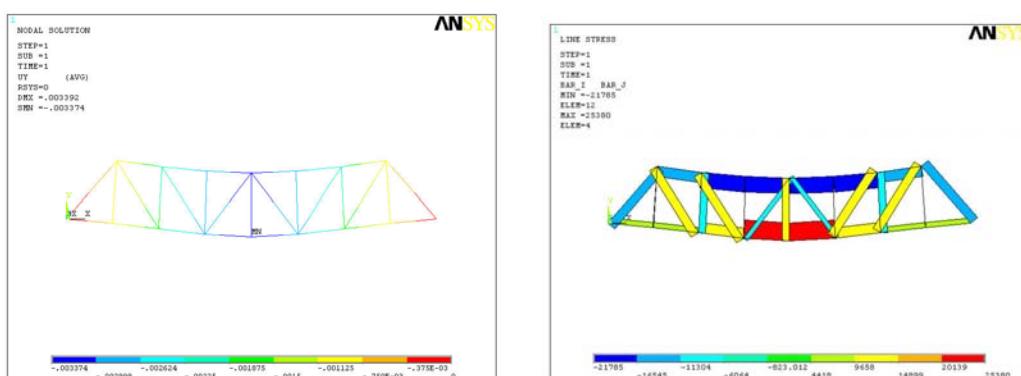
ANSYS Main Menu → General Postproc → Element Table → Define Table → Add → Lab: [bar_J], By sequence num: [SMISC,1] → OK → Close

画出线性单元的受力图(见图 3-24(b))

ANSYS Main Menu → General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Line Elel Res → LabI: [bar_I], LabJ: [bar_J], Fact: [1] → OK

(11) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK



(a) 桥梁中部最大挠度值为 0.003374m

(b) 桥梁中部轴力最大值为 25380N

图 3-24 桁架桥挠度 UY 以及单元轴力计算结果

【ANSYS 算例】3.4.2(2) 基于命令流方式的桁架桥梁结构分析

```
!%%%%%%%%% [ANSYS 算例]3_4_2(2) %%%%%% begin %%%%%%
```

-----注: 命令流中的符号\$, 可将多行命令流写成一行-----

```
/prep7
```

!进入前处理

```
/PLOPTS,DATE,0
```

!设置不显示日期和时间

!=====设置单元和材料

```
ET,1,BEAM3
```

!定义单元类型

```
R,1,2,1.9E-3,3.83e-6,,,,
```

!定义 1 号实常数用于顶梁侧梁

```
R,2,1.185E-3,1.87e-6,0,0,0,0,
```

!定义 2 号实常数用于弦杆



```
R,3,3.031E-3,8.47E-6,0,0,0,0, !定义 3 号实常数用于底梁
MP,EX,1,2.1E11           !定义材料弹性模量
MP,PRXY,1,0.30          !定义材料泊松比
MP,DENS,1,,7800          !定义材料密度
!----定义几何关键点
K,1,0,0,, $ K,2,4,0,, $ K,3,8,0,, $K,4,12,0,, $K,5,16,0,, $K,6,20,0,, $K,7,24,0,, $K,8,28,0,, $K,9,32,0,, $K,10,4,5.5,, $K,11,8,5.5,, $K,12,12,5.5,, $K,13,16,5.5,, $K,14,20,5.5,, $K,15,24,5.5,, $K,16,28,5.5,, !----通过几何点生成桥底梁的线
L,1,2 $L,2,3 $L,3,4 $L,4,5 $L,5,6 $L,6,7 $L,7,8 $L,8,9 !----生成桥顶梁和侧梁的线
L,9,16 $L,15,16 $L,14,15 $L,13,14 $L,12,13 $L,11,12 $L,10,11 $L,1,10 !----生成桥身弦杆的线
L,2,10 $L,3,10 $L,3,11 $L,4,11 $L,4,12 $L,4,13 $L,5,13 $L,6,13 $L,6,14 $L,6,15 $L,7,15 $L,7,16 $L,8,16 !----选择桥顶梁和侧梁指定单元属性
LSEL,S,,,9,16,1,
LATT,1,1,1,,,
!----选择桥身弦杆指定单元属性
LSEL,S,,,17,29,1,
LATT,1,2,1,,,
!----选择桥底梁指定单元属性
LSEL,S,,,1,8,1,
LATT,1,3,1,,,
!----划分网格
AllSEL,all           !再恢复选择所有对象
LESIZE,all,,,1,,,,,1 !对所有对象进行单元划分前的分段设置
LMESH,all             !对所有几何线进行单元划分
!=====在求解模块中，施加位移约束、外力，进行求解
/solu
NSEL,S,LOC,X,0       !根据几何位置选择节点
D,all,,,,,ALL,,,,
AllSEL,all           !再恢复选择所有对象
NSEL,S,LOC,X,32      !根据几何位置选择节点
D,all,,,,,,UY,,,
ALLSEL,all            !再恢复选择所有对象
!----基于几何关键点施加载荷
FK,4,FY,-5000  $FK,6,FY,-5000  $FK,5,FY,-10000
/replot               !重画图形
Allsel,all            !选择所有信息(包括所有节点，单元，载荷等)
solve                 !求解
!=====进入一般的后处理模块
/post1                !后处理
```



```
PLNSOL, U,Y,0,1.0          !显示 Y 方向位移  
PLNSOL, U,X,0,1.0          !显示 X 方向位移  
!-----显示线单元轴力-----  
ETABLE,bar_I,SMISC, 1  
ETABLE,bar_J,SMISC, 1  
PLLS,BAR_I,BAR_J,0.5,1      !画出轴力图  
finish                      !结束  
!%%%%%%%%% [ANSYS 算例]3_4_2(2) %%%%%% end %%%%%%
```

【ANSYS 算例】3.4.2(3) 基于参数化方式的桁架桥梁结构分析

```
!%%%%%%%%% [ANSYS 算例]3_4_2(3) %%% begin %%%%%%
```

```
!-----注：以下命令流中的符号$，表示可将多行命令流写成一行-----
```

```
/prep7                      !进入前处理  
/PLOPTS,DATE,0              !设置不显示日期和时间  
!=====进行参数化建模的参数设置  
!(1)将桥梁总长度设为 L，每段水平桁架长度设为 DL，桥梁高度设为 H  
L=32  
DL=L/8  
H=5.5
```

```
!(2)将桥梁钢截面的面积设为 A，惯性矩设为 I
```

```
A1=2.19E-3  
I1=3.83E-6  
A2=1.185E-3  
I2=1.87E-6  
A3=3.031E-3  
I3=8.47E-6
```

```
!(3)将弹性模量和泊松比设为参数
```

```
e_modu=2.1e11  
prxy_Poi=0.3
```

```
!(4)将载荷值设为参数
```

```
P1=-5000     $P2=-10000    $P3=-5000
```

```
!=====下面开始有限元的建模和分析
```

```
ET,1,BEAM3                  !定义单元类型  
R,1,A1,I1,,,,               !定义 1 号实常数用于顶梁侧梁  
R,2,A2,I2,0,0,0,0,           !定义 2 号实常数用于弦杆  
R,3,A3,I3,0,0,0,0,           !定义 3 号实常数用于底梁  
!-----定义钢的弹性模量和泊松比  
MP,EX,1,e_modu  
MP,PRXY,1,prxy_Poi  
MP,DENS,1,,7800              !定义材料密度  
!----定义关键点
```



```
K,1,0,0,,      $K,2,DL,0,,      $K,3,2*DL,0,,      $K,4,3*DL,0,,      $K,5,4*DL,0,,      $K,6,5*DL,0,,  
K,7,6*DL,0,,      $K,8,7*DL,0,,      $K,9,8*DL,0,,      $K,10,DL,H,,      $K,11,2*DL,H,,      $K,12,3*DL,H,,  
K,13,4*DL,H,,      $K,14,5*DL,H,,      $K,15,6*DL,H,,      $K,16,7*DL,H,,  
!----通过几何点生成桥底梁的线  
L,1,2  $L,2,3  $L,3,4 $L,4,5 $L,5,6 $L,6,7 $L,7,8 $L,8,9  
!-----生成桥顶梁和侧梁 的线  
L,9,16  $L,15,16 $L,14,15 $L,13,14 $L,12,13 $L,11,12 $L,10,11 $L,1,10  
!-----生成桥身弦杆的线  
L,2,10  $L,3,10  $L,3,11 $L,4,11 $L,4,12  $L,4,13  $L,5,13 $L,6,13 $L,6,14 $L,6,15 $L,7,15 $L,7,16 $L,8,16  
!-----选择桥顶梁和侧梁指定单元属性  
LSEL,S,,,9,16,1,  
LATT,1,1,1,,,  
!-----选择桥身弦杆指定单元属性  
LSEL,S,,,17,29,1,  
LATT,1,2,1,,,  
!-----选择桥底梁指定单元属性  
LSEL,S,,,1,8,1,  
LATT,1,3,1,,,  
!-----划分网格  
AllSEL,all          !再恢复选择所有对象  
LESIZE,all,,,1,,,,,1          !对所有对象进行单元划分前的分段设置  
LMESH,all          !对所有几何线进行单元划分  
!=====在求解模块中，施加位移约束、外力，进行求解  
/solu  
NSEL,S,LOC,X,0      !选择 x=0 处的节点  
D,all,,,,,ALL,,,,,      !施加完全固定的约束  
AllSEL,all  
NSEL,S,LOC,X,L      !选择 x=L 处的节点  
D,all,,,,,UY,,,      !施加 UY 方向固定的约束  
ALLSEL,all  
!----施加载荷  
FK,4,FY,P1      $FK,6,FY,P3      $FK,5,FY,P2  
/replot  
Allsel,all          !选择所有信息(包括所有节点，单元，载荷等)  
solve              !求解  
!=====进入一般的后处理模块  
/post1              !后处理  
PLNSOL, U,Y, 0,1.0      !显示 Y 方向位移  
PLNSOL, U,X, 0,1.0      !显示 X 方向位移  
!-----显示线单元轴力  
ETABLE,bar_I,SMISC, 1
```



```
ETABLE,bar_J,SMISC,1  
PLLS,BAR_I,BAR_J,0.5,1  
finish !结束  
!%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]3_4_2(3) %% end %%%%%%
```

3.5 本章要点

- 有限元分析的基本方程(刚度矩阵、载荷列阵、单元的刚度方程、组装后的刚度方程)
- 1D 问题(杆及梁)的虚功原理求解
- 1D 问题(杆及梁)的最小势能原理求解
- 杆单元的位移模式、刚度矩阵及坐标变换
- 梁单元的位移模式、刚度矩阵及坐标变换
- 平面梁单元的等效节点载荷的计算方法

3.6 习题

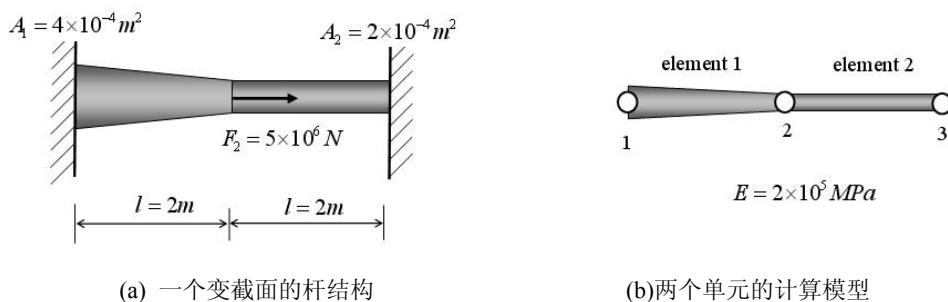
3-1 试用虚功原理推导杆 1D 单元的单元方程。

3-2 推导二次函数变截面的杆单元的刚度矩阵 $A(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 A_1 + \left(\frac{x}{l}\right) A_2$ 。

3-3 对于沿轴向承受均布载荷的杆单元，推导相应的节点等效载荷。

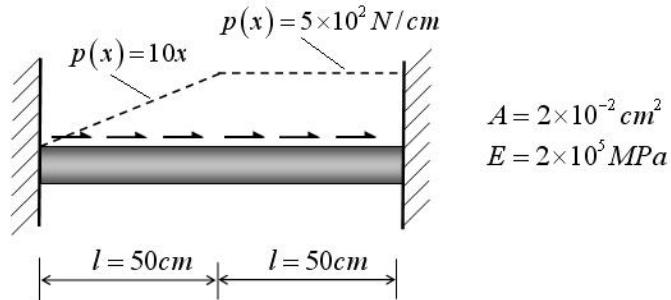
3-4 对于沿轴向承受三角形载荷分布的杆单元，推导相应的节点等效载荷。

3-5 有一个变截面的杆结构如图所示，材料的弹性模量为 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，试采用两个单元(其中一个为变截面单元)来分析该问题，并得到整个结构所有的力学信息。



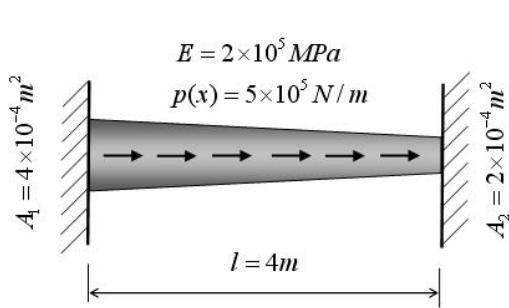
题图 3-5

3-6 有一个杆结构，受有沿轴向的分布载荷，杆的横截面积为 $A = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ ，材料的弹性模量为 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，分析该问题的建模方案，并得到整个结构所有的力学信息。

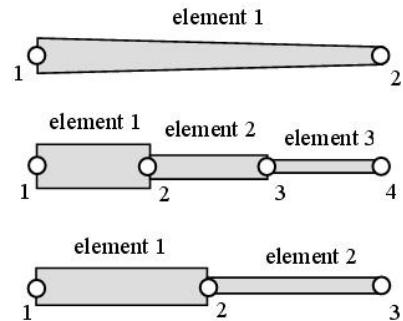


题图 3-6

3-7 有一个变截面的杆结构，受有沿轴向的均匀分布载荷，试采用如图 3-7(b)所示的多种建模方式进行分析，得到整个结构所有的力学信息，并比较几种建模方式的结果及特点。



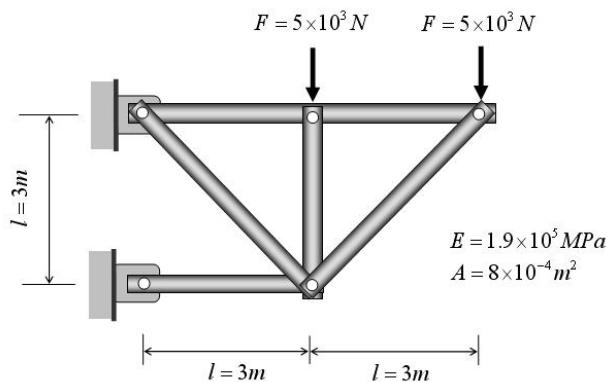
(a) 一个变截面的杆结构



(b) 几种计算模型

题图 3-7

3-8 有一个桁架结构，如题图 3-8 所示，每根杆件的材料以及面积都相同，试采用有限元方法分析该结构的受力状态，并求出支反力。



题图 3-8

3-9 试用虚功原理推导 2 节点平面梁单元的单元方程。

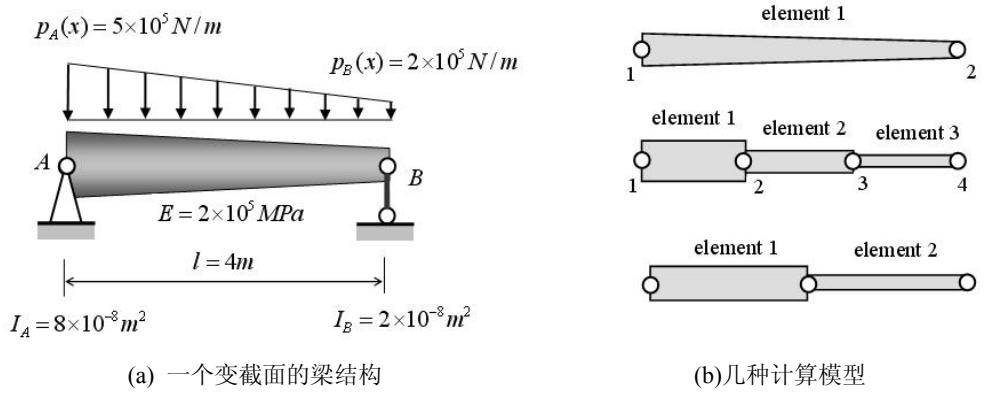
3-10 有一个变截面的梁单元，假设梁的长度为 l ，梁的横截面积为 $A(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)A_1 + \left(\frac{x}{l}\right)A_2$ ，



惯性矩为 $I(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)I_1 + \left(\frac{x}{l}\right)I_2$, 试推导该纯弯梁单元的刚度矩阵。

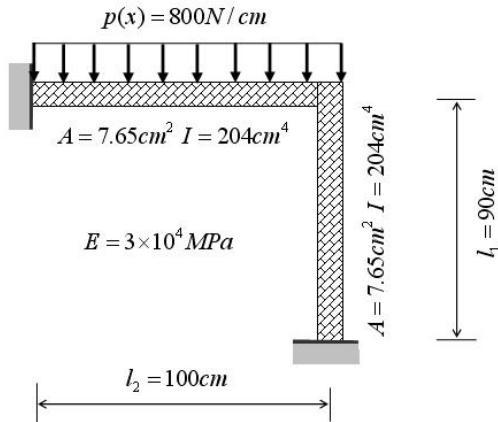
3-11 对于一个梁单元，承受有三角形分布的垂直载荷，推导该单元的相应节点等效载荷。

3-12 有一个变截面的梁结构，还受有承受有梯形分布的垂直载荷，如题图 3-12 所示，试采用如题图 3-12(b)所示的多种建模方式进行分析，得到整个结构所有的力学信息，并比较几种建模方式的结果及特点。



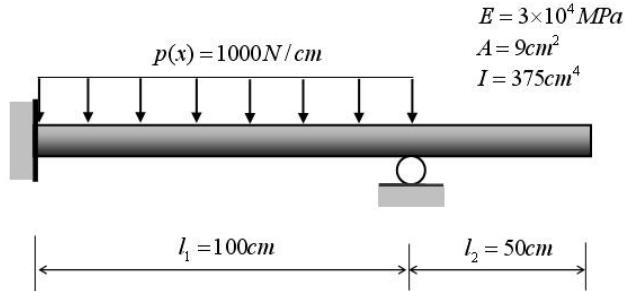
题图 3-12

3-13 有一个梁结构如题图 3-13 所示，试采用梁单元来分析该结构，并求取支反力。



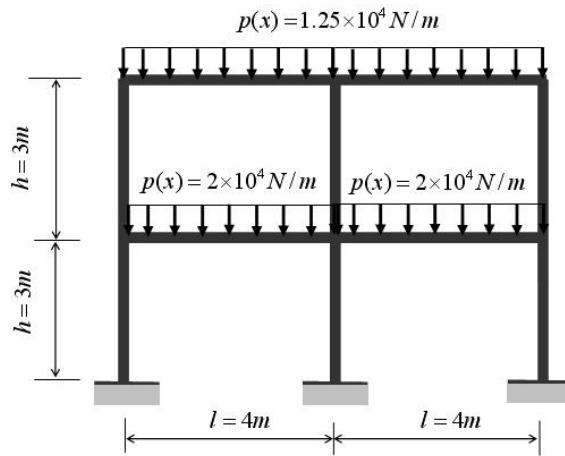
题图 3-13

3-14 有一个悬臂简支梁如图所示，在其中的一段受有均布载荷，试分析该结构，并求取支反力。



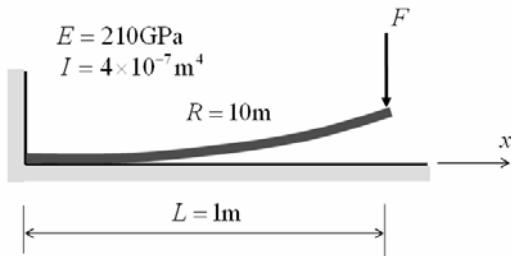
题图 3-14

3-15 一座两层建筑可以简化为如题图 3-14 所示的模型，梁的参数为 $A = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ，
 $I = 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ，材料的弹性模量为 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，试分析该结构，并求取支反力。



题图 3-15

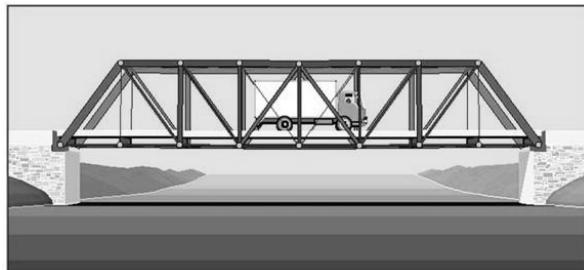
3-16 有一个细长的弹性曲梁，当它未受力时，它由一个常曲率半径 R ，并且 $R \gg L$ ，如题图所示，该曲梁的左端点固支，并与刚性水平面相切；现在它的右端点施加一个垂直集中力 F ，若该梁仍保持线弹性，多大的 F 才能使曲梁的右端点的曲率变为零。试使用多个梁单元进行分析，并比较单元的个数与计算精度之间的关系。



题图 3-16



3-17 在【ANSYS 算例】3.4.2(3)的基础上, 当卡车从左端开到右端一系列过程情况下, 即将载荷 P1_P2_P3 从左端到右端进行一系列平移(每步移动五段中的一段), 分别计算桥梁中最大位移及应力的变化。



题图 3-17



第 4 章 连续体结构分析的有限元方法

杆梁结构由于有自然的连接关系，可以凭一种直觉将其进行自然的离散，而连续体则不同，它的内部没有自然的连接节点，必须完全通过人工的方法进行离散；有人说有限元方法的真正魅力在于它成功地处理了连续体(场)问题，人们公认的有限元方法的开拓者之一 Courant，就是在 1943 年处理连续体问题时使用了三角形区域的分片连续函数和最小势能原理；而“有限单元”的名称，是 Clough 于 1960 年在处理平面连续体问题时正式提出的。

本章将就连续体问题的有限元方法进行全面的讨论和研究。

4.1 连续体结构分析的工程概念

最简单的 1D 几何图形就是直线，最简单的 2D 几何图形就是三角形，最简单的 3D 几何图形就是四面体，杆单元以及梁单元从局部坐标系来看可以说是 1D 单元，本章将重点讨论用于连续体结构离散的 2D 单元及 3D 单元。

第 3 章虽然仅讨论了杆单元以及梁单元，但从中已经给出了有限元分析的具有标准化分析过程的核心要素：单元

本章除了使读者接受将连续的几何域划分为一系列的 2D 单元或 3D 单元这一基本思想外，其它的过程与第 3 章完全相同，将再一次说明了有限元分析的标准化及规范性的特征。

图 4-1 展示了将连续的一个圆离散为有限个三角片的过程，正是按照这一原理，同样也可以将一个任意复杂的几何形状离散为一系列(有限个)标准几何图形(单元)的组合，如图 4-2 所示。

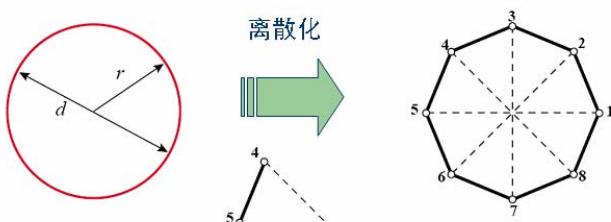


图 4-1 将连续的一个圆离散为有限个三角片

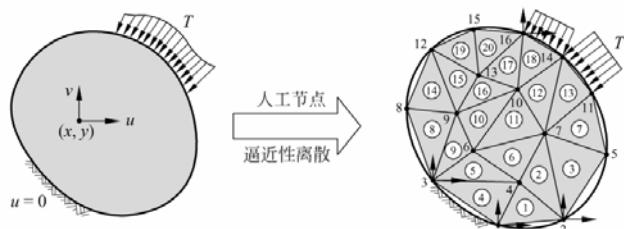


图 4-2 将连续的几何域离散为由有限个三角片组成的逼近域

4.2 连续体结构分析的基本力学原理

与第 3 章类似，连续体结构的力学分析也包括：基本变量、基本方程、求解原理，下面分别进行描述，有关的详细内容见参考文献[17]及[18]。



【基本变量】4.2.1(1) 连续体问题的三大类变量

就基本变量而言，2D 和 3D 问题将在 1D 问题上进行另外方向上的推广延伸，注意：除了在主方向上进行延伸外，还存在有每两个坐标轴之间的交叉(夹角)项，对于应力来说就是剪应力，对于应变来说就是剪应变；几种情况的基本变量列于表 4-1 中。

表 4-1 连续体问题的三大类变量的各个分量(直角坐标系下)

	1D 问题	2D 问题	3D 问题
位移分量	$u(x)$	$u(x, y), v(x, y)$	$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$
应变分量	$\varepsilon_{xx}(x)$	$\varepsilon_{xx}(x, y), \varepsilon_{yy}(x, y), \gamma_{xy}(x, y)$	$\varepsilon_{xx}(x, y, z), \varepsilon_{yy}(x, y, z), \varepsilon_{zz}(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{xz}(x, y, z)$
应力分量	$\sigma_{xx}(x)$	$\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy}(x, y), \tau_{xy}(x, y)$	$\sigma_{xx}(x, y, z), \sigma_{yy}(x, y, z), \sigma_{zz}(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{xz}(x, y, z)$

注： $\sigma_{xx}(x)$ 中的第一个下标表明应力的方向，第二个下标表明应力所作用面的法线方向；对于应变也如此。

一般情况下，将下标相同的正应力 $\sigma_{xx}(x, y, z)$ 或正应变 $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ 表达成 $\sigma_x(x, y, z)$ 或正应变 $\varepsilon_y(x, y, z)$ ，即只写一个下标，y 方向以及 z 方向的情况类似。

【基本方程】4.2.1(2) 连续体问题的三大类方程及边界条件

对于基本方程而言，2D 和 3D 问题同样将在 1D 问题上进行另外方向上的推广延伸；几种情况的基本方程列于表 4-2 中。

表 4-2 连续体问题的三大类方程的各个表达式(直角坐标系下)

	1D 问题	2D 问题	3D 问题
平衡方程	$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0$	$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0$
几何方程	$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$	$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$	$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$
物理方程	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$	$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$ $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$ $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$	$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$ $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$ $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$ $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$

注： E, μ, G 为材料的弹性模量，泊松比，剪切模量。



对于一般的力学问题，还有两类边界条件(Boundary Condition)，即，位移边界条件 BC(u) 以及力边界条件 BC(p)；几种情况的边界条件列于表 4-3 中。

表 4-3 连续体问题的两大类边界条件的各个表达式(直角坐标系下)

	1D 问题	2D 问题	3D 问题
几何边界条件 BC(u)	$u(x) _{x=x_0} = \bar{u}$	$u(x, y) _{x=x_0, y=y_0} = \bar{u}$ $v(x, y) _{x=x_0, y=y_0} = \bar{v}$	$u(x, y, z) _{x=x_0, y=y_0, z=z_0} = \bar{u}$ $v(x, y, z) _{x=x_0, y=y_0, z=z_0} = \bar{v}$ $w(x, y, z) _{x=x_0, y=y_0, z=z_0} = \bar{w}$
外力边界条件 BC(p)	$\sigma_{xx}(x) _{x=x_0} = \bar{p}_x$	$n_x \sigma_{xx}(x_0, y_0) + n_y \tau_{xy}(x_0, y_0) = \bar{p}_x$ $n_x \tau_{xy}(x_0, y_0) + n_y \sigma_{yy}(x_0, y_0) = \bar{p}_y$	$n_x \sigma_{xx}(x_0, y_0, z_0) + n_y \tau_{xy}(x_0, y_0, z_0) + n_z \tau_{xz}(x_0, y_0, z_0) = \bar{p}_x$ $n_x \tau_{xy}(x_0, y_0, z_0) + n_y \sigma_{yy}(x_0, y_0, z_0) + n_z \tau_{yz}(x_0, y_0, z_0) = \bar{p}_y$ $n_x \tau_{xz}(x_0, y_0, z_0) + n_y \tau_{yz}(x_0, y_0, z_0) + n_z \sigma_{zz}(x_0, y_0, z_0) = \bar{p}_z$

注： x_0, y_0, z_0 为边界上的几何坐标； n_x, n_y, n_z 边界外法线上的方向余弦； $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 为给定的对应方向上的位移值； $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ 为给定的对应方向上的边界分布力。

【求解原理】4.2.1(3) 直接法以及试函数法的求解思想

针对一个具体对象，目标是通过三大类方程(平衡、几何、物理)来求解出三大类变量(位移、应变、应力)；对于 1D 问题实际就是通过三个方程来求解三个变量，一般可以直接进行联立求解；而对与 2D 问题，变量及方程的个数都较多，而且方程为偏微分方程，除一些具有简单几何形状(如矩形、圆形)外，一般较难直接求解。必须寻找能够求解任意复杂几何形状的通用方法；一个好的方法应该具有以下几个特征：

- * 几何形状的适应性(通用方法)
- * 数学力学原理上的标准化(不需要较多的技巧，都较容易掌握)
- * 处理过程的规范性(具有统一的处理流程)
- * 操作实施的可行性(具备相应的软件及硬件条件，可处理大规模线性方程组)
- * 分析误差的可控制性(可确定计算的最佳效率，方法具有良好的收敛性)

针对弹性问题的三大类变量和方程，从第一层次(求解方法论)的思路上说，总体上有两大类求解方法：直接法(直接求解原始微分方程)、以及试函数法(基于假设解的调试方法)。

从第二层次(求解策略)的思路上说，对于三大类变量，要同时进行联立求解一般比较困难，需要将变量先进行代换，最好是代换成一种类型的变量先进行求解，然后再求解另外类型的变量。

对于直接法，也就是解析方法，若将要求解的基本变量先确定为应力的话，这就是应力方法，最常用的有 Airy 应力函数(stress function)方法，还有一些诸如逆解法、半逆解法的方法，但这些方法虽然可以获得解析解，但仅针对一些简单几何形状，而大量的实际问题目前还不能获得解析解；而且，对求解的数学技巧也要求较高。因此，这类方法大部分不具备上面提到的几个特征。

而对于试函数法，可以追溯到 Rayleigh(1870 年)、以及 Ritz(1909 年)，它首先假设一个可能的解(即试函数，其中包含一些待定系数)，将试函数再带入到原方程中，通过确定相应误差函数的最小值来获得其中的待定系数，这样就求出以试函数(确认了待定系数)为结果的解，这种方法大大降低了求解的难度和技巧，方法也具有标准化和规范性，但由于最早的试函数是基于整个几何全域来选择的，因此，它的几何形状的适应性也是受到一定限制的，加上过去还没有合适的计算工具，它实施的可行性也不具备。

进入 20 世纪 50 年代，随着计算机技术的飞速发展，复杂力学问题的处理有了两个实质性的突破，其一：大规模计算成为可能，其二：将基于整个几何全域的试函数变为基于分片



(子区域)的多项式函数表达(可以很好适应任意复杂的几何形状), 然后再将分片的函数进行集成组合得到全域的试函数。这种分片就是“单元”, 分片的过程就是将整体区域进行离散的过程, 将这种基于分片函数描述的试函数方法叫做有限元方法^[19], 相关的示意见图 4-3。

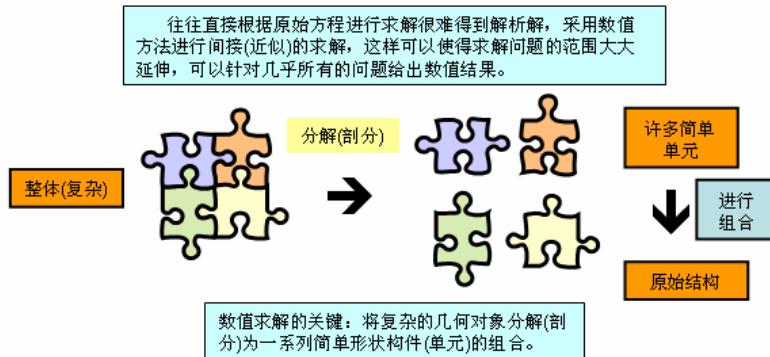


图 4-3 基于整体区域离散的有限元方法

【求解原理】4.2.1(4) 连续体问题求解的虚功原理

对于一般弹性问题(以 2D 问题为例), 在几何域 Ω 中, 受有体积力 (\bar{b}_x, \bar{b}_y) , 在外力边界 S_p 上, 受有施加的分布力 (\bar{p}_x, \bar{p}_y) 。设有满足位移边界条件的位移场 (u, v) , 这就是试函数(其中有一些待定的系数), 则它的虚位移为 $(\delta u, \delta v)$, 虚应变为 $(\delta \varepsilon_{xx}, \delta \varepsilon_{yy}, \delta \gamma_{xy})$ 。

相应的虚应变能为

$$\delta U = \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega \quad (4-1)$$

而外力虚功为

$$\delta W = \int_{\Omega} (\bar{b}_x \cdot \delta u + \bar{b}_y \cdot \delta v) d\Omega + \int_{S_p} (\bar{p}_x \cdot \delta u + \bar{p}_y \cdot \delta v) dA \quad (4-2)$$

那么, 虚功原理 $\delta U = \delta W$ 可以表达为

$$\int_{\Omega} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega = \int_{\Omega} (\bar{b}_x \delta u + \bar{b}_y \delta v) d\Omega + \int_{S_p} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v) dA \quad (4-3)$$

通过以上方程就可以确定出试函数中的待定系数。

【求解原理】4.2.1(5) 连续体问题求解的最小势能原理

同样对于 2D 问题, 设有满足位移边界条件的位移场 (u, v) , 即试函数(其中有一些待定的系数), 确定其中待定系数的方法, 就是使得该系统的势能取极小值, 即

$$\min_{(u,v) \in BC(u)} \Pi(u, v) \quad (4-4)$$

其中



$$\begin{aligned}\Pi &= U - W \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \cdot \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (\bar{b}_x \cdot u + \bar{b}_y \cdot v) d\Omega + \int_{S_p} (\bar{p}_x \cdot u + \bar{p}_y \cdot v) dA\end{aligned}\quad (4-5)$$

实际上，虚功原理与最小势能原理是等价的。

【强度准则】4.2.1(6) 结构分析中的受力状态诊断(强度准则)

实际的工程设计往往需要进行多次的力学分析、优化修改才能完成，强度准则在整个设计过程中具有重要的作用，它是判断受力状态是否满足需要的主要依据，图 4-4 展示了一个结构件的设计过程^[21]。

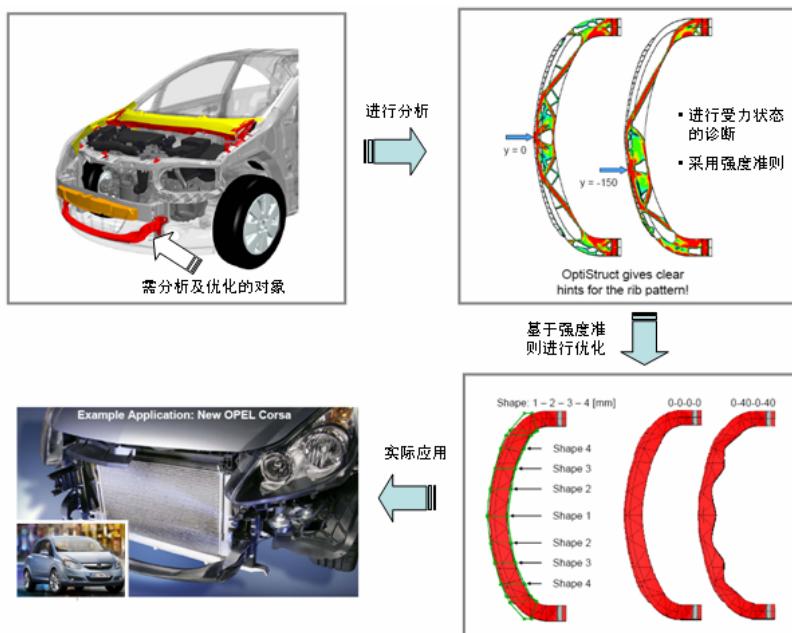


图 4-4 一个结构的力学分析、状态诊断以及优化改进的主要过程

对于不同的材料，由于它的承载破坏的机理不同，需要采用针对性的强度判断准则。下面给出常用的几种强度准则。一个问题具体应采用何种准则，应根据材料的受力状态、环境要求、设计要求，甚至还需要通过一系列的实际状况的实验来确定。

(1)最大拉应力准则(max. tensile stress criterion): 若材料发生脆性断裂失效，其原因是材料内所承受的最大拉应力达到了所能承受的极限 (一般用于脆性材料)。

已知危险点的应力状态 σ_{ij} ，首先通过斜面分解方法求出最大的拉应力 σ_1 (实际上就是第一主应力)和所在面的主方向，然后进行应力失效校核和判断

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \quad (4-6)$$

上式中 $[\sigma]$ 为材料的许用应力，由材料的单向拉伸试验和安全系数确定，即 $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$ ，其中

σ_s 为单向拉伸试验得到的屈服应力， n 为安全系数。



(2) 最大剪应力准则(max. shearing stress criterion): 若材料发生屈服(或剪断), 其原因是材料内所承受的最大剪应力达到了所能承受的极限(一般用于韧性材料)。

已知危险点的应力状态 σ_{ij} , 首先通过斜面分解方法求出最大的剪应力 τ_{\max}

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4-7)$$

然后进行剪应力失效校核和判断

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (4-8)$$

其中 $[\tau]$ 为材料的许用剪应力, 由材料的单向拉伸试验和安全系数确定。对于材料的单向拉伸试验, 有 $\sigma_3 = 0$, 因此

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad (4-9)$$

将(4-7)和(4-9)式代入(4-8)中, 有以主应力形式来表达的最大剪应力准则

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (4-10)$$

(3) 最大畸变能准则(max. distortion energy criterion): 若材料发生屈服(或剪断), 其原因是材料内的畸变能密度达到了所能承受的极限(一般用于韧性材料, 也称为 Mises 等效应力强度准则)。

已知危险点的应力状态 σ_{ij} , 按下式计算该点的畸变应变能密度

$$U'_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (4-11)$$

然后进行畸变应变能密度校核和判断

$$U'_d \leq [U'_d] \quad (4-12)$$

其中 $[U'_d]$ 为材料的临界畸变应变能密度, 即由材料的单向拉伸试验和安全系数确定。对于材料的单向拉伸试验, 有 $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$, 因此, 由式(4-11), 有 $[U'_d] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2$, 将该关系以及式(4-11)代入(4-12)中, 有以主应力形式来表达的最大畸变能准则

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma] \quad (4-13)$$

或写成更一般的形式

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} \leq [\sigma] \quad (4-14)$$

若定义



$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]}\end{aligned}\quad (4-15)$$

则称 σ_{eq} 为 Mises 等效应力，也叫做应力强度，由上式可以看出，该等效应力反映了材料受力变形的畸变能的平方根。

4.3 平面问题有限元分析的标准化表征

4.3.1 平面问题的 3 节点三角形单元描述

平面问题 3 节点单元具有几何特征简单、描述能力强的特点，是平面问题有限元分析中最基础的单元，也是最重要的单元之一。

【单元构造】4.3.1(1) 平面问题的 3 节点三角形单元

(1) 单元的几何和节点描述

3 节点三角形单元(3-node triangular element) 如图 4-5 所示。3 个节点的编号为 1、2、3，各自的位置坐标为 (x_i, y_i) , $i=1,2,3$ ，各个节点的位移(分别沿 x 方向和 y 方向)为 (u_i, v_i) , $i=1,2,3$ 。

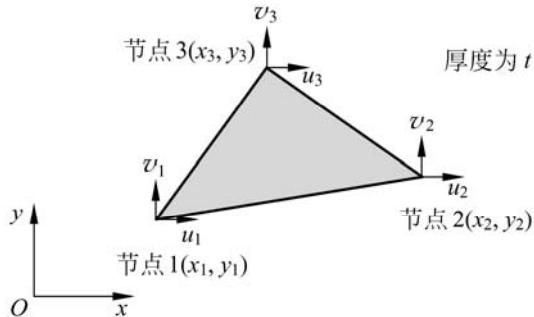


图 4-5 平面 3 三节点三角形单元

如图 4-5 所示，该单元共有 6 个节点位移自由度(DOF)。将所有节点上的位移组成一个列阵，记作 \mathbf{q}^e ；同样，将所有节点上的各个力也组成一个列阵，记作 \mathbf{P}^e ，那么

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \quad (4-16)$$

$$\mathbf{P}^e = [P_{x1} \quad P_{y1} \quad P_{x2} \quad P_{y2} \quad P_{x3} \quad P_{y3}]^T \quad (4-17)$$

若该单元承受分布外载，可以将其等效到节点上，即也可以表示为如图 4-5 所示的节点力。利用函数插值、几何方程、物理方程以及势能计算公式，可以将单元的所有力学参量(即场变量： $u(x, y)$ ， $\varepsilon(x, y)$ ， $\sigma(x, y)$ 和 Π^e)用节点位移列阵 \mathbf{q}^e 及相关的插值函数来表示；下面进行具体的推导。

(2) 单元位移场的表达



就如图 4-5 所示的平面 3 节点三角形单元，由于有 3 个节点，每一个节点有两个位移，因此共有 6 个节点位移，考虑到简单性、完备性、连续性及待定系数的唯一确定性原则，分别选取单元中各个方向的位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y \\ v(x, y) &= \bar{b}_0 + \bar{b}_1 x + \bar{b}_2 y \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

由节点条件，在($x=x_i$, $y=y_i$)处，有

$$\left. \begin{aligned} u(x_i, y_i) &= u_i \\ v(x_i, y_i) &= v_i \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3 \quad (4-19)$$

将式(4-19)代入节点条件式(4-20)中，可求解出式(4-18)中的待定系数，即

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A} (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) \quad (4-20)$$

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \quad (4-21)$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A} (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \quad (4-22)$$

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{2A} (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) \quad (4-23)$$

$$\bar{b}_1 = \frac{1}{2A} (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \quad (4-24)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{1}{2A} (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \quad (4-25)$$

在式(4-20)~式(4-25)中

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{1}{2} (b_1 c_2 - b_2 c_1) \quad (4-26)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_2 - y_3 \\ c_1 &= \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = -x_2 + x_3 \end{aligned} \right\} \quad (1, 2, 3) \quad (4-27)$$

上式中的符号 (1, 2, 3) 表示下标轮换，如 $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$ 同时更换。

将系数式(4-20)~式(4-25)代入式(4-18)中，重写位移函数，并以节点位移的形式进行表



示, 有

$$u(x, y) = N_1(x, y) \cdot u_1 + N_2(x, y) \cdot u_2 + N_3(x, y) \cdot u_3 \quad (4-28)$$

$$v(x, y) = N_1(x, y) \cdot v_1 + N_2(x, y) \cdot v_2 + N_3(x, y) \cdot v_3 \quad (4-29)$$

写成矩阵形式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(2 \times 1)}(x, y) &= \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{(2 \times 6)}(x, y) \cdot \mathbf{q}^e_{(6 \times 1)} \end{aligned} \quad (4-30)$$

其中 $\mathbf{N}(x, y)$ 为形状函数矩阵, 即

$$\mathbf{N}_{(2 \times 6)}(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

而

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad i=1, 2, 3 \quad (4-32)$$

其中的系数 a_i, b_i, c_i 见式(4-27)。

(3) 单元应变场的表达

由弹性力学平面问题的几何方程(矩阵形式)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{(3 \times 1)}(x, y) &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = [\partial]_{(3 \times 2)} \mathbf{u}_{(2 \times 1)} \end{aligned} \quad (4-33)$$

其中 $[\partial]$ 为几何方程的算子矩阵(operator matrix), 即

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

将式(4-30)代入式(4-33)中, 有



$$\underline{\epsilon}_{(3 \times 1)}(x, y) = \begin{bmatrix} \partial \\ (3 \times 2) \end{bmatrix} \underline{N}_{(2 \times 6)}(x, y) \cdot \underline{q}^e_{(6 \times 1)} = \underline{B}_{(3 \times 6)}(x, y) \cdot \underline{q}^e_{(6 \times 1)} \quad (4-35)$$

其中几何矩阵 $\underline{B}(x, y)$ 为

$$\underline{B}_{(3 \times 6)}(x, y) = \begin{bmatrix} \partial \\ (3 \times 2) \end{bmatrix} \underline{N}_{(2 \times 6)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

将式(4-32)代入上式，有

$$\underline{B}_{(3 \times 6)}(x, y) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_2 & \underline{B}_3 \\ (3 \times 2) & (3 \times 2) & (3 \times 2) \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

其中

$$\underline{B}_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3 \quad (4-38)$$

(4) 单元应力场的表达

由弹性力学中平面问题的物理方程，将其写成矩阵形式

$$\underline{\sigma}_{(3 \times 1)}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D}_{(3 \times 3)} \cdot \underline{\epsilon}_{(3 \times 1)} \quad (4-39)$$

其中平面应力问题的弹性系数矩阵 \underline{D} 为

$$\underline{D}_{(3 \times 3)} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

若为平面应变问题，则将上式中的系数 (E, μ) 换成平面应变问题的系数 $(\frac{E}{1-\mu^2}, \frac{\mu}{1-\mu})$ 即可；将式(4-35)代入式(4-39)中，有

$$\underline{\sigma}_{(3 \times 1)} = \underline{D}_{(3 \times 3)} \cdot \underline{B}_{(3 \times 6)} \cdot \underline{q}^e_{(6 \times 1)} = \underline{S}_{(3 \times 6)} \cdot \underline{q}^e_{(6 \times 1)} \quad (4-41)$$

其中应力函数矩阵为



$$\underset{(3 \times 6)}{\mathbf{S}} = \underset{(3 \times 3)}{\mathbf{D}} \cdot \underset{(3 \times 6)}{\mathbf{B}}$$

(5) 单元的势能的表达

以上已将单元的三大基本变量($\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$)用基于节点位移列阵 \mathbf{q}^e 来进行表达, 见式(4-30)、式(4-35)及式(4-41); 将其代入单元的势能表达式(4-5)中, 有

$$\begin{aligned}\Pi^e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \left[\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{S_p^e} \bar{\mathbf{p}}^T \cdot \mathbf{u} dA \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{q}^e - \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \right)^T \mathbf{q}^e \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{P}^{eT} \mathbf{q}^e\end{aligned}\quad (4-42)$$

其中 \mathbf{K}^e 是单元刚度矩阵, 即

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \underset{(6 \times 6)}{\mathbf{B}^T} \underset{(6 \times 3)}{\mathbf{D}} \underset{(3 \times 6)}{\mathbf{B}} d\Omega = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot dA \cdot t \quad (4-43)$$

t 为平面问题的厚度。由式(4-37)可知, 这时 \mathbf{B} 矩阵为常系数矩阵, 因此上式可以写成

$$\mathbf{K}^e = \underset{(6 \times 6)}{\mathbf{B}^T} \underset{(6 \times 3)}{\mathbf{D}} \underset{(3 \times 6)}{\mathbf{B}} tA = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

其中的各个子块矩阵为

$$\mathbf{k}_{rs} = \underset{(2 \times 2)}{\mathbf{B}_r^T} \mathbf{D} \underset{(2 \times 2)}{\mathbf{B}_s} tA = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix}, \quad r, s = 1, 2, 3 \quad (4-45)$$

其中

$$\begin{aligned}k_1 &= b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s \\ k_2 &= \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s \\ k_3 &= \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ k_4 &= c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s\end{aligned}$$

而式(4-42)中的 \mathbf{P}^e 为单元节点等效载荷, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \\ &= \int_{A^e} \underset{(6 \times 2)}{\mathbf{N}^T} \underset{(2 \times 1)}{\bar{\mathbf{b}}} t dA + \int_{l_p^e} \underset{(6 \times 2)}{\mathbf{N}^T} \underset{(2 \times 1)}{\bar{\mathbf{p}}} t dl\end{aligned}\quad (4-46)$$

其中 l_p^e 为单元上作用有外载荷的边, $\int dl$ 为线积分。



(6) 单元的刚度方程

将单元的势能式(4-42)对节点位移 \mathbf{q}^e 取一阶极值, 可得到单元的刚度方程

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (4-47)$$

单元在承受非节点载荷时, 如在边线上承受一个分布载荷, 这时应根据外力功的计算公式来获得节点载荷的等效值, 常见的平面问题 3 节点三角形单元的节点等效外载荷列阵如表 4-4 所示。

表 4-4 常用的等效节点外载列阵 (平面 3 节点三角形单元)

外载状况	图 示	节点等效外载列阵
单元自重		$\mathbf{F}^e = [F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3}]^T$ $= -\frac{1}{3} \rho_0 A^e t [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ <p>(ρ_0 为密度, A^e 为单元面积, t 为厚度)</p>
均布侧压		$\mathbf{F}^e = [F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3}]^T$ $= \frac{1}{2} p_0 t [(y_1 - y_2) \ (x_2 - x_1) \ (y_1 - y_2) \ (x_2 - x_1) \ 0 \ 0]^T$ <p>(t 为厚度)</p>
x 方向受均布侧压		$\mathbf{F}^e = [F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3}]^T$ $= \frac{1}{2} p_0 l t [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ <p>(t 为厚度)</p>
x 方向受三角形分布载荷		$\mathbf{F}^e = [F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3}]^T$ $= \frac{1}{2} p_0 l t \left[\frac{2}{3} \ 0 \ \frac{1}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$ <p>(t 为厚度)</p>

【单元特征】4.3.1(2) 平面 3 节点三角形单元的位移坐标变换问题

由于该单元的节点位移是以整体坐标系中的 x 方向位移 u 和 y 方向位移 v 来定义的, 所以没有坐标变换问题。

【单元特征】4.3.1(3) 平面 3 节点三角形单元的常系数应变和应力

由于该单元的位移场为线性关系式(4-18), 由公式(4-27)可知, 系数 a_i, b_i, c_i 只与三个节点的坐标位置 (x_i, y_i) 相关, 是常系数, 因而求出的单元的 $\mathbf{B}(x, y)$ 和 $\mathbf{S}(x, y)$ 都为常系数矩阵, 不随 x, y 变化, 由式(4-35)和(4-41)式可知, 单元内任意一点的应变和应力都为常



数，因此，3 节点三角形单元称为常应变(应力)CST 单元(constant strain triangle)。在实际使用过程中，对于应变梯度较大（也即应力梯度比较大）的区域，单元划分应适当加密，否则将不能反映应变(应力)的真实变化情况，从而导致较大的误差。

4.3.2 平面问题的 4 节点矩形单元描述

矩形单元(rectangular element)由于形状简单和规范将作为“基准”单元(parent element)进行研究，在实际的应用中，可以根据真实情况将矩形单元“映射”(mapping)为所需要的任意四边形单元，请参见后面第 4.6 节的参数单元及变换。

【单元构造】4.3.2(1) 平面问题的 4 节点矩形单元

(1) 单元的几何和节点描述

平面 4 节点矩形单元如图 4-6 所示，单元的节点位移共有 8 个自由度(DOF)。节点的编号为 1、2、3、4，各自的位置坐标为 (x_i, y_i) , $i=1,2,3,4$ ，各个节点的位移(分别沿 x 方向和 y 方向)为 (u_i, v_i) , $i=1,2,3,4$ 。

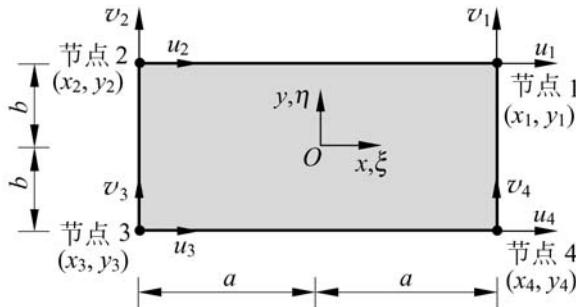


图 4-6 平面 4 节点矩形单元

若采用无量纲坐标

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (4-48)$$

则单元 4 个节点的几何位置为

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 = 1, \quad \eta_1 = 1 \\ \xi_2 = -1, \quad \eta_2 = 1 \\ \xi_3 = -1, \quad \eta_3 = -1 \\ \xi_4 = 1, \quad \eta_4 = -1 \end{array} \right\} \quad (4-49)$$

将所有节点上的位移组成一个列阵，记作 \mathbf{q}^e ；同样，将所有节点上的各个力也组成一个列阵，记作 \mathbf{P}^e ，那么

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}^T \quad (4-50)$$

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_{x1} & P_{y1} & P_{x2} & P_{y2} & P_{x3} & P_{y3} & P_{x4} & P_{y4} \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}^T \quad (4-51)$$

若该单元承受分布外载，可以将其等效到节点上，也可以表示为如式(4-51)所示的节点力。利用函数插值、几何方程、物理方程以及势能计算公式，可以将单元的所有力学参量用节点



位移列阵 \mathbf{q}^e 及相关的插值函数来表示；下面进行具体的推导。

(2) 单元位移场的表达

从图 4-6 可以看出，节点条件共有 8 个，即 x 方向 4 个 (u_1, u_2, u_3, u_4) ， y 方向 4 个 (v_1, v_2, v_3, v_4) ，因此， x 和 y 方向的位移场可以各有 4 个待定系数，即取以下多项式作为单元的位移场模式

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{array} \right\} \quad (4-52)$$

它们是具有完全一次项的非完全二次项，以上两式中右端的第四项是考虑到 x 方向和 y 方向的对称性而取的，除此外 xy 项还有个重要特点，就是“双线性”，当 x 或 y 不变时，沿 y 或 x 方向位移函数呈线性变化，这与前面的线性项最为相容，而 x^2 或 y^2 项是二次曲线变化的。因此，未选 x^2 或 y^2 项。

由节点条件，在 $x=x_i, y=y_i$ 处，有

$$\left. \begin{array}{l} u(x_i, y_i) = u_i \\ v(x_i, y_i) = v_i \end{array} \right\} \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (4-53)$$

将式(4-52)代入式(4-53)中，可以求解出待定系数 a_0, \dots, a_3 和 b_0, \dots, b_3 ，然后再代回式(4-52)中，经整理后有

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 + N_4(x, y)u_4 \\ v(x, y) = N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 + N_4(x, y)v_4 \end{array} \right\} \quad (4-54)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b}) \\ N_2(x, y) = \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b}) \\ N_3(x, y) = \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) \\ N_4(x, y) = \frac{1}{4}(1 + \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) \end{array} \right\} \quad (4-55)$$

如以无量纲坐标系(4-48)来表达，式(4-55)可以写成

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (4-56)$$

将式(4-54)写成矩阵形式，有



$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(2 \times 1)}(x, y) &= \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{(2 \times 8)} \cdot \mathbf{q}^e_{(8 \times 1)} \end{aligned} \quad (4-57)$$

其中 $\mathbf{N}(x, y)$ 为该单元的形状函数矩阵。

(3) 单元应变场的表达

由弹性力学平面问题的几何方程(矩阵形式), 有单元应变的表达

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(3 \times 1)}(x, y) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \\ (3 \times 2) \end{bmatrix} \mathbf{u}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} \partial \\ (3 \times 2) \end{bmatrix} \mathbf{N}_{(2 \times 8)} \cdot \mathbf{q}^e_{(8 \times 1)} = \mathbf{B}_{(3 \times 8)} \cdot \mathbf{q}^e_{(8 \times 1)} \quad (4-58)$$

其中几何矩阵 $\mathbf{B}(x, y)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(3 \times 8)}(x, y) &= \begin{bmatrix} \partial \\ (3 \times 2) \end{bmatrix} \mathbf{N}_{(2 \times 8)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \quad (4-59) \end{aligned}$$

式(4-59)中的子矩阵 \mathbf{B}_i 为

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (4-60)$$

(4) 单元应力场的表达

由弹性力学中平面问题的物理方程, 可得到单元的应力表达式



$$\underset{(3 \times 1)}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{(3 \times 3)}{\mathbf{D}} \underset{(3 \times 1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{(3 \times 3)}{\mathbf{D}} \underset{(3 \times 8)}{\mathbf{B}} \underset{(8 \times 1)}{\mathbf{q}^e} = \underset{(3 \times 8)}{\mathbf{S}} \underset{(8 \times 1)}{\mathbf{q}^e} \quad (4-61)$$

其中应力函数矩阵为 $\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$ 。

(5) 单元势能的表达

以上已将单元的三大基本变量 $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ 用基于节点位移列阵 \mathbf{q}^e 来进行表达, 见式(4-57)、式(4-58)及式(4-61); 将其代入单元的势能表达式中, 有 $\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{P}^{eT} \mathbf{q}^e$, 其中 \mathbf{K}^e 是 4 节点矩形单元的刚度矩阵, 即

$$\underset{(8 \times 8)}{\mathbf{K}^e} = \int_{A^e} \underset{(8 \times 3)}{\mathbf{B}^T} \underset{(3 \times 3)}{\mathbf{D}} \underset{(3 \times 8)}{\mathbf{B}} dA \cdot t = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & & & \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & & \text{sym} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (4-62)$$

其中 t 为平面问题的厚度, 式(4-62)中的各个子块矩阵为

$$\underset{(2 \times 2)}{\mathbf{k}_{rs}} = \int_{A^e} \underset{(2 \times 3)}{\mathbf{B}_r^T} \underset{(3 \times 3)}{\mathbf{D}} \underset{(3 \times 2)}{\mathbf{B}_s} \cdot t \cdot dx dy, \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (4-63)$$

基于式(4-60), 则可得到式(4-63)的具体表达为

$$\underset{(2 \times 2)}{\mathbf{k}_{rs}} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)ab} \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix} \quad (4-64)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= b^2 \xi_r \xi_s \left(1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s \right) + \frac{1-\mu}{2} a^2 \eta_r \eta_s \left(1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s \right) \\ k_2 &= ab \left(\mu \eta_r \xi_s + \frac{1-\mu}{2} \xi_r \eta_s \right) \\ k_3 &= ab \left(\mu \xi_r \eta_s + \frac{1-\mu}{2} \eta_r \xi_s \right) \\ k_4 &= a^2 \eta_r \eta_s \left(1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s \right) + \frac{1-\mu}{2} b^2 \xi_r \xi_s \left(1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s \right), (r, s = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

则单元刚度矩阵的显式为



$$\mathbf{K}^e = \frac{E\tau}{ab(1-\mu^2)} \times \begin{matrix} \text{sys} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{1-\mu}{2}a^2\right) & \frac{ab}{8}(1+\mu) & -\frac{1}{3}\left(b^2 - \frac{1-\mu}{4}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1-3\mu) & -\frac{1}{6}\left[b^2 + \frac{1-\mu}{2}a^2\right] & -\frac{ab}{8}(1+\mu) & \frac{1}{6}\left[b^2 - (1-\mu)a^2\right] & \frac{ab}{8}(1-3\mu) \\ \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{1-\mu}{2}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\mu) & \frac{1}{6}\left[a^2 - (1-\mu)b^2\right] & -\frac{ab}{8}(1+\mu) & -\frac{1}{6}\left[a^2 + \frac{1-\mu}{2}b^2\right] & -\frac{ab}{8}(1-3\mu) & \frac{1}{3}\left[-a^2 + \frac{1-\mu}{4}b^2\right] & \\ \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{1-\mu}{2}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1+\mu) & \frac{1}{6}\left[b^2 - (1-\mu)a^2\right] & -\frac{ab}{8}(1-3\mu) & -\frac{1}{6}\left[b^2 + \frac{1-\mu}{2}a^2\right] & \frac{ab}{8}(1+\mu) & \\ \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{1-\mu}{2}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\mu) & \frac{1}{3}\left[-a^2 + \frac{1-\mu}{4}b^2\right] & \frac{ab}{8}(1+\mu) & -\frac{1}{6}\left[a^2 + \frac{1-\mu}{2}b^2\right] & \\ \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{1-\mu}{2}a^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\mu) & \frac{1}{3}\left[-b^2 + \frac{1-\mu}{4}a^2\right] & -\frac{ab}{8}(1-3\mu) & \frac{1}{6}\left[a^2 - (1-\mu)b^2\right] & \\ \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{1-\mu}{2}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\mu) & -\frac{ab}{8}(1+\mu) & \\ \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{1-\mu}{2}a^2\right) & & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-65)$$

将单元的势能对节点位移 \mathbf{q}^e 取一阶极值，可得到单元的刚度方程

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (4-66)$$

【单元特征】4.3.2(2) 4 节点矩形单元的线性应变和应力

由单元的位移表达式(4-52)可知，4 节点矩形单元的位移在 x , y 方向呈线性变化，所以称为双线性位移模式，正在为在单元的边界 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 上，位移是按线性变化的，且相邻单元公共节点上有共同的节点位移值，可保证两个相邻单元在其公共边界上的位移是连续的，这种单元的位移模式是完备(completeness)和协调(compatibility)的(详见第 5.4.3 节的讨论)，它的应变和应力为一次线性变化，因而比 3 节点常应变单元精度高。

【典型例题】4.3.2(3) 三角形单元与矩形单元计算精度的比较

如图 4-7 所示的平面矩形结构，其 $E=1, t=1, \mu=0.25$ ，假设有约束和外载，即

$$\left. \begin{array}{l} \text{位移边界条件 } BC(u): u_A = 0, v_A = 0, u_D = 0 \\ \text{力边界条件 } BC(p): P_{Bx} = -1, P_{By} = 0, P_{Cx} = 1, P_{Cy} = 0, P_{Dy} = 0 \end{array} \right\} \quad (4-67)$$

试在以下两种建模情形下求该系统的位移场、应变场、应力场、各个节点上的支反力、系统的应变能、外力功、总势能。并比较这种建模方案的计算精度。

建模方案①：使用两个 CST 三角形单元，

建模方案②：使用一个 4 节点矩形单元。

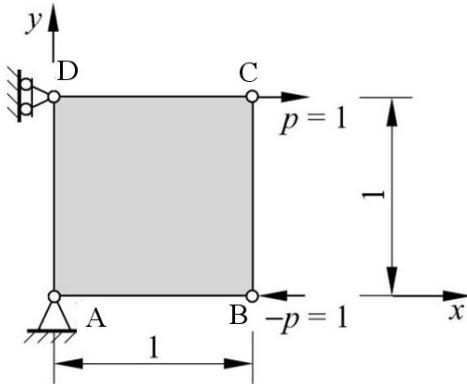
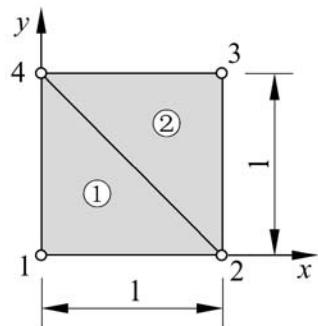
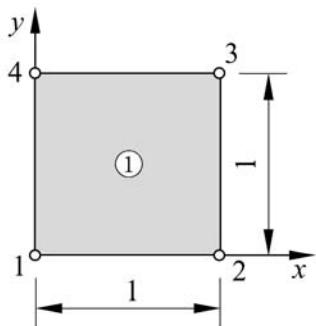


图 4-7 平面矩形结构的有限元分析

解答：建模方案①和建模方案②的单元划分及节点情况如图 4-8 所示。



(a) 建模方案①：使用两个 CST 三角形单元



(b) 建模方案②：使用一个四节点矩形单元

图 4-8 平面矩形结构的单元划分及节点编号

整体的节点位移列阵为

$$\mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T \quad (4-68)$$

(1) 建模方案①的有限元分析列式

根据式(4-44)，分别计算出单元 1 和单元 2 的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_4 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.7333 & 0.3333 & -0.5333 & -0.2000 & -0.2000 & -0.1333 \\ 0.3333 & 0.7333 & -0.1333 & -0.2000 & -0.2000 & -0.5333 \\ -0.5333 & -0.1333 & 0.5333 & 0 & 0 & 0.1333 \\ -0.2000 & -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0.2000 & 0 \\ -0.2000 & -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0.2000 & 0 \\ -0.1333 & -0.5333 & 0.1333 & 0 & 0 & 0.5333 \end{array} \right] & \leftarrow u_1 \\ & \leftarrow v_1 \\ & \leftarrow u_2 \\ & \leftarrow v_2 \\ & \leftarrow u_4 \\ & \leftarrow v_4 \end{array} \quad (4-69)$$

$\mathbf{K}^{(2)}$ 的数值与 $\mathbf{K}^{(1)}$ 相同，但所对应的节点位移为 $\mathbf{q}^{(2)} = [u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_2 \ v_2]^T$ ，将两个单元按



节点位移所对应的位置进行组装，得到总刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7333 & 0.3333 & -0.5333 & -0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.1333 \\ 0.3333 & 0.7333 & -0.1333 & -0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.5333 \\ -0.5333 & -0.1333 & 0.7333 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0.3333 \\ -0.2 & -0.2 & 0 & 0.7333 & -0.1333 & -0.5333 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -0.1333 & 0.7333 & 0.3333 & -0.5333 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & -0.5333 & 0.3333 & 0.7333 & -0.1333 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0 & 0.3333 & -0.5333 & -0.1333 & 0.7333 & 0 \\ -0.1333 & -0.5333 & 0.3333 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0.7333 \end{bmatrix} \quad (4-70)$$

该系统的刚度方程为

$$\underset{(8 \times 8)}{\mathbf{K}} \cdot \underset{(8 \times 1)}{\mathbf{q}} = \underset{(8 \times 1)}{\mathbf{P}} \quad (4-71)$$

其中 $\mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T$ 为节点位移，

$\mathbf{P} = [R_{1x} \ R_{1y} \ P_{2x} \ P_{2y} \ P_{3x} \ P_{3y} \ R_{4x} \ P_{4y}]^T$ 为节点力， R_{1x} ， R_{1y} ， R_{4x} 分别为节点 1 和节点 4 处的支反力。

由式(4-30)、式(4-35)以及式(4-39)计算各个单元的位移场、应变场、应力场。

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.71875x \\ -0.9375x + 0.78125y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} u^{(2)} \\ v^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.71875(x+2y-2) \\ 1.56425-2.5x-0.783y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = [-1.71875 \ 0.78125 \ -0.9375]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = [1.71875 \ -0.783 \ 0.9375]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = [1.6922 \ 0.3582 \ 0.375]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = [1.62453 \ -0.37687 \ 0.375]^T$$

位移场、应变场及应力场的分布如图 4-9 所示。

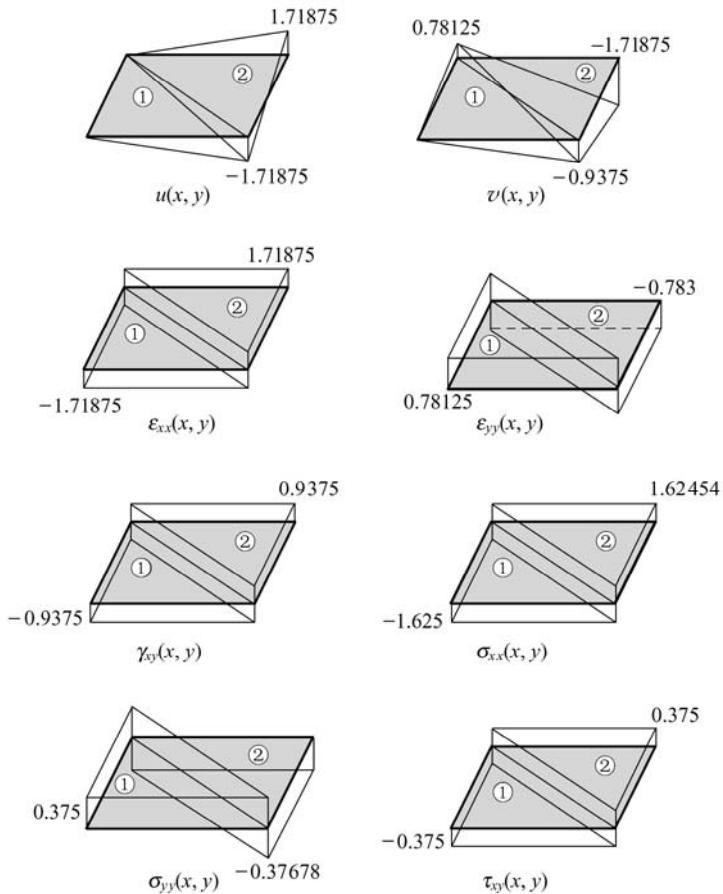


图 4-9 由建模方案①所得到的位移场、应变场及应力场分布

该系统的应变能

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = 1.71875$$

外力功

$$W = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{q} = 3.4375$$

系统的总势能

$$\Pi = U - W = -1.71875 \quad (4-72)$$

(2) 建模方案②的有限元分析列式

根据式(4-65), 计算出该单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.4889 & 0.1667 & -0.2889 & -0.03333 & -0.2444 & -0.1667 & 0.04444 & 0.03333 \\ 0.1667 & 0.4889 & 0.03333 & 0.04444 & -0.1667 & -0.2444 & -0.03333 & -0.2889 \\ -0.2889 & 0.03333 & 0.4889 & -0.1667 & 0.04444 & -0.03333 & -0.2444 & 0.1667 \\ -0.03333 & 0.04444 & -0.1667 & 0.4889 & 0.03333 & -0.2889 & 0.1667 & -0.2444 \\ -0.2444 & -0.1667 & 0.04444 & 0.03333 & 0.4889 & 0.1667 & -0.2889 & -0.03333 \\ -0.1667 & -0.2444 & -0.03333 & -0.2889 & 0.1667 & 0.4889 & 0.0333 & 0.04444 \\ 0.04444 & -0.03333 & -0.2444 & 0.1667 & -0.2889 & 0.03333 & 0.4889 & -0.1667 \\ 0.03333 & -0.2889 & 0.1667 & -0.2444 & -0.03333 & 0.04444 & -0.1667 & 0.4889 \end{bmatrix} \quad (4-73)$$



由于该结构只有一个单元，因此，总的刚度矩阵就是该矩阵，该系统的刚度方程为

$$\underset{(8 \times 8)}{\mathbf{K}} \cdot \underset{(8 \times 1)}{\mathbf{q}} = \underset{(8 \times 1)}{\mathbf{P}} \quad (4-74)$$

单元的位移场、应变场、应力场同样可由式(4-57)、式(4-58)以及式(4-61)计算。

可求出节点位移和支反力为

$$\left. \begin{array}{l} u_2 = -4.09091, v_2 = -4.09091, u_3 = 4.09091, v_3 = -4.09091, v_4 = 0 \\ R_{1x} = 1, R_{1y} = 0, R_{4x} = -1 \end{array} \right\} \quad (4-75)$$

那么，系统的节点位移列阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad -4.09091 \quad -4.09091 \quad 4.09091 \quad -4.09091 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (4-76)$$

单元位移场为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.09091(x - 2xy) \\ -4.09091x \end{bmatrix}$$

应变场为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.09091(1 - 2y) \\ 0 \\ -4.09091(1 - 2x) \end{bmatrix}$$

应力场为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.36363(1 - 2y) \\ -1.09091(1 - 2y) \\ -1.63636(1 - 2x) \end{bmatrix}$$

位移场、应变场及应力场的分布如图 4-10 所示。

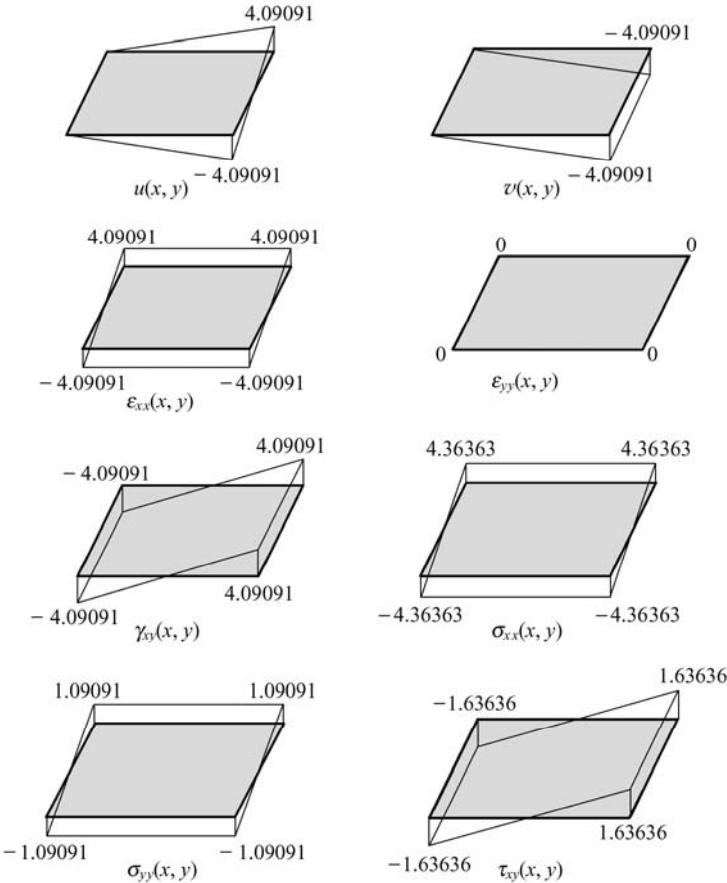


图 4-10 由建模方案②所得到的位移场、应变场及应力场分布

该系统的应变能

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = 4.09091$$

外力功

$$W = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{q} = 8.18182$$

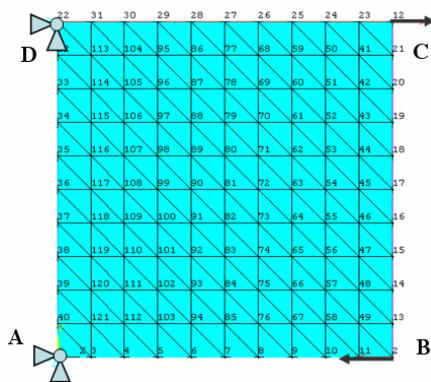
系统的总势能

$$\Pi = U - W = -4.09091 \quad (4-77)$$

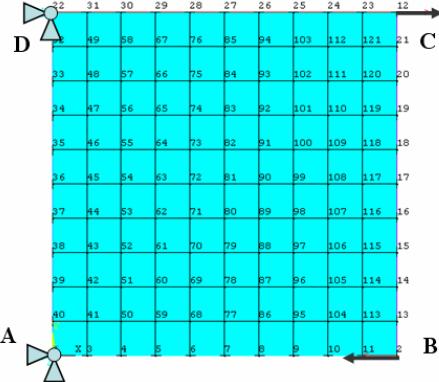
从以上计算可以看出，用三角形单元计算时，由于形函数是完全一次式，因而其应变场和应力场在单元内均为常数；而四边形单元其形函数带有二次式，计算得到的应变场和应力场都是坐标的一次函数，但不是完全的一次函数，对提高计算精度有一定作用；根据最小势能原理，势能越小，则整体计算精度越高，从式(4-72)与式(4-77)比较两种单元计算得到的系统势能，可以看出，在相同的节点自由度情况下，矩形单元的计算精度要比三角形单元高。下面进行的精细网格划分的计算也说明这一点。

【ANSYS 算例】4.3.2(4) 三角形单元与矩形单元的精细网格的计算比较

针对【典型例题】4.3.2(3)的问题，在 ANSYS 平台上，进行三角形单元与矩形单元的精细网格的划分，完成相应的力学分析。



(a)采用三角形单元的划分



(b)采用四边形单元的划分

图 4-11 基于 ANSYS 平台的精细网格划分(每边划分 10 段)

解答：下面基于 ANSYS 平台，进行三角形单元与矩形单元的精细网格的划分，见图 4-11。对该问题进行有限元分析的过程如下。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname (设置工作文件名) : TrussBridge → Press → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义分析类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Analysis Type → New Analysis → STATIC → OK

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → EX: 1 (弹性模量), PRXY: 0.25(泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“**X**”来关闭该窗口

(5) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Structural Solid: Quad 4node 42 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(6) 设置为带厚度的平面问题

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete → Add → Type 1 → OK → Real Constant Set No: 1 (第 1 号实常数), THK: 1 (平面问题的厚度) → OK → Close

(7) 定义实常数以确定厚度

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add... → Type 1 Plane42 → OK → Real Constants Set No: 1 (第 1 号实常数), Thickness: 1 (平面问题的厚度) → OK → Close

(8) 构造模型

生成几何模型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → Keypoint number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0,0,0 → Apply → (同样方式输入其余 3 个特征点坐标，分别为 (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0)) → OK

连接点生成面

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → Through KPs → Min, Max, Inc: 1,4,1 → OK



(9) 设定模型材料

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → MAT: 1, TYPE: 1 PLANE42, REAL: 1 → OK

(10) 网格划分

ANSYS Utility Menu: Select → Entities → Sele lines → Sele All → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → Size Cntrls → ManualSize → Lines → All Lines → Element Sizes on All Selected Lines: NDIV: 10 (每一条线分为 10 段), SPACE: 1 → OK → ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → MeshTool → Mesh: Areas, Shape: Tri, mapped → Mesh → Pick ALL

(11) 模型加约束

ANSYS Utility Menu: Select → Everything

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → Min, Max, Inc: 1 → OK → lab2: ALL DOF(约束 1 号特征点所有方向上的位移) → Apply → Min, Max, Inc: 4 → OK → lab2: UX(约束 4 号特征点 X 方向上的位移) → OK

(12) 施加载荷

在 2 号特征点上施加负 X 方向的外载:

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Keypoints → Min, Max, Inc: 2 → OK → Direction of force/moment: FX, Force/moment value: -1 → Apply

在 3 号节点上施加 X 方向的外载:

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Keypoints → Min, Max, Inc: 3 → OK → Direction of force/moment: FX, Force/moment value: 1 → OK

(13) 计算分析

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

(14) 结果显示

显示变形前后的位移:

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Deformed shape → Def + undeformed → OK

ANSYS Utility Menu: Parameters → Scalar Parameters → Selection 下输入 NB=NODE(1,0,0) → Accept → (以同样方式输入其余需要的结果参数表达式, 分别为 NB_UX=UX(NB); NB_UY=UY(NB); NC=NODE(1,1,0); NC_UX=UX(NC); NC_UY=UY(NC); STR_ENGY=0.5*(NB_UX*(-1)+NC_UX*(1)); POTE_ENGY=-0.5*(NB_UX*(-1)+NC_UX*(1))) → Close

ANSYS Utility Menu: List → Status → Parameters → All Parameters (显示所有计算结果)

(15) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

2 完整的命令流

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]4_3_2(4) %%%%%% begin %%%%%%
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,STATIC   !设定为静态分析
MP,EX,1,1        !定义 1 号材料的弹性模量
MP,PRXY,1,0.25  !设定 1 号材料的泊松比
```



```
ET,1,PLANE42      !选取单元类型 1
KEYOPT,1,3,3      !设置为带厚度的平面问题
R,1,1              !设定实常数 No.1, 厚度
K,1,0,0,0          !生成几何点 No.1
K,2,1,0,0          !生成几何点 No.2
K,3,1,1,0          !生成几何点 No.3
K,4,0,1,0          !生成几何点 No.4
A,1,2,3,4          !由几何点连成几何面 No.1
MAT,1              !设定为材料 No.1
TYPE,1              !设定单元 No.1
REAL,1              !设定实常数 No.1
!-----设置单元划分
LSEL,ALL            !选择所有的线
LESIZE,all,,10,,,1  !将所选择的线划分成 10 段
MSHAPE,1,2D          !设置三角形单元
!MSHAPE,0,2D          !设置四边形单元
MSHKEY,1              !设置映射划分
AMESH,1              !对面 No.1 进行网格划分
ALLSEL,ALL            !选择所有的对象
DK,1,ALL              !对几何点 1 施加固定的位移约束
DK,4,ALL              !对几何点 4 施加固定的位移约束
FK,2,FX,-1            !对几何点 2 施加外力 FX=-1
FK,3,FX,1              !对几何点 3 施加外力 FX=1
FINISH                !结束前处理
/SOLU                  !进入求解模块
SOLVE                  !求解
FINISH                  !结束求解
/POST1                  !进入后处理
PLDISP,1              !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)
NB=NODE(1,0,0)          !获取几何位置为(1,0,0) (B 点)所对应的节点号码, 赋值给 NB
NB_UX=UX(NB)            !获取节点号 NB 处的位移 UX, 赋值给 NB_UX
NB_UY=UY(NB)            !获取节点号 NB 处的位移 UY, 赋值给 NB_UY
ALLSEL,ALL              !选择所有的对象
NC=NODE(1,1,0)          !获取几何位置为(1,1,0) (C 点)所对应的节点号码, 赋值给 NC
NC_UX=UX(NC)            !获取节点号 NC 处的位移 UX, 赋值给 NC_UX
NC_UY=UY(NC)            !获取节点号 NC 处的位移 UY, 赋值给 NC_UY
STR_ENGY= 0.5*(NB_UX*(-1)+ NC_UX*(1))  !计算结构系统的应变能
POTE_ENGY=-0.5*(NB_UX*(-1)+ NC_UX*(1)) ! 计算结构系统的势能
*status,parm             !显示所有的参数
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]4_3_2(4) %%%%%% end %%%%%%
```

以下为计算结果:

采用三角形单元(每边分为 10 段)

NAME	VALUE	TYPE	DIMENSIONS
------	-------	------	------------



NB	2.00000000	SCALAR
NB_UX	-9.56063701	SCALAR
NB_UY	-9.36565959	SCALAR
NC	12.00000000	SCALAR
NC_UX	9.88621794	SCALAR
NC_UY	-10.0535107	SCALAR
POTE_ENGY	-9.72342747	SCALAR
STR_ENGY	9.72342747	SCALAR

采用四边形单元(每边分为 10 段)

NAME	VALUE	TYPE DIMENSIONS
NB	2.00000000	SCALAR
NB_UX	-12.6893715	SCALAR
NB_UY	-12.6893715	SCALAR
NC	12.00000000	SCALAR
NC_UX	12.6893715	SCALAR
NC_UY	-12.6893715	SCALAR
POTE_ENGY	-12.6893715	SCALAR
STR_ENGY	12.6893715	SCALAR

根据上面计算的 POTE_ENGY 参数，有以下的结果。

采用如图 4-11(a)所示三角形单元网格划分计算得到的该系统的势能为

$$\Pi = U - W = -9.72342747 \quad (4-78)$$

采用如图 4-11(b)所示矩形单元网格划分计算得到的该系统的势能为

$$\Pi = U - W = -12.6893715 \quad (4-79)$$

若比较式(4-72)、式(4-77)、式(4-78)与式(4-79)，读者完全可以对各个计算方案的计算精度有一个比较明确的评判和结论。

4.3.3 平面问题 3 节点三角形单元的 MATLAB 程序

【MATLAB 程序】4.3.3(1) 3 节点三角形单元的有限元分析程序(Triangle2D3Node)

编写如图 4-5 所示平面 3 节点三角形单元的单元刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。

解答：编写的平面 3 节点三角形单元的三个 MATLAB 函数如下。

Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,xi,yi,xj,yj,xm,ym,ID)

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，泊松比 NU，厚度 t，三个节点 i、j、m 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym，平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力，2 为平面应变)，输出单元刚度矩阵 k(6X6)。

Triangle2D3Node_Assembly(KK,k,i,j,m)

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 I、j、m，输出整体刚度矩阵 KK。

Triangle2D3Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,u,ID)

该函数计算单元的应力，输入弹性模量 E，泊松比 NU，厚度 t，三个节点 i、j、m 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym，平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力，2 为平面应变)，单元的位移列阵 u(6X1)，输出单元的应力 stress，



由于它为常应力单元，则单元的应力分量为 S_x, S_y, S_{xy} 。

基于第 4.3.1 节中的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%% Triangle2D3Node %%% begin %%%%%%
function k=Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,ID)
%该函数计算单元的刚度矩阵
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU, 厚度 t
%输入三个节点 i、j、m 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym
%输入平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力, 2 为平面应变)
%输出单元刚度矩阵 k(6X6)
%-----
A = (xi*(yj-ym) + xj*(ym-yi) + xm*(yi-yj))/2;
betai = yj-ym;
betaj = ym-yi;
betam = yi-yj;
gammai = xm-xj;
gammaj = xi-xm;
gammam = xj-xi;
B = [betai 0 betaj 0 betam 0 ;
      0 gammai 0 gammaj 0 gammam ;
      gammai betai gammaj betaj gammam betam]/(2*A);
if ID == 1
    D = (E/(1-NU*NU))*[1 NU 0 ; NU 1 0 ; 0 0 (1-NU)/2];
elseif ID == 2
    D = (E/(1+NU)/(1-2*NU))*[1-NU NU 0 ; NU 1-NU 0 ; 0 0 (1-2*NU)/2];
end
k= t*A*B'*D*B;
%%%%%
function z = Triangle2D3Node_Assembly(KK,k,i,j,m)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k
%输入单元的节点编号 i、j、m
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF(1)=2*i-1;
DOF(2)=2*i;
DOF(3)=2*j-1;
DOF(4)=2*j;
DOF(5)=2*m-1;
DOF(6)=2*m;
for n1=1:6
    for n2=1:6
        KK(DOF(n1),DOF(n2))= KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%%%%%
function stress=Triangle2D3Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,u,ID)
%该函数计算单元的应力
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU, 厚度 t
%输入三个节点 i、j、m 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym
%输入平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力, 2 为平面应变), 单元的位移列阵 u(6X1)
%输出单元的应力 stress(3X1), 由于它为常应力单元, 则单元的应力分量为  $S_x, S_y, S_{xy}$ 
```



```
%-----  
A = (xi*(yj-ym) + xj*(ym-yi) + xm*(yi-yj))/2;  
betai = yj-ym;  
betaj = ym-yi;  
betam = yi-yj;  
gammai = xm-xj;  
gammaj = xi-xm;  
gammam = xj-xi;  
B = [betai 0 betaj 0 betam 0 ;  
      0 gammai 0 gammaj 0 gammam ;  
      gammai betai gammaj betaj gammam betam]/(2*A);  
if ID == 1  
    D = (E/(1-NU*NU))*[1 NU 0 ; NU 1 0 ; 0 0 (1-NU)/2];  
elseif ID == 2  
    D = (E/(1+NU)/(1-2*NU))*[1-NU NU 0 ; NU 1-NU 0 ; 0 0 (1-2*NU)/2];  
end  
stress = D*B*u;  
%%%%%%%%%%%%% Triangle2D3Node %%% end %%%%%%%% %%%%%%
```

4.3.4 平面问题 4 节点矩形单元的 MATLAB 程序

【MATLAB 程序】4.3.4(1) 平面 4 节点矩形单元的有限元分析程序(Quad2D4Node)

编写如图 4-6 所示平面 4 节点四边形单元的单元刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。

解答：编写的平面 4 节点四边形单元的三个 MATLAB 函数如下。

Quad2D4Node_Stiffness(E,NU,h,xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,ID)

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，泊松比 NU，厚度 h，4 个节点 i、j、m、p 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp，平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力，2 为平面应变)，输出单元刚度矩阵 k(8X8)。

Quad2D4Node_Assembly(KK,k,i,j,m,p)

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i、j、m、p，输出整体刚度矩阵 KK。

Quad2D4Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,u,ID)

该函数计算单元的应力，输入弹性模量 E，泊松比 NU，厚度 h，4 个节点 i、j、m、p 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp，平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力，2 为平面应变)，单元的位移列阵 u(8X1)，输出单元的应力 stress(3X1)，由于它为常应力单元，则单元的应力分量为 Sx,Sy,Sxy。

基于第 4.3.2 节的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%%%%%%%%%% Quad2D4Node %%% begin %%%%%%%% %%%%%%  
function k= Quad2D4Node_Stiffness(E,NU,h,xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,ID)  
%该函数计算单元的刚度矩阵  
%输入弹性模量 E，泊松比 NU，厚度 h  
%输入 4 个节点 i、j、m、p 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp  
%输入平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力，2 为平面应变)  
%输出单元刚度矩阵 k(8X8)  
%-----  
syms s t;  
a = (yi*(s-1)+yj*(-1-s)+ym*(1+s)+yp*(1-s))/4;  
b = (yi*(t-1)+yj*(1-t)+ym*(1+t)+yp*(-1-t))/4;  
c = (xi*(t-1)+xj*(1-t)+xm*(1+t)+xp*(-1-t))/4;  
d = (xi*(s-1)+xj*(-1-s)+xm*(1+s)+xp*(1-s))/4;  
B1 = [a*(t-1)/4-b*(s-1)/4 0 ; 0 c*(s-1)/4-d*(t-1)/4 ;
```



```
c*(s-1)/4-d*(t-1)/4 a*(t-1)/4-b*(s-1)/4];
B2 = [a*(1-t)/4-b*(-1-s)/4 0 ; 0 c*(-1-s)/4-d*(1-t)/4 ;
c*(-1-s)/4-d*(1-t)/4 a*(1-t)/4-b*(-1-s)/4];
B3 = [a*(t+1)/4-b*(s+1)/4 0 ; 0 c*(s+1)/4-d*(t+1)/4 ;
c*(s+1)/4-d*(t+1)/4 a*(t+1)/4-b*(s+1)/4];
B4 = [a*(-1-t)/4-b*(1-s)/4 0 ; 0 c*(1-s)/4-d*(-1-t)/4 ;
c*(1-s)/4-d*(-1-t)/4 a*(-1-t)/4-b*(1-s)/4];
Bfirst = [B1 B2 B3 B4];
Jfirst = [0 1-t t-s s-1 ; t-1 0 s+1 -s-t ;
s-t -s-1 0 t+1 ; 1-s s+t -t-1 0];
J = [xi xj xm xp]*Jfirst*[yi ; yj ; ym ; yp]/8;
B = Bfirst/J;
if ID == 1
    D = (E/(1-NU*NU))*[1 NU 0 ; NU 1 0 ; 0 0 (1-NU)/2];
elseif ID == 2
    D = (E/(1+NU)/(1-2*NU))*[1-NU NU 0 ; NU 1-NU 0 ; 0 0 (1-2*NU)/2];
end
BD = J*transpose(B)*D*B;
r = int(int(BD, t, -1, 1), s, -1, 1);
z = h*r;
k = double(z);
%%%%%%%%%%%%%%%
function z = Quad2D4Node_Assembly(KK,k,i,j,m,p)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k, 单元的节点编号 i、j、m、p
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF(1)=2*i-1;
DOF(2)=2*i;
DOF(3)=2*j-1;
DOF(4)=2*j;
DOF(5)=2*m-1;
DOF(6)=2*m;
DOF(7)=2*p-1;
DOF(8)=2*p;
for n1=1:8
    for n2=1:8
        KK(DOF(n1),DOF(n2))= KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%%%%%%%%%%%%%%
function stress= Quad2D4Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,u,ID)
%该函数计算单元的应力
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU, 厚度 h,
%输入 4 个节点 i、j、m、p 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,
%输入平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力, 2 为平面应变)
%输入单元的位移列阵 u(8X1)
%输出单元的应力 stress(3X1)
%由于它为常应力单元, 则单元的应力分量为 Sx,Sy,Sxy
%-----
syms s t;
a = (yi*(s-1)+yj*(-1-s)+ym*(1+s)+yp*(1-s))/4;
b = (yi*(t-1)+yj*(1-t)+ym*(1+t)+yp*(-1-t))/4;
c = (xi*(t-1)+xj*(1-t)+xm*(1+t)+xp*(-1-t))/4;
```

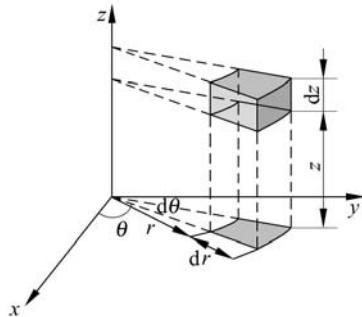


```
d = (xi*(s-1)+xj*(-1-s)+xm*(1+s)+xp*(1-s))/4;
B1 = [a*(t-1)/4-b*(s-1)/4 0 ; 0 c*(s-1)/4-d*(t-1)/4 ;
      c*(s-1)/4-d*(t-1)/4 a*(t-1)/4-b*(s-1)/4];
B2 = [a*(1-t)/4-b*(-1-s)/4 0 ; 0 c*(-1-s)/4-d*(1-t)/4 ;
      c*(-1-s)/4-d*(1-t)/4 a*(1-t)/4-b*(-1-s)/4];
B3 = [a*(t+1)/4-b*(s+1)/4 0 ; 0 c*(s+1)/4-d*(t+1)/4 ;
      c*(s+1)/4-d*(t+1)/4 a*(t+1)/4-b*(s+1)/4];
B4 = [a*(-1-t)/4-b*(1-s)/4 0 ; 0 c*(1-s)/4-d*(-1-t)/4 ;
      c*(1-s)/4-d*(-1-t)/4 a*(-1-t)/4-b*(1-s)/4];
Bfirst = [B1 B2 B3 B4];
Jfirst = [0 1-t t-s s-1 ; t-1 0 s+1 -s-t ;
          s-t -s-1 0 t+1 ; 1-s s+t -t-1 0];
J = [xi xj xm xp]*Jfirst*[yi ; yj ; ym ; yp]/8;
B = Bfirst/J;
if ID == 1
    D = (E/(1-NU*NU))*[1 NU 0 ; NU 1 0 ; 0 0 (1-NU)/2];
elseif ID == 2
    D = (E/(1+NU)/(1-2*NU))*[1-NU NU 0 ; NU 1-NU 0 ; 0 0 (1-2*NU)/2];
end
str1 = D*B*u;
str2 = subs(str1, {s,t}, {0,0});
stress = double(str2);
%%%%%%%%%%%%%% Quad2D4Node %%%% end %%%%%%
```

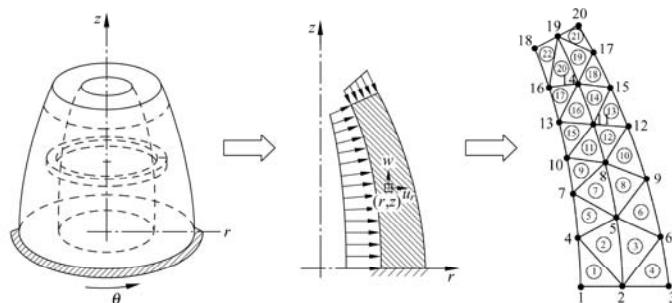
4.4 轴对称问题有限元分析的标准化表征

4.4.1 轴对称问题的基本变量及方程

有许多实际工程问题，其几何形状、约束条件以及载荷都对称于某一固定轴，这类问题为轴对称问题，对于这类问题，采用柱坐标 (r, θ, z) 比较方便，如图 4-12(a)所示。轴对称问题(axisymmetric problem)的微小体元 $rdr\theta dz$ 以及有限元离散过程如图 4-12 所示，在每一个截面中，它的单元情况与一般平面问题相同，但这些单元都为环形单元。



(a) 轴对称问题中的微小体元 $rdr\theta dz$





(b) 轴对称问题的有限元离散(环形单元)

图 4-12 轴对称问题的微小体元与有限元离散

【基本变量】4.4.1(1) 轴对称问题的三大类变量

对于轴对称问题，在柱坐标中的三大类力学变量为

位移 $[u_r \ w]^T, \quad u_\theta = 0$

应变 $[\varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\theta\theta} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{rz}]^T, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$

应力 $[\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{zz} \ \tau_{rz}]^T, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$

以上 u_r 为沿 r 方向的位移分量，称为径向位移， w 为沿 z 方向的位移分量，也称为轴向位移，由于对称，环向位移 $u_\theta = 0$ ； ε_{rr} 为径向正应变， $\varepsilon_{\theta\theta}$ 为环向正应变， ε_{zz} 为轴向正应变， γ_{rz} 为 r 方向与 z 方向之间的剪应变； σ_{rr} 为径向正应力， $\sigma_{\theta\theta}$ 为环向正应力， σ_{zz} 为轴向正应力， τ_{rz} 为圆柱坐标面上沿 z 方向的剪应力。由于是轴对称问题，所以以上力学参量只是 r 和 z 的函数，与 θ 无关；其中非零的三大基本力学变量有 10 个。

【基本方程】4.4.1(2) 轴对称问题的三大类方程及边界条件

(1) 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \bar{b}_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \bar{b}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-80)$$

(2) 几何方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (4-81)$$

(3) 物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \mu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{rr})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \\ \gamma_{rz} &= \frac{1}{G} \tau_{rz} \end{aligned} \right\} \quad (4-82)$$

(4) 边界条件(BC)

典型的边界条件为



$$\text{位移 BC}(u): \quad \left. \begin{array}{l} u_r = \bar{u}_r \\ w = \bar{w} \end{array} \right\} \quad \text{on } S_u \quad (4-83)$$

$$\text{力 BC}(p): \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \bar{\sigma}_{rr} \\ \sigma_{zz} = \bar{\sigma}_{zz} \end{array} \right\} \quad \text{on } S_p \quad (4-84)$$

4.4.2 3 节点三角形轴对称单元(环形单元)

【单元构造】4.4.2(1) 3 节点三角形轴对称单元(环形单元)

(1) 单元的几何和节点描述

3 节点三角形轴对称单元(axisymmetric ring element) 如图 4-13 所示; 该单元为横截面为 3 节点三角形的 360^0 环形单元。其横截面上三个节点的编号为 1、2、3，各自的位置坐标为 (r_i, z_i) , $i=1,2,3$ ，各个节点的位移(分别沿 r 方向和 z 方向)为 (u_{ri}, w_i) , $i=1,2,3$ 。

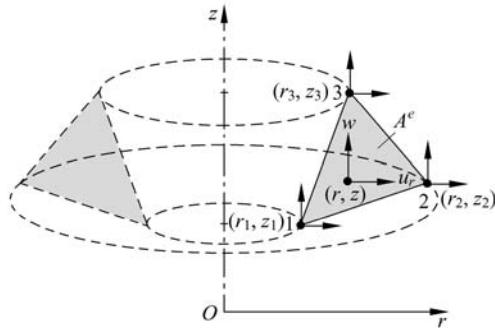


图 4-13 三节点轴对称单元 (环形单元)

如图 4-14 所示，该单元为绕 z 轴的环状单元，在 roz 平面内，单元的节点位移有 6 个自由度 (DOF)。将所有节点上的位移组成一个列阵，记作 \mathbf{q}^e ；同样，将所有节点上的各个力也组成一个列阵，记作 \mathbf{P}^e ，那么

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_{r1} & w_1 & u_{r2} & w_2 & u_{r3} & w_3 \end{bmatrix}^T \quad (4-85)$$

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_{r1} & P_{z1} & P_{r2} & P_{z2} & P_{r3} & P_{z3} \end{bmatrix}^T \quad (4-86)$$

(2) 单元位移场的表达

由于有 3 个节点，在 r 方向和 z 方向上各有 3 个节点条件，因此设它的单元位移模式为

$$\left. \begin{array}{l} u_r(r, z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 r + \bar{a}_2 z \\ w(r, z) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 r + \bar{b}_2 z \end{array} \right\} \quad (4-87)$$

该模式与平面问题 3 节点三角形单元完全相同，由节点条件可以推出相同的形状函数矩阵，即



$$\mathbf{u}_{(2 \times 1)}(r, z) = \begin{bmatrix} u_r(r, z) \\ w(r, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ w_1 \\ u_{r2} \\ w_2 \\ u_{r3} \\ w_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{(2 \times 6)}(r, z) \cdot \mathbf{q}^e_{(6 \times 1)} \quad (4-88)$$

其中形状函数矩阵 $\mathbf{N}(r, z)$ 及其 N_1, N_2, N_3 的表达与平面问题 3 节点单元相同。

(3) 单元应变场及应力场的表达

由轴对称问题的几何方程可以推出相应的几何矩阵，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(4 \times 1)}(r, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(r, z) \\ w(r, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \\ (4 \times 2) \end{bmatrix}_{(2 \times 3)} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial \\ (4 \times 2) \end{bmatrix}_{(2 \times 6)} \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B}_{(4 \times 6)} \mathbf{q}^e \quad (4-89)$$

其中几何矩阵 $\mathbf{B}(r, z)$ 为

$$\mathbf{B}_{(4 \times 6)} = \begin{bmatrix} \partial \\ (4 \times 2) \end{bmatrix}_{(2 \times 6)} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4-90)$$

由弹性力学中轴对称问题的物理方程可以得到应力场的表达

$$\boldsymbol{\sigma}_{(4 \times 1)} = \mathbf{D}_{(4 \times 4)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(4 \times 1)} = \mathbf{D}_{(4 \times 4)} \mathbf{B}_{(4 \times 6)} \mathbf{q}^e = \mathbf{S}_{(4 \times 6)} \mathbf{q}^e \quad (4-91)$$

其中应力函数矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$, \mathbf{D} 为轴对称问题的弹性系数矩阵，即

$$\mathbf{D}_{(4 \times 4)} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (4-92)$$



(4) 单元的势能、刚度矩阵及等效节点载荷矩阵

由单元的势能计算表达式，有 $\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{P}^{eT} \mathbf{q}^e$ ，其中单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{A^e} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r d\theta dr dz = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} 2\pi r dr dz \quad (4-93)$$

相应的单元等效节点载荷矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \\ &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} 2\pi r dr dz + \int_{I_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} 2\pi r dl \end{aligned} \quad (4-94)$$

将单元的势能对节点位移 \mathbf{q}^e 取一阶极值，可得到单元的刚度方程

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (4-95)$$

4.4.3 4 节点矩形轴对称单元(环形单元)

【单元构造】4.4.3(1) 4 节点矩形轴对称单元(环形单元)

4 节点矩形轴对称单元如图 4-14 所示；该单元为横截面为 4 节点矩形的 360° 环形单元。其横截面上 4 个节点的编号为 1、2、3、4，各自的位置坐标为 (r_i, w_i) , $i=1,2,3,4$ ，各个节点的位移(分别沿 r 方向和 z 方向)为 (u_{ri}, w_i) , $i=1,2,3,4$ 。

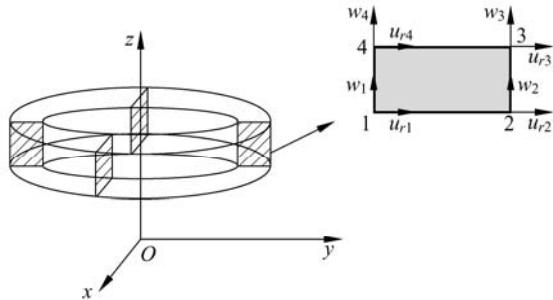


图 4-14 4 节点矩形轴对称单元(环形单元)

如图 4-15 所示，该单元为绕 z 轴的环形单元，在 Orz 平面内，单元的节点位移有 8 个自由度(DOF)。将所有节点上的位移组成一个列阵，记作 \mathbf{q}^e ；同样，将所有节点上的各个力也组成一个列阵，记作 \mathbf{P}^e ，那么

$$\mathbf{q}^e = [u_{r1} \quad w_1 \quad u_{r2} \quad w_2 \quad u_{r3} \quad w_3 \quad u_{r4} \quad w_4]^T \quad (4-96)$$

$$\mathbf{P}^e = [P_{r1} \quad P_{z1} \quad P_{r2} \quad P_{z2} \quad P_{r3} \quad P_{z3} \quad P_{r4} \quad P_{z4}]^T \quad (4-97)$$

若该单元承受分布外载，可以将其等效到节点上，即也可以表示为如(4-97)式所示的节点力。利用函数插值、几何方程、物理方程以及势能计算公式，可以将单元的所有力学参量用节点位移列阵 \mathbf{q}^e 及相关的插值函数来表示；下面进行具体的推导。



由于该单元有 4 节点，在 x 方向和 y 方向上各有 4 个节点条件，类似于平面四节点矩形单元，设它的单元位移模式为

$$\left. \begin{array}{l} u_r(r, z) = a_0 + a_1 r + a_2 z + a_3 r z \\ w(r, z) = b_0 + b_1 r + b_2 z + b_3 r z \end{array} \right\} \quad (4-98)$$

同样，参见平面 4 节点矩形单元，可推出它的形状函数矩阵 $\mathbf{N}(r, z)$ ，由轴对称问题的几何方程可以推出相应的几何矩阵 $\mathbf{B}(r, z)$ ，最后也可导出单元的刚度方程

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e \quad (4-99)$$

其中单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{A^e} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r d\theta dr dz = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} 2\pi r dr dz \quad (4-100)$$

相应的单元等效节点载荷矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \\ &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} 2\pi r dr dz + \int_{I_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} 2\pi r dl \end{aligned} \quad (4-101)$$

4.5 空间问题有限元分析的标准化表征

4.5.1 空间问题的 4 节点四面体单元描述

空间问题 4 节点四面体单元具有几何特征简单、描述能力强的特点，是空间问题有限元分析中最基础的单元，也是最重要的单元之一。

【单元构造】4.5.1(1) 空间问题的 4 节点四面体单元

(1) 单元的几何和节点描述

该单元为由 4 节点组成的四面体单元(tetrahedron element)，每个节点有 3 个位移(即三个自由度)，单元的节点及节点位移如图 4-15 所示。

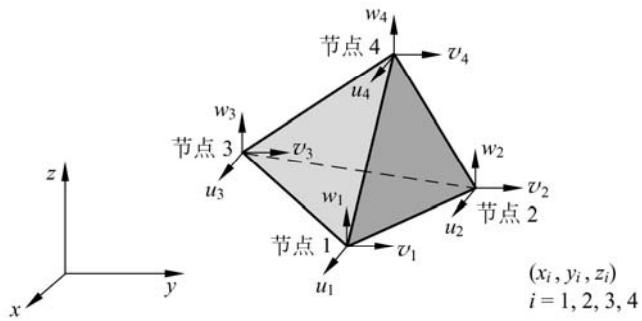


图 4-15 4 节点四面体单元

(1) 单元的几何和节点描述



如图 4-15 所示的 4 节点四面体单元，单元的节点位移列阵 \mathbf{q}^e 和节点力列阵 \mathbf{P}^e 为

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & u_3 & v_3 & w_3 & u_4 & v_4 & w_4 \end{bmatrix}^T \quad (4-102)$$

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_{x1} & P_{y1} & P_{z1} & P_{x2} & P_{y2} & P_{z2} & P_{x3} & P_{y3} & P_{z3} & P_{x4} & P_{y4} & P_{z4} \end{bmatrix}^T \quad (4-103)$$

(2) 单元位移场的表达

该单元有 4 个节点，单元的节点位移有 12 个自由度(DOF)。因此每个方向的位移场可以设定 4 个待定系数，根据节点个数以及确定位移模式的基本原则(从低阶到高阶的完备性、唯一确定性)，选取该单元的位移模式为

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 z \\ v(x, y, z) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 x + \bar{b}_2 y + \bar{b}_3 z \\ w(x, y, z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 x + \bar{c}_2 y + \bar{c}_3 z \end{array} \right\} \quad (4-104)$$

由节点条件，在 $x=x_i, y=y_i, z=z_i$ 处，有

$$\left. \begin{array}{l} u(x_i, y_i, z_i) = u_i \\ v(x_i, y_i, z_i) = v_i \\ w(x_i, y_i, z_i) = w_i \end{array} \right\}, \quad i=1,2,3,4 \quad (4-105)$$

将式(4-104)代入节点条件(4-105)中，可求取待定系数(a_i, b_i, c_i)， $i=0, 1, 2, 3$ 。在求得待定系数后，可重写式(4-104)为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e(x, y, z) &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}^e \\ &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (4-106)$$

其中

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z), \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (4-107)$$

V 为四面体的体积， a_i, b_i, c_i, d_i 为与节点几何位置相关的系数，具体的计算公式见文献^[16]。

(3) 单元应变场及应力场的表达

由弹性力学空间问题的几何方程，并将单元位移场的表达式(4-106)代入，有



$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\epsilon}^{(6 \times 1)}(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \end{bmatrix}_{(6 \times 3)}^{(3 \times 1)} \mathbf{u} \\
 &= \begin{bmatrix} \partial \end{bmatrix}_{(6 \times 3)}^{(3 \times 12)} \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}^e
 \end{aligned} \tag{4-108}$$

其中几何矩阵 $\mathbf{B}(x, y, z)$ 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial \end{bmatrix}_{(6 \times 3)}^{(3 \times 12)} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}_{(6 \times 3)} \tag{4-109}$$

式(4-109)中的 \mathbf{B}_i 为

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial \end{bmatrix}_{(6 \times 3)}^{(6 \times 3)} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \tag{4-110}$$

再由弹性力学中空间问题的物理方程可以得到应力场的表达

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_{(6 \times 6)} \mathbf{B}_{(6 \times 1)} \mathbf{q}^e = \mathbf{S}_{(6 \times 12)} \mathbf{q}^e \tag{4-111}$$

其中 \mathbf{D} 为空间问题的弹性系数矩阵。

(4) 单元的刚度矩阵及节点等效载荷矩阵

在获得几何矩阵 $\mathbf{B}(x, y, z)$ 后, 由刚度矩阵的计算公式, 可计算单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \tag{4-112}$$

等效节点载荷矩阵为

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \tag{4-113}$$

(5) 单元刚度方程



将单元的势能(4-42)式对节点位移 \mathbf{q}^e 取一阶极值, 可得到单元的刚度方程

$$\mathbf{K}^e_{(12 \times 12)} \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e_{(12 \times 1)} \quad (4-114)$$

【单元特征】4.5.1(2) 4 节点四面体单元的位移坐标变换问题

与平面 3 节点三角形单元类似, 由于该单元的节点位移是以整体坐标系中的 x 方向位移 u 、 y 方向位移 v 、 z 方向位移 w 来定义的, 所以没有坐标变换问题。

【单元特征】4.5.1(3) 4 节点四面体单元的常系数应变和应力

同样与平面 3 节点三角形单元类似, 由于该单元的位移场为线性关系(4-104)式, 由公式(4-110)可知, 系数 a_i, b_i, c_i, d_i 只与三个节点的坐标位置 (x_i, y_i, z_i) 相关, 是常系数, 因而求出的单元的 $\mathbf{B}(x, y, z)$ 和 $\mathbf{S}(x, y, z)$ 都为常系数矩阵, 不随 x, y, z 变化, 由式(4-108)和式(4-111)式可知, 单元内任意一点的应变和应力都为常数, 因此, 4 节点四面体单元称为常应变(应力)CST 单元(constant strain triangle)。在实际使用过程中, 对于应变梯度较大(也即应力梯度比较大)的区域, 单元划分应适当加密, 否则将不能反映应变(应力)的真实变化情况, 从而导致较大的误差。

4.5.2 空间问题的 8 节点正六面体单元描述

【单元构造】4.5.2(1) 空间问题的 8 节点正六面体单元

(1) 单元的几何和节点描述

该单元为由 8 节点组成的正六面体单元(hexahedron element), 每个节点有 3 个位移(即 3 个自由度), 单元的节点及节点位移如图 4-16 所示。

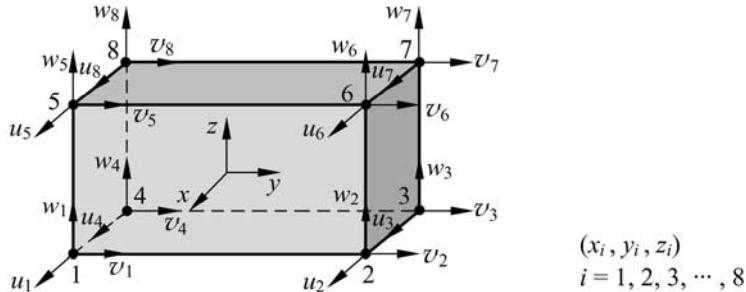


图 4-16 8 节点正六面体单元

如图 4-16 所示的 8 节点正六面体单元, 单元的节点位移有 24 个自由度(DOF)。单元的节点位移列阵 \mathbf{q}^e 和节点力列阵 \mathbf{P}^e 为

$$\mathbf{q}^e_{(24 \times 1)} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad : \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad : \quad \cdots \quad : \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8]^T \quad (4-115)$$

$$\mathbf{P}^e_{(2 \times 1)} = [P_{x1} \quad P_{y1} \quad P_{z1} \quad : \quad P_{x2} \quad P_{y2} \quad P_{z2} \quad : \quad \cdots \quad : \quad P_{x8} \quad P_{y8} \quad P_{z8}]^T \quad (4-116)$$

(2) 单元位移场的表达



该单元有 8 个节点，因此每个方向的位移场可以设定 8 个待定系数，根据确定位移模式的基本原则（从低阶到高阶、唯一确定性），选取该单元的位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5yz + a_6zx + a_7xyz \\ v(x, y, z) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5yz + b_6zx + b_7xyz \\ w(x, y, z) &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5yz + c_6zx + c_7xyz \end{aligned} \right\} \quad (4-117)$$

可由节点条件确定出待定系数(a_i, b_i, c_i), $i=0, 1, 2, \dots, 8$, 再代回式(4-117)中可整理出该单元的形状函数矩阵，即

$$\mathbf{u}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & 0 & N_2 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & 0 & 0 & N_2 & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{N}_{(3 \times 24)} \cdot \mathbf{q}^e_{(24 \times 1)} \quad (4-118)$$

由于节点位移多达 24 个，由节点条件直接确定位移模式中的待定系数和形状函数矩阵的方法显得非常的麻烦，可利用单元的自然坐标直接应用拉格朗日插值(Lagrangian interpolation)公式写出形状函数矩阵(有关讨论见第 5.2.1 节)。

在得到该单元的形状函数矩阵后，就可以按照有限元分析的标准过程推导相应的几何矩阵、刚度矩阵、节点等效载荷矩阵以及刚度方程，相关情况如下。

(3) 单元应变场的表达

由弹性力学平面问题的几何方程(矩阵形式)，有单元应变的表达

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \mathbf{u}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \mathbf{N}_{(6 \times 3)} \mathbf{q}^e_{(24 \times 1)} = \mathbf{B}_{(6 \times 24)} \mathbf{q}^e_{(24 \times 1)} \quad (4-119)$$

(4) 单元的刚度矩阵及等效节点载荷矩阵

由弹性力学中平面问题的物理方程，可得到单元的应力表达，然后计算单元的势能，与前面的推导其它单元的过程类似，可以得到单元的刚度矩阵及等效节点载荷矩阵为

$$\mathbf{K}^e_{(24 \times 24)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T_{(24 \times 6)} \mathbf{D}_{(6 \times 6)} \mathbf{B}_{(6 \times 24)} d\Omega \quad (4-120)$$

$$\mathbf{P}^e_{(24 \times 1)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T_{(24 \times 3)} \bar{\mathbf{b}}_{(3 \times 1)} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T_{(24 \times 3)} \bar{\mathbf{p}}_{(3 \times 1)} dA \quad (4-121)$$

(5) 单元的刚度方程

将单元的势能对节点位移 \mathbf{q}^e 取一阶极值，可得到单元的刚度方程

$$\mathbf{K}^e_{(24 \times 24)} \mathbf{q}^e_{(24 \times 1)} = \mathbf{P}^e_{(24 \times 1)} \quad (4-122)$$

【单元特征】4.5.2(2) 8 节点正六面体单元的一次线性应变和应力

与平面 4 节点四边形单元类似，由单元的位移表达式(4-117)可知，该单元的位移在 x, y, z 方向呈线性变化，所以称为线性位移模式，正因为单元的边界上，位移是按线性变化的，且相邻单元公共节点上有共同的节点位移值，可保证两个相邻单元在其公共边界上的



位移是连续的，这种单元的位移模式是完备(completeness)和协调(compatibility)的，它的应变和应力为一次线性变化，因而比4节点四面体常应变单元精度高。

4.5.3 空间问题4节点四面体单元的MATLAB程序

【MATLAB程序】4.5.3(1) 4节点四面体单元的有限元分析程序(Tetrahedron3D4Node)

编写如图4-15所示空间4节点四面体单元的单元刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。

解答：编写的空间4节点四面体单元的三个MATLAB函数如下。

Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn)

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量E，泊松比NU，4个节点i、j、m、n的坐标xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn，输出单元刚度矩阵k(12X12)。

Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k,i,j,m,n)

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵k，单元的节点编号i、j、m、n，输出整体刚度矩阵KK。

Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn,u)

该函数计算单元的应力，输入弹性模量E，泊松比NU，4个节点i、j、m、n的坐标xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn，单元的位移列阵u(12X1)，输出单元的应力stress，由于它为常应力单元，则单元的应力分量为Sx,Sy,Sz,Sxy,Syz,Szx。

基于前面的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的MATLAB程序如下。

```
%%%%%%%
% Tetrahedron3D4Node %%%%
function k = Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4)
%该函数计算单元的刚度矩阵
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU
%输入 4 个节点 i、j、m、n 的坐标 xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn
%输出单元刚度矩阵 k(12X12)
%-----
%以下数组与书中的对应关系
% betai - bi
% gammai - ci
% deltai - di
% i = 1:4
xyz = [1 x1 y1 z1 ; 1 x2 y2 z2 ; 1 x3 y3 z3 ; 1 x4 y4 z4];
V = det(xyz)/6;
mbeta1 = [1 y2 z2 ; 1 y3 z3 ; 1 y4 z4];
mbeta2 = [1 y1 z1 ; 1 y3 z3 ; 1 y4 z4];
mbeta3 = [1 y1 z1 ; 1 y2 z2 ; 1 y4 z4];
mbeta4 = [1 y1 z1 ; 1 y2 z2 ; 1 y3 z3];
mgamma1 = [1 x2 z2 ; 1 x3 z3 ; 1 x4 z4];
mgamma2 = [1 x1 z1 ; 1 x3 z3 ; 1 x4 z4];
mgamma3 = [1 x1 z1 ; 1 x2 z2 ; 1 x4 z4];
mgamma4 = [1 x1 z1 ; 1 x2 z2 ; 1 x3 z3];
mdelta1 = [1 x2 y2 ; 1 x3 y3 ; 1 x4 y4];
mdelta2 = [1 x1 y1 ; 1 x3 y3 ; 1 x4 y4];
mdelta3 = [1 x1 y1 ; 1 x2 y2 ; 1 x4 y4];
mdelta4 = [1 x1 y1 ; 1 x2 y2 ; 1 x3 y3];
beta1 = -1*det(mbeta1);
beta2 = det(mbeta2);
```



```
beta3 = -1*det(mbeta3);
beta4 = det(mbeta4);
gamma1 = det(mgamma1);
gamma2 = -1*det(mgamma2);
gamma3 = det(mgamma3);
gamma4 = -1*det(mgamma4);
delta1 = -1*det(mdelta1);
delta2 = det(mdelta2);
delta3 = -1*det(mdelta3);
delta4 = det(mdelta4);
B1 = [beta1 0 0 ; 0 gamma1 0 ; 0 0 delta1 ;
      gamma1 beta1 0 ; 0 delta1 gamma1 ; delta1 0 beta1];
B2 = [beta2 0 0 ; 0 gamma2 0 ; 0 0 delta2 ;
      gamma2 beta2 0 ; 0 delta2 gamma2 ; delta2 0 beta2];
B3 = [beta3 0 0 ; 0 gamma3 0 ; 0 0 delta3 ;
      gamma3 beta3 0 ; 0 delta3 gamma3 ; delta3 0 beta3];
B4 = [beta4 0 0 ; 0 gamma4 0 ; 0 0 delta4 ;
      gamma4 beta4 0 ; 0 delta4 gamma4 ; delta4 0 beta4];
B = [B1 B2 B3 B4]/(6*V);
D = (E/((1+NU)*(1-2*NU)))*[1-NU NU NU 0 0 0 ; NU 1-NU NU 0 0 0 ; NU NU 1-NU 0 0 0 ;
    0 0 0 (1-2*NU)/2 0 0 ; 0 0 0 (1-2*NU)/2 0 ; 0 0 0 0 (1-2*NU)/2];
y = abs(V)*B'*D*B;
%%%%%%%
function y = Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k,i,j,m,n)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k
%输入单元的节点编号 i、j、m、n
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF = [3*i-2:3*i,3*j-2:3*j,3*m-2:3*m,3*n-2:3*n];
for n1=1:12
    for n2=1:12
        KK(DOF(n1),DOF(n2))= KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
y=KK;
%%%%%%%
function y = Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,u)
%该函数计算单元的应力
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU
%输入 4 个节点 i、j、m、n 的坐标 xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn
%输入单元的位移列阵 u(12X1)
%输出单元的应力 stress(6X1)
%由于它为常应力单元, 应力分量为 Sx,Sy,Sz,Sxy,Syz,Szx
%-----
xyz = [1 x1 y1 z1 ; 1 x2 y2 z2 ; 1 x3 y3 z3 ; 1 x4 y4 z4];
V = det(xyz)/6;
mbeta1 = [1 y2 z2 ; 1 y3 z3 ; 1 y4 z4];
mbeta2 = [1 y1 z1 ; 1 y3 z3 ; 1 y4 z4];
mbeta3 = [1 y1 z1 ; 1 y2 z2 ; 1 y4 z4];
mbeta4 = [1 y1 z1 ; 1 y2 z2 ; 1 y3 z3];
mgamma1 = [1 x2 z2 ; 1 x3 z3 ; 1 x4 z4];
mgamma2 = [1 x1 z1 ; 1 x3 z3 ; 1 x4 z4];
mgamma3 = [1 x1 z1 ; 1 x2 z2 ; 1 x4 z4];
mgamma4 = [1 x1 z1 ; 1 x2 z2 ; 1 x3 z3];
```



```
mdelta1 = [1 x2 y2 ; 1 x3 y3 ; 1 x4 y4];
mdelta2 = [1 x1 y1 ; 1 x3 y3 ; 1 x4 y4];
mdelta3 = [1 x1 y1 ; 1 x2 y2 ; 1 x4 y4];
mdelta4 = [1 x1 y1 ; 1 x2 y2 ; 1 x3 y3];
beta1 = -1*det(mbeta1);
beta2 = det(mbeta2);
beta3 = -1*det(mbeta3);
beta4 = det(mbeta4);
gamma1 = det(mgamma1);
gamma2 = -1*det(mgamma2);
gamma3 = det(mgamma3);
gamma4 = -1*det(mgamma4);
delta1 = -1*det(mdelta1);
delta2 = det(mdelta2);
delta3 = -1*det(mdelta3);
delta4 = det(mdelta4);
B1 = [beta1 0 0 ; 0 gamma1 0 ; 0 0 delta1 ;
      gamma1 beta1 0 ; 0 delta1 gamma1 ; delta1 0 beta1];
B2 = [beta2 0 0 ; 0 gamma2 0 ; 0 0 delta2 ;
      gamma2 beta2 0 ; 0 delta2 gamma2 ; delta2 0 beta2];
B3 = [beta3 0 0 ; 0 gamma3 0 ; 0 0 delta3 ;
      gamma3 beta3 0 ; 0 delta3 gamma3 ; delta3 0 beta3];
B4 = [beta4 0 0 ; 0 gamma4 0 ; 0 0 delta4 ;
      gamma4 beta4 0 ; 0 delta4 gamma4 ; delta4 0 beta4];
B = [B1 B2 B3 B4]/(6*V);
D = (E/((1+NU)*(1-2*NU)))*[1-NU NU NU NU 0 0 0 ; NU 1-NU NU NU 0 0 0 ; NU NU 1-NU NU 0 0 0 ;
                                0 0 0 (1-2*NU)/2 0 0 ; 0 0 0 (1-2*NU)/2 0 ; 0 0 0 0 (1-2*NU)/2];
y = D*B*u;
%%%%%%%%%%%%% Tetrahedron3D4Node %%%% end %%%%%%
```

4.5.4 空间问题 8 节点正六面体单元的 MATLAB 程序

【MATLAB 程序】4.5.4(1) 8 节点正六面体单元的有限元分析程序(Hexahedral3D8Node)

编写如图 4-16 所示 8 节点六面体单元的刚度矩阵、单元组装、单元应力的计算程序。

解答：编写的空间 8 节点正六面体单元的三个 MATLAB 函数如下。

```
Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8)
```

该函数计算单元的刚度矩阵，输入弹性模量 E，泊松比 NU，8 个节点的坐标 x1、y1、z1、x2、y2、z2、x3、y3、z3、x4、y4、z4、x5、y5、z5、x6、y6、z6、x7、y7、z7、x8、y8、z8，输出单元刚度矩阵 k(24X24)。

```
Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k,i,j,l,m,n,o,p,q)
```

该函数进行单元刚度矩阵的组装，输入单元刚度矩阵 k，单元的节点编号 i、j、l、m、n、o、p、q，输出整体刚度矩阵 KK。

```
Hexahedral3D8Node_Stress(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8,u)
```

该函数计算单元中心点的应力，输入弹性模量 E，泊松比 NU，8 个节点的坐标 x1、y1、z1、x2、y2、z2、x3、y3、z3、x4、y4、z4、x5、y5、z5、x6、y6、z6、x7、y7、z7、x8、y8、z8，单元的位移列阵 u (6X1)，输出单元中心的应力 stress(6X1)，则单元的应力分量为 Sx,Sy,Sz,Sxy,Syz,Szx。

基于第 5.4.2 节的基本公式，可以编写出具体实现以上每个函数的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%%%%%%%%%% Hexahedral3D8Node %%% begin %%%%%%
```

```
function
```

```
k=Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8)
```

```
%该函数计算单元的刚度矩阵
```



```
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU
%输入 8 个节点的坐标 x1、y1、z1、x2、y2、z2、x3、y3、z3、x4、y4、z4、
%输入 x5、y5、z5、x6、y6、z6、x7、y7、z7、x8、y8、z8
%输出单元刚度矩阵 k(24X24)
%-----
syms s t n; % 定义局部坐标系
% 定义形状函数N
N1=(1+s)*(1-t)*(1-n)/8;
N2=(1+s)*(1+t)*(1-n)/8;
N3=(1-s)*(1+t)*(1-n)/8;
N4=(1-s)*(1-t)*(1-n)/8;
N5=(1+s)*(1-t)*(1+n)/8;
N6=(1+s)*(1+t)*(1+n)/8;
N7=(1-s)*(1+t)*(1+n)/8;
N8=(1-s)*(1-t)*(1+n)/8;
% 定义坐标变换
x=N1*x1+N2*x2+N3*x3+N4*x4+N5*x5+N6*x6+N7*x7+N8*x8;
y=N1*y1+N2*y2+N3*y3+N4*y4+N5*y5+N6*y6+N7*y7+N8*y8;
z=N1*z1+N2*z2+N3*z3+N4*z4+N5*z5+N6*z6+N7*z7+N8*z8;
% 定义雅可比矩阵
J=[diff(x,s),diff(y,s),diff(z,s);diff(x,t),diff(y,t),diff(z,t);diff(x,n),diff(y,n),diff(z,n)];
Jdet=det(J);
J
Jdet
% 定义B矩阵的系数
a=diff(y,t)*diff(z,n)-diff(z,t)*diff(y,n);
b=diff(y,s)*diff(z,n)-diff(z,s)*diff(y,n);
c=diff(y,s)*diff(z,t)-diff(z,s)*diff(y,t);
d=diff(x,t)*diff(z,n)-diff(z,t)*diff(x,n);
e=diff(x,s)*diff(z,n)-diff(z,s)*diff(x,n);
f=diff(x,s)*diff(z,t)-diff(z,s)*diff(x,t);
g=diff(x,t)*diff(y,n)-diff(y,t)*diff(x,n);
h=diff(x,s)*diff(y,n)-diff(y,s)*diff(x,n);
l=diff(x,s)*diff(y,t)-diff(y,s)*diff(x,t);
% 通过循环计算各个矩阵
Ns=[N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8];
Bs=sym(zeros(6,3,8));
for i=1:8
    Bs(:,:,i)=[a*diff(Ns(i),s)-b*diff(Ns(i),t)+c*diff(Ns(i),n),0,0;
    0,-d*diff(Ns(i),s)+e*diff(Ns(i),t)-f*diff(Ns(i),n),0; 0,0,g*diff(Ns(i),s)-h*diff(Ns(i),t)+l*diff(Ns(i),n);
    -d*diff(Ns(i),s)+e*diff(Ns(i),t)-f*diff(Ns(i),n),a*diff(Ns(i),s)-b*diff(Ns(i),t)+c*diff(Ns(i),n),0;
    0,g*diff(Ns(i),s)-h*diff(Ns(i),t)+l*diff(Ns(i),n),-d*diff(Ns(i),s)+e*diff(Ns(i),t)-f*diff(Ns(i),n);
    g*diff(Ns(i),s)-h*diff(Ns(i),t)+l*diff(Ns(i),n),0,a*diff(Ns(i),s)-b*diff(Ns(i),t)+c*diff(Ns(i),n)]/Jdet;
end
% 计算 B 矩阵
B=[Bs(:,:,1),Bs(:,:,2),Bs(:,:,3),Bs(:,:,4),Bs(:,:,5),Bs(:,:,6),Bs(:,:,7),Bs(:,:,8)];
B
% 计算 D 矩阵
D=(E/((1+NU)*(1-2*NU)))*[1-NU,NU,NU,0,0,0;NU,1-NU,NU,0,0,0;NU,NU,1-NU,0,0,0;
0,0,0,0.5-NU,0,0;0,0,0,0.5-NU,0;0,0,0,0,0,0.5-NU];
D
% 计算单元刚度矩阵 k
BD=Jdet*transpose(B)*D*B;
z=(int(int(int(BD,n,-1,1),t,-1,1),s,-1,1));
z
k=double(z);
```



```
%%%%%
function z = Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k,i,j,l,m,n,o,p,q)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k
%输入单元的节点编号 i、j、l、m、n、o、p、q
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF=[3*i-2:3*i,3*j-2:3*j,3*l-2:3*l,3*m-2:3*m,3*n-2:3*n,3*o-2:3*o,3*p-2:3*p,3*q-2:3*q];
for n1=1:24
    for n2=1:24
        KK(DOF(n1),DOF(n2))=KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%%%%%
function
stress=Hexahedral3D8Node_Stress(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8,u)
%该函数计算单元中心点的应力
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU
%输入 8个节点的坐标 x1、y1、z1、x2、y2、z2、x3、y3、z3、x4、y4、z4、
%输入 x5、y5、z5、x6、y6、z6、x7、y7、z7、x8、y8、z8
%输入单元的位移列阵 u (6X1)
%输出单元中心的应力 stress(6X1),应力分量为 Sx,Sy,Sz,Sxy,Syz,Szx
%-----
syms s t n; % 定义局部坐标系
% 定义形状函数N
N1=(1+s)*(1-t)*(1-n)/8;
N2=(1+s)*(1+t)*(1-n)/8;
N3=(1-s)*(1+t)*(1-n)/8;
N4=(1-s)*(1-t)*(1-n)/8;
N5=(1+s)*(1-t)*(1+n)/8;
N6=(1+s)*(1+t)*(1+n)/8;
N7=(1-s)*(1+t)*(1+n)/8;
N8=(1-s)*(1-t)*(1+n)/8;
% 定义坐标变换
x=N1*x1+N2*x2+N3*x3+N4*x4+N5*x5+N6*x6+N7*x7+N8*x8;
y=N1*y1+N2*y2+N3*y3+N4*y4+N5*y5+N6*y6+N7*y7+N8*y8;
z=N1*z1+N2*z2+N3*z3+N4*z4+N5*z5+N6*z6+N7*z7+N8*z8;
% 定义雅可比矩阵
J=[diff(x,s),diff(y,s),diff(z,s);diff(x,t),diff(y,t),diff(z,t);diff(x,n),diff(y,n),diff(z,n)];
Jdet=det(J);
% 定义B矩阵的系数
a=diff(y,t)*diff(z,n)-diff(z,t)*diff(y,n);
b=diff(y,s)*diff(z,n)-diff(z,s)*diff(y,n);
c=diff(y,s)*diff(z,t)-diff(z,s)*diff(y,t);
d=diff(x,t)*diff(z,n)-diff(z,t)*diff(x,n);
e=diff(x,s)*diff(z,n)-diff(z,s)*diff(x,n);
f=diff(x,s)*diff(z,t)-diff(z,s)*diff(x,t);
g=diff(x,t)*diff(y,n)-diff(y,t)*diff(x,n);
h=diff(x,s)*diff(y,n)-diff(y,s)*diff(x,n);
l=diff(x,s)*diff(y,t)-diff(y,s)*diff(x,t);
% 通过循环计算各个矩阵
Ns=[N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8];
Bs=sym(zeros(6,3,8));
```



```

for i=1:8
    Bs(:,i)=[a*diff(Ns(i),s)-b*diff(Ns(i),t)+c*diff(Ns(i),n),0,0;
    0,-d*diff(Ns(i),s)+e*diff(Ns(i),t)-f*diff(Ns(i),n),0;
    0,0,g*diff(Ns(i),s)-h*diff(Ns(i),t)+l*diff(Ns(i),n);
    -d*diff(Ns(i),s)+e*diff(Ns(i),t)-f*diff(Ns(i),n),a*diff(Ns(i),s)-b*diff(Ns(i),t)+c*diff(Ns(i),n),0;
    0,g*diff(Ns(i),s)-h*diff(Ns(i),t)+l*diff(Ns(i),n),-d*diff(Ns(i),s)+e*diff(Ns(i),t)-f*diff(Ns(i),n);
    g*diff(Ns(i),s)-h*diff(Ns(i),t)+l*diff(Ns(i),n),0,a*diff(Ns(i),s)-b*diff(Ns(i),t)+c*diff(Ns(i),n)]/Jdet;
end
% 计算 B 矩阵
B=[Bs(:,1),Bs(:,2),Bs(:,3),Bs(:,4),Bs(:,5),Bs(:,6),Bs(:,7),Bs(:,8)];
% 计算 D 矩阵
D=(E/((1+NU)*(1-2*NU)))*[1-NU,NU,NU,0,0,0;NU,1-NU,NU,0,0,0;NU,NU,1-NU,0,0,0;
0,0,0.5-NU,0,0;0,0,0.5-NU,0;0,0,0,0,0.5-NU];
% 计算应力向量
w=D*B*u;
% 在单元的中心处计算应力
wcent=subs(w,{s,t,n},{0,0,0})
stress=double(wcent)
%%%%%% Hexahedral3D8Node %%%%

```

4.6 形状映射参数单元的一般原理和数值积分

由于实际问题的复杂性，需要使用一些几何形状不太规整的单元来逼近原问题，特别是在一些复杂的边界上，有时只能采用不规整单元；但直接研究这些不规整单元则比较困难，如何利用几何规整单元（如三角形单元、矩形单元、正六面体单元）的结果来研究(推导)所对应的几何不规整单元（叫做参数单元 (parametric element)）的表达式？这将涉及到几何形状映射、坐标系变换（等参变换、非等参变换）等问题^[22]。

4.6.1 两个坐标系之间的三个方面的变换

由前面的单元构造过程可以看出，一个单元的关键就是计算它的刚度矩阵，以平面问题为例，对于两个坐标系 (x, y) 和 (ξ, η) ，单元刚度矩阵的计算公式分别为：

- 在坐标系 (x, y) 中

$$\mathbf{K}_{(xy)}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) dx dy \cdot t \quad (4-123)$$

其中 $\mathbf{B}(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 为 (x, y) 坐标系中的单元几何矩阵，它是 $(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 的函数。

- 在坐标系 (ξ, η) 中

$$\mathbf{K}_{(\xi\eta)}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^{*T}(\xi, \eta, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^*(\xi, \eta, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}) d\xi d\eta \cdot t \quad (4-124)$$

其中 $\mathbf{B}^*(\xi, \eta, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta})$ 为 (ξ, η) 坐标系中的单元几何矩阵，它是 $(\xi, \eta, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta})$ 的函数。

可以看出，要实现两个坐标系中单元刚度矩阵的变换(transformation)或映射(mapping)，必须计算两个坐标系之间的三种映射关系，即

坐标映射(mapping of coordinate)

$$(x, y) \Rightarrow (\xi, \eta) \quad (4-125)$$

偏导数映射(mapping of partial differential)

$$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) \Rightarrow (\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}) \quad (4-126)$$



面积(体积)映射(mapping of area)

$$\int_{A^e} dx dy \Rightarrow \int_{A^e} d\xi d\eta \quad (4-127)$$

下面就两个坐标系之间的这三种映射关系进行具体的推导，在获得这三种映射关系后，就可以实现不同坐标系下单元刚度矩阵之间的变换。

就图 4-17 所示得平面问题情形，设有两个坐标系：基准坐标系 (ξ, η) (reference coordinate) 和物理坐标系 (x, y) (physical coordinate)；其中基准坐标系 (ξ, η) 用于描述几何形状非常规整的基准单元(parent element)(如矩形单元，正六面体单元)，而工程问题中曲边单元(curved element)(往往其几何形状不太规整，但可以映射为规整的几何形状)是在物理坐标系 (x, y) 中，可以看出，前面所讨论的几种单元都是在基准坐标系 (ξ, η) 中进行研究的，现在我们希望利用在基准坐标系 (ξ, η) 中所得到的单元表达来推导在物理坐标系 (x, y) 中的单元表达，由此，可将已有的单元的应用范围大大的扩大。

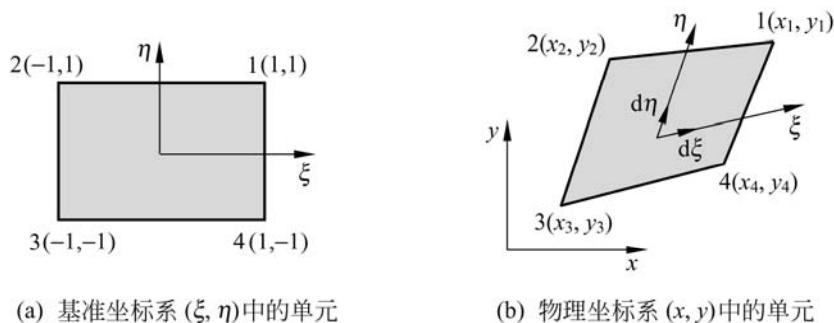


图 4-17 矩形单元映射为任意四边形单元

【基本原理】4.6.1(1) 两个坐标系之间的函数映射

设如图 4-17 所示的两个坐标系的坐标映射关系为

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (4-128)$$

下面，我们针对图中所示的四节点四边形的坐标映射，给出式(4-128)的具体表达式。由于基准坐标系 (ξ, η) 中的一点对应于物理坐标系 (x, y) 中的一个相应点，就图中的四个角点，有节点映射条件

$$\begin{cases} x_i = x(\xi_i, \eta_i) \\ y_i = y(\xi_i, \eta_i) \end{cases} \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (4-129)$$

这表明 x 方向和 y 方向各有 4 个节点条件，如果用多项式来表达坐标映射关系，则 x 和 y 方向上可以分别写出各包含有 4 个待定系数的多项式，即

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \\ y(\xi, \eta) = b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta \end{cases} \quad (4-130)$$

其中待定系数 a_0, \dots, a_3 和 b_0, \dots, b_3 可由节点映射条件(4-129)来唯一确定。

对照前面 4 节点矩形单元的单元位移函数式(4-52)，映射函数式(4-130)具有完全相同的形式，同样，将求出的待定系数再代回式(4-130)中，重写该式为



$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \tilde{N}_1(\xi, \eta)x_1 + \tilde{N}_2(\xi, \eta)x_2 + \tilde{N}_3(\xi, \eta)x_3 + \tilde{N}_4(\xi, \eta)x_4 \\ y(\xi, \eta) &= \tilde{N}_1(\xi, \eta)y_1 + \tilde{N}_2(\xi, \eta)y_2 + \tilde{N}_3(\xi, \eta)y_3 + \tilde{N}_4(\xi, \eta)y_4 \end{aligned} \right\} \quad (4-131)$$

其中

$$\tilde{N}_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i=1,2,3,4 \quad (4-132)$$

比较后发现式(4-132)与式(4-56)完全相同。

如果将物理坐标系 (x, y) 中的每一个节点坐标值进行排列，并写成一个列阵，有

$$\tilde{\mathbf{q}}_{(8 \times 1)} = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4]^T \quad (4-133)$$

进一步可将式(4-131)写成

$$\mathbf{X}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 & 0 & \tilde{N}_3 & 0 & \tilde{N}_4 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 & 0 & \tilde{N}_3 & 0 & \tilde{N}_4 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{(8 \times 1)} = \tilde{\mathbf{N}}_{(2 \times 8)} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{(8 \times 1)} \quad (4-134)$$

这就可以实现两个坐标系间的映射。

【基本原理】4.6.1(2) 两个坐标系之间的偏导数映射

对物理坐标系 (x, y) 中的任意一个函数 $\Phi(x, y)$ ，求它的偏导数，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (4-135)$$

则偏导数的变换关系为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4-136)$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4-137)$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4-138)$$

称为雅可比矩阵(Jacobian matrix)；也可将式(4-136)写成以下逆形式



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4-139)$$

其中 $|\mathbf{J}|$ 是矩阵 \mathbf{J} 的行列式(determinant), 即

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4-140)$$

将式(4-139)写成显式

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{array} \right\} \quad (4-141)$$

这就是两个坐标系的偏导数映射关系。

【基本原理】4.6.1(3) 两个坐标系之间的面(体)积元映射

如图 4-17 所示, 在物理坐标系 (x, y) 中, 由 $d\xi$ 和 $d\eta$ 所围成的微小平行四边形, 其面积为

$$dA = |d\xi \times d\eta| \quad (4-142)$$

由于 $d\xi$ 和 $d\eta$ 在物理坐标系 (x, y) 中的分量为

$$\left. \begin{array}{l} d\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \cdot \mathbf{j} \\ d\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \cdot \mathbf{j} \end{array} \right\} \quad (4-143)$$

其中 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别为物理坐标系 (x, y) 中的 x 方向和 y 方向的单位向量。由(4-142)式, 则有面积微元的变换计算

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4-144)$$

式(4-144)给出了 (x, y) 坐标系中面积 dA 的变换计算公式; 同样, 就三维问题, 在 (x, y, z) 坐标系中, 由 $d\xi$ 、 $d\eta$ 和 $d\zeta$ 所围成的微小六面体的体积为 $d\Omega = d\xi \cdot (d\eta \times d\zeta)$, 则有体积微元的变换



$$d\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (4-145)$$

该式给出了 (x, y, z) 坐标系中体积 $d\Omega$ 的变换计算公式。

4.6.2 参数单元的三种类型

对照物理坐标系 (x, y) 中的任意四边形单元与基准坐标系 (ξ, η) 中的矩形单元之间的坐标映射(4-134)式，基于两个形状函数矩阵 $\tilde{\mathbf{N}}(\xi, \eta)$ 和 $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ 中插值函数的阶次，有单元变换的如下定义。

【基本原理】4.6.2(1) 等参元、超参元以及亚参元

根据几何形状映射函数的阶次与位移函数插值的阶次的比较来给出参数单元的定义。

等参元(iso-parametric element):

几何形状矩阵 $\tilde{\mathbf{N}}$ 中的插值阶次=位移形状矩阵 \mathbf{N} 中的插值阶次

超参元(super-parametric element):

几何形状矩阵 $\tilde{\mathbf{N}}$ 中的插值阶次>位移形状矩阵 \mathbf{N} 中的插值阶次

亚参元(sub-parametric element):

几何形状矩阵 $\tilde{\mathbf{N}}$ 中的插值阶次<位移形状矩阵 \mathbf{N} 中的插值阶次

由于插值阶次是由节点数量决定的，所以，可由几何形状变换的节点数和位移插值函数的节点数直接判断参数单元的性质，见图 4-18。

研究表明，对于等参元以及亚参元，位移函数可以满足完备性要求，而超参元不满足完备性要求。

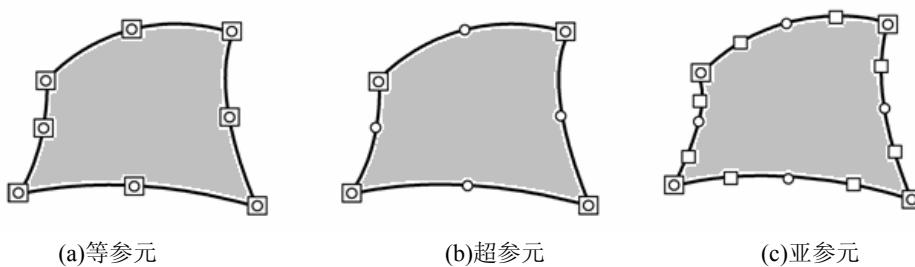


图 4-18 等参元、超参元以及亚参元的示意
(圆圈表示几何映射坐标点，方形表示位移插值用的节点)

4.6.3 参数单元刚度矩阵计算的数值积分

对于一个实际的单元，可以实现整个单元刚度矩阵在两个坐标系的变换计算，即



$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{(xy)}^e &= \int_{A^e} \mathbf{B}^T(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) dA \cdot t \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{*T}(\xi, \eta, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^*(\xi, \eta, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \cdot t\end{aligned}\quad (4-146)$$

就平面 4 节点等参元，式(4-146)将变换成以下形式的积分，其刚度矩阵的元素为

$$k_{(xy)ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{A_0 + B_0 \xi + C_0 \eta} [(A_{\alpha i} + B_{\alpha i} \xi + C_{\alpha i} \eta)(A_{\beta j} + B_{\beta j} \xi + C_{\beta j} \eta)] d\xi d\eta \cdot t \quad (i, j=1, 2, \dots, 8) \quad (4-147)$$

其中 $A_0, B_0, C_0, A_{\alpha i}, B_{\alpha i}, C_{\alpha i}, A_{\beta j}, B_{\beta j}, C_{\beta j}$ 为系数。这个积分很难以解析的形式给出，一般都采用近似的数值积分法，常用的是 Gauss 积分公式，它是一种高精度和高效率的数值积分方法。

在计算刚度矩阵系数时，往往要计算复杂函数的定积分，下面介绍在有限元分析中广泛使用的数值积分(numerical integration)方法。

【基本原理】4.6.3(1) 数值积分的 Gauss 方法

一个函数的定积分，可以通过 n 个点的函数值以及它们的加权组合来计算，即

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n A_k f(\xi_k) \quad (4-148)$$

其中 $f(\xi)$ 为被积函数， n 为积分点数， A_k 为积分权系数， ξ_k 为积分点位置，当 n 确定时， A_k 和 ξ_k 也为对应的确定值。下面给出式(4-148)的计算原理及确定 A_k 和 ξ_k 的方法。

下面具体给出几种情况的 Gauss 积分点(Gauss integral point)及权系数(weight coefficient)。

(1) 1 点 Gauss 积分公式

即式(4-148)中的 $n=1$ ，这时

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx 2 \cdot f(0) \quad (4-149)$$

显然， $A_1 = 2, \xi_1 = 0$ 这就是梯形积分公式。

(2) 2 点 Gauss 积分

即式(4-148)中的 $n=2$ ，这时

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx A_1 f(\xi_1) + A_2 f(\xi_2) \quad (4-150)$$

这里需要确定 A_1, A_2, ξ_1 和 ξ_2 ；除用构造正交多项式的方法来进行推导和确定 Gauss 积分点和权函数外，也可以直接进行推导来求取，为更好地理解 Gauss 积分的性质，下面给出直接方法。



基于这样一个思想：要求公式(4-150)当 $f(\xi)$ 分别取为 1, ξ , ξ^2 , ξ^3 时精确成立，并由此来确定出这四个系数 A_1 , A_2 , ξ_1 和 ξ_2 。

令 $f(\xi)$ 分别为 1, ξ , ξ^2 , ξ^3 , 将其代入式(4-150)中，可得到以下 4 个方程

$$\left. \begin{array}{l} 2 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 \\ \frac{2}{3} = A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 \\ 0 = A_1 \xi_1^3 + A_2 \xi_2^3 \end{array} \right\} \quad (4-151)$$

解出

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, A_1 = A_2 = 1 \quad (4-152)$$

则 2 点 Gauss 积分公式为

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (4-153)$$

(3) 高次多点 Gauss 积分

对于 n 点 Gauss 积分

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx A_1 f(\xi_1) + A_2 f(\xi_2) + \dots + A_n f(\xi_n) \quad (4-154)$$

如果按照上面的方法来确定 ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_n , A_1 , A_2 , ... A_n , 则要求解多元高次方程组，难度较大，实际中，一般都采用 Legendre 多项式来构造和求取相应的积分点 ξ_i 和积分权系数 A_i 。

常用 Gauss 数值积分的有关数据可在手册中查到(见表 4-5)。

表 4-5 常用 Gauss 积分点位置及积分权系数

积分点 n	积分点 ξ_i	对应的积分权系数 A_i
1	0. 000000000000000	2.000000000000000
2	± 0.577350269189626	1.000000000000000
3	± 0.774596669241483	0.555555555555556
	0. 000000000000000	0.888888888888889
4	± 0.861136311594053	0.347854845137454
	0. 339981043584856	0.652145154862546

(4) 2D 和 3D 问题的 Gauss 积分

可将一维 (1D) Gauss 积分直接推广到 2D 和 3D 情形的积分。

2D 情形



$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^n A_j f(\xi_j, \eta) d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[A_i \sum_{j=1}^n (A_j f(\xi_j, \eta_i)) \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j f(\xi_j, \eta_i) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} f(\xi_j, \eta_i)
 \end{aligned} \tag{4-155}$$

其中 $A_{ij} = A_i A_j$, 且 ξ_i, η_j, A_i, A_j 都是一维 Gauss 积分的积分点和权系数。

3D 情形

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\
 &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_m A_j A_i f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \\
 &= \sum_{i,j,m=1}^n A_{mji} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m)
 \end{aligned} \tag{4-156}$$

其中 $A_{mji} = A_m A_j A_i$, 且 $\xi_i, \eta_j, \zeta_m, A_i, A_j, A_m$ 都是一维 Gauss 积分的积分点和权系数。

【典型例题】4.6.3(2) 平面 4 节点四边形等参元的刚度矩阵的计算

如图 4-19 所示为一个平面 4 节点四边形等参元，试采用 4 点 Gauss 积分计算该单元的刚度矩阵。材料的弹性模量为 $E = 30 \times 10^6 \text{ MPa}$, 泊松比为 $\mu = 0.3$, 厚度为 $t = 0.1 \text{ m}$ 。

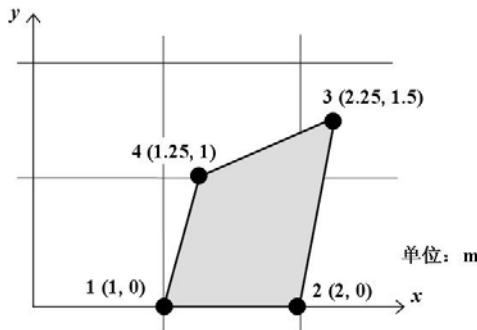


图 4-19 一个平面 4 节点四边形等参元

解答：根据该单元的几何形状，可得到坐标的映射函数为

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + N_3(\xi, \eta)x_3 + N_4(\xi, \eta)x_4 \\
 &= \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4] \\
 &= \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta) + 2(1+\xi)(1-\eta) + 2.25(1+\xi)(1+\eta) + 1.25(1-\xi)(1+\eta)]
 \end{aligned} \tag{4-157}$$



$$\begin{aligned}
y(\xi, y) &= N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + N_3(\xi, \eta)y_3 + N_4(\xi, \eta)y_4 \\
&= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4] \\
&= \frac{1}{4}[1.5(1+\xi)(1+\eta) + (1-\xi)(1+\eta)]
\end{aligned} \tag{4-158}$$

它的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4-159}$$

具体计算雅可比矩阵中的各项为

$$\left. \begin{array}{l} J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \\ J_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \\ J_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(0.5 - 0.5\eta) \\ J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2.5 - 0.5\xi) \end{array} \right\} \tag{4-160}$$

雅可比矩阵的行列式为

$$|\mathbf{J}| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = \frac{1}{16}(4 - \xi - \eta) \tag{4-161}$$

则位移函数关于坐标系的偏导数变换为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4-162}$$

应变分量关于两个坐标系的计算表达式为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4-163}$$

其中 \mathbf{H} 为



$$\mathbf{H} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{21} \end{bmatrix} \quad (4-164)$$

而

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{N}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} \quad (4-165)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{N}(\xi, \eta) \quad (4-166)$$

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \quad (4-167)$$

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4-168)$$

将式(4-164)以及(4-165)代入(4-163)中，有

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad (4-169)$$

其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} \quad (4-170)$$

具体计算图 4-19 中等参元的

$$\mathbf{H}_{(3 \times 4)} = \frac{4}{4 - \xi - \eta} \begin{bmatrix} 2.5 - 0.5\xi & -(0.5 - 0.5\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2.5 - 0.5\xi & -(0.5 - 0.5\eta) \end{bmatrix} \quad (4-171)$$



$$\mathbf{Q}_{(4 \times 8)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 & -(1 + \eta) & 0 \\ \xi - 1 & 0 & -(1 + \xi) & 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi & 0 \\ 0 & \eta - 1 & 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 & -(1 + \eta) \\ 0 & \xi - 1 & 0 & -(1 + \xi) & 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (4-172)$$

由于图 4-19 中的单元为平面应力单元，则弹性系数矩阵为

$$\mathbf{D}_{(3 \times 3)} = 32.97 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (4-173)$$

选择 4 点 Gauss 积分，即积分位置以及权函数为

$$\left. \begin{array}{l} \xi_i = \eta_j = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ A_i = A_j = 1 \end{array} \right\} \quad (4-174)$$

该单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e_{(8 \times 8)} = t \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ A_i A_j \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{Q}^T_{(8 \times 4)} & \mathbf{H}^T_{(4 \times 3)} & \mathbf{D}_{(3 \times 3)} & \mathbf{H}_{(3 \times 4)} \\ & & & \mathbf{Q}_{(4 \times 8)} \end{array} \right]_{(\xi_i, \eta_j)} \cdot |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)| \right\}$$

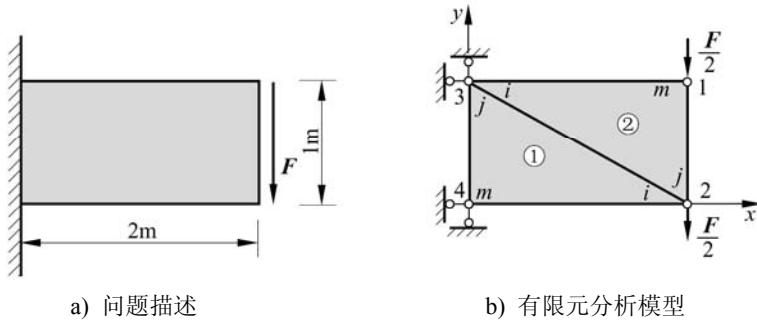
$$= 10^3 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 2305 & 798 & -1759 & -152 & -617 & -214 & 72 & -432 \\ 1453 & -52 & -169 & -214 & -389 & -533 & -895 & \\ & 1957 & -522 & 471 & 14 & -669 & 560 & \\ & & 993 & -41 & 45 & 633 & -869 & \\ & & sym & 166 & 57 & -19 & 116 & \text{MN/m} \\ & & & & 104 & 143 & 240 & \\ & & & & & 616 & -244 & \\ & & & & & & 1524 & \end{bmatrix} \quad (4-175)$$

4.7 平面问题分析的算例

4.7.1 平面 3 节点三角形单元分析的算例

【典型例题】4.7.1(1) 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析

如图 4-20 所示为一矩形薄平板，在右端部受集中力 $F = 100000\text{N}$ 作用，材料常数为：弹性模量 $E = 1 \times 10^7 \text{Pa}$ 、泊松比 $\mu = 1/3$ ，板的厚度为 $t = 0.1\text{m}$ ，试按平面应力问题计算各个节点位移及支座反力。



a) 问题描述

b) 有限元分析模型

图 4-20 右端部受集中力作用的平面问题(高深梁)

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

对该结构进行离散，单元编号及节点编号如图 4-20(b)所示，即有二个 3 节点三角形单元。载荷 F 按静力等效原则向节点 1、节点 2 移置等效。

$$\text{节点位移列阵} \quad \mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T \quad (4-176)$$

$$\text{节点外载列阵} \quad \mathbf{F} = \left[0 \ -\frac{F}{2} \ 0 \ -\frac{F}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (4-177)$$

$$\text{约束的支反力列阵} \quad \mathbf{R} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_{x3} \ R_{y3} \ R_{x4} \ R_{y4} \right]^T \quad (4-178)$$

总的节点载荷列阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{R} = \left[0 \ -\frac{F}{2} \ 0 \ -\frac{F}{2} \ R_{x3} \ R_{y3} \ R_{x4} \ R_{y4} \right]^T \quad (4-179)$$

其中 (R_{x3}, R_{y3}) 和 (R_{x4}, R_{y4}) 分别为节点 3 和节点 4 的两个方向的支反力。

(2) 各个单元的描述

当两个单元取图示中的局部编码 (i,j,m) 时，其单元刚度矩阵完全相同，即



$$\mathbf{K}^{(1), (2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jm} \\ \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{9Et}{32} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 4 & -\frac{2}{3} & -4 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix} \quad (4-180)$$

(3) 建立整体刚度方程

按单元的位移自由度所对应的位置进行组装可以得到整体刚度矩阵，该组装过程可以写成

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} \quad (4-181)$$

具体写出单元刚度矩阵的各个子块在总刚度矩阵中的对应位置如下

$$\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{mm}^{(2)} & \mathbf{k}_{mj}^{(2)} & \mathbf{k}_{mi}^{(2)} & | & \leftarrow u_1 \\ \mathbf{k}_{jm}^{(2)} & \mathbf{k}_{jj}^{(2)} & \mathbf{k}_{ji}^{(2)} & \mathbf{k}_{im}^{(1)} & \leftarrow v_1 \\ \hline \mathbf{k}_{im}^{(2)} & \mathbf{k}_{ij}^{(2)} & \mathbf{k}_{ii}^{(2)} & \mathbf{k}_{jm}^{(1)} & \leftarrow u_2 \\ \mathbf{k}_{im}^{(1)} & \mathbf{k}_{ji}^{(1)} & \mathbf{k}_{jj}^{(1)} & \mathbf{k}_{mm}^{(1)} & \leftarrow v_2 \\ \hline & \mathbf{k}_{mi}^{(1)} & \mathbf{k}_{mj}^{(1)} & | & \leftarrow u_3 \\ & & & \mathbf{k}_{mm}^{(1)} & \leftarrow v_3 \\ & & & & \leftarrow u_4 \\ & & & & \leftarrow v_4 \end{bmatrix} \quad (4-182)$$

由所得到的总刚度矩阵式(4-182)、节点位移列阵(4-176)式以及节点载荷列阵(4-179)式，代入整体刚度方程 $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}$ 中，有



$$\frac{9Et}{32} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & -4 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -4 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2} \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{bmatrix} \quad (4-183)$$

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

该问题的位移边界条件为 $u_3 = 0, v_3 = 0, u_4 = 0, v_4 = 0$ ，将其代入式(4-183)中，划去已知节点位移对应的第 5 行至第 8 行（列），有

$$\frac{9Et}{32} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & -4 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -4 & 0 & \frac{13}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2} \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \end{bmatrix} \quad (4-184)$$

由式(4-184)可求出节点位移如下

$$[u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2]^T = \frac{F}{Et} [1.88 \quad -8.99 \quad -1.50 \quad -8.42]^T \quad (4-185)$$

(5) 支反力的计算

将所求得的节点位移(4-185)式代入总刚度方程(4-183)中，可求得支反力如下

$$R_{x3} = \frac{9Et}{32} \left(-u_1 - \frac{2}{3}v_1 + \frac{4}{3}v_2 \right) = -2F$$

$$R_{y3} = \frac{9Et}{32} \left(-\frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}v_1 + \frac{4}{3}u_2 \right) = -0.07F$$

$$R_{x4} = \frac{9Et}{32} \left(-u_2 - \frac{2}{3}v_2 \right) = 2F$$



$$R_{y4} = \frac{9Et}{32} \left(-\frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}v_2 \right) = 1.07F$$

【MATLAB 算例】4.7.1(2) 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析(Triangle2D3Node)

参见【MATLAB 算例】4.7.1(1)所给算例，即如图 4-20 所示的结构，基于 MATLAB 平台求解该结构的节点位移、支反力以及单元应力。

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

将结构离散为二个 3 节点三角形单元，单元编号及节点编号如图 4-20(b)所示。

(2) 计算各单元的刚度矩阵(以国际单位)

首先在 MATLAB 环境下，输入弹性模量 E、泊松比 NU，薄板厚度为 t，平面应力问题性质指示参数 ID，然后针对单元 1 和单元 2，分别调用两次函数 Triangle2D3Node_Stiffness，就可以得到单元的刚度矩阵 k1(6×6)和 k2(6×6)。

```
>> E=1e7;
>> NU=1/3;
>> t=0.1;
>> ID=1;
>> k1=Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,2,0,0,1,0,0,ID)
k1 = 1.0e+006 *
    0.2813      0      0     0.1875   -0.2813   -0.1875
        0    0.0938    0.1875      0   -0.1875   -0.0938
        0    0.1875    0.3750      0   -0.3750   -0.1875
    0.1875      0      0     1.1250   -0.1875   -1.1250
   -0.2813   -0.1875   -0.3750   -0.1875    0.6563    0.3750
   -0.1875   -0.0938   -0.1875   -1.1250    0.3750    1.2188
```

```
>> k2=Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,0,1,2,0,2,1,ID)
k2 = 1.0e+006 *
    0.2813      0      0     0.1875   -0.2813   -0.1875
        0    0.0938    0.1875      0   -0.1875   -0.0938
        0    0.1875    0.3750      0   -0.3750   -0.1875
    0.1875      0      0     1.1250   -0.1875   -1.1250
   -0.2813   -0.1875   -0.3750   -0.1875    0.6563    0.3750
   -0.1875   -0.0938   -0.1875   -1.1250    0.3750    1.2188
```

(3) 建立整体刚度方程

由于该结构共有 4 个节点，则总共的自由度数为 8，因此，结构总的刚度矩阵为 KK(8×8)，先对 KK 清零，然后两次调用函数 Triangle2D3Node_Assembly 进行刚度矩阵的组装。

```
>> KK = zeros(8,8);
>> KK=Triangle2D3Node_Assembly(KK,k1,2,3,4);
>> KK=Triangle2D3Node_Assembly(KK,k2,3,2,1)
KK = 1.0e+006 *
```

```
Columns 1 through 6
    0.6563    0.3750   -0.3750   -0.1875   -0.2813   -0.1875
    0.3750    1.2188   -0.1875   -1.1250   -0.1875   -0.0938
   -0.3750   -0.1875    0.6563      0      0    0.3750
   -0.1875   -1.1250      0     1.2188    0.3750      0
```



-0.2813	-0.1875	0	0.3750	0.6563	0
-0.1875	-0.0938	0.3750	0	0	1.2188
0	0	-0.2813	-0.1875	-0.3750	-0.1875
0	0	-0.1875	-0.0938	-0.1875	-1.1250

Columns 7 through 8

0	0
0	0
-0.2813	-0.1875
-0.1875	-0.0938
-0.3750	-0.1875
-0.1875	-1.1250
0.6563	0.3750
0.3750	1.2188

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

由图 4-20(b)可以看出，节点 3 和节点 4 的两个方向的位移将为零，即 $u_3 = 0, v_3 = 0, u_4 = 0, v_4 = 0$ 。因此，将针对节点 1 和节点 2 的位移进行求解，节点 1 和节点 2 的位移将对应 KK 矩阵中的前 4 行和前 4 列，则需从 KK(8×8)中提出，置给 k，然后生成对应的载荷列阵 p，再采用高斯消去法进行求解，注意：MATLAB 中的反斜线符号 “\” 就是采用高斯消去法。

```
>>k=KK(1:4, 1:4)
k = 1.0e+006 *
    0.6563   0.3750   -0.3750   -0.1875
    0.3750   1.2188   -0.1875   -1.1250
   -0.3750   -0.1875   0.6563      0
   -0.1875   -1.1250      0     1.2188

>>p=[0;-5000;0;-5000]
p =          0        -5000          0        -5000      [这里将列排成了一行，以节省篇幅]

>>u=k\p
u =  0.0188   -0.0899   -0.0150   -0.0842      [这里将列排成了一行，以节省篇幅]
```

由此可以看出，所求得的结果为： $u_1 = 0.0188, v_1 = -0.0899, u_2 = -0.0151, v_2 = -0.0842$ 。

(5) 支反力的计算

由方程(4-183)可知，在得到整个结构的节点位移后，由原整体刚度方程就可以计算出对应的支反力；先将上面得到的位移结果与位移边界条件的节点位移进行组合(注意位置关系)，可以得到整体的位移列阵 U(8×1)，再代回原整体刚度方程，计算出所有的节点力 P(8×1)，按式(4-179)的对应关系就可以找到对应的支反力。

```
>>U=[u;0;0;0;0];
>>P=KK*U
P = 1.0e+004 *
    -0.0000   -0.5000   0   -0.5000   -2.0000   -0.0702   2.0000   1.0702      [这里将列排成了一行]
由式(4-179)的对应关系，可以得到对应的支反力为
Rx3 = -20000, Ry3 = -702, Rx4 = 20000, Ry4 = 10702。
```

(6) 各单元的应力计算

先从整体位移列阵 U(8×1)中提取出单元的位移列阵，然后，调用计算单元应力的函数



Triangle2D3Node_Stress, 就可以得到各个单元的应力分量。

```
>>u1=[U(3);U(4);U(5);U(6);U(7);U(8)]  
u1 = -0.0150 -0.0842 0 0 0 0
```

```
>>stress1=Triangle2D3Node_Stress(E,NU,2,0,0,1,0,0,u1,ID)  
stress1 = 1.0e+005 *
```

-0.8419 -0.2806 -1.5791 [这里将列排成了一行, 以节省篇幅]

```
>>u2=[U(5);U(6);U(3);U(4);U(1);U(2)]  
u2 = 0 0 -0.0150 -0.0842 0.0188 -0.0899 [这里将列排成了一行, 以节省篇幅]
```

```
>>stress2=Triangle2D3Node_Stress(E,NU,0,1,2,0,2,1,u2,ID)  
stress2 = 1.0e+004 *
```

8.4187 -2.8953 -4.2094 [这里将列排成了一行, 以节省篇幅]

可以看出: 计算得到的单元 1 的应力分量为 $\sigma_x = -84190\text{Pa}$, $\sigma_y = -28060\text{Pa}$,

$\tau_{xy} = -157910\text{Pa}$; 单元 2 的应力分量为 $\sigma_x = 84187\text{Pa}$, $\sigma_y = -28953\text{Pa}$, $\tau_{xy} = -42094\text{Pa}$ 。

【ANSYS 算例】4.7.1(3) 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析

针对【MATLAB 算例】4.7.1(2)的模型, 在 ANSYS 平台上, 完成相应的力学分析。

解答: 在 ANSYS 平台上, 完成的分析如下。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): 2D3Node → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Quad 4node 42 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Options... → K3: Plane Strs w/thk(带厚度的平面应力问题) → OK → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX:1.0e7(弹性模量), PRXY: 0.33333333(泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 定义实常数以确定平面问题的厚度

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete → Add → Type 1 → OK → Real Constant Set No: 1 (第 1 号实常数), THK: 0.1 (平面问题的厚度) → OK → Close

(6) 生成单元模型

生成 4 个节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → On Working Plane → 输入节点 1 的 x,y,z 坐标(2,1,0), 回车 → 输入节点 2 的 x,y,z 坐标(2,0,0), 回车 → 输入节点 3 的 x,y,z 坐标(0,1,0), 回车 → 输入节点 4 的 x,y,z 坐标(0,0,0), 回车 → OK

定义单元属性

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → Element type number: 1 → Material number: 1 → Real constant set number: 1 → OK

生成单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → User Numbered → Thru Nodes → Number to assign to element: 1 → Pick nodes: 2,3,4 → OK → Number to assign to element: 2 → Pick nodes: 3,2,1 → OK



(7) 模型施加约束和外载

左边两个节点施加 x,y 方向的位移约束

ANSYS Main Menu: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Nodes** → 鼠标选取 3, 4 节点 → **OK** → **Lab2 DOFs to be constrained: UX, UY, VALUE: 0** → **OK**

右边两个节点施加 y 方向的集中力载荷

ANSYS Main Menu: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Force/Moment** → **On Nodes** → 鼠标选取 1, 2 节点 → **OK** → **Direction: FY** → **VALUE: -0.5e5** → **OK**

(8) 分析计算

ANSYS Main Menu: **Solution** → **Solve** → **Current LS** → **OK** → **Close (Solution is done!)** → 关闭文字窗口

(9) 结果显示

ANSYS Main Menu: **General Postproc** → **Plot Results** → **Deformed Shape ...** → **Def + Undeformed** → **OK** (返回到 Plot Results) → **Contour Plot** → **Nodal Solu ...** → **Stress, Von Mises, Undisplaced shape key: Deformed shape with Undeformed model** → **OK** (还可以继续观察其他结果)

(10) 退出

ANSYS Utility Menu: **File** → **Exit ...** → **Save Everything** → **OK**

2 完整的命令流

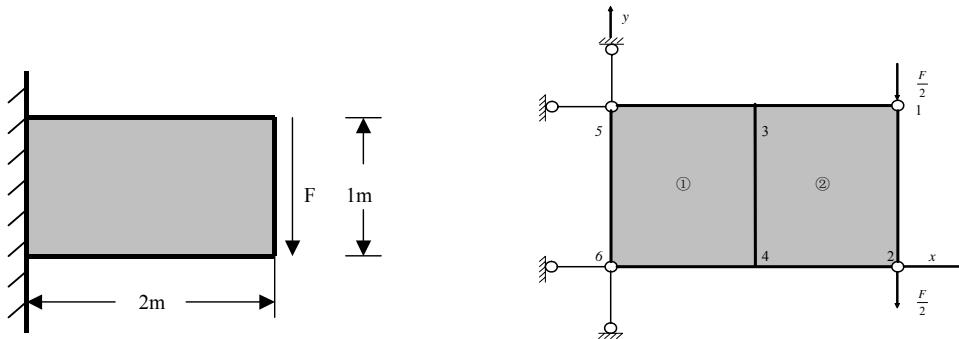
```
!%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]4_7_1(3) %%% begin %%%%
/PREP7          !进入前处理
!=====设置单元和材料
ET,1,PLANE42      !定义单元类型
KEYOPT,1,3,3       !带厚度的平面应力问题
MP,EX,1,1.0e7       !定义材料弹性模量
MP,PRXY,1,0.33333333  !定义材料泊松比
R,1,0.1           !定义实常数 (平板厚度 0.1)
!-----定义 4 个节点
N,1,2,1,0,,,       !节点 1,坐标(2,1,0)
N,2,2,0,0,,,       !节点 2,坐标(2,0,0)
N,3,0,1,0,,,       !节点 3,坐标(0,1,0)
N,4,0,0,0,,,       !节点 4,坐标(0,0,0)
!-----设置划分网格的单元和材料类型
TYPE,1            !设置单元类型 1
MAT,1              !设置材料类型 1
TSHAP,LINE         !设置由节点连成直边的单元
!-----生成单元
EN,1,2,3,4          !由 4 个节点生成一个单元
EN,2,3,2,1          !由 4 个节点生成另一个单元
!-----施加约束位移
D,3,,,,,,UX,UY,UZ,, !对 3 号节点, 完全位移约束
D,4,,,,,,UX,UY,UZ,, !对 4 号节点, 完全位移约束
!-----施加载荷
F,1,FY,-0.5e5       !对 1 号节点, 施加 FY=-0.5e5
F,2,FY,-0.5e5       !对 2 号节点, 施加 FY=-0.5e5
!=====进入求解模块
/solu               !求解模块
solve                !求解
finish               !退出所在模块
!=====进入一般的后处理模块
/POST1               !进入后处理
PLDISP,1             !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)
!%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]4_7_1(3) %%% end %%%%
```



4.7.2 平面 4 节点四边形单元分析的算例

【MATLAB 算例】4.7.2(1) 基于 4 节点四边形单元的矩形薄板分析(Quad2D4Node)

如图 4-21 所示的一个薄平板，在右端部受集中力 F 作用，其中的参数为：
 $E = 1 \times 10^7 \text{ Pa}$, $\mu = 1/3$, $t = 0.1 \text{ m}$, $F = 1 \times 10^5 \text{ N}$ 。基于 MATLAB 平台，按平面应力问题计算各个节点位移、支座反力以及单元的应力。



(a) 问题描述

(b) 有限元分析模型

图 4-21 右端部受集中力作用的薄平板

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

将结构离散为二个 4 节点矩形单元，单元编号及节点编号如图 4-21(b)所示，连接关系见表 4-6，节点的几何坐标见表 4-7，载荷 F 按静力等效原则向节点 1、节点 2 移置。

表 4-6 结构的单元连接关系

单元号	节点号
1	3 5 6 4
2	1 3 4 2

表 4-7 节点的坐标

节点	节点坐标(m)	
	x	y
1	2	1
2	2	0
3	1	1
4	1	0
5	0	1
6	0	0

节点位移列阵

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6]^T \quad (4-186)$$

节点外载列阵



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{F}{2} & 0 & -\frac{F}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4-187)$$

约束的支反力列阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{x5} & R_{y5} & R_{x6} & R_{y6} \end{bmatrix}^T \quad (4-188)$$

总的节点载荷列阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{F}{2} & 0 & -\frac{F}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{x5} & R_{y5} & R_{x6} & R_{y6} \end{bmatrix}^T \quad (4-189)$$

其中 (R_{x5}, R_{y5}) 和 (R_{x6}, R_{y6}) 分别为节点 5 和节点 6 的两个方向的支反力。

(2) 计算各单元的刚度矩阵(以国际标准单位)

首先在 MATLAB 环境下，输入弹性模量 E、泊松比 NU，薄板厚度为 h，平面应力问题性质指示参数 ID，然后针对单元 1 和单元 2，分别调用两次函数 Quad2D4Node_Stiffness，就可以得到单元的刚度矩阵 k1(8×8)和 k2(8×8)。

```
>> E=1e7;
>> NU=1/3;
>> t=0.1;
>> ID=1;
>> k1=Quad2D4Node_Stiffness(E,NU,t, 1,1, 0,1,0,0,1,0, ID);
>>k2=Quad2D4Node_Stiffness(E,NU,t, 2,1,1,1,0,2,0, ID);
```

(3) 建立整体刚度方程

由于该结构共有 6 个节点，则总共的自由度数为 12，因此，结构总的刚度矩阵为 KK(12×12)，先对 KK 清零，然后两次调用函数 Quad2D4Node_Assembly 进行刚度矩阵的组装。

```
>>KK=zeros(12,12);
>>KK=Quad2D4Node_Assembly(KK,k1, 3,5,6,4);
>>KK=Quad2D4Node_Assembly(KK,k2, 1,3,4,2);
```

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

由图 4-21(b) 可以看出，节点 5 和节点 6 的两个方向的位移将为零，即 $u_5 = 0, v_5 = 0, u_6 = 0, v_6 = 0$ 。因此，将针对节点 1、节点 2、节点 3 和节点 4 的位移进行求解，节点 1、节点 2、节点 3 和节点 4 的位移将对应 KK 矩阵中的前 8 行和前 8 列，则需从 KK(12×12)中提出，置给 k，然后生成对应的载荷列阵 p，再采用高斯消去法进行求解，注意：MATLAB 中的反斜线符号 “\” 就是采用高斯消去法。

```
>>k=KK(1:8,1:8);
>>p=[0;-50000;0;-50000;0;0;0;0];
>>u=k\p
u = 0.8000    -2.5333   -0.8000   -2.5333    0.6000   -0.8667   -0.6000   -0.8667      [将列排成行]
```

由此可以看出，所求得的结果为： $u_1 = 0.8000, v_1 = -2.5333, u_2 = -0.8000, v_2 = -2.5333,$

$u_3 = 0.6000, v_3 = -0.8667, u_4 = -0.6000, v_4 = -0.8667$ 。



(5) 支反力的计算

在得到整个结构的节点位移后，由原整体刚度方程就可以计算出对应的支反力；先将上面得到的位移结果与位移边界条件的节点位移进行组合(注意位置关系)，可以得到整体的位移列阵 $U(12 \times 1)$ ，再代回原整体刚度方程，计算出所有的节点力 $P(12 \times 1)$ ，按(4-189)式的对应关系就可以找到对应的支反力。

```
>>U=[u;0;0;0;0];
>>P=KK*U
P = 1.0e+005 *
-0.0000 -0.5000 0.0000 -0.5000 0.0000 0.0000 [将列排成行]
0.0000 -0.0000 -2.0000 0.5000 2.0000 0.5000 [将列排成行]
```

由式(4-189)的对应关系，可以得到对应的支反力为

$$R_{x5} = -200000, R_{y5} = 50000, R_{x6} = 200000, R_{y6} = 50000.$$

(6) 各单元的应力计算

先从整体位移列阵 $U(12 \times 1)$ 中提取出单元的位移列阵，然后，调用计算单元应力的函数 Quad2D4Node_Stress，就可以得到各个单元的应力分量。

```
>>u1=[ U(5);U(6);U(9);U(10);U(11);U(12);U(7);U(8)]
u1 = 0.6000 -0.8667 0 0 0 -0.6000 -0.8667 [将列排成行]
```

```
>>stress1=Quad2D4Node_Stress(E,NU, 1,1,0,1,0,0,1,0, u1,ID)
stress1 = 1.0e+005 *
0.0000 0.0000 -10.0000 [将列排成行]
```

```
>>u2=[ U(1);U(2);U(5);U(6);U(7);U(8);U(3);U(4)]
u2 = 0.8000 -2.5333 0.6000 -0.8667 [将列排成行]
-0.6000 -0.8667 -0.8000 -2.5333 [将列排成行]
```

```
>>stress2=Quad2D4Node_Stress(E,NU, 2,1,1,1,0,2,0, u2,ID)
stress2 = 1.0e+005 *
0.0000 0.0000 -10.0000 [将列排成行]
```

可以看出：计算得到的单元1的应力分量为 $\sigma_x = 0 \text{Pa}$, $\sigma_y = 0 \text{Pa}$, $\tau_{xy} = -1000000 \text{Pa}$ ；单

元2的应力分量为 $\sigma_x = 0 \text{Pa}$, $\sigma_y = 0 \text{Pa}$, $\tau_{xy} = -1000000 \text{Pa}$ 。

【ANSYS 算例】4.7.2(2) 基于4节点四边形单元的矩形薄板分析

针对【MATLAB 算例】4.7.2(1)的模型，在ANSYS平台上，完成相应的力学分析。

解答：下面对该平面结构进行整体建模和分析，按照图4-21(b)的模型，该结构被划分为左右两个4节点单元。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS product launcher → Filemanagement → Working directory (设置工作目录)
→ Jobname(设置工作文件名): rectangular → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型



ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Quad 4node 42 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Options... → K3: Plane Strs w/thk(带厚度的平面应力问题) → OK → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX:1e7(弹性模量), PRXY: 0.3(泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 定义实常数以确定平面问题的厚度

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete → Add → Type 1 → OK → Real Constant Set No: 1(第 1 号实常数), THK: 0.1(平面问题的厚度) → OK → Close

(6) 建立节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → NODE:(节点编号) → X,Y,Z:(节点坐标) → THXY, THYZ, THZX: (旋转角度, 不填, 默认为零) → Apply → 最后一个节点坐标输入 → OK

(7) 建立单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → User Numbered → Thru Nodes → Number to assign to element: 1 → Apply → 用鼠标依次选取点 3、5、6、4 → Apply → Number to assign to element: 2 → Apply → 用鼠标依次选取点 1、3、4、2 → OK

(8) 模型施加约束和外载

左边两节点加 X 和 Y 两方向的约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → 用鼠标选择左侧边上两个节点(节点 5, 6) → OK → Lab2 DOFs to be constrained: All DOF → VALUE → 0(默认值为零) → OK

右边加 Y 方向的外载

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 用鼠标选择右侧边上的两个节点(节点 1, 2) → OK → Lab Direction of force/moment: FY , VALUE: -5.0e4 → OK

(9) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK → Close (Solution is done!) → 关闭文字窗口

(10) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Node Solution → DOF Solution → Displacement vector sum → OK(可得到节点位移结果如下)

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Reaction Solu → All items → OK, 可得到 5、6 节点支反力

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Element Solution → Stress → X-component of stress → OK, 得到单元 X 方向应力结果如下(依照相同方法可以得到其它方向结果)

(11) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit ... → Save Everything → OK

2 完整的命令流

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例] 4_7_2(2) %%%%%% begin %%%%
/prep7          !进入前处理
et,1,plane42    !定义单元类型(no.1 plane42)
KEYOPT,1,3,3    !设置带厚度的平面应力
mp,ex,1,1e7      !设置弹性模量
mp,prxy,1,0.3333 !设置泊松比
R,1,0.1,         ! 定义厚度(0.1)
!-----定义 6 个节点
N,1,2,1,,,,,,   ! 节点 1,坐标(2,1,0)
N,2,2,,,,,,     ! 节点 2,坐标(2,0,0)
```



```
N,3,1,1,,,,
N,4,1,0,,,
N,5,0,1,,,
N,6,0,0,,,
E,5,6,4,3      !由4个节点生成一个单元
E,3,4,2,1      !由4个节点生成另一个单元
d,5,all         !对5号节点,完全位移约束
d,6,all         !对6号节点,完全位移约束
F,1,FY,-50000   !对1号节点,施加FY=-50000
F,2,FY,-50000   !对2号节点,施加FY=-50000
!=====进入求解模块
/solu           !求解模块
solve           !求解
finish          !退出所在模块
!=====进入一般的后处理模块
/POST1          !进入后处理
PLDISP,1        !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)
finish          !退出
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例] 4_7_2(2) %%%%%% end %%%%
```

4.8 空间问题分析的算例

4.8.1 空间4节点四面体单元分析的算例

【MATLAB 算例】4.8.1(1) 基于4节点四面体单元的空间块体分析(Tetrahedron3D4Node)

如图 4-22 所示的一个块体，在右端面上端点受集中力 F 作用。基于 MATLAB 平台，计算各个节点位移、支反力以及单元的应力。取相关参数为： $E=1\times10^{10}\text{Pa}$, $\mu=0.25$,

$$F=1\times10^5\text{N}。$$

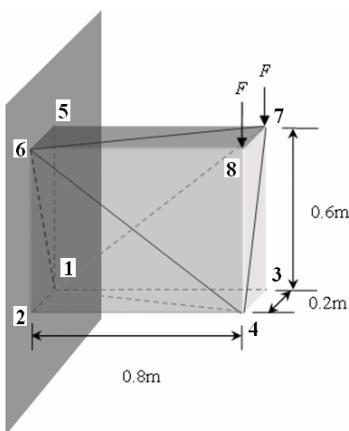


图 4-22 一个空间块体的分析

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号



将结构离散为 5 个 4 节点四面体单元，单元编号及节点编号和坐标如图 4-22 所示，连接关系见表 4-8，节点的坐标见表 4-9。

表 4-8 单元连接关系

单元号	节点号
1	1 4 2 6
2	1 4 3 7
3	6 7 5 1
4	6 7 8 4
5	1 4 6 7

表 4-9 节点的坐标

节点	节点坐标(m)		
	x	y	z
1	0	0	0
2	0.2	0	0
3	0	0.8	0
4	0.2	0.8	0
5	0	0	0.6
6	0.2	0	0.6
7	0	0.8	0.6
8	0.2	0.8	0.6

节点位移列阵

$$\mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8]^T \quad (4-190)$$

节点外载列阵

$$\mathbf{F} = [0 \ 0 \ \mathbf{F}_3^T \ \mathbf{F}_4^T \ 0 \ 0 \ \mathbf{F}_7^T \ \mathbf{F}_8^T]^T \quad (4-191)$$

其中

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_7 = \mathbf{F}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \times 10^5 N \end{bmatrix}$$

约束的支反力列阵

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1^T \ \mathbf{R}_2^T \ 0 \ 0 \ \mathbf{R}_5^T \ \mathbf{R}_6^T \ 0 \ 0]^T \quad (4-192)$$

其中

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{2z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} R_{5x} \\ R_{5y} \\ R_{5z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} R_{6x} \\ R_{6y} \\ R_{6z} \end{bmatrix}$$

总的节点载荷列阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{R} = [\mathbf{R}_1^T \ \mathbf{R}_2^T \ \mathbf{F}_3^T \ \mathbf{F}_4^T \ \mathbf{R}_5^T \ \mathbf{R}_6^T \ \mathbf{F}_7^T \ \mathbf{F}_8^T]^T \quad (4-193)$$



(2) 计算各单元的刚度矩阵(以国际标准单位)

首先在 MATLAB 环境下, 输入弹性模量 E、泊松比 NU, 然后针对单元 1 和单元 2, 分别调用 5 次函数 Tetrahedron3D4Node_Stiffness, 就可以得到单元的刚度矩阵 $k_1(6 \times 6) \sim k_5(6 \times 6)$ 。

```
>> E=1e10;
>> NU=0.25;
>> k1 = Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,0,0,0,0.2,0.8,0,0.2,0,0,0.2,0,0.6);
>> k2 = Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,0,0,0,0.2,0.8,0,0.8,0,0,0.8,0,0.6);
>> k3 = Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,0.2,0,0.6,0,0.8,0.6,0,0,0.6,0,0,0);
>> k4=Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,0.2,0,0.6,0,0.8,0.6,0.2,0.8,0.6,0.2,0.8,0);
>> k5 = Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,0,0,0,0.2,0.8,0,0.2,0,0.6,0,0.8,0.6);
```

(3) 建立整体刚度方程

由于该结构共有 8 个节点, 则总共的自由度数为 24, 因此, 结构总的刚度矩阵为 $KK(24 \times 24)$, 先对 KK 清零, 然后 5 次调用函数 Tetrahedron3D4Node_Assembly 进行刚度矩阵的组装。

```
>> KK = zeros(24);
>> KK = Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k1,1,4,2,6);
>> KK = Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k2,1,4,3,7);
>> KK = Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k3,6,7,5,1);
>> KK = Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k4,6,7,8,4);
>> KK = Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k5,1,4,6,7);
```

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

由图 4-22 可以看出, 节点 1、2、5、6 上三个方向的位移将为零, 即 $u_1 = v_1 = w_1 = u_2 = v_2 = w_2 = u_5 = v_5 = w_5 = u_6 = v_6 = w_6 = 0$ 。因此, 将针对节点 3、4、7、8 的位移进行求解, 节点 1、2、5、6 的位移将对应 KK 矩阵中的第 1 至 6 行, 第 13 至 18 行和第 1 至 6 列, 第 13 至 18 列, 需从 $KK(24 \times 24)$ 中提出, 置给 k , 然后生成对应的载荷列阵 p , 再采用高斯消去法进行求解, 注意: MATLAB 中的反斜线符号“\”就是采用高斯消去法。

```
>>k=KK([7:12,19:24],[7:12,19:24]);
>>p=[0,0,0,0,0,0,-1e5,0,0,-1e5]';
>>u=k\p
u = 1.0e-003 *
    0.1249   -0.0485   -0.4024    0.1343   -0.0715   -0.4031      [将列排成行]
    0.1314    0.0858   -0.4460    0.1353    0.0681   -0.4742      [将列排成行]
```

由此可以看出, 所求得的位移结果见表 4-10。

表 4-10 空间块体的节点位移计算结果

$u_3 = 0.1249 \times 10^{-3}$	$u_7 = 0.1314 \times 10^{-3}$
$v_3 = -0.0485 \times 10^{-3}$	$v_7 = 0.0858 \times 10^{-3}$
$w_3 = -0.4024 \times 10^{-3}$	$w_7 = -0.4460 \times 10^{-3}$
$u_4 = 0.1343 \times 10^{-3}$	$u_8 = 0.1353 \times 10^{-3}$
$v_4 = -0.0715 \times 10^{-3}$	$v_8 = 0.0681 \times 10^{-3}$



$$w_4 = -0.4031 \times 10^{-3}$$

$$w_8 = -0.4742 \times 10^{-3}$$

(5) 支反力的计算

在得到整个结构的节点位移后，由原整体刚度方程就可以计算出对应的支反力；先将上面得到的位移结果与位移边界条件的节点位移进行组合(注意位置关系)，可以得到整体的位移列阵 $U(24 \times 1)$ ，再代回原整体刚度方程，计算出所有的节点力 $P(24 \times 1)$ ，按式(4-192)的对应关系就可以找到对应的支反力。

```
>>U=zeros(6,1);u([1:6]);zeros(6,1);u(7:12)];
>>P=KK*U
P = 1.0e+005 *
    0.3372    1.3774    0.1904   -0.4202    1.2892    0.4984    [将列排成行]
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000    [将列排成行]
   -0.4745   -1.3774    0.5604    0.5575   -1.2892    0.7509    [将列排成行]
   -0.0000   -0.0000   -1.0000   -0.0000    0.0000   -1.0000    [将列排成行]
```

由式(4-193)的对应关系，可以得到对应的支反力见表 4-11。

表 4-11 空间块体的支反力计算结果

$R_{1x} = 0.3372 \times 10^5 N$	$R_{5x} = -0.4745 \times 10^5 N$
$R_{1y} = 1.3774 \times 10^5 N$	$R_{5y} = -1.3774 \times 10^5 N$
$R_{1z} = 0.1904 \times 10^5 N$	$R_{5z} = 0.5604 \times 10^5 N$
$R_{2x} = -0.4202 \times 10^5 N$	$R_{6x} = 0.5575 \times 10^5 N$
$R_{2y} = 1.2892 \times 10^5 N$	$R_{6y} = -1.2892 \times 10^5 N$
$R_{2z} = 0.4984 \times 10^5 N$	$R_{6z} = 0.7509 \times 10^5 N$

(6) 各单元的应力计算

先从整体位移列阵 $U(24 \times 1)$ 中提取出单元的位移列阵，然后，调用计算单元应力的函数 Tetrahedron3D4Node_Stress，就可以得到各个单元的应力分量。

```
>>u1=[U(1:3);U(10:12);U(4:6);U(16:18)];
>>stress1=Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,0,0,0,0.2,0.8,0,0.2,0,0,0.2,0,0.6,u1)
stress1 = 1.0e+006 *
    -0.3574   -1.0721   -0.3574    0.6717   -2.0155      0    [将列排成行]
>>u2=[U(1:3);U(10:12);U(7:9);U(19:21)];
>> stress2=Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,0,0,0,0.2,0.8,0,0.8,0,0,0.8,0.6,u2)
stress2 = 1.0e+006 *
    0.0314   -0.8298   -0.9260    0.1649   -1.1170    0.0294    [将列排成行]
>> u3=[U(16:21);U(13:15);U(1:3)];
>> stress3=Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,0.2,0,0.6,0,0.8,0.6,0,0,0.6,0,0,0,u3)
stress3 = 1.0e+006 *
    0.4289   1.2867   0.4289    0.6568   -2.2301      0    [将列排成行]
>> u4=[U(16:21);U(22:24);U(10:12)];
>> stress4=Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,0.2,0,0.6,0,0.8,0.6,0,0.2,0.8,0.6,0.2,0.8,0,u4)
stress4 = 1.0e+006 *
    0.1046   0.6272   -1.0012    0.3233   -1.4402   -0.5562    [将列排成行]
>> u5=[U(1:3);U(10:12);U(16:21)];
>> stress5=Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,0,0,0,0.2,0.8,0,0.2,0,0.6,0,0.8,0.6,u5)
stress5 = 1.0e+006 *
    -0.0179   -0.0060   -0.3636   -0.9083   -1.5986   0.4192    [将列排成行]
```



各个单元应力分量的计算结果列在表 4-12 中。

表 4-12 空间块体的各个单元应力分量的计算结果

1 号单元	$\sigma_x = -0.3574 MPa$	$\sigma_y = -1.0721 MPa$	$\sigma_z = -0.3574 MPa$
	$\tau_{xy} = 0.6717 MPa$	$\tau_{yz} = -2.0155 MPa$	$\tau_{zx} = 0 MPa$
2 号单元	$\sigma_x = 0.0314 MPa$	$\sigma_y = -0.8298 MPa$	$\sigma_z = -0.9260 MPa$
	$\tau_{xy} = 0.1649 MPa$	$\tau_{yz} = -1.1170 MPa$	$\tau_{zx} = 0.0294 MPa$
3 号单元	$\sigma_x = 0.4289 MPa$	$\sigma_y = 1.2867 MPa$	$\sigma_z = 0.4289 MPa$
	$\tau_{xy} = 0.6568 MPa$	$\tau_{yz} = -2.2301 MPa$	$\tau_{zx} = 0 MPa$
4 号单元	$\sigma_x = 0.1046 MPa$	$\sigma_y = 0.6272 MPa$	$\sigma_z = -1.0012 MPa$
	$\tau_{xy} = 0.3233 MPa$	$\tau_{yz} = -1.4402 MPa$	$\tau_{zx} = -0.5562 MPa$
5 号单元	$\sigma_x = -0.0179 MPa$	$\sigma_y = -0.0060 MPa$	$\sigma_z = -0.3636 MPa$
	$\tau_{xy} = -0.9083 MPa$	$\tau_{yz} = -1.5986 MPa$	$\tau_{zx} = 0.4192 MPa$

【ANSYS 算例】4.8.1(2) 基于 4 节点四面体单元的空间块体分析

针对以上【MATLAB 算例】4.8.1(1)的模型，在 ANSYS 平台上，完成相应的力学分析。

解答：计算分析模型如图 4-22，下面同样采用 5 个 4 节点四面体单元对该构进行分析。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): TBrick → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Brick 8node 45 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX:1e10(弹性模量), PRXY: 0.25(泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 定义节点和单元

定义节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Node → In Active CS → NODE : 1, X,Y,Z : 分别输入 0,0,0 (表示一号节点的坐标) → Apply → 继续输入 2 至 8 号节点的坐标，在输入完 8



号节点坐标后→按 **OK**

生成单元

ANSYS Main Menu: **Preprocessor** → **Modeling** → **Create** → **Element** → **User Numberd** → **Thru Nodes** → **Number to assign to element: 1** → 弹出对话框中输入: 1, 4, 2, 6 → **OK** → 再点击 **Thru Nodes** → **Number to assign to element: 2** → 弹出对话框中输入: 1, 4, 3, 7 → **OK** → 重复操作上面的过程, 按照表中给出的节点顺序输入完 5 个单元→ **OK**

(6) 模型施加约束和外载

在 7, 8 节点施加沿 Z 负方向的集中载荷

ANSYS Main Menu: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Force/Moment** → **On Nodes** → 在方框中键入: 7 (也可用鼠标在模型中点选相应的节点) → **OK** → **Direction of Force: FZ, VALUE: -1e5** → **Apply** → 在方框中输入: 8 → **Direction of Force: FZ, VALUE: -1e5** → **OK**

在 1, 2, 5, 6 节点施加约束

ANSYS Main Menu: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Nodes** → 用鼠标选择节点 → **OK** → **Lab2 All DOFs** (默认值为零) → **OK**

(7) 分析计算

ANSYS Main Menu: **Solution** → **Solve** → **Current LS** → **OK** → Should The Solve Command be Executed? **Y** → **Close** (Solution is done!) → 关闭文字窗口

(8) 对比结果

节点位移

ANSYS Main Menu: **General Postproc** → **List Results** → **Nodal Solution** → **DOF Solution** → **Displacement vector sum** → **OK** (对比结果, 和 Matlab 计算结果一致)

支反力

ANSYS Main Menu: **General Postproc** → **List Results** → **Reaction Solu** → **All items** → **OK** (对比结果, 和 Matlab 计算结果一致)

单元应力

ANSYS Main Menu: **General Postproc** → **List Results** → **Element Solution** → **Stress** → **X-component of stress** → **OK** (对比结果, 和 Matlab 计算结果一致)

(9) 退出系统

ANSYS Utility Menu: **File** → **Exit ...** → **Save Everything** → **OK**

2 完整的命令流

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例] 4_8_1(2) %%%%%% begin %%%%
/PREP7           !进入前处理
!=====设置单元和材料
ET,1,SOLID45      !定义单元类型(SOLID45)
MP,EX,1,1e10        !定义材料弹性模量
MP,PRXY,1,0.25      !定义材料泊松比
!-----定义 8 个节点
N,1,0,0,0,,,       !节点 1,坐标(0,0,0), 以下类似
N,2,0.2,0,0,,,
N,3,0,0.8,0,,,
N,4,0.2,0.8,0,,,
N,8,0.2,0.8,0.6,,,
N,7,0,0.8,0.6,,,
N,6,0.2,0,0.6,,,
N,5,0,0,0.6,,,
!-----基于节点生成单元
EN,1,1,4,2,6        !由节点 1,4,2,6 生成单元 1, 以下类似, 共 5 个单元
EN,2,1,4,3,7
EN,3,6,7,5,1
EN,4,6,7,8,4
```



```
EN,5,1,4,6,7  
FINISH  
!=====进入求解模块  
/SOLU  
F,7,FZ,-100000,,, !在节点 7 处施加 FZ, -100000  
F,8,FZ,-100000,,, !在节点 8 处施加 FZ, -100000  
D,1,,0,,2,,ALL,, , , , !对节点 1 和 2, 施加固定约束  
D,5,,0,,6,,ALL,, , , , !对节点 5 和 6, 施加固定约束  
SOLVE !求解  
FINISH !退出该模块  
!=====进入一般的后处理模块  
/POST1 !进入后处理  
PLDISP,1 !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)  
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例] 4_8_1(2) %%%%%% end %%%%%
```

4.8.2 空间 8 节点六面体单元分析的算例

【MATLAB 算例】4.8.2(1) 基于 8 节点六面体单元的空间块体分析(Hexahedral3D8Node)

如图 4-23 所示的一个空间块体，在右端部受两个集中力 F 作用，其中的参数为：

$E = 1 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $\mu = 0.25$, $t = 0.2 \text{ m}$, $F = 1 \times 10^5 \text{ N}$ 。基于 MATLAB 平台，用一个空间 8 节点六面体单元计算各个节点位移、支座反力以及单元的应力。

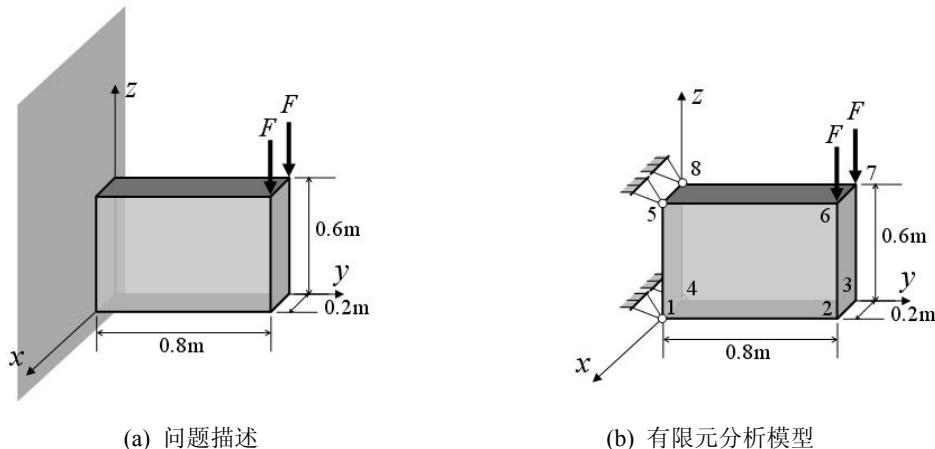


图 4-23 右端部受集中力作用的空间块体

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

将结构离散为一个 8 节点六面体单元，节点编号如图 4-23(b)所示，节点的几何坐标见表 4-13。

表 4-13 节点的坐标

节点	节点坐标 (m)		
	x	y	z
1	0.2	0	0
2	0.2	0.8	0



3	0	0.8	0
4	0	0	0
5	0.2	0	0.6
6	0.2	0.8	0.6
7	0	0.8	0.6
8	0	0	0.6

节点位移列阵

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8]^T \quad (4-194)$$

总的节点载荷列阵

$$\mathbf{P}^e = [P_{x1} \quad P_{y1} \quad P_{z1} \quad P_{x2} \quad P_{y2} \quad P_{z2} \quad \cdots \quad P_{x8} \quad P_{y8} \quad P_{z8}]^T \quad (4-195)$$

其中, 节点外载 $P_{z6} = P_{z7} = -F = -1 \times 10^5 N$; 支反力为 $P_{x1} = R_{x1}$, $P_{y1} = R_{y1}$, $P_{z1} = R_{z1}$,

$P_{x4} = R_{x4}$, $P_{y4} = R_{y4}$, $P_{z4} = R_{z4}$, $P_{x5} = R_{x5}$, $P_{y5} = R_{y5}$, $P_{z5} = R_{z5}$, $P_{x8} = R_{x8}$, $P_{y8} = R_{y8}$,

$P_{z8} = R_{z8}$; 其余节点载荷分量为零。

(2) 计算单元的刚度矩阵(以国际标准单位)

首先在 MATLAB 环境下, 输入弹性模量 E、泊松比 NU, 然后针对题中单元节点坐标, 调用函数 Hexahedral3D8Node_Stiffness, 就可以得到单元的刚度矩阵 k1 (24×24)。

```
>>E=1.0e10;
>>NU=0.25;
>>lx=0.2;
>>ly=0.8;
>>lz=0.6;
>>k1=Hexahedral3D8Node_ElementStiffness(E,NU,lx,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,lz);
```

(3) 建立整体刚度方程

由于该结构共有 8 个节点, 则总共的自由度数为 24, 因此, 结构总的刚度矩阵为 $\mathbf{KK}(24 \times 24)$, 先对 \mathbf{KK} 清零, 然后调用函数 Hexahedral3D8Node_Assembly 进行刚度矩阵的组装。由于本题中只用了一个单元, 因此总体刚度矩阵 \mathbf{KK} 与单元刚度 $\mathbf{k1}$ 相同, 此处不再列出, 调用函数的过程如下:

```
>>KK=zeros(24,24);
>>KK=Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k1,1,2,3,4,5,6,7,8);
```

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

由图 4-23(b)可以看出, 节点 1、节点 4、节点 5 和节点 8 的三个方向的位移将为零, 即 $u_1 = v_1 = w_1 = 0$, $u_4 = v_4 = w_4 = 0$, $u_5 = v_5 = w_5 = 0$, $u_8 = v_8 = w_8 = 0$ 。因此, 将针对节点 2、节点 3、节点 6 和节点 7 的位移进行求解, 这 4 个节点的位移将对应 \mathbf{KK} 矩阵中的 4 至 9 行、4 至 9 列, 4 至 9 行、16 至 21 列, 16 至 21 行、4 至 9 列, 以及 16 至 21 行、16 至 21 列, 则需从 $\mathbf{KK}(24 \times 24)$ 中提出, 置给 \mathbf{k} , 然后生成对应的载荷列阵 \mathbf{p} , 再采用高斯消去法进行求解, 即 MATLAB 中的反斜线符号 “\” 求解。



```
>> k=[KK(4:9,4:9),KK(4:9,16:21);KK(16:21,4:9),KK(16:21,16:21)];  
>> p=[0;0;0;0;0;0;-1e5;0;0;-1e5];  
>> u=k\p  
u = 1.0e-003 *  
    0.0223   -0.2769   -0.6728   -0.0223   -0.2769   -0.6728   [将列排成行]  
   -0.0129    0.3108   -0.7774    0.0129    0.3108   -0.7774   [将列排成行]
```

由此可以看出，所求得的结果为（单位为 m）：

$$u_2 = 0.0223, v_2 = -0.2769, w_2 = -0.6728,$$

$$u_3 = -0.0223, v_3 = -0.2769, w_3 = -0.6728,$$

$$u_6 = -0.0129, v_6 = 0.3108, w_6 = -0.7774,$$

$$u_7 = 0.0129, v_7 = 0.3108, w_7 = -0.7774,$$

(5) 支反力的计算

由方程 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P}$ 可知，在得到整个结构的节点位移后，由原整体刚度方程就可以计算出对应的支反力；先将上面得到的位移结果与位移边界条件的节点位移进行组合(注意位置关系)，可以得到整体的位移列阵 $\mathbf{U}(24 \times 1)$ ，再代回原整体刚度方程，计算出所有的节点力 $\mathbf{P}(24 \times 1)$ ，按式的对应关系就可以找到对应的支反力。

```
>> U=[0;0;0;u(1:6);0;0;0;0;0;u(7:12);0;0;0];  
>> P=KK*U  
P = 1.0e+005 *  
    -0.2509    1.3333    0.6938   -0.0000    0.0000    0.0000   [将列排成行]  
     0.0000    0.0000   -0.0000    0.2509    1.3333    0.6938   [将列排成行]  
    0.3455   -1.3333    0.3062   -0.0000   -0.0000   -1.0000   [将列排成行]  
   -0.0000    0.0000   -1.0000   -0.3455   -1.3333    0.3062   [将列排成行]
```

由式 (4-195) 的对应关系，可以得到对应的支反力为（单位为 N）：

$$R_{x1} = -0.2509, R_{y1} = 1.3333, R_{z1} = 0.6938,$$

$$R_{x4} = 0.2509, R_{y4} = 1.3333, R_{z4} = 0.6938,$$

$$R_{x5} = 0.3455, R_{y5} = -1.3333, R_{z5} = 0.3062,$$

$$R_{x8} = -0.3455, R_{y8} = -1.3333, R_{z8} = 0.3062,$$

(6) 各单元的应力计算

先从整体位移列阵 $\mathbf{U}(24 \times 1)$ 中提取出单元的位移列阵，然后，调用计算单元应力的函数 Hexahedral3D8Node_Stress，就可以得到各个单元的应力分量。

```
>> u1=U(1:24);  
>> stress1=Hexahedral3D8Node_Stress(E,NU,lx,0,0,lx,ly,0,0,ly,0,0,0,0,lx,0,lz,lx,ly,lz,0,ly,lz,0,0,lz,u1)  
stress1 = 1.0e+006 *  
    0.0197    0.0000   -0.8673   -0.0000   -1.6667   -0.0000   [将列排成行]
```

可以看出：计算得到的单元 1 的中心点的应力分量为



$$\sigma_x = 19700 \text{Pa}, \sigma_y = 0 \text{Pa}, \sigma_z = -867300 \text{Pa}, \tau_{xy} = 0 \text{Pa}, \tau_{yz} = 1666700 \text{Pa}, \tau_{zx} = 0 \text{Pa};$$

【ANSYS 算例】4.8.2(2) 基于 8 节点六面体单元的空间块体分析

针对【MATLAB 算例】4.8.2(1)的模型，在 ANSYS 平台上，完成相应的力学分析。

解答：计算分析模型如图 4-23(b)所示，采用一个 8 节点六面体单元对该结构进行整体建模和分析。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): 3D8node → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Brick 8node
45 → OK → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX:1.0e10 (弹性模量), PRXY: 0.25 (泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 生成单元模型

生成 8 个节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number 1 → X:0.2, Y:0, Z:0 → Apply → Node number 2 → X:0.2, Y:0.8, Z:0 → Apply → Node number 3 → X:0, Y:0.8, Z:0 → Apply → Node number 4 → X:0, Y:0, Z:0 → Apply → Node number 5 → X:0.2, Y:0, Z:0.6 → Apply → Node number 6 → X:0.2, Y:0.8, Z:0.6 → Apply → Node number 7 → X:0, Y:0.8, Z:0.6 → Apply → Node number 8 → X:0, Y:0, Z:0.6 → OK

定义单元属性

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → Element type number: 1 → Material number: 1 → OK

生成单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 选择 Min, Max, Inc, 输入: 1,8, 回车 → OK

(6) 模型施加约束和外载

左边 4 个节点施加 x,y,z 方向的位移约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → 选择 1, 4, 5, 8 节点并回车 → OK → Lab2 DOFs: UX, UY, UZ, VALUE: 0 → OK

右上两个节点施加 Z 方向的集中力载荷

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择 6, 7 节点并回车 → OK → Direction: FZ → VALUE: -1.0e5 → OK

(7) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK → Close (Solution is done!) → 关闭文字窗口

(8) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape ... → Def + Undeformed → OK (返回到 Plot Results) → Contour Plot → Nodal Solu ... → Stress, Von Mises, Def + Undeformed → OK (还可以继续观察其他结果)



(9) 退出

ANSYS Utility Menu: File → Exit ... → Save Everything → OK

2 完全的命令流

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例] 4_8_2(2) %%%%%%% begin %%%%%%%%
/prep7          !进入前处理
!=====设置单元和材料
ET,1,SOLID45      !定义单元类型(SOLID45)
MP,EX,1,1.0e10     !定义材料的弹性模量
MP,PRXY,1,0.25     !定义材料的泊松比
!-----定义 8 个节点
lx=0.2            !定义参数 lx
ly=0.8            !定义参数 ly
lz=0.6            !定义参数 lz
N,1,lx,0,0,,,     !节点 1,坐标(lx,0,0), 以下类似
N,2,lx,ly,0,,,
N,3,0,ly,0,,,
N,4,0,0,0,,,
N,5,lx,0,lz,,,
N,6,lx,ly,lz,,,
N,7,0,ly,lz,,,
N,8,0,0,lz,,,
!-----设置划分网格的单元和材料类型
TYPE,1            !设置单元类型 1
MAT,1              !设置材料类型 1
TSHAP,QUA8        !设置 8 节点 3D 单元(由四边形的面组成)
E,1,2,3,4,5,6,7,8 !基于 8 个节点生成单元
!-----施加约束位移
D,1,,,,,UX,UY,UZ,, !对节点 1, 施加固定位移约束, 以下类似
D,4,,,,,UX,UY,UZ,, 
D,5,,,,,UX,UY,UZ,, 
D,8,,,,,UX,UY,UZ,, 
!-----施加载荷
F,6,FZ,-1.0e5     !对 6 号节点, 施加 FZ=-1.0e5
F,7,FZ,-1.0e5     !对 7 号节点, 施加 FZ=-1.0e5
!=====进入求解模块
/solu             !求解模块
solve             !求解
finish            !退出所在模块
!=====进入一般的后处理模块
/POST1            !进入后处理
PLDISP,1          !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)
finish            !退出所在模块
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例] 4_8_2(2) %%%%%%% end %%%%%%%%
```

4.9 本章要点

- 连续体问题的三大类变量、三大类方程
- 连续体问题求解的虚功原理、最小势能原理
- 平面问题的单元构造(3 节点三角形单元、4 节点矩形单元)
- 轴对称问题的单元构造(3 节点三角形环形单元、4 节点矩形环形单元)



- 空间问题的单元构造(4 节点四面体单元、8 节点正六面体单元)
- 参数单元的原理和数值积分(坐标系的变换、单元的映射、Gauss 积分)

4.10 习题

4-1 在结构中，存在一个危险点，它的应力状态为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

试计算该点的最大拉应力、最大剪应力、Mises 等效应力，并对它们进行比较。

4-2 一种韧性材料的屈服应力为 280MPa，对于平面应力问题，求得了几个关键点的应力状态见题表 4-2。

题表 4-2 几个关键点的应力分量值

几个关键点	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	τ_{xy} (MPa)
A 点	140	140	0
B 点	105	105	105
C 点	0	0	140
D 点	-14	70	-56

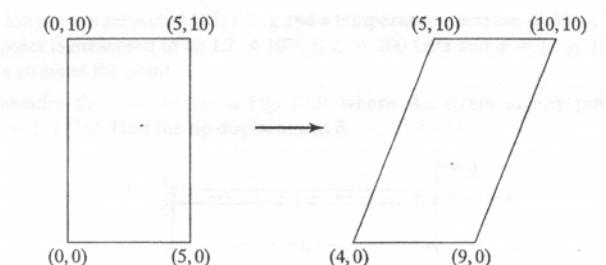
试分别采用最大剪应力准则、最大畸变能准则计算各个构件点的安全系数，并比较两种准则的差别。

4-3 一个平面问题的位移场为

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = (-x^2 + 2y^2 + 6xy) \cdot 10^{-4} \\ v(x, y) = (3x + 6y - y^2) \cdot 10^{-4} \end{array} \right\}$$

求出位于点 $x=1, y=0$ 处的 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ 。

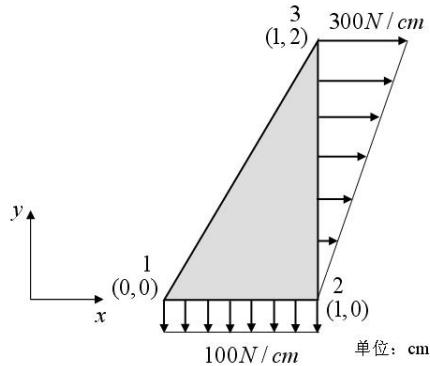
4-4 如题图所示为一个单元的变形前与变形后的形貌，求出该单元的位移变形场 $u(x, y), v(x, y)$ ，由此计算 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ ，并进行讨论。



题图 4-4

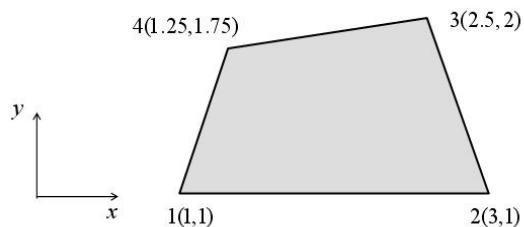


4-5 有一个三角形单元，受有如题图所示的分布载荷，计算该单元的节点等效载荷。



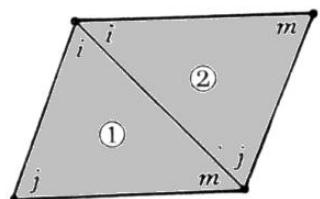
题图 4-5

4-6 在 (x, y) 坐标系中的一个单元如题图所示，对它进行等参元的坐标转换，求变换后的一个点 $(\xi, \eta) = (1, 0.5)$ 所对应的 (x, y) 坐标系中的位置。



题图 4-6

4-7 如题图所示为由两个三角形单元组成的平行四边形，



题图 4-7

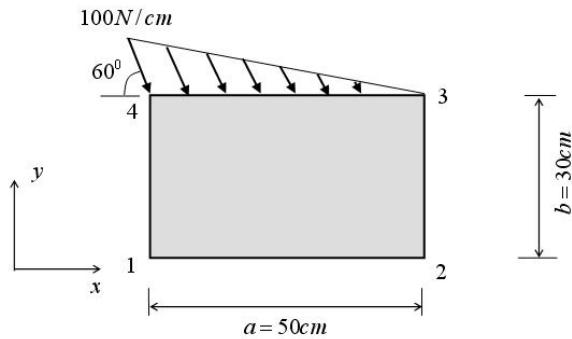
已知单元①按局部编码 i, j, m 的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^{(1)}$ 是

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 & -6 & -2 & 6 \\ 16 & 0 & -12 & 0 & -4 & \\ 13.5 & 4.5 & -7.5 & -4.5 & & \\ 13.5 & 1.5 & -1.5 & & & \\ \text{sym.} & & 9.5 & -1.5 & & \\ & & & & 5.5 & \end{bmatrix}$$



试按局部坐标的编码写出单元②的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^{(2)}$ ，并进行整体刚度矩阵的组装。

4-8 计算如题图所示矩形单元一个边的三角形分布载荷的等效节点力。

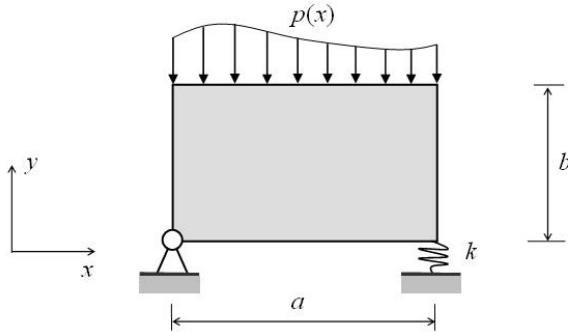


题图 4-8

4-9 如题图所示，为一具有弹簧支座的矩阵平板结构，其势能泛函为

$$\begin{aligned}\Pi = & \int_A \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) t dA \\ & + \frac{1}{2} k v^2 (x = a, y = 0) - \int_s \bar{p}(x) v ds\end{aligned}$$

其中 A 为板的面积域， t 为板厚， k 为弹性系数， v 为沿 y 方向的位移， $v(x = a, y = 0)$ 为弹簧支座处的位移，试推导求解该问题的有限元分析方程。



题图 4-9

4-10 对于如题图 4-9 所示的带弹簧支座的结构，假设 $p(x) = 100\text{N/cm}$ ，试用一个矩形单元来进行分析，并求出支反力。

4-11 基于【ANSYS 算例】4.3.2(4)，进一步细化网格，计算并讨论该算例中位移及势能结果的极限值。



第 5 章 有限元分析中的若干问题讨论

有限元方法的一个突出特点就是它的许多变量和矩阵表达式都具有确切的物理含义，这对于我们更好地理解和掌握有限元分析的实质提供了背景，本章将全面讨论这方面的内容；另外，我们求解复杂问题的目的就是希望获取最高精度的结果，但有限元方法是一种数值方法，高精度的追求必然带来计算量的急剧增加，因此必须综合考虑求解精度和计算量这两方面因素，以达到最佳的效率，即以较合理的计算量来获得满意的精度，这就涉及到误差控制这一专题，本章也将就这一部分内容进行讨论。

5.1 单元的节点编号与总刚度阵的存储带宽

有限元分析中的一个特点就是需将各个单元进行组装，组装的数学处理过程就是将单元矩阵的各个系数按照相关的节点编号放到整体矩阵中，由于仅有在同一单元中相关联的节点才会在整体矩阵相应的行及列中出现刚度系数，则在整体矩阵中，必然会有大量的零数据，为节省存储空间，一般只需存储非零数据，可以看出，单元和节点的编号将直接影响到非零数据在整体刚度矩阵中的位置，我们希望非零数据越集中越好，反映非零数据集中程度的一个指标就是带宽(bandwidth)。下面具体讨论单元节点编号(nodal numbering)与带宽之间的关系。

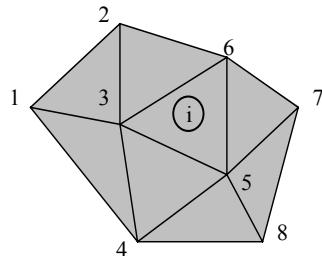


图 5-1 2D 问题的节点编号

如图 5-1 所示 2D 连续体的单元和节点编号，第 i 个单元的节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^{(i)} = [u_3 \ v_3 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6]^T \quad (5-1)$$

该单元装配时在整体刚度矩阵中对应于(5-1)式的位置，具体地见式(5-2)。

$$u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8$$

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} \cdot & & & & & & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & & & & & & \\ & \times & & & & & & & & & & & & & \\ & \times & \times & & & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & & & \times & & & & & & & & & & \\ & & & & \times & \times & & & & & & & & & \\ & & & & \times & \times & \times & & & & & & & & \\ & & & & \times & \times & \times & \times & & & & & & & \\ & & & & \times & \times & \times & \times & \times & & & & & & \\ & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{第 } i \text{ 个单元的半带宽}} & & & \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

由于刚度矩阵是对称的，可以看出，若节点的 DOF 数为 λ ，则每一个单元在整体刚度



矩阵的半带宽(semi bandwidth)为:

$$d_i = (\text{第 } i \text{ 个单元中节点编号的最大差值} + 1) \times \lambda, \quad (5-3)$$

则整体刚度矩阵的最大半带宽为

$$d = \max_i \{d_i\} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (5-4)$$

其中 n 为整个结构系统的单元数。显然, 对于 2D 问题, 有 $\lambda=2$, 对于 3D 问题, 有 $\lambda=3$ 。

因此在计算机中, 一般都采用二维半带宽存储刚度矩阵的系数, 为等带宽存储, 也可以采用一维变带宽存储, 这虽然更能节省存储空间, 但必须定义用于主对角元素定位的辅助数组。

5.2 单元形状函数矩阵与刚度矩阵的性质

形状函数矩阵与刚度矩阵在有限元方法中占有最重要的位置, 同时它们也具有非常明确的物理意义, 分析和了解它们的性质对于我们更深层次地掌握有限元方法具有重要的作用。下面以一维杆单元为例进行讨论, 其结论完全可以推广到一般单元。

5.2.1 形状函数矩阵的性质

以一维杆单元为例来讨论一般情况下形状函数矩阵的性质, 由第 4.3 可知, 杆单元的位移场为

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \mathbf{N}(x)\mathbf{q}^e \quad (5-5)$$

其中 u_1, u_2 为节点位移, $N_1(x), N_2(x)$ 为对应于节点 1 和节点 2 的形状函数, $\mathbf{N}(x)$ 为形状函数矩阵, 即 $\mathbf{N}(x) = [N_1(x) \ N_2(x)]$; 下面分三种情况具体讨论。

1. 考虑单元左端发生单位位移, 而右端固定时的情形

此时, 令 $u_1 = 1, u_2 = 0$, 由式(5-5), 有

$$u(x) = N_1(x) \quad (5-6)$$

式(5-6)说明对应于节点 1 的形状函数 $N_1(x)$ 的意义为: 当节点 1 的位移为 1, 而其它节点位移为零时的单元位移场。

2. 考虑单元左端固定, 而右端发生单位位移时的情形

此时, 令 $u_1 = 0, u_2 = 1$, 由式(5-5), 有

$$u(x) = N_2(x) \quad (5-7)$$

由此, 可以总结出形状函数的以下性质。

【基本原理】5.2.1(1) 单元形状函数性质 1: 0/1 性质

N_i 表示在 i 点的节点位移为 1, 其它节点位移为 0 时的单元位移场函数, 如图 5-2 所示。

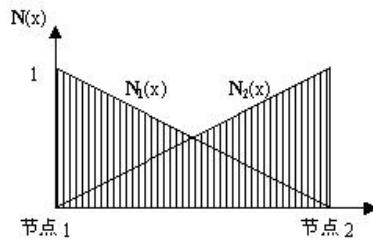


图 5-2 1D 杆单元的形状函数

3. 考虑单元发生刚体位移的情形

设单元有刚体位移 \bar{u}_0 , 由于是刚体位移, 则单元的位移场函数及节点位移



都为 \bar{u}_0 , 即

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = \bar{u}_0 \\ u_1 = u_2 = \bar{u}_0 \end{array} \right\} \quad (5-8)$$

代入位移场的表达式(5-5), 有

$$\bar{u}_0 = N_1(x)\bar{u}_0 + N_2(x)\bar{u}_0 \quad (5-9)$$

消去 \bar{u}_0 后, 有

$$N_1(x) + N_2(x) = 1 \quad (5-10)$$

由此, 可以总结出形状函数的另一性质。

【基本原理】5.2.1(2) 单元形状函数性质 2: 和 1 性质

单元的形状函数满足: 在单元的任意点处

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (5-11)$$

其中 n 为单元的节点数, 它表明形状函数能够描述单元的刚体位移。

5.2.2 刚度矩阵的性质

仍然以一维 2 节点杆单元为例, 它的刚度方程为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

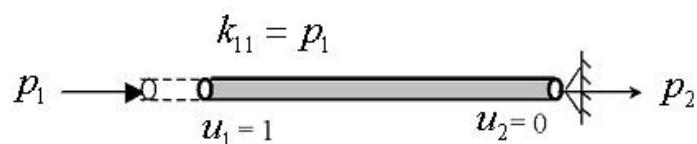
下面分两种情况进行具体讨论。

1. 考虑单元左端发生单位位移, 而右端固定时的情形

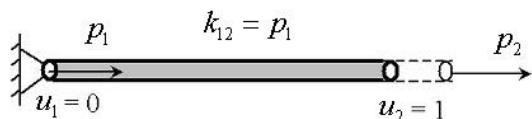
这时, 有 $u_1 = 1, u_2 = 0$, 将该条件代入式(5-12)中, 有

$$k_{11} = p_1 \quad (5-13)$$

这表明, k_{11} 为保持这样一种状态 (即使节点 2 的位移为零, 使节点 1 产生单位位移) 而需要在节点 1 上所施加的力, 如图 5-3(a)所示。



(a) k_{11} 的物理含义



(b) k_{12} 的物理含义
图 5-3 刚度系数的物理含义

将该性质推广到单元刚度矩阵中的对角线元素, 有以下描述。

【基本原理】5.2.2(1) 单元刚度矩阵性质 1: 对角线元素的 1/0 性质



单元刚度矩阵的对角线元素 k_{ii} 表示要使单元的第 i 个节点产生单位位移 ($u_i = 1$)，而其它节点位移为 0 时，需在节点 i 所施加的力。

2. 考虑单元左端固定，而右端发生单位位移时的情形

这时，有 $u_1 = 0, u_2 = 1$ ，将该条件代入(5-12)式中，有

$$k_{12} = p_1 \quad (5-14)$$

这表明， k_{12} 为保持这样一种状态（即使节点 1 的位移为零，使节点 2 产生单位位移）而需要在节点 1 上所作用的力，如图 5-3(b)所示。

将该性质推广到单元刚度矩阵中的非对角线元素，有以下描述。

【基本原理】5.2.2(2) 单元刚度矩阵性质 2：非对角线元素的 1/0 性质

单元刚度矩阵的非对角线元素 k_{ij} ($i \neq j$) 表示要使单元的第 j 个节点产生单位位移 ($u_j = 1$)，而其它节点位移为 0 时，需要在第 i 个节点所施加的力。

【基本原理】5.2.2(3) 单元刚度矩阵性质 3：对称性质

单元刚度矩阵是对称(symmetry)的，即

$$\mathbf{K}^{eT} = \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right]^T = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \mathbf{K}^e \quad (5-15)$$

这一性质也可由功的互等定理(reciprocal theorem of work)来推论。该定理又称 Betti-Maxwell 定理，即对于线性弹性体，第一种加载状态下的外力在第二种加载状态下发生的相应位移上所做的功，等于第二种加载状态下的外力在第一种加载状态下发生的相应位移上所做的功；

根据前面所述刚度系数的性质，系数 k_{ij} 和 k_{ji} 分别包含在这样两种加载状态的外力中，其对

应的外力功是 $1 \times k_{ij} = 1 \times k_{ji}$ ，故 $k_{ij} = k_{ji}$ 。

【基本原理】5.2.2(4) 单元刚度矩阵性质 4：半正定性质

单元刚度矩阵是半正定(positive Semi-definite)的。

为说明这种性质，将基于节点表达的应变能写成展开的形式

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \\ &= \frac{1}{2} \left(k_{11} u_1^2 + \dots + k_{1i} u_1 u_i + \dots + k_{1n} u_1 u_n + \dots \right. \\ &\quad + k_{j1} u_j u_1 + \dots + k_{ji} u_j u_i + \dots + k_{jn} u_j u_n + \dots \\ &\quad \left. + k_{n1} u_n u_1 + \dots + k_{ni} u_n u_i + \dots + k_{nn} u_n u_n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} u_i u_j \end{aligned} \quad (5-16)$$

其中节点位移为 $\mathbf{q}^e = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ ，也就是说， U 是关于变量 \mathbf{q}^e 的二次齐次多项式。在线性代数里，(5-16)式称为“二次型”。而对应系数所组成的方阵 \mathbf{K}^e 称为二次型矩阵。在去除刚体位移的情况下，不论位移列阵 \mathbf{q}^e 取何种数值，除非 $\mathbf{q}^e = 0$ ，应变能 U 总是正值。这样的二次型在数学上称为是“正定(positive definite)的”，表达这二次型的矩阵也就称为“正定矩阵”。但单元在刚体位移情况下，有 $\mathbf{q}^e \neq 0$ (刚体位移)，而此时的应变能 $U=0$ ，则一定有 $|\mathbf{K}^e|=0$ ，因此，单元刚度矩阵是半正定的。单元刚度矩阵的系数还有性质 $k_{ii} > 0$ 。



3. 考察刚体位移

假设一个单元在受相同外载情形下存在两种状态位移(即该单元可以任意移动, 但所受的力是保持平衡的), 仍以方程(5-12)所描述的一维杆单元为例来说明该问题。

在节点载荷 p_1, p_2 作用下, 该单元有位移

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = c_1^{(1)} \\ u_2 = c_2^{(1)} \end{array} \right\} \quad (5-17)$$

假设该单元此时在保持 p_1, p_2 作用状态下有一刚体位移, 则节点位移为

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = c_1^{(1)} + u_0 = c_1^{(2)} \\ u_2 = c_2^{(1)} + u_0 = c_2^{(2)} \end{array} \right\} \quad (5-18)$$

其中 u_0 为刚体位移的平移量; 则对应于这两种情形的单元刚度方程为

$$\left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right] \quad (5-19)$$

$$\left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right] \quad (5-20)$$

将(5-20)式减去(5-19)式, 得到

$$\left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_1^{(2)} - c_1^{(1)} \\ c_2^{(2)} - c_2^{(1)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (5-21)$$

由于 $c_1^{(2)} \neq c_1^{(1)}$, $c_2^{(2)} \neq c_2^{(1)}$, 使式(5-21)成立(有非零解)的条件是

$$\left| \begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right| = 0 \quad (5-22)$$

同时, 利用式(5-18), 也可将式(5-21)写成

$$\left. \begin{array}{l} k_{11} \cdot u_0 + k_{12} \cdot u_0 = 0 \\ k_{21} \cdot u_0 + k_{22} \cdot u_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (5-23)$$

进一步, 有

$$\left. \begin{array}{l} k_{11} + k_{12} = 0 \\ k_{21} + k_{22} = 0 \end{array} \right\} \quad (5-24)$$

由刚度矩阵系数的性质 1 和性质 2 可知, 式(5-24)代表节点的平衡力系。根据以上讨论, 总结出以下性质。

【基本原理】5.2.2(5) 单元刚度矩阵性质 5: 奇异性

单元刚度矩阵是奇异(singularity)的, 即 $|\mathbf{K}^e| = 0$ 。所以在未加位移约束条件以前有限元刚度方程的解不是唯一的。

【基本原理】5.2.2(6) 单元刚度矩阵性质 6: 行(或列)的代数和为零的性质

刚度矩阵的任一行(或列)代表一个平衡力系; 当节点位移全部为线位移时(即为 C_0 型问题), 任一行(或列)的代数和应为零。

刚度矩阵的任一行在数值上等于某种特定位移状态下的全部外力和支反力, 它们当然构



成一个平衡力系；而由对称性可知，任意一列也就具有同样性质。在具体计算过程中，可以利用这一性质检查计算结果的正误。

同样，由单元刚度矩阵所组装出的整体刚度矩阵也具有以下性质：(a) 对称性；(b) 奇异性；(c) 半正定性；(d) 稀疏矩阵(spars matrix)；(e) 非零元素显现带状性(banded)。

以上有关形状函数矩阵与刚度矩阵的性质对于梁单元(C_1 型单元，参见第5.5节的讨论)有所不同，见【典型例题】5.2.2(7)。

【典型例题】5.2.2(7) 平面梁单元形状函数的性质

平面纯弯梁单元如图5-4所示。

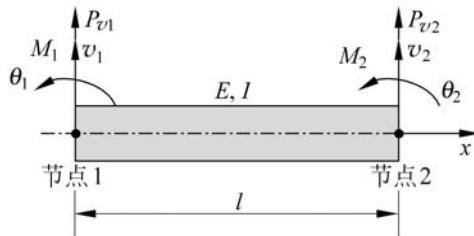


图5-4 平面纯弯梁单元的节点位移及节点力

该单元的位移函数为

$$\begin{aligned}v(x) &= N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \\&= \mathbf{N}\mathbf{q}\end{aligned}\quad (5-25)$$

其中 $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$ 为形状函数矩阵， $\mathbf{q} = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]^T$ 为节点位移列阵。

试讨论该形状函数矩阵的性质。

解答：梁单元的节点位移列阵中既包含有对应于 C_0 问题的位移(即线位移 $[v_1 \ v_2]$)又包含有对应于 C_1 问题的位移(即转角 $[\theta_1 \ \theta_2]$)，因而使得该单元的形状函数和刚度矩阵系数的性质和一般 C_0 问题不一样，变得更为复杂；下面考察梁单元作刚体运动的过程。

由于该单元是只有挠度和转角的纯弯梁，所以只考虑三种情形下的刚体位移：沿垂直方向的刚体平动、绕左端点的刚体转动、一般性刚体运动，分别在这三种情形下，讨论形状函数矩阵和刚度矩阵的性质。

case 1：沿垂直方向的刚体平动



(a) 梁单元在垂直方向的刚体平动

(b) 梁单元绕节点 1 的刚体转动

图5-5 梁单元的刚体位移



如图 5-5(a)所示, 设梁单元在垂直方向的刚体平动量为 \bar{v}_0 , 此时的梁单元的位移函数为

$$v(x) = \bar{v}_0 \quad (5-26)$$

则节点位移为

$$v_1 = v_2 = \bar{v}_0, \theta_1 = \theta_2 = 0 \quad (5-27)$$

将式(5-26)和式(5-27)代入以形状函数表达的位移函数(5-25)中, 有

$$v(x) = N_1 \cdot \bar{v}_0 + N_3 \cdot \bar{v}_0 = \bar{v}_0 \quad (5-28)$$

消去 \bar{v}_0 后, 有

$$N_1 + N_3 = 1 \quad (5-29)$$

由第 3.3.2 节的推导可知, 平面梁单元的

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (5-30)$$

将其代入式(5-29)中, 则式(5-29)恒满足, 即验证了性质(5-29)。

case 2: 刚体转动

如图 5-5(b)所示的刚体转动状态, 如果绕节点 1 有刚体转动 $\bar{\theta}_0$, 此时的梁单元的位移函数为

$$v(x) = \bar{\theta}_0 \cdot x \quad (5-31)$$

则节点位移为

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= \bar{\theta}_0 \cdot l \\ \theta_1 &= \bar{\theta}_0 \\ \theta_2 &= \bar{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-32)$$

将式(5-31)和式(5-32)代入以形状函数表达的位移函数(5-25)中, 有

$$v(x) = N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot \bar{\theta}_0 + N_3 \cdot \bar{\theta}_0 \cdot l + N_4 \cdot \bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 \cdot x \quad (5-33)$$

消去 $\bar{\theta}_0$ 后, 有

$$N_2 + N_3 \cdot l = x \quad (5-34)$$

进一步



$$N_2 + N_4 = x - N_3 \cdot l = l \left(\frac{x}{l} - N_3 \right) \quad (5-35)$$

如将性质(5-29)代入上式，有

$$N_2 + N_4 = l \left(\frac{x}{l} + N_1 - 1 \right) \quad (5-36)$$

显然，由式(5-29)和式(5-36)可知，此时不满足 C_0 问题中关于 $\sum N_i = 1$ 的性质。

case 3：一般性刚体运动（平动和转动）

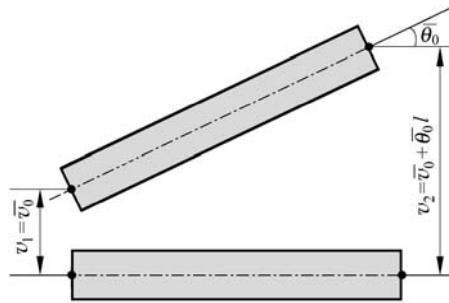


图 5-6 梁单元的一般性刚体运动（平动和转动）

如图 5-6 所示的一般性刚体运动状态，如果绕节点 1 有刚体转动 $\bar{\theta}_0$ ，并且在垂直方向的刚体平动量为 \bar{v}_0 ，此时的梁单元的位移函数为

$$v(x) = \bar{v}_0 + \bar{\theta}_0 x \quad (5-37)$$

则节点位移为

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = v_0 \\ v_2 = v_0 + \bar{\theta}_0 \cdot l \\ \theta_1 = \bar{\theta}_0 \\ \theta_2 = \bar{\theta}_0 \end{array} \right\} \quad (5-38)$$

将式(5-37)和式(5-38)代入以形状函数表达的位移函数(5-25)中，有

$$N_1 \cdot \bar{v}_0 + N_2 \cdot \bar{\theta}_0 + N_3 \cdot (\bar{v}_0 + \bar{\theta}_0 \cdot l) + N_4 \cdot \bar{\theta}_0 = \bar{v}_0 + \bar{\theta}_0 \cdot x \quad (5-39)$$

即

$$(N_1 + N_3) \bar{v}_0 + (N_2 + N_4) \bar{\theta}_0 + N_3 \cdot \bar{\theta}_0 l = \bar{v}_0 + \bar{\theta}_0 x \quad (5-40)$$

应用式(5-29)，上式变为

$$N_2 + N_4 = x - N_3 l \quad (5-41)$$

此时，得到与 case 2 相同的结果。

这样可以将平面梁单元的形状函数分成两个部分：对应于 C_0 连续部分的形状函数以及



对应于 C_1 连续部分的形状函数。对于前者有

$$N_1 + N_3 = 1 \quad (5-42)$$

对应于 C_1 连续部分的形状函数，有关系

$$N_2 + N_4 = x - N_3 l \quad (5-43)$$

5.3 边界条件的处理与支反力的计算

位移边界条件 $BC(u)$ 在大多数情形下有两种类型。

(1) 零位移边界条件

即

$$\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0} \quad (5-44)$$

(2) 给定具体数值的位移边界条件

即

$$\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{u}} \quad (5-45)$$

设所建立的整体刚度方程(将其进行分块)为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \bar{\mathbf{p}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_a + \mathbf{R}_a \\ \bar{\mathbf{F}}_b \end{bmatrix} \quad (5-46)$$

其中 $\mathbf{K}_{ij}, \bar{\mathbf{q}}_a$ 为已知, 施加的外力 $\bar{\mathbf{F}} = [\bar{\mathbf{F}}_a \quad \bar{\mathbf{F}}_b]^T$ 为已知, \mathbf{q}_b (未知节点位移)和支反力 \mathbf{R}_a 为未知 (待求量), 即 \mathbf{p}_a 为未知量。

下面就上述两类边界条件, 讨论直接法、置“1”法、乘大数法、拉格朗日乘子法、罚函数法这几种处理方法。

【基本原理】5.3(1) 处理边界条件的直接法

(1) 对于 $\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0}$ 的边界条件

由于 $\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0}$, 则去掉方程(5-46)中对应于该变量的行和列后, 得到

$$\mathbf{K}_{bb} \mathbf{q}_b = \bar{\mathbf{p}}_b \quad (5-47)$$

可求出未知节点位移 \mathbf{q}_b 为

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{K}_{bb}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_b = \mathbf{K}_{bb}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_b \quad (5-48)$$

(2) 对于 $\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{u}}$ 的边界条件

将方程(5-46)写成两组方程

$$\mathbf{K}_{aa} \bar{\mathbf{q}}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{q}_b = \mathbf{p}_a \quad (5-49)$$

$$\mathbf{K}_{ba} \bar{\mathbf{q}}_a + \mathbf{K}_{bb} \mathbf{q}_b = \bar{\mathbf{p}}_b \quad (5-50)$$

将 $\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{u}}$ 代入方程(5-50)中, 可得到

$$\mathbf{K}_{bb} \mathbf{q}_b = \bar{\mathbf{p}}_b - \mathbf{K}_{ba} \bar{\mathbf{u}} \quad (5-51)$$

则可求出未知节点位移 \mathbf{q}_b 为

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\bar{\mathbf{p}}_b - \mathbf{K}_{ba} \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{K}_{bb}^{-1} (\bar{\mathbf{F}}_b - \mathbf{K}_{ba} \bar{\mathbf{u}}) \quad (5-52)$$

“直接法”的特点



- (a) 既可处理 $\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0}$ 的情形，又可处理 $\bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{u}}$ 的情形；
- (b) 处理过程直观；
- (c) 待求解矩阵的规模变小(维数变小)，适合于手工处理；
- (d) 矩阵的节点编号及排序改变，不利于计算机的规范化处理。

【基本原理】5.3(2) 处理边界条件的置“1”法

设边界条件为第 r 个自由度的位移为零，即 $\bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ ；可置整体刚度矩阵中所对对应对角元素位置的 $k_{rr} = 1$ ，而该行和该列的其它元素为零，即 $k_{rs} = k_{sr} = 0 (r \neq s)$ ，同时也置对应的载荷元素 $p_r = 0$ ，则

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \cdots & \cdots & r & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{rr} = 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & & & \vdots \end{matrix} \right] & \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{q}_r \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_r = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} \quad (5-53)$$

进行以上设置后，这时方程(5-53)应等价于原方程加上了边界条件 $\bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ ，下面考察这种等价性，就(5-53)中的第 r 行，有

$$k_{rr} \cdot \bar{q}_r = p_r \quad (5-54)$$

由于置 $k_{rr} = 1, p_r = 0$ ，则有

$$\bar{q}_r = 0 \quad (5-55)$$

即为所要求的位移边界条件。而式(5-53)中除第 r 行外，其它各行在对应于 r 列的位置上都置了“0”，这相当于考虑了 $\bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ 的影响，除此之外其余各项的影响不变；这恰好就是原方程加上了边界条件 $\bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ 的影响。

对角元素置“1”法的特点：

- (a) 只能处理 $\bar{\mathbf{q}}_r = \mathbf{0}$ 的情形；
- (b) 保持待求解矩阵的规模不变，不需重新排序；
- (c) 保持整体刚度阵的对称性，利于计算机的规范化处理。

【基本原理】5.3(3) 处理边界条件的乘大数法

设边界条件为第 r 个自由度的位移为指定位移，即对应于边界条件 $\bar{\mathbf{q}}_r = \bar{\mathbf{u}}$ 的情形，可将整体刚度矩阵中所对对应对角元素位置的 k_{rr} 乘一个大数 α ，将对应的载荷元素 p_r 置为 $\alpha k_{rr} \bar{u}$ ，即



$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & \cdots & \cdots & r & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & & \\ & \cdots & & & & \cdots & & & \\ & & & & & & \cdots & & \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & \cdots & \alpha k_{rr} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & & \\ & \cdots & & & \cdots & & & & \\ & & & & & & & & \end{array} \right] & \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_r \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \alpha k_{rr} \bar{u} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} \quad (5-56)$$

进行以上设置后, 这时方程 (5-56) 应等价于原方程加上边界条件 $\bar{q}_r = \bar{u}$, 下面考察这种等价性。由式 (5-56) 中的第 r 行, 有

$$k_{r1}q_1 + k_{r2}q_2 + \cdots + \alpha k_{rr}\bar{q}_r + \cdots + k_mq_n = \alpha k_{rr}\bar{u} \quad (5-57)$$

由于 $\alpha k_{rr} \gg k_{ri}$ ($i=1, 2, 3 \dots r-1, r+1 \dots n$), 则上式变为

$$\alpha k_{rr}\bar{q}_r \approx \alpha k_{rr}\bar{u} \quad (5-58)$$

则

$$\bar{q}_r \approx \bar{u} \quad (5-59)$$

即为所要求的位移边界条件。而式 (5-56) 中除第 r 行外, 其它各行都考虑了 $\bar{q}_r \approx \bar{u}$ 的影响, 除此之外其余各项的影响不变; 这恰好就是原方程加上边界条件 $\bar{q}_r \approx \bar{u}$ 的影响。

对角元素乘大数法的特点:

- (a) 既可处理 $\bar{q}_r = 0$ 的情形, 又可处理 $\bar{q}_r = \bar{u}$ 的情形;
- (b) 待求解矩阵的规模不变, 不需要重新排序;
- (c) 保持整体刚度阵的对称性。

【基本原理】5.3(4) 支反力的计算

在以上处理位移边界条件的方法中, 都需要再求支反力; 将方程 (5-46) 写成两组方程, 见式 (5-49) 和式 (5-50), 在求得未知节点位移 \mathbf{q}_b 之后, 可由式 (5-49) 求出支反力 \mathbf{P}_a (或 \mathbf{R}_a), 即

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{p}_a - \bar{\mathbf{F}}_a = (\mathbf{K}_{aa}\bar{\mathbf{q}}_a + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{q}_b) - \bar{\mathbf{F}}_a \quad (5-60)$$

【基本原理】5.3(5) 处理耦合边界条件的拉格朗日 (Lagrange) 乘子法

当存在多点之间的约束耦合关系时(如斜支座), 就会出现带约束方程的表达式, 其一般数学表达式可以写成

$$\left. \begin{array}{l} C_{11}u_1 + C_{12}u_2 + C_{13}u_3 + \cdots = d_1 \\ C_{21}u_1 + C_{22}u_2 + C_{23}u_3 + \cdots = d_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (5-61)$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{d} \quad (5-62)$$



其中 \mathbf{C} 和 \mathbf{d} 是由约束的具体情况来确定的系数矩阵, $\mathbf{q} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots]^T$ 为节点位移列阵。

原问题的势能范函 Π 为

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{q} \quad (5-63)$$

其中 \mathbf{K} 为系统的总刚度矩阵, \mathbf{F} 为施加的外力的节点载荷列阵。考虑到约束条件 (5-61), 这是一个带有约束的泛函极值问题, 可以通过拉格朗日乘子法(Lagrangian multiplier algorithm), 转化为无约束的极值问题。定义新的泛函 Π^* 为

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \Pi + \boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{C} \mathbf{q} - \mathbf{d}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{q} + \boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{C} \mathbf{q} - \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (5-64)$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个列阵, 它的元素就是全部拉格朗日乘子。将 (5-64) 式取极值, 有

$$\delta \Pi^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\Lambda}} \cdot \delta \boldsymbol{\Lambda} = 0 \quad (5-65)$$

由于 $\delta \mathbf{q}$ 和 $\delta \boldsymbol{\Lambda}$ 的独立性, 则有

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\Lambda}} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (5-66)$$

将式 (5-64) 代入式 (5-66) 中, 有

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{d} \end{array} \right\} \quad (5-67)$$

写成矩阵形式, 则为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (5-68)$$

求解该方程组将给出节点位移, 同时也可算出拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\Lambda}$ 。

该方程有两种解法; 首先, 可由 (5-67) 中的第一式将 \mathbf{q} 用 $\boldsymbol{\Lambda}$ 来表示, 然后代入到 (5-67) 中的第二式, 有

$$-\mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{d} - \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (5-69)$$

可求得 $\boldsymbol{\Lambda}$, 然后再代入式 (5-67) 中的第一式, 则可求得 \mathbf{F} 。

但是, 由于式 (5-69) 中的方阵求逆以及有关的矩阵运算破坏了方程组系数矩阵的稀疏带状特性, 这种算法要求很大的计算机存储量, 对于大规模计算, 该方法是不可取的。为克服这一缺点, 可以直接求解式 (5-68)。虽然系数矩阵的带状特性常常被矩阵 \mathbf{C} 所破坏, 但若采用波前法来进行处理, 仍然是可行的, 此时节点位移 u_i 同拉格朗日乘子 Λ_j 的消去交错



进行。在消去 Λ_j 的时，应考虑到于它对应的那一行中，一切有关的 u_i （即 \mathbf{C} 的元素 $C_{ji} \neq 0$ 的那些）均已消去后，才消去 Λ_j 。

【基本原理】5.3(6) 处理耦合边界条件的罚函数法

该方法将引入一个较大的系数来形成一个罚函数(penalty function approach)，对于由式(5-62)表达的耦合边界条件，定义一个考虑带罚函数的修正后的势能函数(泛函)为

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{q} + \frac{1}{2} S (\mathbf{C} \mathbf{q} - \mathbf{d})^2 \quad (5-70)$$

其中 S 为引入的一个大数，因为当 S 值很大时，才有 $(\mathbf{C} \mathbf{q} - \mathbf{d}) \approx 0$ 。对 Π^* 求取极小值，即

$\partial \Pi^* / \partial \mathbf{q} = 0$ ，有

$$\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F} + S \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{q} - \mathbf{d}) = 0 \quad (5-71)$$

进一步整理后，有

$$(\mathbf{K} + S \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{q} = \mathbf{F} + S \mathbf{C}^T \mathbf{d} \quad (5-72)$$

$$\mathbf{K}^* \mathbf{q} = \mathbf{F}^* \quad (5-73)$$

其中 $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + S \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ ， $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + S \mathbf{C}^T \mathbf{d}$ 。可以看出，这时的 \mathbf{K}^* 以及 \mathbf{F}^* 是在原矩阵的基础
上增加了由耦合方程系数及罚函数系数产生的影响项，变化后的 \mathbf{K}^* 还是一个对称矩阵，并且它的维数还与 \mathbf{K} 矩阵相同。这给方程的求解带来很大的好处，只要设定一个较大的数，就可以采用原来的算法进行处理，当然，还要分析罚函数系数的选取所产生的误差，并能够控制它在一个允许的范围内。

【典型例题】5.3(7) 平面问题斜支座的处理

如图 5-7 所示，为一个平面应力结构，其中位置 2 及 3 处为固定约束，位置 4 处为一个 45° 的斜支座(inclined support)，试用一个 4 节点矩形单元分析该结构的位移场。

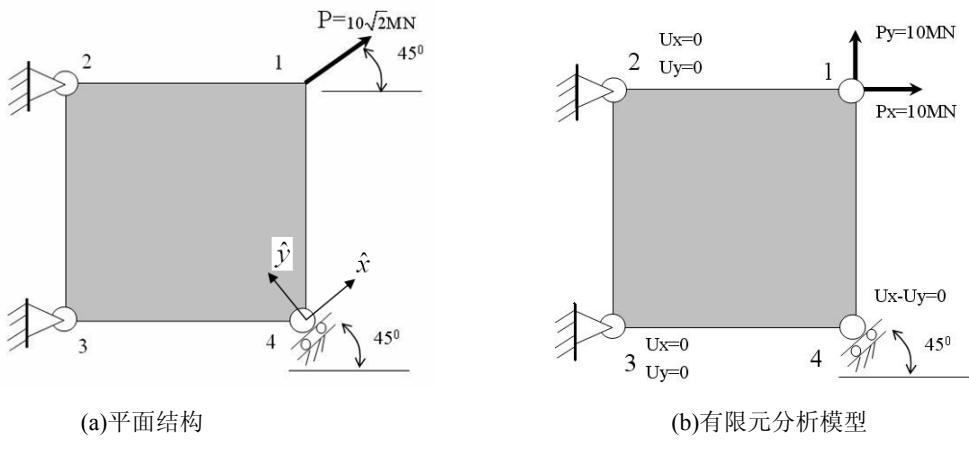


图 5-7 带斜支座的平面结构



解答：建立相应的计算模式如图 5-7 (b); 该单元矩阵，可直接应用式 (4-65) 的单元刚度矩阵，即取 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$, $t = 0.1 \text{ m}$, $a = b = 1 \text{ m}$ ，由于该计算模型的节点 2 和节点 3 为完全固定，则在刚度矩阵中，首先去掉对应的行和列，则有以下刚度方程。

$$\frac{16Et}{15} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 0.45833 & 0.15625 & 0.041667 & 0.03125 \\ 0.15625 & 0.45833 & -0.03125 & -0.27083 \\ 0.041667 & -0.03125 & 0.45833 & -0.15625 \\ 0.03125 & -0.27083 & -0.156625 & 0.45833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{u1} \\ P_{v1} \\ P_{u4} \\ P_{v4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{u1} \\ F_{v1} \\ F_{u4} + R_{u4} \\ F_{v4} + R_{v4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \text{ MN} \\ 10 \text{ MN} \\ R_{u4} \\ R_{v4} \end{bmatrix} \quad (5-74)$$

其中 R_{u4}, R_{v4} 为斜支座的支反力，对于斜支座 4，有约束条件

$$u_4 = v_4 \quad (5-75)$$

同时，斜支座的反力有关系

$$-R_{u4} = R_{v4} \quad (5-76)$$

即，由式(5-74)的 4 个方程来求解 4 个独立未知量 u_1, v_1, u_4, R_{u4} 。

下面采用直接法、拉格朗日乘子法以及罚函数法来进行处理，

① 直接法 1

将式(5-75)以及式(5-76)代入式(5-74)中，有

$$\frac{16Et}{15} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 \\ 0.45833 & 0.15625 & 0.072917 \\ 0.15625 & 0.45833 & -0.30208 \\ 0.072917 & -0.30208 & 0.60416 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \text{ MN} \\ 10 \text{ MN} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-77)$$

最后求出的节点位移为

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} = 0.53178 \times 10^{-3} \text{ m} \\ v_1 = 25.4280 \times \frac{15}{16Et} = 0.1192 \times 10^{-2} \text{ m} \\ u_4 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} = 0.53178 \times 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right\} \quad (5-78)$$

再将位移结果式(5-78)代回到式(5-74)中的第 3 个方程中，可以求出支反力 $R_{u4} = -3.105 \text{ MN}$ 。

由式(5-77)可以看出，以上处理过程得到的方程的系数矩阵的规模以及编号次序有所改变，这在大规模计算中将会出现带来很多麻烦，如存储量大、计算处理的时间长等。

② 直接法 2

如果将节点 4 的全局坐标转换为与斜支座相一致的局部坐标，如图 5-7(a)所示，则有变



换关系

$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_4 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (5-79)$$

$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_{u4} \\ \hat{R}_{v4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{u4} \\ R_{v4} \end{bmatrix} \quad (5-80)$$

其中, \hat{u}_4, \hat{v}_4 和 $\hat{R}_{u4}, \hat{R}_{v4}$ 分别为局部坐标系下节点 4 的位移和支反力, 同样, 也可以将式(5-74)进行转换, 即需要前乘以及后乘一个转换矩阵 T, 具体的表达式为

$$\frac{16Et}{15} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 0.45833 & 0.15625 & 0.041667 & 0.03125 \\ 0.15625 & 0.45833 & -0.03125 & -0.27083 \\ 0.041667 & -0.03125 & 0.45833 & -0.15625 \\ 0.03125 & -0.27083 & -0.15625 & 0.45833 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10MN \\ 10MN \\ 0 \\ \hat{R}_{v4} \end{bmatrix} \quad (5-81)$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ 0 & 0 & \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \quad (5-82)$$

为转换矩阵。这样, 就可以直接在该局部坐标系下处理边界条件, 有

$$\hat{v}_4 = 0, \quad \hat{R}_{u4} = 0 \quad (5-83)$$

将 $\hat{v}_4 = 0$ 代入式(5-81)中, 经整理, 有

$$\frac{16Et}{15} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 0.45833 & 0.15625 & 0.04167 & 0 \\ 0.15625 & 0.45833 & -0.03125 & 0 \\ 0.04167 & -0.03125 & 0.45833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10MN \\ 10MN \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-84)$$

对方程 (5-84) 进行求解, 有结果

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 11.3448 \times \frac{15}{16Et} = 0.53178 \times 10^{-3} \text{m} \\ v_1 &= 25.4280 \times \frac{15}{16Et} = 0.1192 \times 10^{-2} \text{m} \\ \hat{u}_4 &= 16.0649 \times \frac{15}{16Et} \end{aligned} \right\} \quad (5-85)$$

再由式 (5-79) 可得

$$u_4 = v_4 = 0.53178 \times 10^{-3} \text{m} \quad (5-86)$$



③ 拉格朗日乘子法

若采用拉格朗日乘子法来处理约束条件(5-75), 则建立约束方程为

$$u_4 - v_4 = 0 \rightarrow [0 \ 0 \ 1 \ -1] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{c}\mathbf{q} = \mathbf{d} \quad (5-87)$$

根据式(5-68), 建立相应的方程为

$$\frac{16Et}{15} \begin{bmatrix} 0.45833 & 0.15625 & 0.041667 & 0.03125 & 0 \\ 0.15625 & 0.45833 & -0.03125 & -0.27083 & 0 \\ 0.041667 & -0.03125 & 0.45833 & -0.15625 & 15/16Et \\ 0.03125 & -0.27083 & -0.15625 & 0.45833 & -15/16Et \\ 0 & 0 & 15/16Et & -15/16Et & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10MN \\ 10MN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-88)$$

其中 λ 为考虑约束条件而引入的拉格朗日乘子。

将式(5-88)写成

$$\bar{\mathbf{K}}_{(5 \times 5)} \cdot \bar{\mathbf{q}}_{(5 \times 1)} = \bar{\mathbf{F}}_{(5 \times 1)} \quad (5-89)$$

其中 $\bar{\mathbf{q}} = [u_1 \ v_1 \ u_4 \ v_4 \ \lambda]^T$; 可以看出, 这里的 $\bar{\mathbf{K}}$ 为对称矩阵, 便于计算机的高效处理。对方程(5-89)进行求解, 得到

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} = 0.53178 \times 10^{-3} \text{m} \\ v_1 = 25.4280 \times \frac{15}{16Et} = 0.1192 \times 10^{-2} \text{m} \\ u_4 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} = 0.53178 \times 10^{-3} \text{m} \\ \lambda = -3.1051 \text{MN} \end{array} \right\} \quad (5-90)$$

可以看出, 这里的拉格朗日乘子就是支反力 $\lambda = R_{u4}$ 。

④ 罚函数法

对于位移约束方程

$$u_4 - v_4 = 0 \quad (5-91)$$

根据式(5-70), 考虑带罚函数的修正后的势能函数

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{q} + \frac{1}{2} S(u_4 - v_4)^2 \quad (5-92)$$

其中 S 为引入的一个大数, 对 Π^* 取极值, 有



$$\frac{16Et}{15} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 0.45833 & 0.15625 & 0.041667 & 0.03125 \\ 0.15625 & 0.45833 & -0.03125 & -0.27083 \\ 0.041667 & -0.03125 & 0.45833 + S & -0.15625 - S \\ 0.03125 & -0.27083 & -0.156625 - S & 0.45833 + S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\text{MN} \\ 10\text{MN} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-93)$$

若取 $S=1000$, 则求解以上方程, 有结果

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 11.3441 \times \frac{15}{16Et} \\ v_1 = 25.4296 \times \frac{15}{16Et} \\ u_4 = 11.3441 \times \frac{15}{16Et} \\ v_4 = 11.3472 \times \frac{15}{16Et} \end{array} \right\} \quad (5-94)$$

若取 $S=100000$, 有结果

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} \\ v_1 = 25.4280 \times \frac{15}{16Et} \\ u_4 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} \\ v_4 = 11.3448 \times \frac{15}{16Et} \end{array} \right\} \quad (5-95)$$

可以看出, S 值的大小将影响计算结果精度。比较式(5-78)、式(5-85)、式(5-90)、式(5-94)以及式(5-95), 可以分析几种方法的计算精度; 从式(5-93)可知, 该方法不改变原矩阵的规模、对称性以及变量的排序, 这给大规模计算带来很大的好处, 因此, 在实际工程中应用很广泛。

【ANSYS 算例】5.3(8) 平面问题斜支座的处理

针对图 5-7 所示的带斜支座的平面结构, 基于 ANSYS 平台, 分别采用约束方程以及局部坐标系的斜支座约束这两种方式来进行处理。

解答: 给出的操作过程及命令流如下。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname:Plane support(设置工作文件名) → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型



ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Quad 4node 42 → OK(返回到 Element Types 窗口) → Type 1 PLANE42 → Options... → K3:Plane strs w/thk(带厚度的平面应力问题) → OK → Close

(4) 定义实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add... → Type 1 PLANE42 → OK → 输入 Real Constants Set No: 1,THK:0.1 → Close (关闭 Real Constants 窗口)

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Isotropic → EX: E5, PRXY:0.25(定义泊松比及弹性模量) → OK → Close (关闭材料定义窗口)

(6) 构造平面模型

生成节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number:1, X, Y, Z Location in active CS:2, 2, 0 → Apply → 同样依次输入其余 3 个节点坐标(最左端为起始点, 坐标分别为 (0, 2, 0)、(0, 0, 0)、(2, 0, 0)) (若采用【典型例题】5.3(7)中直接法②, 可将 4 号节点 THXY 设置为斜方向 45, 然后直接对该节点使用 UY=0 的约束即可。注意使用约束方程或其它方法时不进行此项设置)

生成元素并分配材料类型、实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → MAT,1,TYPE,1 PLANE42,REAL,1 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 1、2、3、4 号节点(生成单元)

(7) 模型加约束

左边施加 X、Y 方向的位移约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement On Nodes → 选取 2、3 号节点 → OK → Lab2: All DOF(施加 X、Y 方向的位移约束) → OK

以下提供两种方法处理斜支座问题, 使用时选择一种方法。

①采用约束方程来处理斜支座

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Coupling/Ceqn → Constraint Eqn : Const :0, NODE1:4, Lab1: UX,C1:1,NODE2:4,Lab2:UY,C2:1 → OK

或者②采用斜支座的局部坐标来施加位移约束

ANSYS Utility Menu: WorkPlane → Local Coordinate System → Create local system → At specified LOC + → 单击图形中的任意一点 → OK → XC、YC、ZC 分别设定为 2, 0, 0, THXY: 45 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → modeling → Move / Modify → Rotate Node CS → To active CS → 选择 4 号节点

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement On Nodes → 选取 4 号节点 → OK → 选择 Lab2: UY(施加 Y 方向的位移约束) → OK

(8) 施加载荷

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 点击 1 号节点 → OK → Lab: FX, Value: 10 → Apply → 再次点击 1 号节点 → OK → Lab:



FY, Value: 10 → OK

(9) 计算分析

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Static → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

(10) 计算结果

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Nodal solution → DOF Solution → Displacement vector sum → OK(观察位移矢量分布)

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Nodal Solu → Nodal solution → DOF Solution → Displacement vector sum → OK(查看各节点位移精确值)

(11) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

2 完整的命令流

提供的命令流如下。

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]5_3(8) %%%% begin %%%%  
/PREP7          !进入前处理  
ANTYPE,STATIC   !设定为静态分析  
MP,EX,1,2E5     !定义 1 号材料的弹性模量  
MP,PRXY,1,0.25  !设定 1 号材料的泊松比  
ET,1,PLANE42    !选取单元类型 1  
KEYOPT,1,3,3    !设置为带厚度的平面问题  
R,1,0.1         !设定实常数 No.1, 厚度 0.1  
N,1,2,2         !生成节点 1  
N,2,,2         !生成节点 2  
N,3,,,         !生成节点 3  
N,4,2,,        !生成节点 4  
!----- 对应于【典型例题】5.3(7) 中直接法②---begin ---  
!N,4,2,,45      !节点 4 的绕 z 旋转设置为 45,  
!D,4,UY         !然后在旋转后的节点坐标下添加位移约束  
!----- 对应于【典型例题】5.3(7) 中直接法②---end ---  
MAT,1           !设定为材料 No.1  
TYPE,1          !设定单元 No.1  
REAL,1          !设定实常数 No.1  
E,1,2,3,4       !生成一个平面单元  
D,2,ALL         !对节点 2 施加固定的位移约束  
D,3,ALL         !对节点 3 施加固定的位移约束  
!-----以下提供两种方法处理斜支座问题, 使用时选择一种方法  
!---方法 1 begin---以下的一条命令为采用约束方程的方式对斜支座进行处理  
CE,1,0,4,UX,1,4,UY,-1    !建立约束方程(No.1): 0=node4_UX*1+node_UY*(-1)  
!---方法 1 end ---  
!--- 方法 2 begin -- 以下三条命令为定义局部坐标系, 进行旋转, 施加位移约束  
!local,11,0,2,0,0,45      !在 4 号节点建立局部坐标系
```



```
!nrotat, 4          !将 4 号节点坐标系旋转为与局部坐标系相同
!D,4,UY            !在局部坐标下添加位移约束
!--- 方法 2 end
!-----斜支座约束处理完毕
F,1,FX,10          !施加外力 FX
F,1,FY,10          !施加外力 FY
FINISH              !结束前处理
/SOLU                !进入求解模块
SOLVE               !求解
!=====进入一般的后处理模块
/POST1               !进入后处理
PLDISP,1             !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)
finish               !退出所在模块
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]5_3(8) %%%%
!%%%%%%%%%%%%%
```

5.4 单元位移函数构造与收敛性要求

5.4.1 选择单元位移函数的一般原则

单元中的位移模式(displacement model)一般采用设有待定系数的有限多项式作为近似函数，有限多项式选取的原则应考虑以下几点：

(1) 待定系数是由节点位移条件确定的，因此它的个数应与节点位移 DOF 数相等。如平面 3 节点三角形单元共有六个节点位移 DOF，待定系数的总个数应取 6 个，则两个方向的位移 u 和 v 应各取三项多项式。对于平面 4 节点的矩形单元，待定系数为 8，位移函数可取四项多项式作为位移模式。

(2) 在选取多项式时，必须要选择常数项和完备的一次项。位移模式中的常数项和一次项可以反映单元刚体位移和常应变的特性。这是因为当划分的单元数趋于无穷时，即单元缩小趋于一体，此时单元应变应趋于常数，3 节点三角形单元的位移模式正好满足这个基本要求。

(3) 选择多项式应由低阶到高阶，尽量选取完全多项式以提高单元的精度。一般情况下对于每边具有 2 个端节点的单元应选取一次完全多项式的位移模式，每边有 3 个节点时应取二次完全多项式；若由于项数限制不能选取完全多项式时，选择的多项式应具有坐标的对称性。并且一个坐标方向的次数不应超过完全多项式的次数。

在构造一个单元的位移函数时，应参考由多项式函数构成的帕斯卡三角形(Pascal triangle)(见图 5-8 和图 5-9)和上述原则进行函数项次的选取与构造。

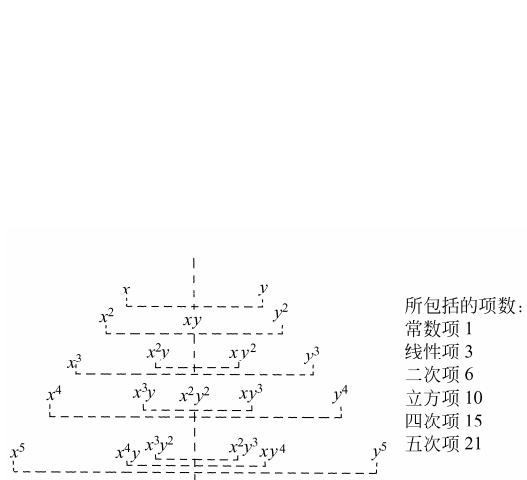


图 5-8 二维问题多项式函数构成的帕斯卡三角形

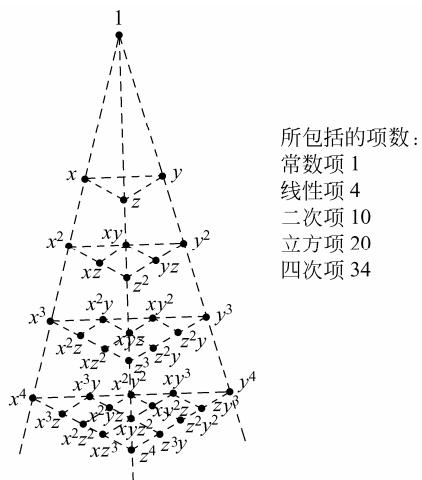
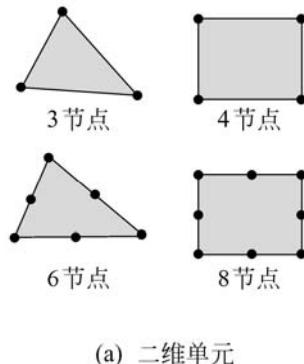
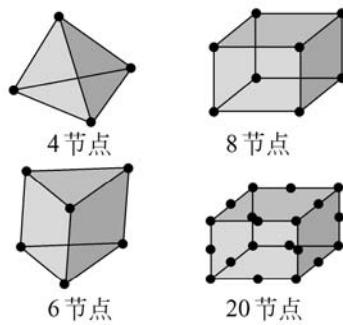


图 5-9 三维问题多项式函数构成的帕斯卡四面体

常用的二维单元和三维单元见图 5-10。



(a) 二维单元



(b) 三维单元

图 5-10 常用的二维和三维单元

5.4.2 关于收敛性问题

在有限元分析中，当节点数目趋于无穷大时（即当单元尺寸趋近于零时）或单元插值位移的项数趋于无穷大时，最后的解答如果能够无限地逼近准确解，那么这样的位移函数（或形状函数）是逼近于真解的，这就称为收敛(convergence)。图 5-11 表示出几种可能的收敛情况。其中曲线 1 和 2 都是收敛的，但曲线 1 比曲线 2 收敛更快；曲线 3 虽然趋向于某一确定值，但该值不是问题的准确解(correct solution)，所以也不是收敛的。曲线 4 虽然收敛，但不是单调收敛(monotonic convergence)，所以也不能算是收敛的，它不能构成准确解的上界(upper bound)或下界(lower bound)，即近似解并不总是大于或小于准确解。至于曲线 5，它是发散(divergence)的，所以完全不符合要求。

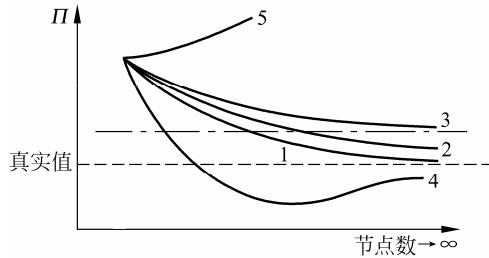


图 5-11 几种可能的收敛情况



为使有限元分析的解答收敛，位移函数必须满足一些收敛准则(convergence criterion)。关于这些准则的严密论证，可以参阅更多的文献；也就是说，当单元尺寸趋于零时，其位移函数及其应变总是趋向于某一常数，否则，单元的势能将不存在。由此可见，对位移函数的基本要求应当是：函数本身应在单元上连续，还要包括使得位移函数及对应于应变的导数都为常数的项，即常位移项和常应变项。

对于常用单元，能够保证常位移项和常应变项的多项式为：

轴力杆单元	1, x
平面单元	1, x, y
空间单元	1, x, y, z
平面梁单元	1, x, x^2
平板弯曲单元	1, x, y, x^2, xy, y^2

要保证单元的收敛性，还要考虑单元之间的位移协调。不仅节点处的位移应协调，沿整个单元边界上的位移都应当是协调的(或相容的)，这也是最小势能原理所要求的基本前提。

由于每一个单元的真实位移通常总可以分解成刚体位移和变形位移两部分，在单元位移函数中包含了刚体位移，就使之能更好地反映实际情况，因而收敛较快，当然结构整体的刚体位移自由度必须完全约束，否则会出现刚度矩阵奇异。

根据以上的讨论，给出具体的收敛性准则如下。

5.4.3 位移函数构造的收敛性准则

如上所知，收敛性的含义为，当单元尺寸趋于零时，有限元的解趋近于真实解。以下两个有关单元内部以及单元之间的函数构造准则可以保证单元的收敛性。

【基本原理】5.4.3(1) 收敛性准则 1：完备性要求(针对单元内部)

如果在(势能)泛函中所出现位移函数的最高阶导数是 m 阶，则有限元解答收敛的条件之一是选区单元内的位移场函数至少是 m 阶完全多项式。

二维问题和三维问题的完全多项式参见图 5-8 和图 5-9。可以看出所要求的 m 阶完全多项式已包含了刚体位移和常应变项。

【基本原理】5.4.3(2) 收敛性准则 2：协调性要求(针对单元之间)

如果在(势能)泛函中位移函数出现的最高阶导数是 m 阶，则位移函数在单元交界面上必须具有直至 $(m-1)$ 阶的连续导数，即 C_{m-1} 连续性。

下面就一般的平面问题和梁的弯曲问题进行讨论。

【典型例题】5.4.3(3) 平面单元位移函数选取的要求

在平面问题中，势能泛函为

$$\begin{aligned}\Pi = U - W = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v) d\Omega + \int_{S_p} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v) dA\end{aligned}\quad (5-96)$$



其中 $\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{p}_x, \bar{p}_y$ 为作用在物体上的体积力和面力；由几何方程可知 $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$ ， $\varepsilon_{yy} = \partial v / \partial y$ ， $\gamma_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$ ，讨论平面问题位移函数选取的要求。

解答：可以看出所出现的物理量关于位移 u, v 的最高阶导数是 1，因此 $m=1$ 。由准则 1，形状函数至少应包含完整的一次多项式，即

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (5-97)$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y \quad (5-98)$$

这代表刚体位移和常应变的位移模式。在平面 3 节点单元和平面 4 节点单元中，其位移模式都包含了(5-97)和(5-98)的多项式。

由准则 2，平面 3 节点单元和平面 4 节点单元的位移函数为 C_0 连续，即在单元之间的位移函数要求零阶导数连续，即函数的本身连续，但其一阶导数可以不连续。

【典型例题】5.4.3(4) 平面弯曲梁单元位移函数选取的要求

在平面梁的弯曲问题中，势能泛函为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_l EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_l \bar{p}(x) \cdot v(x) dx \quad (5-99)$$

讨论平面梁的位移函数选取的要求。

解答：可以看出所出现的物理量关于位移 v 的最高阶导数是 2，因此 $m=2$ 。

由准则 1，形状函数至少应包含完整的二次多项式，即

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (5-100)$$

而 2 节点梁单元的实际位移模式为

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (5-101)$$

它已包含了完整的二次多项式，满足准则 1。

由准则 2，梁单元的位移函数为 C_1 连续，即在单元之间的位移函数至少要求一阶导数连续。

【典型例题】5.4.3(5) 平面 3 节点三角形单元的二次位移函数的选择与分析

对于平面 3 节点三角形单元，若选取位移模式（单元内）为

$$\left. \begin{array}{l} u = a_1 x + a_2 x y + a_3 y \\ v = a_4 x + a_5 x y + a_6 y \end{array} \right\} \quad (5-102)$$

用收敛准则讨论该单元，并分析这时该单元的描述能力。

解答：从完备性(单元内部)来看，该单元没有完整的一次项(即($m=1$)阶多项式)，缺常数项，因此，它不能描述单元的刚体位移。

从协调性(单元之间)来看，位移函数的待定系数的个数与节点条件完全对应，可以唯一确定，而且在单元交界处有($m-1=0$)阶导数连续，因此，它是满足协调性要求的。

下面从位移、应变、应力三个方面讨论该单元的描述能力。

从位移来看，由于式(5-102)中不含有常数项，因此，它不能描述 x, y 方向上的刚体平移，但可以描述刚体转动；位移具有一次函数以及 x, y 交叉项的描述能力。

计算该单元的应变，有



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + a_2 y \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_5 x + a_6 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 x + a_3 + a_4 + a_5 y \end{aligned} \right\} \quad (5-103)$$

由此可知, 当 $a_2 = a_5 = 0$, 则有 $\varepsilon_{xx} = a_1$ $\varepsilon_{yy} = a_6$ $\gamma_{xy} = a_3 + a_4$, 这时可以描述常应变情况; 应变分量 ε_{xx} 在 y 方向上具有一次函数的描述能力, 应变分量 ε_{yy} 在 x 方向上具有一次函数的描述能力, 应变分量 γ_{xy} 具有完全一次函数的描述能力。

计算该单元的应力, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2} (a_1 + a_2 y + \mu(a_5 x + a_6)) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2} (a_5 x + a_6 + \mu(a_1 + a_2 y)) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} (a_2 x + a_3 + a_4 + a_5 y) \end{aligned} \right\} \quad (5-104)$$

应力分量 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ 都具有完全一次函数的描述能力。

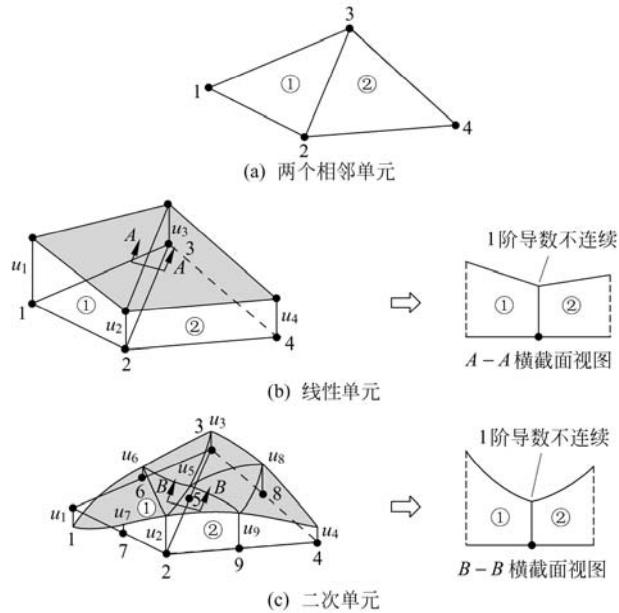
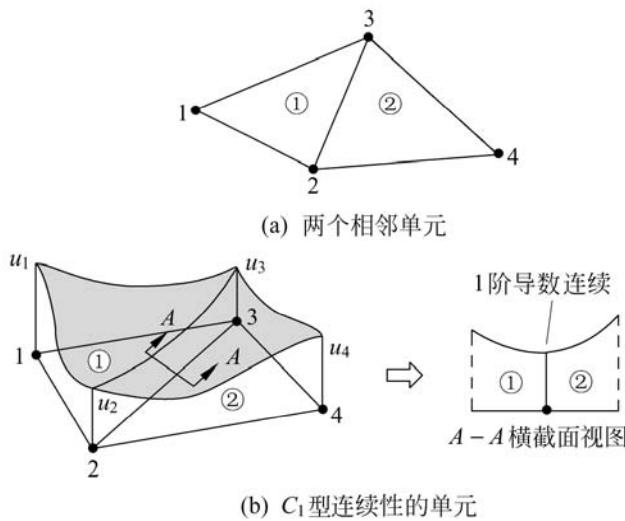
5.5 C₀型单元与 C₁型单元

【基本原理】5.5(1) C₀型单元的位移函数连续性

C₀型单元 (C₀ element) 是指在泛函(势能)中位移函数出现的最高阶导数是 1 阶, 在单元交界面上具有 0 阶的连续导数, 即节点上只要求位移连续, 如图 5-12 所示; 由收敛性准则 2, 一般的杆单元、平面问题单元、空间问题单元都是 C₀型单元。

【基本原理】5.5(2) C₁型单元的位移函数连续性

C₁型单元 (C₁ element) 是指在泛函(势能)中位移函数出现的最高阶导数是 2 阶, 在单元交界面上具有 1 阶的连续导数, 即节点上除要求位移连续外, 还要求 1 阶导数连续, 如图 5-13 所示; 由收敛性准则 2, 梁单元、板单元、壳单元都是 C₁型单元。

图 5-12 C_0 型问题中单元公共边界上的协调性图 5-13 C_1 型问题中单元公共边界上的协调性

5.6 有限元分析结果的性质与节点应力的平均处理

5.6.1 有限元分析结果的下限性质

由前面的推导可知，所分析对象系统的总势能为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}^T \mathbf{q} \quad (5-105)$$

由最小势能原理 $\delta \Pi = 0$ ，可得到有限元分析求解的刚度方程

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (5-106)$$

再将式(5-106)代入式(5-105)得到

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}^T \mathbf{q} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = -U = -\frac{W}{2} \quad (5-107)$$



即在平衡情况下，系统总势能等于负的应变能。

只有真正的精确解才能得到真正最小的总势能 Π_{exact} ，而在实际问题中，由于采用了离散方法而得到的总势能 Π_{appr} ，一定是 $\Pi_{appr} \geq \Pi_{exact}$ 的，由式(5-107)可知，则有

$$U_{appr} \leq U_{exact} \quad (5-108)$$

设对应于近似解的节点位移列阵为 \mathbf{q}_{appr} ，刚度矩阵为 \mathbf{K}_{appr} ，则对应的刚度方程为

$$\mathbf{K}_{appr} \mathbf{q}_{appr} = \mathbf{P} \quad (5-109)$$

设对应于精确解的节点位移列阵为 \mathbf{q}_{exact} ，刚度矩阵为 \mathbf{K}_{exact} ，则对应的刚度方程为

$$\mathbf{K}_{exact} \mathbf{q}_{exact} = \mathbf{P} \quad (5-110)$$

那么，这两种解答所对应的应变能为

$$\left. \begin{aligned} U_{appr} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_{appr}^T \mathbf{K}_{appr} \mathbf{q}_{appr} \\ U_{exact} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_{exact}^T \mathbf{K}_{exact} \mathbf{q}_{exact} \end{aligned} \right\} \quad (5-111)$$

将上式代入式(5-108)中，有

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}_{appr}^T \mathbf{K}_{appr} \mathbf{q}_{appr} \leq \frac{1}{2} \mathbf{q}_{exact}^T \mathbf{K}_{exact} \mathbf{q}_{exact} \quad (5-112)$$

考虑到式(5-109)和式(5-110)，式(5-112)可以写成

$$\mathbf{q}_{appr}^T \mathbf{P} \leq \mathbf{q}_{exact}^T \mathbf{P} \quad (5-113)$$

【基本原理】5.6.1(1) 有限元位移结果的下限性质

由式(5-113)可以看出，基于近似解的应变能比精确的应变能要小，即近似解的位移 \mathbf{q}_{appr} 总体上比精确的位移 \mathbf{q}_{exact} 要小，也就是说近似解具有下限 (upper limit) 性质。

【基本原理】5.6.1(2) 有限元模型的刚化性

位移解的下限性质可以进行如下解释：原连续体从理论上来说具有无穷多个自由度，而采用有限单元的方法对原连续体进行离散，即使用了有限个自由度来近似描述原具有无穷多个自由度的系统，那么必然使得原系统的刚度增加，变得更加刚化(stiffening)，即刚度矩阵的总体数值变大，由刚度方程可知，在外力相同的情况下，所求得的位移值在总体上将变小。

由于位移函数的收敛性准则包含完备性和协调性这两个方面的要求，而完备性要求(刚体位移及常应变)比较容易得到满足，而协调性要求(位移的连续性)则较难满足，因此，人们研究单元的收敛性问题时，往往只集中讨论单元的协调性问题；以上有关位移解的下限性质是基于协调单元单调收敛的前提得到的，在有些情况下，使用非协调单元也可以得到工程上满意的解答，甚至有时竟比协调单元具有更好的计算精度，这是由于位移不协调所造成的误差与来自其它方面的误差相互进行抵消的缘故。



【典型例题】5.6.1(3) 基于网格加密的求解精度估计

为考察单元的求解精度和收敛速度, 以平面问题为例, 单元的位移场 \mathbf{u} 可以展开为以下级数

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i \Delta y + \dots \quad (5-114)$$

如果单元的尺寸为 h 量级, 即上式中的 $\Delta x, \Delta y$ 是 h 量级, 讨论网格细化时的精度问题。

解答: 若单元的位移函数采用 p 阶完全多项式, 即它能逼近上述 Taylor 级数的前 p 阶多项式, 那么位移解 \mathbf{u} 的误差将是 $O(h^{p+1})$ 量级。具体就平面 3 节点三角形单元而言, 由于插值函数是线性的, 即 $p=1$, 所以 \mathbf{u} 的误差是 $O(h^2)$ 量级, 并可预见收敛速度也是 $O(h^2)$ 量级, 也就是说在第一次有限元分析的基础上, 再将有限单元的网格进一步细分, 使所有单元尺寸减半, 则 \mathbf{u} 的误差是前一次有限元分析误差的 $(1/2)^2=1/4$ 。

同样的推论也可以用于应变、应力以及应变能等误差和收敛速度的估计。例如应变是由位移的 m 阶导数给出的, 则它的误差是 $O(h^{p-m+1})$ 量级, 当采用平面三节点三角形单元时, 有 $p=m=1$, 则应变的误差估计是 $O(h)$ 量级。至于应变能, 因为它是由应变的平方项来表示的, 所以误差为 $O(h^{2(p-m+1)})$ 量级, 具体就平面三节点三角形单元, 应变能的误差是 $O(h^2)$ 量级。

对于满足完备性和协调性要求的协调单元, 由于当单元尺寸 $h \rightarrow 0$ 时, 有限元分析的结果是单调收敛的。所以还可以就两次网格划分所计算的结果进行外推, 以估计结果的准确值。如第一次网格划分的解答是 u_1 , 然后将各单元尺寸减半作为第二次的网格划分, 得到解答为 u_2 。如果该单元的收敛速度是 $O(h^s)$, 则可由下式来对准确解 u 进行估计

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^s)}{O((h/2)^s)} \quad (5-115)$$

具体就平面三节点三角形单元, 有 $s=2$, 上式可写为

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O((h/2)^2)} = 4 \quad (5-116)$$

即可估计出准确解为

$$u = \frac{1}{3}(4u_2 - u_1) \quad (5-117)$$

以上所讨论的误差仅局限于网格的离散误差, 即当一个连续的求解域被划分成有限个子域(单元), 由单元的试探函数来对整体域的场函数进行近似所引起的误差。另外, 实际误差还应包括计算机的数值运算误差。

5.6.2 共用节点上应力的平均处理



在多个单元共用的节点上,由于单元离散和位移函数近似方面的原因,由各个单元计算所得到的共用节点上的应力是不相同的,作为一种后处理,可以将各个单元在共用节点上的不同应力值进行一定的平均或加权平均(weighted average)处理,即进行磨平(smoothing),以得到较好的结果。

【基本原理】5.6.2(1) 共用节点上应力的直接平均

设各个单元计算所得到的在共用节点 i 上的应力为 $\sigma_{kl}^e(i)$, 对其进行平均处理有

$$\bar{\sigma}_{kl}(i) = \frac{1}{r} \sum_{e=1}^r \sigma_{kl}^e(i) \quad (5-118)$$

式中 $\bar{\sigma}_{kl}(i)$ 为共用节点 i 上的平均应力, $1 \sim r$ 为围绕该共用节点周围的全部单元。

【基本原理】5.6.2(2) 共用节点应力的加权平均

由于围绕共用节点周围的各个单元的形状和大小都不一定相同,一种更合理的处理方法是进行加权平均,如果按单元的面积或体积进行加权,则有以下计算公式

$$\bar{\sigma}_{kl}(i) = \frac{1}{r} \sum_{e=1}^r \eta^e \sigma_{kl}^e(i) \quad (5-119)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta^e = \frac{A^e}{\sum_{e=1}^r A^e}, \quad 3D \text{情形} \\ \eta^e = \frac{\Omega^e}{\sum_{e=1}^r \Omega^e}, \quad 2D \text{情形} \end{array} \right\} \quad (5-120)$$

其中 A^e 及 Ω^e 分别为 2D 情形及 3D 情形下与所计算节点相连接单元的面积或体积。以上的处理只是计算结果后处理的一种局部改善,并不能从根本上解决节点应力(应变)精度差的问题。

5.7 高阶单元的构建

有限元方法中的一个技术核心就是如何对单元的场变量(如位移场)进行函数表达,目前所使用的大多数单元的节点都是单元角节点,并且都采用多项式函数对单元进行插值,这种单元的计算精度一般来说精度不高,因此,只能通过加密网格划分来提高精度。比较好的一种作法就是在单元中再引入内部节点,采用较高阶的多项式来进行插值,这种单元叫做简单的高阶单元(high-order element),随着计算数学特别是数值技术的发展,一些新型函数或解析函数被用来进行单元的描述,也取得了较好的效果;在板的弯曲问题中由于要传递弯矩,要求挠度的一阶导数要连续,这在板单元的函数构造中是一个难点,因此板单元是一种较复杂的单元;本章不讨论板单元问题。

5.7.1 一维高阶单元

【单元构造】5.7.1(1) 1D 高阶单元: 二次杆单元



对于具有两个端节点的杆件，如果在其内部增加若干个节点，就可以选用高次多项式 (high-order polynomial) 进行位移函数的插值，得到高阶单元，如图 5-14 所示，1D 自然坐标 (natural coordinate) 见图 5-14(a)，2 节点线性单元见图 5-14(b)。而图 5-14 (c) 和 (d) 所示为高阶单元。

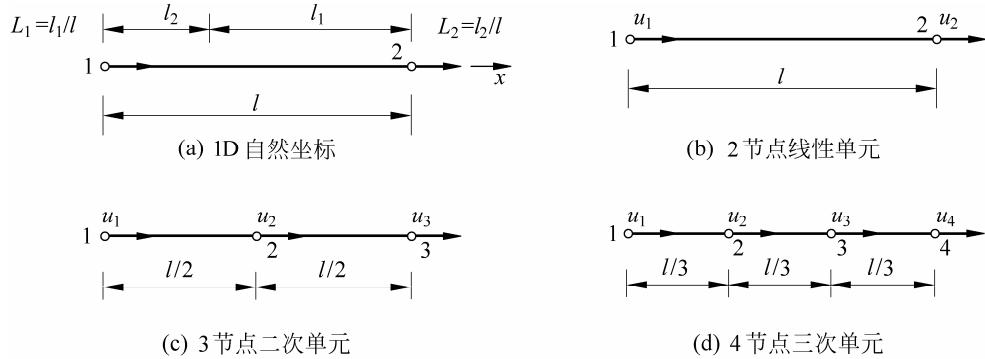


图 5-14 1D 问题自然坐标及杆单元

在具有两个端节点的单元中增加一个内部节点，则可以得到二次函数的杆单元，如图 5-14(c) 所示。

1D 二次杆单元的节点位移共有 3 个自由度(DOF)，其节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T \quad (5-121)$$

单元的位移函数模式为

$$\begin{aligned} u(x) &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \\ &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (5-122)$$

其中

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3] \quad (5-123)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (1 - 2\frac{x}{l})(1 - \frac{x}{l}) = 2(\frac{1}{2} - \xi)(1 - \xi) \\ N_2 &= 4\frac{x}{l}(1 - \frac{x}{l}) = 4\xi(1 - \xi) \\ N_3 &= -\frac{x}{l}(1 - 2\frac{x}{l}) = -2\xi(\frac{1}{2} - \xi) \\ \xi &= \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (5-124)$$

1D 问题的自然坐标如图 5-14(a) 所示，为

$$L_1 = \frac{l_1}{l}, L_2 = \frac{l_2}{l}$$

以自然坐标来表达，则有

$$\begin{aligned} u(x) &= a'_1 L_1 + a'_2 L_2 + a'_3 L_1 L_2 \\ &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ &= \mathbf{N}(L_1, L_2) \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (5-125)$$

由形状函数的性质（见第 5.2.1 节）



$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{在节点 } 1 (L_1=1, L_2=0) \\ 0 & \text{在节点 } 2 (L_1=L_2=\frac{1}{2}) \\ 0 & \text{在节点 } 3 (L_1=0, L_2=1) \end{cases} \quad (5-126)$$

可以得到(注意: $L_1 + L_2 = 1$)

$$N_1 = L_1 - 2L_1L_2 = L_1(2L_1 - 1) \quad (5-127)$$

同样可以得到

$$N_2 = 4L_1L_2 \quad (5-128)$$

$$N_3 = L_2(2L_2 - 1) \quad (5-129)$$

在得到单元的位移模式(式(5-122)或式(5-125))和单元的形状函数矩阵(式(5-123)或式(5-127)~式(5-129))后, 就可以按照有限元方法中通常的推导过程来获得单元的刚度矩阵和刚度方程。

【单元构造】5.7.1(2) 1D 高阶单元: 高次梁单元

由函数的插值理论, 埃尔米特多项式是可以同时就函数值以及各阶导数值进行插值的函数, 而梁单元就要求对节点的函数值以及一阶导数值进行插值, 因此, 可以采用埃尔米特多项式进行函数插值, 以 2 节点单元要求 C_1 型连续(即要求一阶导数连续)的问题为例, 则有

$$\begin{aligned} v(x) &= N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_1} + N_1 \cdot v_2 + N_4 \cdot \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_2} \\ &= \sum_{i=1}^2 \left[H_{0i}^{(1)} v_i + H_{1i}^{(1)} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^1 \left[H_{ki}^{(1)} v_i^{(k)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p \left[H_{ki}^{(p)} v_i^{(k)} \right] \quad (\text{对于 } C_1 \text{ 型问题: } p=1) \end{aligned} \quad (5-130)$$

其中 $H_{ki}^{(p)}$ 为埃尔米特插值函数 (Hermite interpolation), (p) 为埃尔米特插值多项式的阶次, n 为节点数, k 为插值函数中导数的变化指标, 可以看出该单元有 4 个节点自由度, 实际上是 2 节点梁单元。具体的位移函数为

$$\begin{aligned} v(x) &= N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^1 \left[H_{ki}^{(1)} \cdot v_i^{(k)} \right] \\ &= H_{01}^{(1)} \cdot v_1^{(0)} + H_{11}^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + H_{02}^{(1)} \cdot v_2^{(0)} + H_{12}^{(1)} \cdot v_2^{(1)} \end{aligned} \quad (5-131)$$

可以看出 $H_{01}^{(1)}, H_{11}^{(1)}, H_{02}^{(1)}, H_{12}^{(1)}$ 为一阶埃尔米特插值函数, 可以通过数学手册查出, 即



$$\begin{aligned}N_1 &= H_{01}^{(1)} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\N_2 &= H_{11}^{(1)} = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\N_3 &= H_{02}^{(1)} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\N_4 &= H_{12}^{(1)} = \xi^3 - \xi^2\end{aligned}\quad (5-132)$$

实际上，以上所构造的形状函数与直接推导出的表达式(3-131)完全相同（当梁单元的长度 $l = 1$ 时），其函数形式如图 5-15 所示。

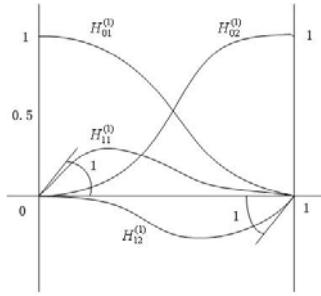


图 5-15 2 节点梁单元的形状函数(一阶埃尔米特插值函数)

5.7.2 二维高阶单元

对于 2D 问题，如果在其内部增加若干个节点（主要在单元的棱边上），就可以选用 2D 高次多项式进行位移函数的插值，也可得到高阶单元。下面分别就三角形单元和矩形单元进行讨论。

对于 2D 问题中的三角形单元，采用自然(面积)坐标来定义形状函数则比较方便，对于高阶单元则更是这样。

【基本原理】5.7.2(1) (面积)自然坐标

就图 5-16 所示的平面三角形 ijm ，三角形中任一点 P 与其三个角点相连形成三个子三角形，即 ΔPjm 、 ΔPmi 和 ΔPij ，它们的面积分别为 A_i 、 A_j 和 A_m 。

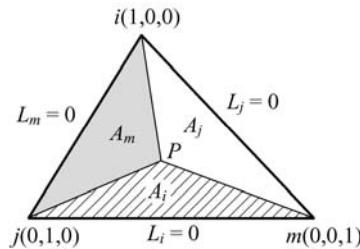


图 5-16 平面三角形及其面积坐标

定义三个面积比值为

$$\left. \begin{aligned}L_i &= A_i / A \\L_j &= A_j / A \\L_m &= A_m / A\end{aligned}\right\} \quad (5-133)$$

其中 A 是三角形面积。则 P 点的位置可由三个比值来确定，即 $P(L_i, L_j, L_m)$ ，那么称



L_i, L_j, L_m 为面积坐标(area coordinate)，这就是 2D 三角形的自然坐标。

由于

$$A_i + A_j + A_m = A \quad (5-134)$$

则

$$L_i + L_j + L_m = 1 \quad (5-135)$$

面积坐标的特点是：

(1) 三角形内与节点 i 的对边 \overline{jm} 平行的直线上的诸点有相同的 L_i 坐标。

(2) 三角形三个角点的面积坐标是 $i(1,0,0)$, $j(0,1,0)$, $m(0,0,1)$ 。

(3) 三角形三条边的方程是

$$\overline{jm} \text{ 边 } L_i = 0; \overline{mi} \text{ 边 } L_j = 0; \overline{ij} \text{ 边 } L_m = 0$$

(4) 三个面积坐标并不相互独立，满足(5-135)式，只有 2 个是独立的。由于三角形的面积坐标与该三角形的具体形状及其在总体坐标 x, y 中的位置无关，因此它是三角形的一种自然坐标。

【单元构造】5.7.2(2) 2D 高阶单元：6 节点三角形二次单元

在原 3 节点三角形单元的每一条边的中点再增加一个内部节点，则可以得到二次函数 6 节点三角形单元，如图 5-17 所示。

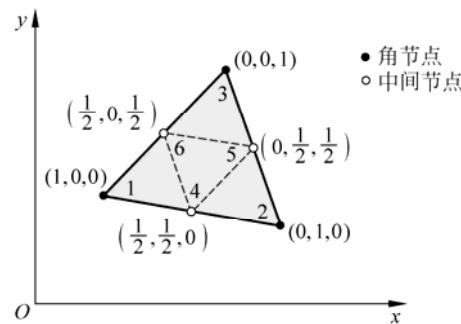


图 5-17 自然(面积)坐标下的 6 节点三角形单元

6 节点三角形单元共有 12 个节点位移自由度(DOF)，其节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \dots & u_6 & v_6 \end{bmatrix}^T \quad (5-136)$$

单元位移场的模式为（完整的二次多项式）

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (5-137)$$

$v(x, y)$ 的位移模式相同。

若以自然坐标来表示，则单元位移场的模式为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a'_1 L_1 + a'_2 L_2 + a'_3 L_3 + a'_4 L_1 L_2 + a'_5 L_2 L_3 + a'_6 L_3 L_1 \\ &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_6 u_6 \end{aligned} \quad (5-138)$$



其中

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \quad N_2 = (2L_2 - 1)L_2 \\ N_3 = (2L_3 - 1)L_3, \quad N_4 = 4L_1 L_2 \\ N_5 = 4L_2 L_3, \quad N_6 = 4L_3 L_1 \end{array} \right\} \quad (5-139)$$

【单元构造】5.7.2(3) 2D 高阶单元：矩形高阶拉格朗日型单元

对于矩形单元的两个正交的坐标方向 (ξ, η) , 可以根据节点数采用适当阶次拉格朗日多项式的乘积来构造任意拉格朗日矩形单元的插值函数; 如图 5-18 所示的矩形单元, 其中在 ξ 方向上划分有 $(r+1)$ 列节点, 其中在 η 方向上划分有 $(p+1)$ 行节点, 所以节点布置在单元中的 $(r+1)$ 列(column) 和 $(p+1)$ 行(row) 的规则网格上。

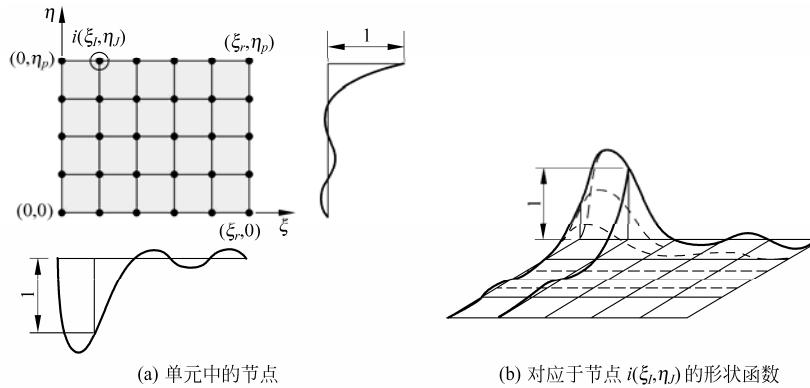


图 5-18 具有 $(r+1)$ 列和 $(p+1)$ 行节点的矩形单元

下面构造布位于 I 列 J 行上的节点 i 的插值函数 N_i ; 在 ξ 方向的 $r+1$ 个节点中, 如果希望构造出一个插值函数在第 I 列节点上等于 1, 而在其它列节点上等于 0, 则由拉格朗日多项式可以得到该函数为

$$l_I^{(r)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{I-1})(\xi - \xi_{I+1}) \cdots (\xi - \xi_r)}{(\xi_I - \xi_0)(\xi_I - \xi_1) \cdots (\xi_I - \xi_{I-1})(\xi_I - \xi_{I+1}) \cdots (\xi_I - \xi_r)} \quad (5-140)$$

同理, 在 η 方向上, 也可以得到插值函数为

$$l_J^{(p)}(\eta) = \frac{(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1) \cdots (\eta - \eta_{J-1})(\eta - \eta_{J+1}) \cdots (\eta - \eta_p)}{(\eta_J - \eta_0)(\eta_J - \eta_1) \cdots (\eta_J - \eta_{J-1})(\eta_J - \eta_{J+1}) \cdots (\eta_J - \eta_p)} \quad (5-141)$$

对以上两个方向的拉格朗日多项式进行乘积运算可得到节点 i 的插值函数 N_i 为

$$N_i = l_I^{(r)}(\xi) l_J^{(p)}(\eta) \quad (5-142)$$

可以看出 N_i 在节点 i 上等于 1, 而在其余所有节点上等于 0。这种单元在其每一边界上的节



点数和插值函数是协调的，可以保证单元之间函数的协调性。

如图 5-19 所示分别为线性、二次和三次函数变化的拉格朗日矩形单元(Lagrangian rectangle element)。虽然可以按上述方法方便地构造出它们的形状插值函数，但是这种类型的单元存在明显缺陷，随着插值函数阶次的增高必然需要增加内部节点，但这些节点自由度的增加一般并不能显著提高单元的精度。例如需要构造一种单元(考虑 $r=p$ 情形)，如图 5-20 所示为多项式函数构造的帕斯卡三角形，可以看出，按上述的函数构造方法，单元中增加了许多非 r 阶完全多项式所必要的高次项，由于单元的精度通常取决于完全的多项式，因此这些非完全的高次项对提高单元的精度不起多少作用；因此，可以尽量在单元的边界上多增加一些节点，而在内部使用较少的节点，这样可以使单元在其边界上有较强的描述能力。

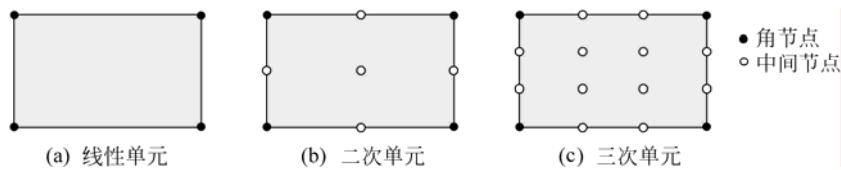


图 5-19 拉格朗日 矩形单元

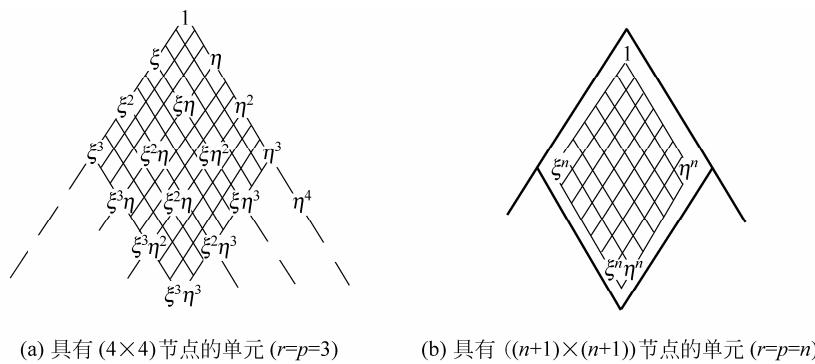


图 5-20 构造拉格朗日矩形单元所需要的多项式

5.7.3 三维高阶单元

与 1D 和 2D 问题类似，对于 3D 问题，同样在其内部增加若干个节点，就可以选用 3D 高次多项式进行位移函数的插值，以得到高阶单元。下面分别就四面体单元和正六面体单元进行讨论。

【单元构造】5.7.3(1) 3D 高阶单元：10 节点四面体二次单元

在原 4 节点四面体单元的每一条棱边上再增加一个位于中点位置的内部节点(inner node)，则可以得到二次函数四面体单元，如图 5-21 所示。

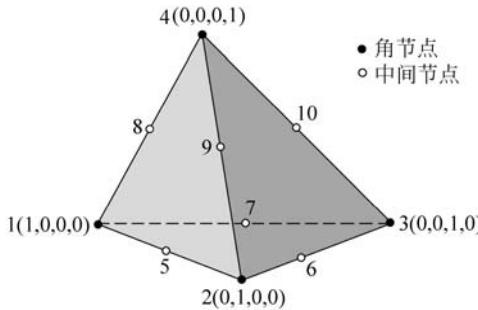


图 5-21 10 节点四面体二次单元



10 节点四面体单元共有 30 个节点位移自由度(DOF)，其节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \vdots & \cdots & \vdots & u_{10} & v_{10} & w_{10} \end{bmatrix}^T \quad (5-143)$$

由于该单元有 4 个角节点，在每一个棱边上的中点有一个中间节点(共 6 个)，总共 10 个节点，由函数构造的帕斯卡三角形，取单元位移场的模式为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz \\ & + a_7xz + a_8x^2 + a_9y^2 + a_{10}z^2 \end{aligned} \quad (5-144)$$

基于自然坐标（这里为体积坐标），可以构造出对应于各节点的形状函数。

对于角节点，相应的形状函数为

$$N_i = (2L_i - 1)L_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5-145)$$

对于棱边上的中间节点，相应的形状函数为

$$\left. \begin{array}{l} N_5 = 4L_1L_2, \quad N_6 = 4L_2L_3 \\ N_7 = 4L_1L_3, \quad N_8 = 4L_1L_4 \\ N_9 = 4L_2L_4, \quad N_{10} = 4L_3L_4 \end{array} \right\} \quad (5-146)$$

【单元构造】5.7.3(2) 3D 高阶单元：20 节点正六面体高阶单元

图 5-22 所示是三维 20 节点正六面体高阶单元，它的每一个棱边上都有一个内节点，这样由 3 个节点可以进行二次多项式的插值，一般称仅在单元的棱边上增加节点来提高插值函数阶次的单元为 Serendipity 型单元。图 5-22 所示的是 20 节点的 Serendipity 正六面体单元，它的形状函数如下。

对于角节点，有形状函数

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta - 2) \quad i = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19 \quad (5-147)$$

对于棱边上的内节点，其相应的形状函数为

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta), \quad i = 2, 6, 14, 18 \quad (5-148)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi)(1 + \zeta_i\zeta), \quad i = 4, 8, 16, 20 \quad (5-149)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad i = 9, 10, 11, 12 \quad (5-150)$$

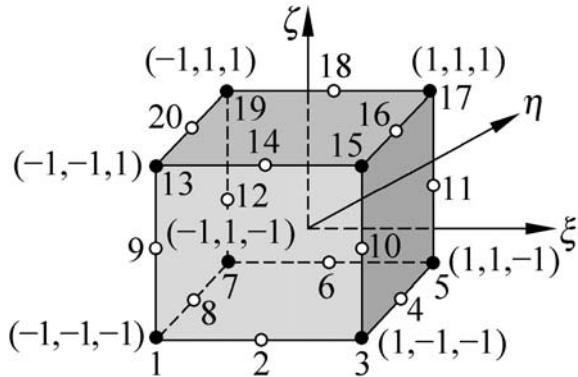


图 5-22 20 节点正六面体高阶单元

5.8 提高计算精度的 h 方法和 p 方法

有许多提供有限元分析计算精度的方法，目前使用较多的主要有两种：h 方法和 p 方法 [23][24]。

【基本原理】5.8(1) 提高计算精度的 h 方法(h-version 或 h-method):

不改变各单元上基底函数的配置情况，只通过逐步加密有限元网格来使结果向正确解逼近。这种方法在有限元分析的应用中最为常见，并且往往采用较为简单的单元构造形式。h 方法可以达到一般工程的精度(即要求以能量范数度量的误差控制在 5-10%以内)，其收敛性比 p 方法差，但由于不用高阶多项式作基底函数，因而数值稳定性和可靠性都较好。图 5-23 所示为基于 ANSYS 平台对一个复杂零件采用 h 方法所进行的网格划分，为表征网格大小的程度，ANSYS 定义了一个尺度指标：size level，该指标越大表明网格越粗，最大数为 10，最小为 1，图 5-23(a)为粗网格划分(ANSYS 中的 size level=10)，图 5-23(b)和(c)为两种精细网格划分(ANSYS 中的 size level=6，size level=2)。

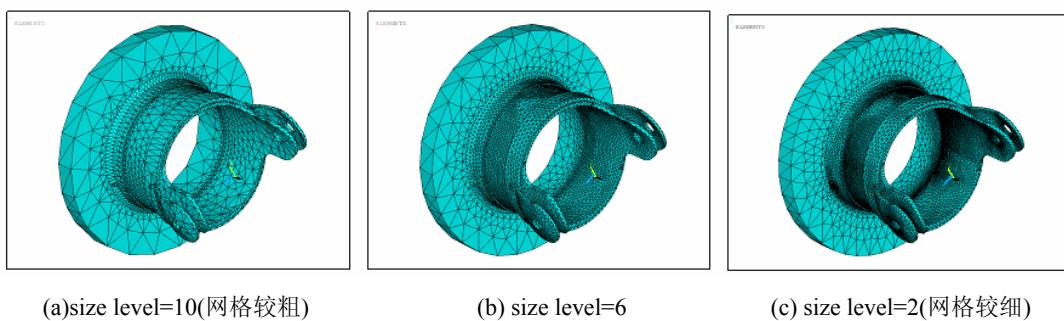


图 5-23 基于 h 方法对一个复杂零件所进行的网格划分

【基本原理】5.8(2) 提高计算精度的 p 方法(p-version 或 p-method):

保持有限元的网格剖分固定不变，增加各单元上基底函数的阶次，从而改善计算精度；图 5-24 所示为采用 h 方法所进行的网格划分与采用 p 方法所进行的网格划分的比较。

大量的实践表明：p 方法的收敛性大大优于 h 方法；p 方法的收敛性可根据 Weierstrass



定理来论证；由于 p 方法使用高阶多项式作为基底函数，会出现数值稳定性问题，另外，由于计算机容量和速度的限制，多项式的阶次不能太高（一般情况下多项式函数的最高阶次 $p < 9$ ），尤其在振动和稳定问题求解高阶特征值时，无论 h 方法还是 p 方法都不能令人满意，这是多项式插值本身的局限性造成的。

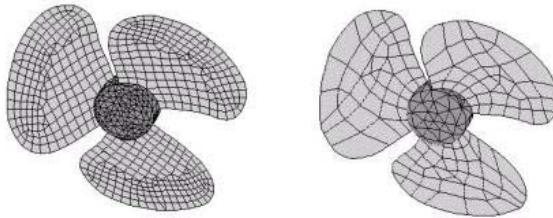


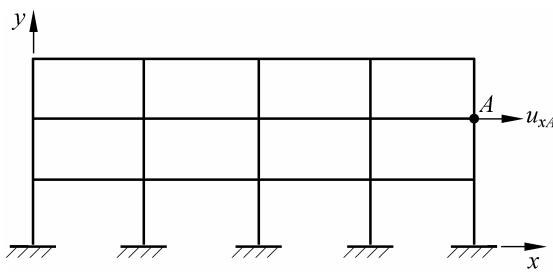
图 5-24 基于 h 方法的网格划分与基于 p 方法的网格划分

5.9 本章要点

- 形状函数矩阵的性质
- 刚度矩阵的性质(对称性、奇异性、正定性、稀疏性、非零元素呈显带状性)
- 边界条件的处理(直接法、置“1”法、乘大数法、拉格朗日乘子法、罚函数法)
- 位移函数构造(待定系数唯一确定性、完备性、从低阶到高阶)
- 收敛性准则(单元内：常数项、常应变项；单元之间：连续性要求)
- C_0 型单元与 C_1 型单元的特征
- 有限元分析数值解的精度与性质(基于最小势能原理的有限元解的位移在总体上比精确的位移要小，即下限性质)
- 单元应力计算结果的误差与平均处理(共用节点上应力的直接平均与加权平均)
- 高阶单元的构建方法
- 提高计算精度的 h 方法和 p 方法

5.10 习题

5-1 对于如题图所示的平面刚架，对该结构的单元和节点进行编号，并使整体刚度矩阵 \mathbf{K} 的带宽最小。



题图 5-1

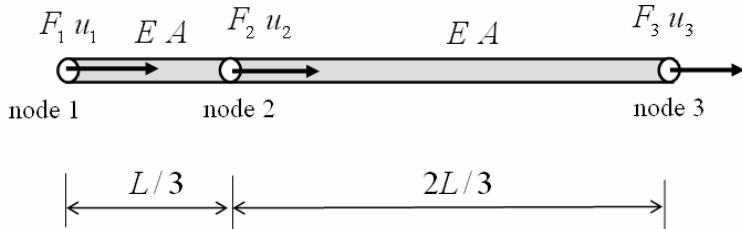
5-2 对于平面 4 节点矩形单元，在单元内假定位移模式为



$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 x y + a_3 x^2 \\ v(x, y) = b_0 + b_1 y + b_2 x y + b_3 y^2 \end{array} \right\}$$

试由收敛准则讨论该单元的特征，并阐述该单元的位移、应力及应变的描述能力。

- 5-3 对于如题图所示 3 节点 1D 轴向单元，推导相应的刚度矩阵及单元方程，若中间节点无外载荷，试对该单元方程进行处理，将其表示成只以 u_1 及 u_3 为基本变量的方程。并与该情况的 2 节点杆单元的方程进行对照，解释其相同之处或差别。



题图 5-3

- 5-4 构造 4 节点杆单元，写出相应的形状函数。

- 5-5 构造 3 节点纯弯梁单元，写出相应挠度函数的形式，基于收敛准则分析所选挠度函数。

- 5-6 已知一个弹性结构组装后的刚度矩阵为

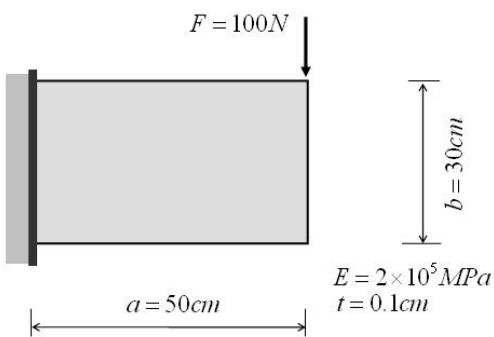
$$\mathbf{K} = 6.4 \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

对应于该刚度矩阵，所求出的节点位移为 $\mathbf{q} = [-0.0033 \ 0.0058 \ 0.0075 \ 0.0085]^T \text{ m}$ ；求该结构的应变能以及势能。

- 5-7 针对【典型例题】5.3(6)，当斜支座为 60° 情况下，采用直接法求解该问题。

- 5-8 针对【典型例题】5.3(6)，当斜支座为 60° 情况下，采用乘子法求解该问题。

- 5-9 针对平面问题悬臂结构，基于 ANSYS 平台，采用平面单元，要求每边划分 4 段，分析采用矩形单元与三角形单元的计算精度，并计算它们的势能。



题图 5-9

- 5-10 针对习题 5-9，基于 ANSYS 平台，分析当每边划分 8 段以及 16 时，分别采用矩形单元



与三角形单元来计算加载点的位移，并进行计算精度、势能的比较；基于习题 5-9 和习题 5-10 的分析结果，总结网格划分与单元种类对计算精度的影响规律。



第二部分 有限元分析的典型应用领域

第 6 章 静力结构的有限元分析

进行自主程序(home-code)开发是我们从事科学研究一个很重要的方面^[25]，因为当我们对一些新现象和原理进行研究时，同样需要进行复杂的数值分析，当现有的商业程序还不能进行处理时，这就需要我们进行自主程序开发，当然我们希望只进行核心计算模块的开发，而充分利用现有商业软件的平台，特别是前后处理平台的利用；一般的教科书都提供各种各样的有限元分析源程序，下面基于 MATLAB 平台特别开发了能够与 ANSYS 平台进行衔接的有限元分析程序 FEM2D.m，只采用 3 节点三角形单元，其目的是提供最简单的编程模板，读者在完全理解所提供程序的原理后，可以在此基础上进行扩充，开发出功能更加齐全的自主程序；本章的另一个重要内容是介绍如何实现自主程序与现有商业软件前后处理平台(以 ANSYS 为例)的衔接，给出具体的实例以展示衔接的全过程。

6.1 连续体平面问题的 MATLAB 有限元分析程序

本节将介绍 FEM2D.m 程序的实现原理。以 3 节点三角形单元为例，将 ANSYS 作为有限元的前、后处理平台，生成相应的节点信息文件 node.txt、单元信息文件 element.txt、位移边界条件文件 constrain.txt、载荷状况文件 force.txt，把这四个文本文件作为 MATLAB 3 节点三角形有限元计算程序的输入信息，并计算相应的位移、应力等结果，生成相应的结果文件 FOR_POST.dat。然后将这些结果文件传递到 ANSYS 进行后处理。本章通过一个简单算例来描述该过程的实现。有关 ANSYS 前后处理的衔接见第 6.3 节的讨论。

6.1.1 程序原理

该程序的特点如下：

问题类型：可用于弹性力学平面应力问题和平面应变问题的分析

单元类型：常应变(CST)三角形单元

位移模式：线性位移模式

载荷类型：节点荷载，非节点荷载应先换算为等效节点荷载

材料性质：单一的均匀的弹性材料

约束方式：为位移固定约束，为保证无刚体位移，弹性体至少应有针对三个刚体运动自由度的独立约束

方程求解：针对半带宽刚度方程的 Gauss 消元法

节点信息：可以读入由 ANSYS 前处理导出的节点信息文件 node.txt，或手工生成

单元信息：可以读入由 ANSYS 前处理导出的单元信息文件 element.txt，或手工生成

结果文件：输出供 ANSYS 进行后处理的文件 FOR_POST.dat

该程序的原理如框图 6-1 所示。

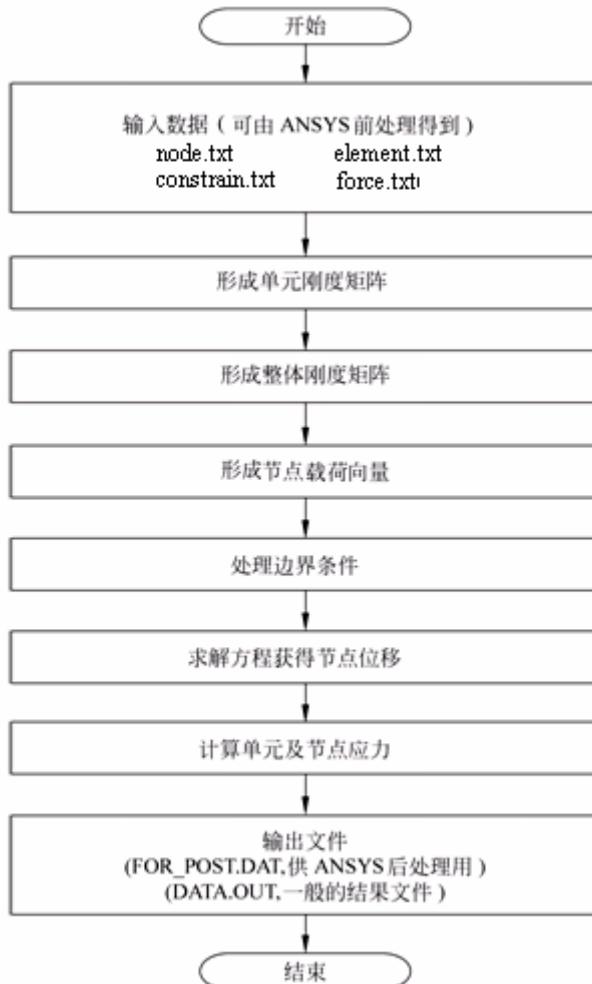


图 6-1 FEM2D.m 程序的原理框图

程序中函数、文件管理和文件格式的说明如下。

1. 程序中的函数

Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,xi,yi,xj,yj,xm,ym,ID): 计算单元的刚度矩阵

Triangle2D3Node_Assembly(KK,k,i,j,m): 进行单元刚度矩阵的组装

Triangle2D3Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,u,ID): 计算单元的应力

2. 文件管理

源程序文件:

FEM2D.m

程序需读入的数据文件:

node.txt(节点信息文件, 可由 ANSYS 前处理导出, 或手工生成)

element.txt(单元信息文件, 可由 ANSYS 前处理导出, 或手工生成)

constrain.txt(位移边界条件文件, 可由 ANSYS 前处理导出, 或手工生成)

force.txt(载荷状况文件, 可由 ANSYS 前处理导出, 或手工生成)

若需从 ANSYS 前处理中导出 node.txt、element.txt、constrain.txt、force.txt 这四个文件, 其方法见第 6.3 节。



程序输出的数据文件：FOR_POST.DAT(专供 ANSYS 进行后处理的结果数据文件)

FEM2D.m 程序中的文件管理如图 6-2 所示。

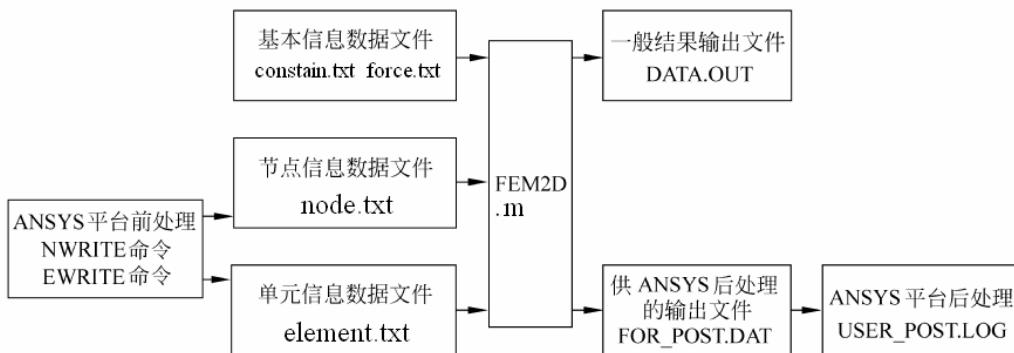


图 6-2 FEM2D.m 程序中的文件管理以及与 ANSYS 前后处理平台的衔接

3. 数据文件格式

需读入的节点信息文件 node.txt 的格式如表 6-1 所示。

表 6-1 节点信息文件 node.txt 的格式

栏 目	格 式 说 明	实际需输入的数据
节点 信 息	每行为一个节点的信息 (每行三个数, 每两个数之间用空格或“,”分开)	node.txt(N_NODE,3) 节点号, 该节点的 x 坐标, 该节点 y 方向坐标 (例如: 3 0.5 1.2)

需读入的单元信息文件 element.txt 的格式如表 6-2 所示。该格式按四节点单元准备, 节点号 4 与节点号 3 的编号相同, 由于需要与 ANSYS 前处理的输出数据文件相衔接, 该文件的每行有 14 个数, 后 10 位整型数在本程序中暂时无用, 可输入“0”。

表 6-2 单元信息文件 element.txt 的格式

栏 目	格 式 说 明	实 际 需 输 入 的 数 据
单 元 信 息	每行为一个单元的信息 (每行有 14 个整型数, 前 4 个为单元节点编号, 对于三节点单元, 第 4 个节点编号与第 3 个节点编号相同, 后 10 个数暂时无用, 可输入“0”, 每两个整型数之间用至少一个空格分开)	element(N_ELE,14) 单元的节点号 1(空格)单元的节点号 2(空格)单元的节点号 3(空格)单元的节点号 4(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0(空格)0 (例如: 1 4 5 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)

需读入的位移边界条件文件 constrain.txt 的格式如表 6-3 所示。该文件可以由 ANSYS 前处理的输出数据文件相衔接。



表 6-3 位移边界条件文件 constrain.txt 的格式

栏 目	格 式 说 明	实 际 需 输 入 的 数 �据
位 移 界 边 界 信 息	每行为一个节点在一个方向上的约束的信息 (每行有 4 个整型数, 每两个整型数之间用至少一个空格分开)	constrain.txt (nconstraint,4) 有位移约束的节点号(空格)约束性质(空格)约束值的实部(空格) 约束值的虚部 (例如: 1 1 0.00000000 0.00000000) 约束性质为 1 指 UX 的约束, 约束性质为 2 指 UY 的约束

需读入的载荷状况文件 force.txt 的格式如表 6-4 所示。该文件可以由 ANSYS 前处理的输出数据文件相衔接。

表 6-4 载荷状况文件 force.txt 的格式

栏 目	格 式 说 明	实 际 需 输 入 的 数 据
载 荷 作 用 信 息	每行为一个节点在一个方向上的载荷的信息 (每行有 4 个整型数, 每两个整型数之间用至少一个空格分开)	force.txt (nforce,4) 有外载荷作用的节点号(空格)载荷性质(空格)载荷值的实部(空格) 载荷值的虚部 (例如: 1 1 0.00000000 0.00000000) 载荷性质为 1 指 UX 方向的载荷, 载荷性质为 2 指 UY 方向的载荷

专供 ANSYS 进行后处理的结果数据文件 FOR_POST.DAT 的格式如表 6-5 所示。

表 6-5 输出结果文件 FOR_POST.DAT 的格式

栏 目	格式说明	实 际 输 出 的 数 据
PARTI: 模型信息	(共 1 行, 两个数, 格式 2f9.4)	节点数(N_NODE) 单元数(N_ELE) (例如: 6, 0000 4, 0000)
PARTII: 节点坐标、节点位移、节点应力(经平均处理后的三分量), 在模型信息输出行后的第 1 行代表第 1 号节点的结果, 往后依此类推。	(共有总节点数的行数, 每行 7 个数, 格式 7f9.4)	X(I) Y(I) RESULT_N(2*I-1) RESULT_N(2*I) STS_ND(I,1) STS_ND(I,2) STS_ND(I,3) 节点的 x 坐标 节点的 y 坐标 节点 x 方向位移 节点 y 方向位移 节点 x 方向应力 节点 y 方向应力 节点剪切应力 (例如: 0.0000 2.0000 0.0000 -5.2527 -1.0879 -3.0000 0.4396)
PARTIII: 单元节点编号、单元应力的三个分量, 在节点输出结果后的第 1 行代表第 1 号单元的结果, 往后依此类推。	(共有总单元数的行数, 每行 7 个数, 格式 7f9.4)	IJK_ELE(I,1) IJK_ELE(I,2) IJK_ELE(I,3) IJK_ELE(I,4) STS_ELE(I,1) STS_ELE(I,2) STS_ELE(I,3) 单元的节点号 1 单元的节点号 2 单元的节点号 3 单元的节点号 4 单元 x 方向应力 单元 y 方向应力 单元剪切应力 (例如: 1.0000 2.0000 3.0000 3.0000 -1.0879 -3.0000 0.4396)



6.1.2 完整的 MATLAB 程序源代码

【MATLAB 程序】6.1.2(1) 平面问题有限元分析的通用程序 FEM2D.m

按照上面的程序原理，在 MATLAB 平台上，编写出基于 3 节点三角形单元的平面问题有限元分析的通用程序 FEM2D.m，采用置“1”法处理边界条件。以下假设开设了工作目录 E:\matlabFEM\FEM2D\，将子程序 Triangle2D3Node_Stiffness，Triangle2D3Node_Assembly，Triangle2D3Node_Stress 放在该工作目录中，将所准备的信息文件 node.txt，element.txt，constrain.txt，force.txt 也放在该工作目录中，在 MATLAB 环境中，运行 FEM2D.m 主程序，就可以在该目录中获得计算的输出数据文件：节点位移的结果文件 node_displace.dat，单元应力的结果文件 elem_stress.dat，节点应力的结果文件 node_stress.dat 以及为 ANSYS 后处理所输出的数据文件 FOR_POST.dat。

解答：所编写的 MATLAB 程序如下。

```
%%%%%% FEM2D.m(Triangle2D3Node )%% main program begin %%%%%%
clear;
%读入相应信息文件，给出指定工作目录
load E:\matlabFEM\FEM2D\node.txt
load E:\matlabFEM\FEM2D\element.txt
load E:\matlabFEM\FEM2D\constrain.txt
load E:\matlabFEM\FEM2D\force.txt

%确定节点、单元个数
[nnode,ntmp]=size(node);
[nelem,etmp]=size(element);
[nforce,ftmp]=size(force);
[nconstrain,ctmp]=size(constrain);

%预先设定总体刚度矩阵、节点力向量、节点约向量
%针对二维问题
KKG=zeros(2*nnode);
FFG=zeros(2*nnode,1);
UUG=zeros(2*nnode,1);
StrainElem=zeros(nelem,3);
StressElem=zeros(nelem,3);
StressNode=zeros(nnode,3);
k=zeros(6,6);      % 单元刚度矩阵

%给出相应材料及计算参数
E=1e6;
NU=1/3;
t=1;
ID=1;

%单元循环形成总体刚度矩阵
for i=1:nelem
    k=Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,node(element(i,1),2),node(element(i,1),3),node(element(i,2),2),node(element(i,2),3),node(element(i,3),2),node(element(i,3),3),ID);
    KKG =Triangle2D3Node_Assembly(KKG,k,element(i,1),element(i,2),element(i,3));
end

%记录原始刚度方程以求支反力备用
KKGOLD=KKG;

%载荷的处理
```



```
for i=1:nforce
    m=force(i,1);
    n=force(i,2);
    FFG(2*(m-1)+n)= force(i,3);
end

%采用置"1"法处理边界条件
for i=1:nconstrain
    m=constrain(i,1);
    n=constrain(i,2);
    UUG(2*(m-1)+n)=constrain(i,3);
    KKG(2*(m-1)+n,:)=0;
    KKG(:,2*(m-1)+n)=0;
    KKG(2*(m-1)+n,2*(m-1)+n)=1;
    FFG(2*(m-1)+n)=0;
end

% 求解节点位移
UUG=KKG\FFG;

%求解单元应力
for i=1:nelem
    % 求该单元的节点位移
    l=element(i,1);m=element(i,2);n=element(i,3);
    u=[UUG(2*l-1),UUG(2*l),UUG(2*m-1),UUG(2*m),UUG(2*n-1),UUG(2*n)]';
    % 求单元应力
    stresstemp=Triangle2D3Node_Stress(E,NU,node(element(i,1),2),node(element(i,1),3),node(element(i,2),2),node(element(i,2),3),node(element(i,3),2),node(element(i,3),3),u,ID);
    StressElem(i,1)=stresstemp(1,1);
    StressElem(i,2)=stresstemp(2,1);
    StressElem(i,3)=stresstemp(3,1);
end

% 求节点应力—计算节点周边所有单元应力的平均值
StressNode=zeros(nnnode,3);
for i=1:nnode
    numElem=0;
    for j=1:nelem
        if (element(j,1)==i)
            StressNode(i,1)=StressNode(i,1)+StressElem(j,1);
            StressNode(i,2)=StressNode(i,2)+StressElem(j,2);
            StressNode(i,3)=StressNode(i,3)+StressElem(j,3);
            numElem=numElem+1;
        elseif (element(j,2)==i)
            StressNode(i,1)=StressNode(i,1)+StressElem(j,1);
            StressNode(i,2)=StressNode(i,2)+StressElem(j,2);
            StressNode(i,3)=StressNode(i,3)+StressElem(j,3);
            numElem=numElem+1;
        elseif (element(j,3)==i)
            StressNode(i,1)=StressNode(i,1)+StressElem(j,1);
            StressNode(i,2)=StressNode(i,2)+StressElem(j,2);
            StressNode(i,3)=StressNode(i,3)+StressElem(j,3);
            numElem=numElem+1;
        end
    end
    StressNode(i,1)=StressNode(i,1)/numElem;
    StressNode(i,2)=StressNode(i,2)/numElem;
    StressNode(i,3)=StressNode(i,3)/numElem;
end
```



```
% 输出节点的各种结果值
fid=fopen('E:\matlabFEM\FEM2D\FOR_POST.dat','w');
fprintf(fid,'%18.8f%18.8f\n',nnode,nelem);
for i=1:nnode
fprintf(fid,'%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f\n',node(i,2),node(i,3),UUG(2*(i-1)+1),UUG(2*(i-1)
+2),StressNode(i,1),StressNode(i,2),StressNode(i,3));
end
for i=1:nelem
fprintf(fid,'%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f\n',element(i,1),element(i,2),element(i,3),element(i,4
),StressElem(i,1),StressElem(i,2),StressElem(i,3));
end
% 关闭文件
fclose(fid);

% 输出节点位移值
fid=fopen('E:\matlabFEM\FEM2D\node_displace.dat','w');
fprintf(fid,'n%s\n','----- NODE DISPLACEMENT -----');
fprintf(fid,'n%s\n',      Node      X-coordinate      Y-coordinate      X-disp      Y-disp
');
for i=1:nnode
fprintf(fid,'%10d%18.8f%18.8f%18.8f%18.8f\n',node(i,1),node(i,2),node(i,3),UUG(2*(i-1)+1),UUG(2*(i-1)+2));
end
% 关闭文件
fclose(fid);

% 输出单元应力值
fid=fopen('E:\matlabFEM\FEM2D\elem_stress.dat','w');
fprintf(fid,'n%s\n','----- ELEMENT STRESS -----');
fprintf(fid,'n%s\n',      Node      X-stress      Y-stress      Shear stress  );
for i=1:nelem
fprintf(fid,'%10d%18.8f%18.8f%18.8f\n',element(i,14),StressElem(i,1),StressElem(i,2),StressElem(i,3));
end
% 关闭文件
fclose(fid);

% 输出节点应力值
fid=fopen('E:\matlabFEM\FEM2D\node_stress.dat','w');
fprintf(fid,'n%s\n','----- NODE STRESS -----');
fprintf(fid,'n%s\n',      Node      X-stress      Y-stress      Shear stress  );
for i=1:nnode
fprintf(fid,'%10d%18.8f%18.8f%18.8f\n',node(i,1),StressNode(i,1),StressNode(i,2),StressNode(i,3));
end
% 关闭文件
fclose(fid);

%%%%%% FEM2D.m(Triangle2D3Node )% main program end %%%%%%
function k=Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,xi,yi,xj,yj,xm,ym,ID)
%该函数计算单元的刚度矩阵
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU, 厚度 t
```



```
%输入三个节点 i、j、m 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym
%输入平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力, 2 为平面应变)
%输出单元刚度矩阵 k(6X6)
%-----
A = (xi*(yj-ym) + xj*(ym-yi) + xm*(yi-yj))/2;
betai = yj-ym;
betaj = ym-yi;
betam = yi-yj;
gammai = xm-xj;
gammaj = xi-xm;
gammam = xj-xi;
B = [betai 0 betaj 0 betam 0 ;
      0 gammai 0 gammaj 0 gammam ;
      gammai betai gammaj betaj gammam betam]/(2*A);
if ID == 1
    D = (E/(1-NU*NU))*[1 NU 0 ; NU 1 0 ; 0 0 (1-NU)/2];
elseif ID == 2
    D = (E/(1+NU)/(1-2*NU))*[1-NU NU 0 ; NU 1-NU 0 ; 0 0 (1-2*NU)/2];
end
k= t*A*B'*D*B;
%%%%%%%
function z = Triangle2D3Node_Assembly(KK,k,i,j,m)
%该函数进行单元刚度矩阵的组装
%输入单元刚度矩阵 k
%输入单元的节点编号 I、j、m
%输出整体刚度矩阵 KK
%-----
DOF(1)=2*i-1;
DOF(2)=2*i;
DOF(3)=2*j-1;
DOF(4)=2*j;
DOF(5)=2*m-1;
DOF(6)=2*m;
for n1=1:6
    for n2=1:6
        KK(DOF(n1),DOF(n2))=KK(DOF(n1),DOF(n2))+k(n1,n2);
    end
end
z=KK;
%%%%%%
function stress=Triangle2D3Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,u,ID)
%该函数计算单元的应力
%输入弹性模量 E, 泊松比 NU, 厚度 t
%输入三个节点 i、j、m 的坐标 xi,yi,xj,yj,xm,ym
%输入平面问题性质指示参数 ID(1 为平面应力, 2 为平面应变), 单元的位移列阵 u(6X1)
%输出单元的应力 stress(3X1), 由于它为常应力单元, 则单元的应力分量为 Sx,Sy,Sxy
%-----
A = (xi*(yj-ym) + xj*(ym-yi) + xm*(yi-yj))/2;
betai = yj-ym;
betaj = ym-yi;
betam = yi-yj;
gammai = xm-xj;
gammaj = xi-xm;
gammam = xj-xi;
```



```
B = [betai 0 betaj 0 betam 0 ;  
      0 gammai 0 gammaj 0 gammam ;  
      gammai betai gammaj betaj gammam betam]/(2*A);  
if ID == 1  
    D = (E/(1-NU*NU))*[1 NU 0 ; NU 1 0 ; 0 0 (1-NU)/2];  
elseif ID == 2  
    D = (E/(1+NU)/(1-2*NU))*[1-NU NU 0 ; NU 1-NU 0 ; 0 0 (1-2*NU)/2];  
end  
stress = D*B*u;  
%-----
```

6.2 受均匀载荷方形板的有限元分析

【MATLAB 算例】6.2(1) 受均匀载荷方形板的有限元分析(FEM2D.m)

如图 6-3(a)所示的正方形薄板四周受均匀荷载的作用，该结构在边界上受正向分布压力 $\bar{p} = 1000\text{N/m}$ ，同时在沿对角线 y 轴上受一对集中压力，荷载为 2000N。若取板厚 $t = 1\text{m}$ ，弹性模量 $E = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ，泊松比 $\mu = 0$ ，试采用自主程序 FEM2D.m 分析该问题，给出所需要的数据文件。

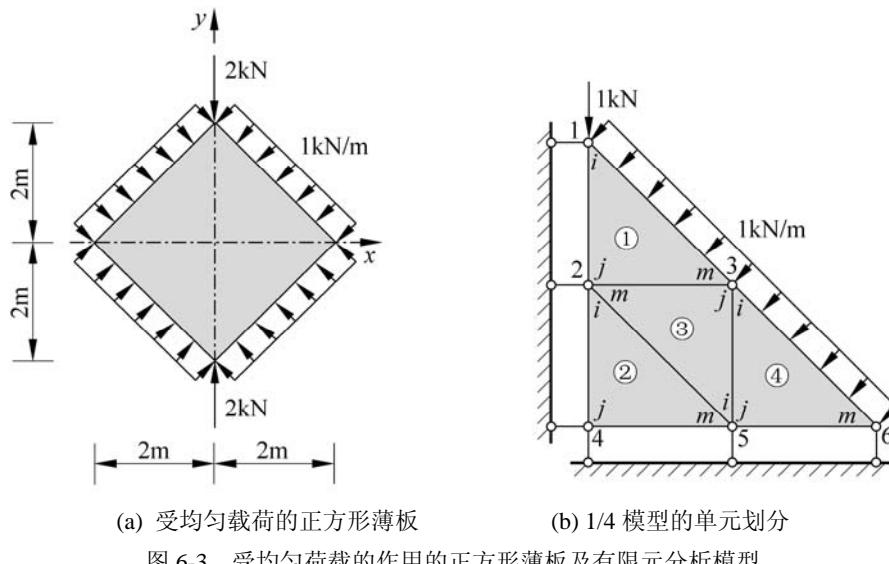


图 6-3 受均匀荷载的作用的正方形薄板及有限元分析模型

解答：对该问题进行有限元分析的过程如下。

(1) 结构的离散化与编号

该薄板的荷载和几何形状关于 x 轴和 y 轴对称，故可只取结构的 1/4 作为计算模型。将此模型化分为四个全等的直角三角形单元，单元编号和节点编号如图 6-3(b) 所示。

(2) 各个单元的描述(略)

(3) 建立整体刚度方程

经单元刚度矩阵组装和分布外载等效处理后所形成的整体刚度方程如下：



$$\frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & & & 6 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 2 & 0 & u_6 & & & & \\ & & & & & 1 & v_6 & R_{y6} & -500 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} & -500 \\ R_{x2} & \\ 0 & \\ -1000 & \\ -1000 & \\ R_{x4} & \\ R_{y4} & \\ 0 & \\ R_{y5} & \\ -500 & \\ R_{y6} & -500 \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

其中 R_{x1}, R_{x2}, R_{x4} 为节点 1、2、4 的水平支反力, R_{y4}, R_{y5}, R_{y6} 为节点 4、5、6 的垂直支反力。

(4) 边界条件的处理及刚度方程求解

该平面问题的位移约束为 $u_1 = u_2 = u_4 = v_4 = v_5 = v_6 = 0$, 采用置“1”法对这几个自由度进行处理, 求解方程后可得到该问题的整体节点位移为

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{1}{Et} [0 \quad -5.252 \quad 0 \quad -2.252 \quad -1.088 \quad -1.372 \quad 0 \quad 0 \quad -0.824 \quad 0 \quad -1.824 \quad 0]^T \times 10^3 \\ &= [0 \quad -5.252 \quad 0 \quad -2.252 \quad -1.088 \quad -1.372 \quad 0 \quad 0 \quad -0.824 \quad 0 \quad -1.824 \quad 0]^T \times 10^{-3} \text{m} \end{aligned} \quad (6-2)$$

(5) 其它物理量的计算

各个单元的应力 (Pa) 为

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1088 \\ -3000 \\ 440 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \begin{bmatrix} -824 \\ -2252 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1088 \\ -1374 \\ 308 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1000 \\ -1374 \\ -132 \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

(6) 采用自主程序 FEM2D.m 所需要的数据文件

手工准备的节点信息文件 node.txt 的数据为

1	0.0	2.0
2	0.0	1.0
3	1.0	1.0
4	0.	0.
5	1.0	0.
6	2.0	0.

手工准备的单元信息文件 element.txt 的数据为

1	2	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	6	6	0	0	0	0	0	0	0	0



手工准备的位移边界条件文件 constrain.txt

1	1	0.00000000	0.00000000
2	1	0.00000000	0.00000000
4	1	0.00000000	0.00000000
4	2	0.00000000	0.00000000
5	2	0.00000000	0.00000000
6	2	0.00000000	0.00000000

手工准备的载荷状况文件 force.txt

1	1	-500.000000	0.00000000
1	2	-1500.000000	0.00000000
3	1	-1000.000000	0.00000000
3	2	-1000.000000	0.00000000
6	1	-500.000000	0.00000000
6	2	-500.000000	0.00000000

(7) FEM2D.m 所输出的数据文件

在所工作的目录内，可以得到一系列的输出结果文件如下。

由节点位移的结果文件 node_displace.dat 输出为。

----- NODE DISPLACEMENT -----

Node	X-coordinate	Y-coordinate	X-disp	Y-disp
1	0.00000000	2.00000000	0.00000000	-0.00525275
2	0.00000000	1.00000000	0.00000000	-0.00225275
3	1.00000000	1.00000000	-0.00108791	-0.00137363
4	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
5	1.00000000	0.00000000	-0.00082418	0.00000000
6	2.00000000	0.00000000	-0.00182418	0.00000000

由单元应力的结果文件 elem_stress.dat 输出为。

----- ELEMENT STRESS -----

Node	X-stress	Y-stress	Shear stress
1	-1087.91208791	-3000.00000000	439.56043956
2	-824.17582418	-2252.74725275	0.00000000
3	-1087.91208791	-1373.62637363	307.69230769
4	-1000.00000000	-1373.62637363	-131.86813187

由节点应力的结果文件 node_stress.dat 输出为；这里节点应力为经平均处理后给出的。

----- NODE STRESS -----

Node	X-stress	Y-stress	Shear stress
1	-1087.91208791	-3000.00000000	439.56043956
2	-1000.00000000	-2208.79120879	249.08424908
3	-1058.60805861	-1915.75091575	205.12820513
4	-824.17582418	-2252.74725275	0.00000000
5	-970.69597070	-1666.66666667	58.60805861
6	-1000.00000000	-1373.62637363	-131.86813187



程序还输出一个结果文件 FOR_POST.dat，该文件将作为 ANSYS 后处理的数据文件，所输出 FOR_POST.dat 文件的内容如下。

```
6.00000000 4.00000000
0.00000000 2.00000000 0.00000000 -0.00525275 -1087.91208791 -3000.00000000 439.56043956
0.00000000 1.00000000 0.00000000 -0.00225275 -1000.00000000 -2208.79120879 249.08424908
1.00000000 1.00000000 -0.00108791 -0.00137363 -1058.60805861 -1915.75091575 205.12820513
0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 -824.17582418 -2252.74725275 0.00000000
1.00000000 0.00000000 -0.00082418 0.00000000 -970.69597070 -1666.66666667 58.60805861
2.00000000 0.00000000 -0.00182418 0.00000000 -1000.00000000 -1373.62637363 -131.86813187
1.00000000 2.00000000 3.00000000 3.00000000 -1087.91208791 -3000.00000000 439.56043956
2.00000000 4.00000000 5.00000000 5.00000000 -824.17582418 -2252.74725275 0.00000000
5.00000000 3.00000000 2.00000000 2.00000000 -1087.91208791 -1373.62637363 307.69230769
3.00000000 5.00000000 6.00000000 6.00000000 -1000.00000000 -1373.62637363 -131.86813187
```

【ANSYS 算例】6.2(2) 受均匀载荷方形板的有限元分析

针对图 6-3 所示的受均匀载荷方形板，基于 ANSYS 平台进行建模和分析。

解答：完全按照【MATLAB 算例】6.2(1)的节点及单元划分，基于 ANSYS 平台进行计算，将 ANSYS 的计算结果与 MATLAB 的计算结果进行比较，见表 6-6。

表 6-6 ANSYS 与 MATLAB 计算结果的比较

	ANSYS 计算结果(Pa)	MATLAB 计算结果(Pa)
单元 1	$\sigma_x = -1087.9$ $\sigma_y = 3000.0$ $\tau_{xy} = 439.56$	$\sigma_x = -1088$ $\sigma_y = 3000$ $\tau_{xy} = 440$
单元 2	$\sigma_x = -824.2$ $\sigma_y = -2252.7$ $\tau_{xy} = 0.0000$	$\sigma_x = -824$ $\sigma_y = -2253$ $\tau_{xy} = 0.000$
单元 3	$\sigma_x = 1087.9$ $\sigma_y = 1373.6$ $\tau_{xy} = 307.7$	$\sigma_x = 1088$ $\sigma_y = 1374$ $\tau_{xy} = 308$
单元 4	$\sigma_x = -1000.0$ $\sigma_y = -1373.6$ $\tau_{xy} = -131.9$	$\sigma_x = -1000$ $\sigma_y = -1374$ $\tau_{xy} = -132$

给出的操作过程及命令流如下。

1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): Planar → Run → OK



(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Quad 4node 42 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Options... → K3: Plane Strs w/thk(带厚度的平面应力问题) → OK → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX:1e6(弹性模量), PRXY: 0(泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

(5) 定义实常数以确定平面问题的厚度

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete → Add → Type 1 → OK → Real Constant Set No: 1(第 1 号实常数), THK: 1(平面问题的厚度) → OK → Close

(6) 生成几何模型

生成节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0, 2, 0 → Apply → 同样依次输入其余 5 个节点坐标(坐标分别为 (0, 1, 0)、(1, 1, 0)、(0, 0, 0)、(1, 0, 0)、(2, 0, 0)) → OK

生成单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → TYPE,1 PLANE42, MAT,1, REAL,1 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 1、2、3 号节点 → Apply → 点击 2、4、5 号节点 → Apply → 点击 2、3、5 号节点 → Apply → 点击 3、5、6 号节点 → OK

(7) 模型施加约束和外载

底边加 Y 方向的约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → 用鼠标选择 1/4 模型底边上的所有节点(可用选择菜单中的 box 拉出一个矩形框来框住底边线上的节点, 也可用 single 来一个一个地点选) → OK → Lab2 DOFs: UY(默认值为零) → OK

左边加 X 方向的约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → 用鼠标选择 1/4 模型左边上的所有节点(可用选择菜单中的 box 拉出一个矩形框来框住左边线上的节点, 也可用 single 来一个一个地点选) → OK → Lab2 DOFs: UX(默认值为零) → OK

斜边加垂直于斜边方向的均布载荷

ANSYS Utility Menu: Select → Entities... → OK → 点击 1、3、6 节点 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Pressure → On Nodes → Pick All → VALUE: 1000 → OK

节点 1 施加载荷

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 点击 1 号节点 → OK → Lab: FY, Value: -1000 → OK

(8) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Static → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK → Should The Solve Command be Executed? Y → Close (Solution is done!) → 关闭文字窗口

**(9) 结果显示**

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Element Solution → Element solution → Stress → X-Component of Stress → OK (返回到 List Results) → Nodal Solution → Nodal solution → DOF Solution → Displacement vector sum → OK

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Nodal solution → DOF Solution → Displacement vector sum → OK (还可以继续观察其他结果)

(10) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

2 完整的命令流

```
!% % % % % % [ANSYS 算例]6_2(2) % % % begin % % % % %  
/prep7          !进入前处理  
ANTYPE,STATIC   !设定为静态分析  
et,1,plane42    !设置单元类型为 PLANE42  
keyopt,1,3,3     !设置为带厚度的平面问题  
r,1,1           !设置实常数, 厚度为 1  
mp,ex,1,1e6      !设置 1 号材料弹性模量为 1e6N/m2  
mp,prxy,1,0      !设置 1 号材料泊松比  
n,1,,2           !生成节点 1, 坐标(0,2)  
n,2,,1           !生成节点 2  
n,3,1,1           !生成节点 3  
n,4,             !生成节点 4  
n,5,1           !生成节点 5  
n,6,2           !生成节点 6  
mat,1            !设定为材料 No.1  
type,1           !设定单元 No.1  
real,1            !设定实常数 No.1  
e,1,2,3           !生成单元 1  
e,2,4,5           !生成单元 2  
e,2,3,5           !生成单元 3  
e,3,5,6           !生成单元 4  
d,1,ux           !1 号节点施加 x 方向约束  
d,2,ux           !2 号节点施加 x 方向约束  
d,4,all           !4 号节点施加全约束  
d,5,uy           !5 号节点施加 y 方向约束  
d,6,uy           !6 号节点施加 y 方向约束  
nsel,s,,,1,3,2    !选择 1 号 3 号节点  
nsel,a,,,6         !添加选择 6 号节点  
sf,all,pres,1000   !施加 1000N/m 压力  
nsel,all           !选择全部节点  
f,1,fy,-1000       !在 1 号节点施加 FY 方向的力(-1000N)  
/solu              !进入求解模块  
Solve              !求解  
FINISH             !结束求解状态
```



```
!=====进入一般的后处理模块  
/POST1          !进入后处理  
PLDISP,1        !显示变形状况  
FINISH          !结束后处理  
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]6_2(2) %%% end %%%%%%
```

6.3 自主程序开发与 ANSYS 前后处理器的衔接

【ANSYS 程序】6.3(1) ANSYS 前后处理器与自主程序的衔接

同样以【MATLAB 算例】6.2(1)的结构为例，如图 6-2 所示，若已有自主有限元分析程序，希望采用 ANSYS 平台作为前后处理器与自主程序加以衔接。

解答： ANSYS 平台的前后处理器的利用如下。

(1) ANSYS 前处理的利用

首先在 ANSYS 平台上直接进行几何建模和单元划分，单元和节点如图 6.4 所示，然后利用 ANSYS 输出节点信息和单元信息的功能，就可以实现前处理器的应用，即由 ANSYS 前处理输出的节点信息文件 node.txt、单元信息文件 element.txt、位移边界条件文件 constrain.txt、载荷状况文件 force.txt。ANSYS 中输出节点信息和单元信息的命令如下：

```
nwrite,node,txt,  
ewrite,element,txt,
```

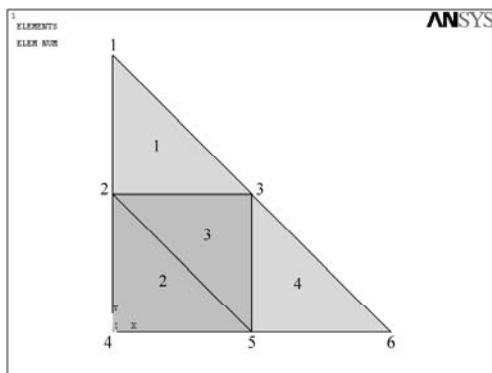


图 6-4 在 ANSYS 平台上所划分的单元和节点

下面给出实现上述简例的 ANSYS 前处理操作的两种方式。

• ANSYS 前处理的菜单(GUI)操作方式

① 进入 ANSYS

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → working directory (设置工作目录) → jobname (设置工作文件名): triangle → Run → OK

② 设定单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → Add → Solid : Quad 4node 42 (选择单元类型) → OK (返回 Element Types 窗口) → Close

③ 生成节点和单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number:1(节点号),0(x 坐标),2(y 坐标) → Apply → 再重复操作输入另 5 个节点号及 xy 坐



标,2(0,2),3(1,1),4(0,0),5(1,0),6(2,0) → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → (依次连接三个节点): 1, 2, 3 → Apply → 2, 4, 5 → Apply → 5, 3, 2 → Apply → 3, 5, 6 → OK

④ 输出前处理信息

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → Write Node File → (输入导出的节点信息文件名称): node.txt → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Write Elem File → (输入导出的单元信息文件名称): element.txt → OK

⑤ 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

实现以上操作过程的 ANSYS 前处理的命令流如下。

```
/PREP7
ET,1,PLANE42
N,1,0,2
N,2,0,1
N,3,1,1
N,4,0,0
N,5,1,0
N,6,2,0
E,1,2,3,
E,2,4,5,
E,5,3,2,
E,3,5,6,
NWRITE, node.txt,, 0      ! write node info to node.txt
EWRITE, element.txt,, 0    ! write element info to element.txt
```

由以上 ANSYS 操作所得到的节点信息文件 node.txt 和单元信息文件 element.txt 的格式如表 6-7 和表 6-8 所示。

表 6-7 ANSYS 所导出的节点信息文件 node.txt 的格式

节点编号	节点 x 坐标、	节点 y 坐标
实际数据	1 0.000000000000	2.000000000000
	2 0.000000000000	1.000000000000
	3 1.000000000000	1.000000000000
	4 1.000000000000	
	5 2.000000000000	
	6	

说明: 节点编号按照八位整型数据的格式输出, 坐标按照 20 位浮点型数据输出, 其中空格占六位。节点坐标为 0 时, ANSYS 将不输出, 因此在利用该数据文件作为节点信息读入时, 必须注意格式。需要在相应节点坐标处补 0。

表 6-8 ANSYS 所导出的单元信息文件 element.txt 的格式

实际数据	1	2	3	3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
	2	4	5	5	0	0	0	0	1	1	1	1	0	2
	5	3	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	3
	3	5	6	6	0	0	0	0	1	1	1	1	0	4



ANSYS 的编码格式	I J K L M N O P	NUM
说明	输出是按照 8 节点四边形单元格式输出的，每一行前四列对应四个单元顶点的编号，对于三角形单元第四列与第三列相同。接下来四列输出另外四个节点的编号，缺省为 0。最后一列输出单元编号。每一行第 9—13 列依次输出已定义的单元材料类型编号，问题类型编号，实常数编号，梁单元类型编号，单元坐标系类型编号	

本例中由 NWRITE 命令所得到的数据文件 node.txt 如下(注意：ANSYS 中的命令 NWRITE 对于数据“0”的输出为“空位”):

```
1 0.000000000000 2.000000000000
2 0.000000000000 1.000000000000
3 1.000000000000 1.000000000000
4
5 1.000000000000
6 2.000000000000
```

本例中由 EWRITE 命令所得到的数据文件 element.txt
如下：

```
1 2 3 3 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1
2 4 5 5 0 0 0 0 1 1 1 1 0 2
5 3 2 2 0 0 0 0 1 1 1 1 0 3
3 5 6 6 0 0 0 0 1 1 1 1 0 4
```

为避免数据“0”的输出为“空位”，希望节点坐标按照指定格式输出，可以把命令 NWRITE,node.txt,,0 一句换为以下几句：

```
* get,nmax,node,count
* cfopen, node.txt
* do,i,1,nmax
* vwrite,i,nx(i),ny(i)
(f5.0,f10.4,f10.4)
* enddo
* cfclose
```

此时，输出的 node.txt 文件如下：

```
1. 0.0000 2.0000
2. 0.0000 1.0000
3. 1.0000 1.0000
4. 0.0000 0.0000
5. 1.0000 0.0000
6. 2.0000 0.0000
```

边界条件文件 constrain.txt、载荷信息文件 forc.txt 两文件不易由 ANSYS 中由文件输出的方式生成。比较简便的方法是通过以下命令生成边界条件信息文件

DLIST, ALL

NODE	LABEL	REAL	IMAG
1	UX	0.00000000	0.00000000
2	UX	0.00000000	0.00000000
4	UX	0.00000000	0.00000000
4	UY	0.00000000	0.00000000



5	UY	0.00000000	0.00000000
6	UY	0.00000000	0.00000000

考虑到 MATLAB 中处理的方便, 将其中的注释行去掉, UX 改为 1, UY 改为 2, 格式变为

1	1	0.00000000	0.00000000
2	1	0.00000000	0.00000000
4	1	0.00000000	0.00000000
4	2	0.00000000	0.00000000
5	2	0.00000000	0.00000000
6	2	0.00000000	0.00000000

载荷信息文件

FLIST, ALL

NODE	LABEL	REAL	IMAG
1	FX	-500.000000	0.00000000
1	FY	-1500.000000	0.00000000
3	FX	-1000.000000	0.00000000
3	FY	-1000.000000	0.00000000
6	FX	-500.000000	0.00000000
6	FY	-500.000000	0.00000000

考虑到 MATLAB 中处理的方便, 将其中的注释行去掉, FX 改为 1, FY 改为 2, 格式变为

1	1	-500.000000	0.00000000
1	2	-1500.000000	0.00000000
3	1	-1000.000000	0.00000000
3	2	-1000.000000	0.00000000
6	1	-500.000000	0.00000000
6	2	-500.000000	0.00000000

在得到节点信息文件node.txt、单元信息文件element.txt、位移边界条件文件constrain.txt、载荷状况文件force.txt后, 就可以使用自主程序FEM2D.m进行有限元分析, 然后按规定的格式输出数据文件FOR_POST.dat (格式见表6-5), 该例题具体的FOR_POST.dat文件内容见【MATLAB算例】6.2(1)。

(2) ANSYS 后处理的接口程序

若用户使用自主程序已得到有限元分析的结果, 可以利用 ANSYS 平台进行后处理显示。

对于结构问题可以显示的内容为: 节点、基于节点的物理量(如位移、应力、应变等, 由用户提供)、单元、基于单元的物理量。

具体的实现方法为: 首先由用户按所规定的格式提供数据文件 FOR_POST.dat 并放在 ANSYS 工作目录中, 然后在 ANSYS 环境下调用下面的命令流文件(USER_POST.LOG), 调用方式参见附录 B。

接口程序 USER_POST.LOG 的内容如下:

```
!-----user_post.log-----begin-----  
! 以下为 2D 问题平面三节点(四节点)单元上用户定义物理量的信息传递过程  
! 用户提供的信息数据见 FOR_POST.dat 文件  
! FOR_POST.DAT 文件的格式如下  
! PART1(共 1 行两个数, 格式 2f9.4):节点总数 INFO(1)、单元总数 INFO(2)  
! PART2(基于节点的信息, 共 INFO(1)行, 每行 7 个数, 格式 7f9.4):  
! 节点 x 坐标、节点 y 坐标、节点物理量 1(x 方向位移)、节点物理量 2(y 方向位移)、  
! 节点物理量 3(x 方向应力)、节点物理量 4(y 方向应力)、节点物理量 5(剪应力)  
! PART3(基于单元的信息, 共 INFO(2)行, 每行 7 个数, 格式 7f9.4):
```



```
! 单元节点 1、单元节点 2、单元节点 3、单元节点 4 (对于三角形单元，第 4 个节点号与第 3 个相同)、  
! 单元物理量 1 (x 应力)、单元物理量 2 (y 应力)、单元物理量 3 (z 应力)  
!  
/PREP7  
ET,1,PLANE42  
DOF,rotx      ! define new DOF at node which should be plotted  
DOF,roty  
DOF,rotz  
* dim,INFO,,2  
! above define an array INFO which refers to:INFO(1): number of node, INFO(2): number of element  
* vread,INFO(1),FOR_POST,dat  
(2f9.4)  
* dim,ND_INFO,,INFO(2),7  
! above define an array ND_INFO which refers to the information of nodes  
* vread,ND_INFO(1,1),FOR_POST,dat,,JIK,7,INFO(1),,1  
(7f9.4)  
* dim,ELE_INFO,,INFO(2),7  
! above define an array ele_info which refers to the information of elements  
* vread,ELE_INFO(1,1),FOR_POST,dat,,JIK,7,INFO(2),,INFO(1)+1  
(7f9.4)  
* do,i,1,INFO(1)  
N,i,ND_INFO(i,1),ND_INFO(i,2)  
! creat the nodes by first two columns of ND_INPO  
* enddo  
* do,i,1,INFO(2)  
E,ELE_INFO(i,1),ELE_INFO(i,2),ELE_INFO(i,3),ELE_INFO(i,4)  
! above creat elements by first four columns of ND_INPO  
* enddo  
/post1  
* do,i,1,INFO(1)      ! cyclically display nodal information  
dnsol,i,u,x,ND_INFO(i,3)  ! set ux to display ND_INFO(x,3) data  
dnsol,i,u,y,ND_INFO(i,4)  ! set uy to display ND_INFO(x,4) data  
dnsol,i,rot,x,ND_INFO(i,5) ! set rotx to display ND_INFO(x,5) data  
dnsol,i,rot,y,ND_INFO(i,6) ! set roty to display ND_INFO(x,6) data  
dnsol,i,rot,z,ND_INFO(i,7) ! set rotz to display ND_INFO(x,7) data  
* enddo  
* do,i,1,INFO(2)    ! cyclically display element information  
* do,j,1,3  
num=ELE_INFO(i,j)  
desol,i,num,s,x,ELE_INFO(i,5) ! set sx to display ELE_INFO(x,5) data  
desol,i,num,s,y,ELE_INFO(i,6) ! set sy to display ELE_INFO(x,6) data  
desol,i,num,s,z,ELE_INFO(i,7) ! set sz to display ELE_INFO(x,7) data  
* enddo  
* enddo!-----user_post.log-----end-----
```



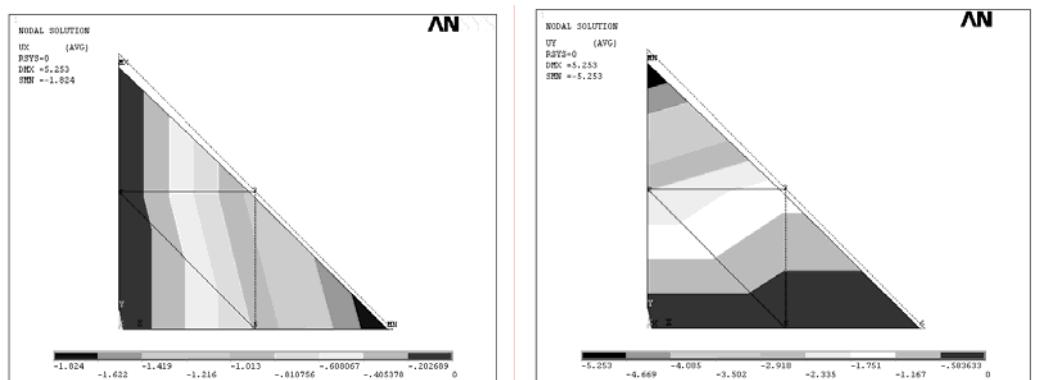
用户所提供的文件FOR_POST.dat的中的数据与接口程序USER_POST.LOG中的数据组之间的对应关系见表 6-9。

表 6-9 FOR_POST.dat 的数据与 USER_POST.LOG 的数组的对应关系

FOR_POST.dat 中数据	USER_POST.LOG 中的数组
PART1 (共 1 行, 两个数, 格式 2f9.4, 作为一维数组 INFO 的两个 数)	INFO(2): 节点总数、单元总数
PART2 (共 INFO(1)行, 每行 7 个数, 格式 7f9.4)	ND_INFO: 有 INFO(1)行, 7 列; 每行的信息为: 节点 x 坐标 节点 y 坐标 节点物理量 1(x 方向位移) 节点物理量 2(y 方向位移) 节点物理量 3(x 方向应力) 节点物理量 4(y 方向应力) 节点物理量 5(剪应力)
PART3 (共 INFO(2)行, 每行 7 个数, 格式 7f9.4) 单元为按照逆时针排序的 4 个节点编号, 对于三角形单 元, 第四列与第三列相同	ELE_INFO: 有 INFO(2)行, 7 列; 每行的信息为: 单元的节点号 1 单元的节点号 2 单元的节点号 3 单元的节点号 4 单元 x 方向应力 单元 y 方向应力 单元剪切应力

(3) ANSYS 后处理的实际利用

在 ANSYS 中所得到的本例题的后处理显示结果如图 6-5 所示。

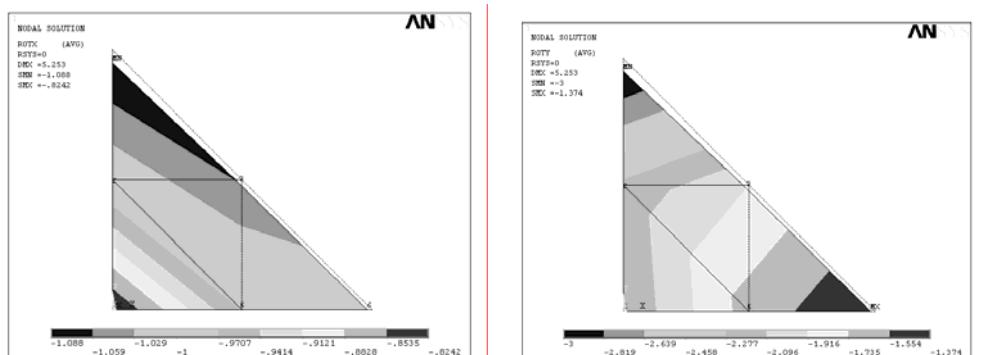


(a) x 方向的位移(10^{-3} m)

(利用 ANSYS 中的节点参量 UX)

(b) y 方向的位移(10^{-3} m)

(利用 ANSYS 中的节点参量 UY)



(c) x 方向的节点应力(10^3 Pa)

(利用 ANSYS 中的节点参量 ROTX)

(d) y 方向的节点应力(10^3 Pa)

(利用 ANSYS 中的节点参量 ROTY)

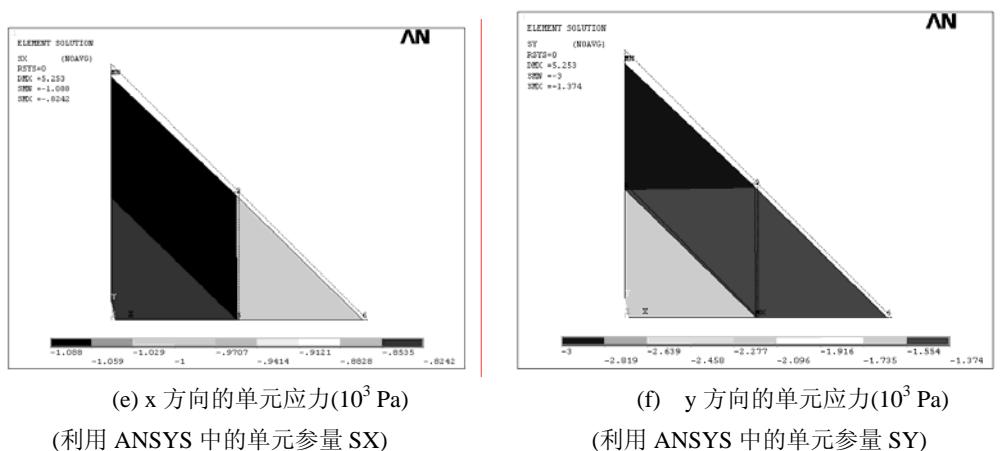


图 6-5 ANSYS 后处理所给出的各种分布图

6.4 工程应用：预应力万吨液压机机架的参数化建模与分析

6.4.1 模锻液压机的描述

重型模锻液压机是一个国家重要的基础制造装备，到目前为止，在世界范围内，美国有 4 台 5 万吨级模锻液压机；俄罗斯有 2 台 7.5 万吨级模锻液压机(见图 6-6)；法国有 1 台 6.5 万吨级模锻液压机(见图 6-7)。我国目前还没有 4 万吨级以上的大型模锻液压机，最大的仅为 3 万吨模锻液压机(见图 6-8)，制约了我国国防航空航天及其它重型设备领域的开发与研制。

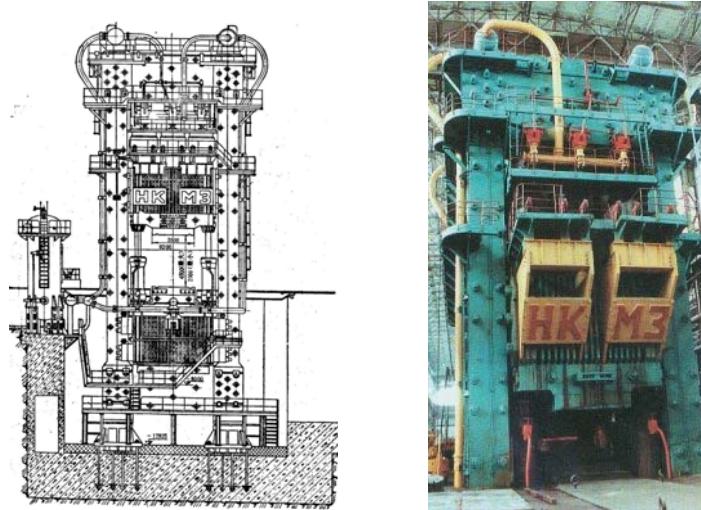


图 6-6 原苏联新克拉马多斯克 7.5 万吨(750MN)模锻水压机二台，高 34.7 米，自重 2.6 万吨；分别安装在古比雪夫（萨玛拉）和乌拉尔（上萨而钛）

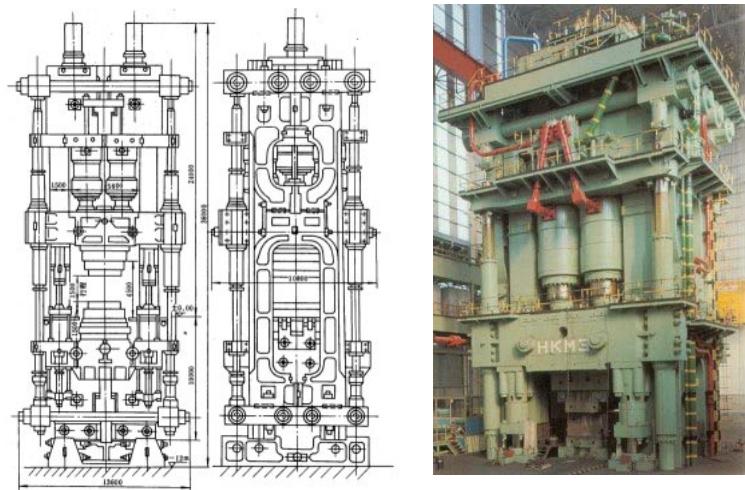


图 6-7 法国 AD 公司 6.5 万吨(650MN)多向模锻水压机

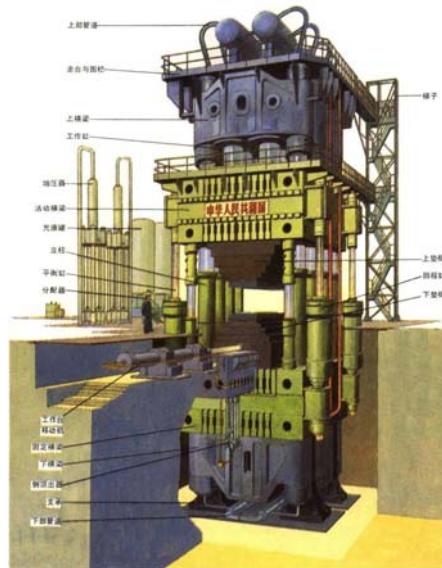


图 6-8 我国的 3 万吨模锻液压机(西南铝加工厂)

2003 年, 中国工程院组织专家对我国的大型模锻液压机进行了调研, 认为我国需要发展 8 万吨(800MN)级的模锻液压机, 它将是目前世界公称吨位最大的模锻设备, 是发展航空、航天以及涉及国防军工方面的关键、重大、核心设备, 属国家自主创新的重大装备。

清华大学积极参与了我国大型模锻液压机的设计工作, 提出了基于预应力钢丝缠绕的 8 万吨模锻液压机设计方案, 主承力结构为预应力钢丝缠绕的三牌坊结构, 中间牌坊为主牌坊, 公称承载能力为 4 万吨; 前后两个侧牌坊为副牌坊, 公称承载 2 万吨, 见图 6-9。

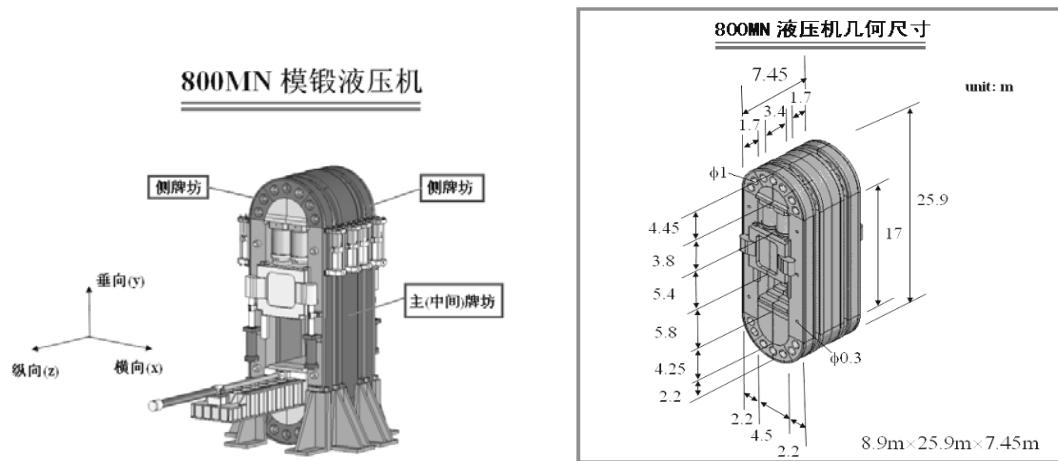


图 6-9 清华大学设计的三牌坊 8 万吨模锻液压机方案

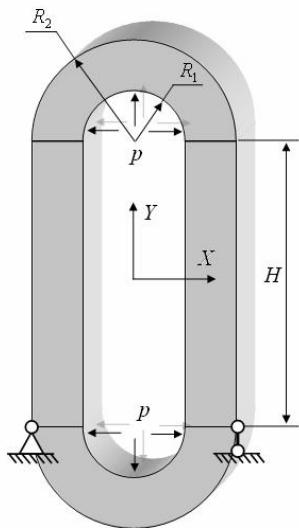


图 6-10 8 万吨模锻液压机主牌坊的工作工况

取 8 万吨模锻液压机的中间牌坊主框架(将承受 4 万吨压力)作为计算模型，作为一个应用算例，这里将该中间牌坊简化为一个二维计算模型，并进行初步的分析。参数取为 $R_1 = 2.25\text{m}$, $R_2 = 4.5\text{m}$, $H = 17\text{ m}$, $D = 3.4\text{ m}$ (厚度)，取材料参数 $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$, $\mu = 0.3$ ，这里仅考虑工作状态，即在垂直方向上承受 400MN 的压力，则在上、下拱梁的外表面上有均布压力 $p = 4 \times 10^8 / (4.5 \times 3.4)\text{ Pa}$ 。

6.4.2 8 万吨模锻液压机主牌坊的简化模型的有限元分析

【ANSYS 算例】6.4.2(1) 8 万吨模锻液压机主牌坊的分析(GUI)

解答：计算模型见图 6-10，该问题的有限元分析过程如下。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname (设置工作文件名): Press → Run → OK



(2) 设置分析特性

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Quad 4node 42 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Options... → K3: Plane Strs w/thk (带厚度的平面应力问题) → OK → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX: 2.1e11 (弹性模量), PRXY: 0.3 (泊松比) → OK → 鼠标点击该窗口右上角的“×”来关闭该窗口

(5) 定义实常数以确定平面问题的厚度

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete → Add → Type 1 PLANE42 → OK → Real Constant Set No: 1 (第 1 号实常数), THK: 3.4 (平面问题的厚度) → OK → Close

(6) 生成几何模型

生成上拱形梁

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → NPT
Keypoint number: 1, X, Y, Z Location in active CS: -4.5, 8.5 → Apply → 同样输入后 5 个特征点坐标(坐标分别为 (-2.25, 8.5), (2.25, 8.5), (4.5, 8.5), (0, 13), (0, 10.75)) → OK → Lines → Lines → Straight Line 用鼠标分别连接特征点 1, 2 和 3, 4 生成直线 → OK → Arcs → By End KPs & Rad → 用鼠标点击特征点 2, 3 → OK → 用鼠标点击特征点 6 → OK → RAD Radius of the arc: 2.25 → Apply (出现 Warning 对话框, 点 Close 关闭) → 用鼠标点击特征点 1, 4 → OK → 用鼠标点击特征点 5 → OK → RAD Radius of the arc: 4.5 → OK (出现 Warning 对话框, 点 Close 关闭) → Areas → Arbitrary → By Lines → 用鼠标点击刚生成的线 → OK

生成下拱形梁

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → NPT
Keypoint number: 7, X, Y, Z Location in active CS: -4.5, -8.5 → Apply → 同样输入后 5 个特征点坐标(坐标分别为 (-2.25, -8.5), (2.25, -8.5), (4.5, -8.5), (0, -13), (0, -10.75)) → OK → Lines → Lines → Straight Line → 用鼠标分别连接特征点 7, 8 和 9, 10 生成直线 → OK → Arcs → By End KPs & Rad → 用鼠标点击特征点 8, 9 → OK 用鼠标点击特征点 12 → OK → RAD Radius of the arc: 2.25 → Apply (出现 Warning 对话框, 点 Close 关闭) → 用鼠标点击特征点 7, 10 → OK → 用鼠标点击特征点 11 → OK → RAD Radius of the arc: 4.5 → OK (出现 Warning 对话框, 点 Close 关闭) → Areas → Arbitrary → By Lines → 用鼠标点击刚生成的线 → OK

生成两根立柱

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By 2 Corners → WP X: -4.5, WP Y: 8.5, Width: 2.25, Height: 17 → Apply → WP X: 2.25, WP Y: -8.5, Width: 2.25, Height: 17 → OK

粘结所有面

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Glue → Areas → Pick all

(7) 网格划分

ANSYS Utility Menu: PlotCtrls → Numbering → LINE: On, → OK (显示线的编号)

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → MeshTool → 位于 Size Controls 下的 Lines: Set → Element Size on Picked...: 1, 2, 5, 6 → Apply → NDIV: 4 (每一条线分为 4 段) → Apply → Element



Size on Picked...: 17, 18, 19, 20 → Apply → NDIV: 20 (每一条线分为 20 段) → Apply → Element Size on Picked...: 3, 4, 7, 8 → Apply → NDIV: 10 (每一条线分为 10 段) → OK → Shape: Mapped → Mesh → Pick all

(8) 模型施加载荷和约束

在上下拱梁内侧施加工作载荷

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Pressure → On Lines → Apply PRES on Lines: 4, 8 → OK → VALUE: 4e8/(4.5*3.4) → OK

在左立柱左下角节点加 X 和 Y 两方向的约束

ANSYS Utility Menu: Select → Entities ... → Nodes (第 1 个方框中) → By Location (第 2 个方框中) → X coordinates → -4.5 → Apply → Reselect → Y coordinates → -8.5 → OK (返回到 Structural 窗口中) → Displacement → On Nodes → Pick all → Lab2: All DOF → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Everything

在右立柱右角节点加 Y 方向的约束

ANSYS Utility Menu: Select → Entities ... → Nodes (第 1 个方框中) → By Location (第 2 个方框中) → X coordinates → 4.5 → From full → Apply → Reselect → Y coordinates → -8.5 → OK (返回到 Structural 窗口中) → Displacement → On Nodes → Pick all → Lab2: UY → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Everything

(9) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

(10) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Deformed shape... → Def shape only → OK (返回到 Plot Results) → Contour Plot → Nodal Solu → Stress → von Mises stress → OK (还可以继续观察其他结果)

(11) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

(12) 计算结果验证

按以上计算方案, 可得到最大的 Von Mises 等效应力和最大的 Y 方向应力分别为: 48.9 MPa、33.4 MPa, 等效应力与 Y 方向应力分布分别如图 6-11(a)、(b) 所示。

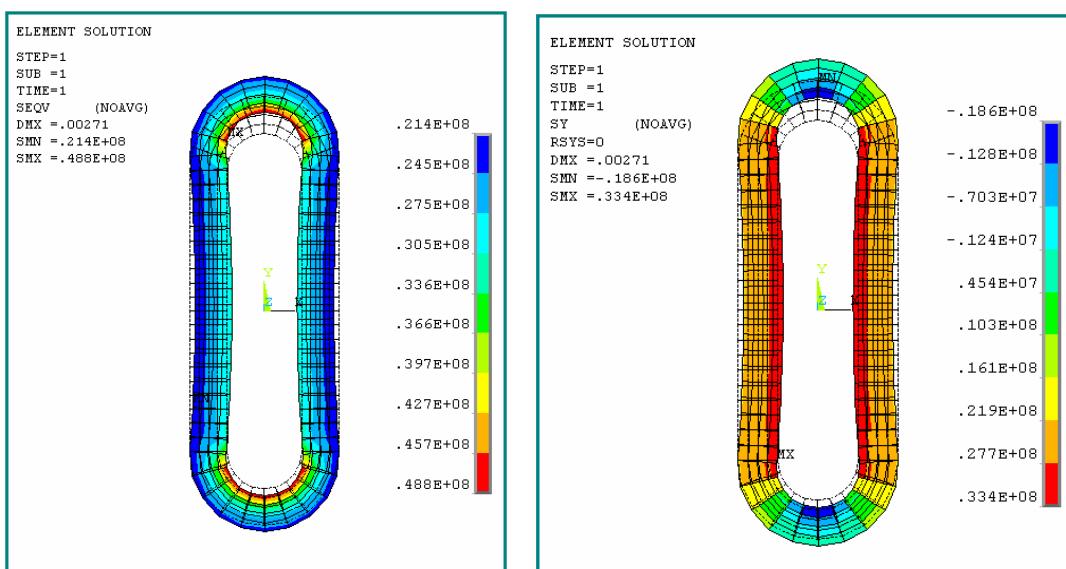


图 6-11 8 万吨模锻液压机主牌坊的计算结果



为验证计算结果，以立柱为对象，假设其受均布载荷，Y方向(垂直)应力为：400MN/($2 \times 2.25 \times 3.4$) = 26.1 MPa，可见与上右图相吻合。

可以看出，主牌坊的立柱都处于承受拉应力的状态，最大值达到 33.4 MPa，这对材料提出了较高的要求；一种改进方式就是在机架的外圈采用钢丝缠绕技术来施加预紧力，以此来抵消液压机工作时所产生的拉应力，使得机架处于完全的压力状态，这将完全改善机架的应力状态，有关的计算见本章的习题。

【ANSYS 算例】6.4.2(2) 8 万吨模锻液压机主牌坊的参数化建模与分析(命令流)

ANSYS 中的 APDL 可以实现参数化设置，基于 8 万吨模锻液压机的中间牌坊主框架(将承受 4 万吨压力)的有限元分析，给出相应的参数化设置操作过程。

解答：给出参数化建模与分析的命令流。

(1)如果希望将拱梁的半径和立柱高度设为参数（每个变量不超过 8 个字符）：

beam_R1=2.25

beam_R2=4.5

stud_H=17

(2)如果希望将牌坊的厚度设为参数：

stud_D=3.4

(3)将弹性模量和泊松比设为参数：

e_modu=2.1e11

prxy_Poi=0.3

(4)将每边的单元分段设为参数：

立柱短边：line_div1=4

立柱长边：line_div2=20

拱梁圆弧：arc_div1=10

(5)将外载值设为参数：

pressure=4e8/(4.5*3.4)

完整的命令流如下：

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]6_4_2(2) %%%%%% begin %%%%%%
!-----注：以下命令流中的符号$，表示可将多行命令流写成一行-----
/prep7                      !进入前处理
/PLOPTS,DATE,0              !设置不显示日期和时间
!=====进行参数化建模的参数设置
beam_R1=2.25                 !设置拱梁的内半径
beam_R2=4.5                  !设置拱梁的外半径
stud_H=17                     !设置立柱的高度
stud_D=3.4                    !设置牌坊的厚度
e_modu=2.1e11                 !弹性模量
prxy_Poi=0.3                 !泊松比
line_div1=6                   !立柱短边划分单元份数
line_div2=40                  !立柱长边划分单元份数
arc_div1=20                   !拱梁圆弧划分单元份数
pressure=4e8/(4.5*3.4)        !工作载荷
!=====设置单元和材料
ET,1,PLANE42                 !定义单元类型 (PLANE42)
```



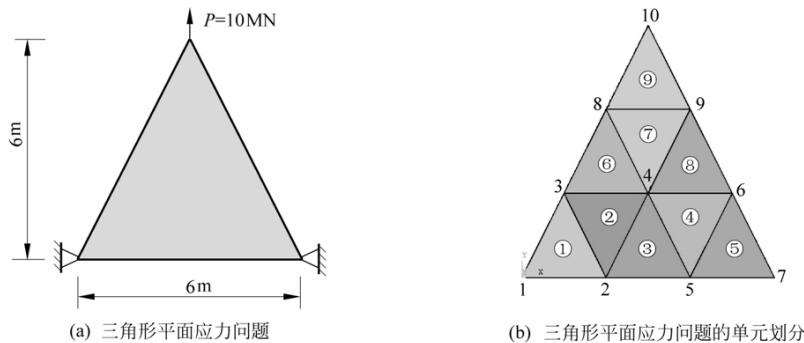
```
KEYOPT,1,3,3          !带厚度的平面应力问题
MP,EX,1,e_modu        !定义弹性模量
MP,NUXY,1,prxy_Poi   !定义泊松比
R,1,stud_D,           !设置实常数
!=====进行几何建模
!基于几何参数定义上拱梁的 6 个关键点
K,1,-1*beam_R2,0.5*stud_H,
K,2,-1*beam_R1,0.5*stud_H,
K,3,beam_R1,0.5*stud_H,
K,4,beam_R2,0.5*stud_H,
K,5,0,beam_R2+0.5*stud_H,
K,6,0,beam_R1+0.5*stud_H,
!----连接上拱梁的线，并生成上拱梁的面
L,1,2      $L,3,4          !连接两点生成直线
LARC,1,4,5,beam_R2,       !生成半径为 beam_R2 的半圆弧
LARC,2,3,6,beam_R1,       !生成半径为 beam_R1 的半圆弧
AL,1,2,3,4               !选择线生成半圆环面
!基于几何参数定义下拱梁的 6 个关键点
K,7,-1*beam_R2,-0.5*stud_H,    !定义关键点
K,8,-1*beam_R1,-0.5*stud_H,
K,9,beam_R1,-0.5*stud_H,
K,10,beam_R2,-0.5*stud_H,
K,11,0,-1*(beam_R2+0.5*stud_H),
K,12,0,-1*(beam_R1+0.5*stud_H),
!----连接下拱梁的线，并生成下拱梁的面
L,7,8      $L,9,10         !连接两点生成直线
LARC,7,10,11,beam_R2,        !生成半径为 beam_R2 的半圆弧
LARC,8,9,12,beam_R1,        !生成半径为 beam_R1 的半圆弧
AL,5,6,7,8               !选择线生成半圆环面
!生成两个立柱
BLC4,-1*beam_R2,-0.5*stud_H,beam_R1,stud_H  !指定角点位置生成矩形
BLC4,beam_R1,-0.5*stud_H,beam_R1,stud_H  !指定角点位置生成矩形
!
Aglue,all            !让所有面间相互粘接
!=====进行单元划分
!设置几何线上的单元划分几种分段
lsel,s,,,1 $lsel,a,,,2 $lsel,a,,,5 $lsel,a,,,6      !选择线
lesize,all,,,line_div1          !设置被选线上的单元分段数
lsel,s,,,17 $lsel,a,,,18 $lsel,a,,,19 $lsel,a,,,20 !选择线
lesize,all,,,line_div2          !设置被选线上的单元分段数
lsel,s,,,3 $lsel,a,,,4 $lsel,a,,,7 $lsel,a,,,8      !选择线
lesize,all,,,arc_div1          !设置被选线上的单元分段数
MSHKEY,1              !采用映射网格划分方式
MSHAPE,0,2D            !指定单元形状为四边形
AMESH,all              !对所有的面划分网格
!=====在求解模块中，施加位移约束、外力，进行求解
/solution
nsel,s,loc,x,-1*beam_R2      !选择 X 坐标为 -1*beam_R2 的节点
nsel,r,loc,y,-0.5*stud_H     !在当前选择 Y 坐标为 -0.5*stud_H 的节点
```



```
D,all,all          !对所选节点进行全约束  
!  
nse1,all          !再恢复选择所有节点  
nse1,s,loc,x,beam_R2    !选择 X 坐标为 beam_R2 的节点  
nse1,r,loc,y,-0.5*stud_H  !在当前选择 Y 坐标为 -0.5*stud_H 的节点  
D,all,UY          !对所选节点约束 Y 向位移  
SFL,4,PRES,pressure,  !在选择线 4 上加施加均布压力 4e8/(4.5*3.4)Pa  
SFL,8,PRES,pressure,  !在选择线 8 上加施加均布压力 4e8/(4.5*3.4)Pa  
/replot           !重画图形  
Allsel,all        !选择所有信息(包括所有节点, 单元, 载荷等)  
solve             !进行求解  
!=====进入一般的后处理模块  
/post1            !后处理  
/UDOC,1,CNTR,RIGH !设定云图显示图标的位置(右边的中部)  
plnsol,s,eqv,0,1   !显示等效应力云图  
!将变形图输出到 JPEG 格式的文件中  
JPGPRF,1500,300,1  !设置截图选项, 背景为白色  
/SHOW,JPEG         !设置输出文件的格式  
PLNSOL,U,SUM,0,1,0 !显示变形位移云图, 并将输出 file000.jpg 图形文件  
PLNSOL,S,EQV,0,1,0 !显示 Mises 应力云图, 并将输出 file001.jpg 图形文件,  
                     !(续)有时最后一个图形文件将在退出 ansys 后才能生成  
finish            !结束  
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]6_4_2(2) %%%%%% end %%%%%%
```

6.5 习题

6-1 如题图所示为一个不计自重的三角形平面应力问题, 弹性模量 $E=1$, 泊松比 $\mu=0.25$, 比重 $\gamma=0$, 厚度 $t=1$ 集中力 $P=10$ 。试采用 ANSYS 平台作为前后处理器, 并使用自主程序 FEM2D.m 进行计算和分析。要求单元的划分如题图 6-1(b)所示。



题图 6-1

6-2 基于 ANSYS 平台, 对习题 6-1 的算例进行分析。

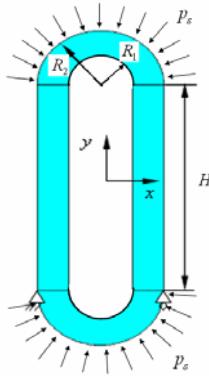
6-3 针对【ANSYS 算例】6.4.2(2), 对结构作进一步的改进与参数修改。



(1) 按照一定的合理性来改变设计参数，比较改变参数后的位移和应力结果；

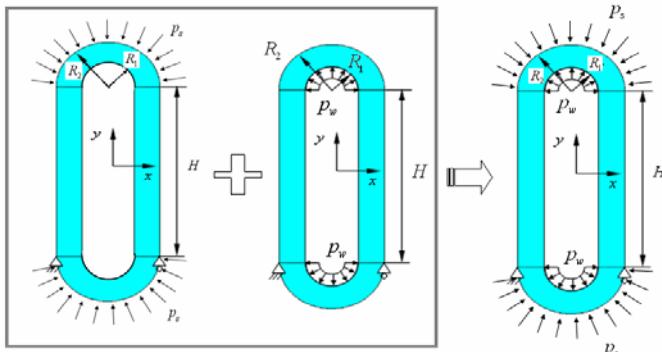
(2) 改变单元网格划分密度，并进行计算，比较各种情况下的结果。

6-4 基于【ANSYS 算例】6.4.2(2)，若对机架采用钢丝缠绕，即在上下拱梁的外表面上施加预应力，见题图 6-4，针对该情况修改相应的命令流，当预紧状态的受力为 $p_s = 19.61 \text{ MPa}$ 时（这时的预紧系数取为 1.5），分析整个机架在预紧时的受力状态。



题图 6-4

6-5 机架的预紧及工作状态见题图 6-5，基于【ANSYS 算例】6.4.2(2)，若采用钢丝缠绕，即在上下拱梁的外表面上施加 $p_s = 19.61 \text{ MPa}$ ，而工作时所施加的压力为 $p_w = 26.14 \text{ MPa}$ ，进行这两种状态的合成计算及分析。



题图 6-5

6-6 基于习题 6-5，若该液压机的机架采用的材料所允许的最大承载应力(即许用应力)为 80 MPa (按 Von Mises 等效应力来考虑)，若在钢丝预紧状态保持不变($p_s = 19.61 \text{ MPa}$)的情况下，分析该液压机所能承受的最大工作载荷。若不采用钢丝预紧方式，则该液压机所能承受的最大工作载荷又是多少。



第 7 章 结构振动的有限元分析

7.1 结构振动分析的基本原理

结构的振动分析将涉及到模态分析(modal analysis)、瞬态动力学分析(transient dynamics analysis)、简谐响应分析(harmonic response analysis)、随机谱分析(spectrum analysis)等方面，其中结构的模态分析(固有频率与振型)将是所有振动分析的基础，下面将就结构的模态分析进行阐述。

7.1.1 结构振动分析的基本方程

描述结构动力学特征的基本力学变量和方程与前面的静力问题类似，但增加了惯性力项和阻尼力项，且所有的变量都将随时间而变化。若希望了解详细内容，请查阅参考文献[]。

【基本变量】7.1.1(1) 结构振动的三大类变量

2D 情况下的三大类变量：位移 $u(\xi, t)$, $v(\xi, t)$ ，应变 $\varepsilon_x(\xi, t), \varepsilon_y(\xi, t), \gamma_{xy}(\xi, t)$ ，应力 $\sigma_x(\xi, t), \sigma_y(\xi, t), \tau_{xy}(\xi, t)$ 是坐标位置 $\xi(x, y, z)$ 和时间 t 的函数。

$\sigma_x(\xi, t), \sigma_y(\xi, t), \tau_{xy}(\xi, t)$ 是坐标位置 $\xi(x, y, z)$ 和时间 t 的函数。

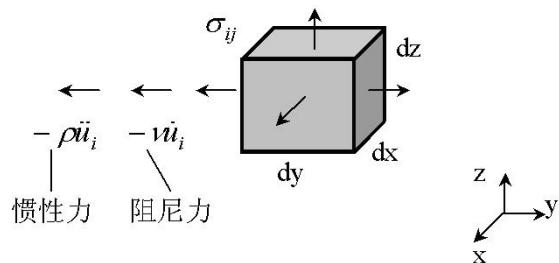


图 7-1 微体 $dxdydz$ 在动力学状态下的平衡

【基本方程】7.1.1(2) 结构振动的三大类方程及边界/初始条件

① 平衡方程(考虑惯性力和阻尼力)

微小体元 $dxdydz$ 在动力学状态下的平衡关系如图 7-1 所示，利用达朗伯原理(D'Alembert principle) 将惯性力(inertial force)等效到静力平衡方程中，再考虑阻尼力(damping force)的作用，下面考虑 2D 情况，有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial y} + \bar{b}_x(t) - \rho \ddot{u}(t) - \nu \dot{u}(t) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(t)}{\partial y} + \bar{b}_y(t) - \rho \ddot{v}(t) - \nu \dot{v}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

其中 ρ 为密度， ν 为阻尼系数， $\bar{b}_x(t), \bar{b}_y(t)$ 分别为沿 x 方向以及 y 方向所作用的体积力，

$\ddot{u}(t), \dot{u}(t)$ 分别表示位移 $u(t)$ 对时间 t 的二阶导数和一阶导数，即表示沿 x 方向的加速度和速度，沿 y 方向也是类似。

② 几何方程



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= \frac{\partial u(t)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(t) &= \frac{\partial v(t)}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(t) &= \frac{\partial v(t)}{\partial x} + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

③物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= \frac{1}{E} [\sigma_x(t) - \mu \sigma_y(t)] \\ \varepsilon_y(t) &= \frac{1}{E} [\sigma_y(t) - \mu \sigma_x(t)] \\ \gamma_{xy}(t) &= \frac{1}{G} \tau_{xy}(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

其中 E, μ, G 为弹性系数。

④边界/初始条件 BC/IC

位移边界条件 BC(u)

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \bar{u}(t) \\ v(t) &= \bar{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{on } S_u \quad (7-4)$$

力边界条件 BC(p)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(t)n_x + \tau_{xy}(t)n_y &= \bar{p}_x(t) \\ \tau_{xy}(t)n_x + \sigma_y(t)n_y &= \bar{p}_y(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{on } S_p \quad (7-5)$$

初始条件 IC(initial condition):

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, t=0) &= \bar{u}(\xi) \\ v(\xi, t=0) &= \bar{v}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}(\xi, t=0) &= \dot{\bar{u}}(\xi) \\ \dot{v}(\xi, t=0) &= \dot{\bar{v}}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

以上方程中的 $\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ 为在位移边界 S_u 上给定的位移值, $\bar{p}_x(t), \bar{p}_y(t)$ 为在力边界 S_p 上给

定的分布外载, $\bar{u}(\xi), \bar{v}(\xi), \dot{\bar{u}}(\xi), \dot{\bar{v}}(\xi)$ 为初始时刻时结构的位移和速度状态。

【求解原理】7.1.1(3) 结构振动求解的虚功原理

基于上述基本方程, 可以写出平衡方程及力边界条件的等效积分形式



$$\begin{aligned}\delta\Pi = & -\int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_x(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial y} + \bar{b}_x(t) - \rho \ddot{u}(t) - v \dot{u}(t) \right] \delta u \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial \tau_{xy}(t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(t)}{\partial y} + \bar{b}_y(t) - \rho \ddot{v}(t) - v \dot{v}(t) \right] \delta v \right\} d\Omega \\ & + \int_{S_p} \left\{ [\sigma_x(t)n_x + \tau_{xy}(t)n_y - \bar{p}_x(t)] \delta u \right. \\ & \left. + [\tau_{xy}(t)n_x + \sigma_y(t)n_y - \bar{p}_y(t)] \delta v \right\} dA = 0\end{aligned}\quad (7-8)$$

对上述方程右端的第一项进行部分积分(应用 Gauss-Green 公式), 经整理后, 有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \rho \ddot{u} \delta u + \rho \ddot{v} \delta v + v \dot{u} \delta u + v \dot{v} \delta v] d\Omega \\ - \left[\int_{\Omega} (\bar{b}_x \delta u + \bar{b}_y \delta v) d\Omega + \int_{S_p} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v) dA \right] = 0\end{aligned}\quad (7-9)$$

这就是动力学问题的虚位移方程。

7.1.2 结构振动的有限元分析列式

用于动力学问题分析的单元构造与前面静力问题时相同, 不同之处是所有基于节点的基本力学变量也都是时间的函数。下面给出用于动力学问题单元构造的基本表达式。

【单元表征】7.1.2(1) 结构振动分析的单元构造的基本表达式

单元的节点位移列阵为

$$\mathbf{q}_t^e(t) = [u_1(t) \quad v_1(t) \quad w_1(t) \quad \dots \quad u_n(t) \quad v_n(t) \quad w_n(t)]^T \quad (7-10)$$

单元内的位移插值函数为

$$\mathbf{u}^e(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{q}_t^e(t) \quad (7-11)$$

其中 $\mathbf{N}(\xi)$ 为单元的形状函数矩阵, 与相对应的静力问题单元的形状函数矩阵完全相同, ξ 为单元中的几何位置坐标。

基于上面的几何方程和物理方程以及式(7-11), 将相关的物理量(应变和应力)表达为节点位移的关系, 有

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi, t) = [\partial] \mathbf{u}^e = [\partial] \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}_t^e(t) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{q}_t^e(t) \\ \boldsymbol{\sigma}^e(\xi, t) = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{q}_t^e(t) = \mathbf{S}(\xi) \cdot \mathbf{q}_t^e(t) \\ \dot{\mathbf{u}}^e(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \dot{\mathbf{q}}_t^e(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}^e(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_t^e(t) \end{array} \right\} \quad (7-12)$$

将关系(7-12)代入以上虚功方程(7-9)中, 有

$$\delta\Pi = \left[\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}_t^e(t) + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{q}}_t^e(t) + \mathbf{K}^e \mathbf{q}_t^e(t) - \mathbf{P}_t^e(t) \right]^T \cdot \delta \mathbf{q}_t^e(t) = 0 \quad (7-13)$$

由于节点位移的变分增量 $\delta \mathbf{q}_t^e(t)$ 具有任意性, 消去该项后, 有



$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}_t^e(t) + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{q}}_t^e(t) + \mathbf{K}^e \mathbf{q}_t^e(t) = \mathbf{P}_t^e(t)$$

将其简写为

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}_t^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{q}}_t^e + \mathbf{K}^e \mathbf{q}_t^e = \mathbf{P}_t^e \quad (7-14)$$

其中

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (7-15)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{\Omega^e} \nu \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (7-16)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (7-17)$$

$$\mathbf{P}_t^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \quad (7-18)$$

\mathbf{M}^e 叫做单元的质量矩阵(mass matrix); 同样, 将单元的各个矩阵进行组装, 可形成系统的整体有限元方程, 即

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{K} \mathbf{q}_t = \mathbf{P}_t \quad (7-19)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}_t = \sum_{e=1}^n \mathbf{q}_t^e, \mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^n \mathbf{P}_t^e \\ \mathbf{M} = \sum_{e=1}^n \mathbf{M}^e, \mathbf{C} = \sum_{e=1}^n \mathbf{C}^e, \mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}^e \end{array} \right\} \quad (7-20)$$

n 为单元的数量。

下面就几种情况进行讨论。

①静力学情形(static case)

由于与时间无关, 则方程(7-19)退化为

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (7-21)$$

这就是结构静力分析的整体刚度方程。

②无阻尼情形(undamped system)

此时 $\nu = 0$, 则方程(7-19)退化为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{K} \mathbf{q}_t = \mathbf{P}_t \quad (7-22)$$

③无阻尼自由振动情形(free vibration of undamped system)

则 $\nu = 0$, $\mathbf{P}_t = 0$, 方程(7-19)退化为



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{K}\mathbf{q}_t = 0 \quad (7-23)$$

其振动形式叫做自由振动(free vibration)，该方程解的形式为

$$\mathbf{q}_t = \hat{\mathbf{q}} \cdot e^{i\omega t} \quad (7-24)$$

这是简谐振动的形式，其中 ω 为常数；将其代入(7-23)中，有

$$(-\omega^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{q}}) e^{i\omega t} = 0 \quad (7-25)$$

消去 $e^{i\omega t}$ 后，有

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (7-26)$$

该方程有非零解的条件是

$$|(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})| = 0 \quad (7-27)$$

这就是特征方程(eigen equation)， ω 为自然圆频率(natural circular frequency) (rad/sec)，也叫圆频率，对应的频率为 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz)。求得自然圆频率 ω 后，再将其代入方程(7-26)中，可求出对应的特征向量(eigen vector) $\hat{\mathbf{q}}$ ，这就是对应于振动频率 ω 的振型(mode)。

7.1.3 常用单元的质量矩阵

结构振动分析将涉及到结构的刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵，由(7-17)式可知，动力学问题中的刚度矩阵与静力问题的刚度矩阵完全相同，而质量矩阵则通过(7-15)式来进行计算，对于一种单元，只要得到它的形状函数矩阵，就可以容易地计算出质量矩阵；由阻尼矩阵的计算公式(7-16)可知，它的计算与质量矩阵相同，只是有关的系数不同而已。下面给出常见单元的质量矩阵。

【单元表征】7.1.3(1) 杆单元的质量矩阵

质量矩阵分为两种，即一致质量矩阵和集中质量矩阵。

(1) 一致质量矩阵

对于二节点杆单元，在局部坐标内有节点位移列阵和形状函数矩阵

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \ u_2]^T$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{l}) & \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

由式(7-15)，可以计算出相应的质量矩阵为

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 \end{matrix} \quad (7-28)$$



其中 ρ 为材料密度, A 为杆的横截面积, l 为杆单元的长度。所谓一致质量矩阵 (consistent mass matrix) 是指推导质量矩阵时与推导刚度矩阵时所使用的形状函数矩阵相“一致”。

(2) 集中质量矩阵

将该二节点杆单元的质量直接对半平分, 集中到二个节点上, 就可以得到集中质量矩阵 (lumped mass matrix) 为

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \quad (7-29)$$

可以看出, 集中质量矩阵的系数都集中在矩阵的对角线上, 也就是说对应于各个自由度的质量系数相互独立, 相互之间无耦合; 而一致质量矩阵的系数则有相互耦合。

【单元表征】7.1.3(2) 梁单元的质量矩阵

(1) 一致质量矩阵

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \quad (7-30)$$

其中 ρ 为材料密度, A 为梁单元的横截面积, l 为梁单元的长度。

(2) 集中质量矩阵

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \quad (7-31)$$

【单元表征】7.1.3(3) 平面三节点三角形单元的质量矩阵

(1) 一致质量矩阵



$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho At}{12} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (7-32)$$

其中 ρ 为材料密度, A 为单元的面积, t 为单元的厚度。

(2) 集中质量矩阵

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Al}{3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (7-33)$$

【单元表征】7.1.3(4) 平面四节点矩形单元的质量矩阵

(1) 一致质量矩阵

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho At}{36} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \quad (7-34)$$

其中 ρ 为材料密度, A 为单元的面积, t 为单元的厚度。

(2) 集中质量矩阵



$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A t}{4} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow v_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow u_3 \\ \leftarrow v_3 \\ \leftarrow u_4 \\ \leftarrow v_4 \end{array} \quad (7-35)$$

7.2 汽车悬挂系统的振动模态分析

【ANSYS 算例】7.2(1) 汽车悬挂系统的振动模态分析(GUI)

一个简单的汽车系统如图 7-2 所示，若将其处理成平面系统，可以由车身(梁)、承重、前后支撑组成，汽车悬架振动系统可以简化地看作由以下两个主要运动组成：运动体系在垂直方向的线性运动以及车身质量块的旋转运动，对该系统进行模态分析。模型中的各项参数如表 7-1 所示，为与文献结果进行比较，这里采用了英制单位。

表 7-1 汽车悬架振动模型的参数

材料参数	几何参数
弹性模量 $E = 4 \times 10^9$ psf 加速度 $g = 32.2$ ft/sec ²	质心的前距离 $l_1 = 4.5$ ft
车身重量 $W = 3220$ lb 车身质量 $m = W/g = 100$ lb·sec ² /ft	质心的后距离 $l_2 = 5.5$ ft
前悬架支撑弹簧系数 $k_1 = 2400$ lb/ft 后悬架支撑弹簧系数 $k_2 = 2600$ lb/ft	质量分布的回转半径 $r=4$ ft

解答：计算模型如图 7-2(b) 所示。

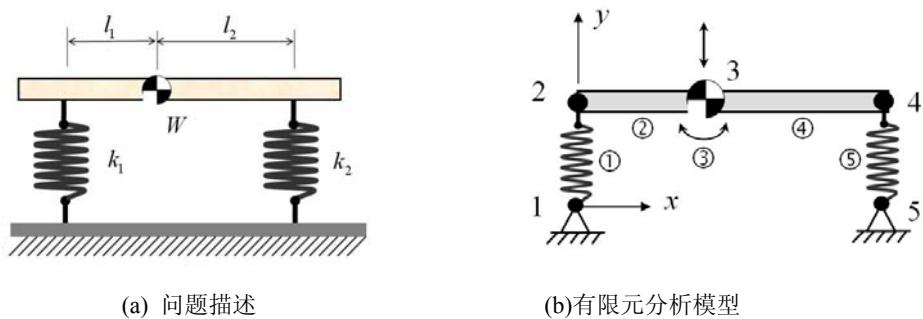


图 7-2 汽车悬架振动系统模型

这里将车身简化为梁，仅起到连接作用，这里设定不考虑梁的质量对振动性能的影响，



因此需将密度设定为零即可，但在建模时需要输入梁的各种参数(包括材料以及几何参数)，实际上，可以将车身梁的弹性效果通过质量块的垂直运动及旋转运动来等效，质量块的转动惯性矩为 $I_{zz} = m \cdot r^2$ ， r 取为 4ft，经计算为 $I_{zz} = 1600 \text{ lb}\cdot\text{sec}^2\cdot\text{ft}$ 。可以看出所采用的平面简化模型仅有两个自由度(梁单元由于取密度为零，将仅起连接作用)。

采用 2D 的计算模型，使用梁单元 2-D Elastic Beam Elements (BEAM3) 来等效车身，使用弹簧单元 Spring-Damper Elements (COMBIN14) 来等效车体的前后悬架支撑，使用质量块单元 Structural Mass Element (MASS21) 来等效车身质量。

建模的要点：

- ①首先定义分析类型并选取三种单元，输入实常数；
- ②建立对应几何模型，并赋予各单元类型对应各参数值
- ③在后处理中，用命令<*GET>来提取其计算分析结果(频率)。
- ④通过命令<*GET>来提取模态的频率值；

最后将计算结果与参考文献所给出的解析结果进行比较，见表 7-2。

表 7-2 ANSYS 简化模型与文献的简化模型解析结果的比较

模态频率及单位	Reference 7.2(1)的结果	ANSYS 结果	两种结果之比
f_1, Hz	1.0981	1.0981	1.000
f_2, Hz	1.4406	1.4406	1.000

Reference 7.2(1): . Thomson W T. Vibration Theory and Applications, 2nd Printing, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1965, 181

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname: Vehicle (设置工作文件名): → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Beam: 2d elastic 3 → Apply (返回到 Library of Element 窗口) → Combination: Spring-damper 14 → Apply (返回到 Library of Element 窗口) → Structural Mass: 3D mass 21 → OK (返回到 Element Types 窗口) → 选择 Type 2 COMBIN14 单击 Options... → K3 设定为 2-D longitudinal → OK (返回到 Element Types 窗口) → 选择 Type 3 MASS21 单击 Options... → K3 设定为 2-D w rot inert → OK → Close

(4) 定义实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete... → Add... → 选择 Type 2 COMBIN14 → OK → Real Constants Set No.: 1 (第 1 号实常数), K:2400 (前悬架支撑的弹簧系数 k1 = 2400) → Ok (返回 Real constants 窗口) → Add... → 选择 Type 1 BEAM3 → OK → Real Constants Set No.: 2 (第 2 号实常数) AREA:10, IZZ:10, HEIGHT:10 (梁单元参数，可以为任意值) → Ok → Add... → 选择 Type 3 MASS21 → OK → Real Constants Set No.: 3 (第 3 号实常数), MASS:100, IZZ:1600 (质点的实常数) → Ok → Add... → 选择 Type 1 BEAM3 → OK → Real Constants Set No.: 4 (第 4 号实常数) AREA:10, IZZ:10, HEIGHT:10 (梁单元参数，可以为任意值) → Ok → Add... → 选择 Type 2 COMBIN14 → OK → Real Constants Set No.: 5 (第 5 号实常数), K:2600 (后悬架支撑的弹簧系数 k2 =



2600) → Close (关闭 Real Constants 窗口)

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Elastic → Linear → Isotropic → input EX: 4E9, PRXY:0.3(定义泊松比及弹性模量) → OK, Density (定义材料密度) → DENS:0, →OK → 关闭材料定义窗口

(6) 构造车体模型

生成节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0, 0, 0 Apply → 同样输入其余 4 个节点坐标 (最左端为起始点, 坐标分别为 0, 1, 0、4.5, 1, 0、10, 1, 0、10, 0, 0) → OK

生成元素并分配材料类型、实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → Type 2 COMBIN14 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 1、2 号节点, 生成第一个单元 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → MAT,1, TYPE,1 Beam3, REAL,2 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 2、3 号节点, 生成第二个单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → Type 3 MASS21 REAL,3 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 3 号节点, 生成第三个单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → Type 1 BEAM3 REAL,4 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 3、4 号节点, 生成第四个单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → Type 2 COMBIN14 REAL,5 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 4、5 号节点, 生成第五个单元

(7) 模型加约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → 选取 1、5 号节点 → OK → 选择 Lab2: UX, UY(施加 X、Y 方向的位移约束) → Apply → 选取 3 号节点 → OK → 选择 Lab2: UX(施加 X 方向的位移约束) → OK

(8) 计算分析

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Modal → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Options → [MODOPT] Block Lanczos, No. of modes to extract: 5 Expand mode shapes: Yes, Number of modes to expand: 0 → OK → 弹出 Block Lanczos Method 窗口中: Start Freq: 0.001, End Freq: 100 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

(9) 计算结果

ANSYS Main Menu: General Postproc → List Results → Detailed summary (读取模态频率)

(10) 退出系统



ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】7.2(2) 汽车悬挂系统的振动模态分析(命令流)

针对【ANSYS 算例】7.2(1)的 GUI 操作，提供完整的命令流。

解答：给出的命令流如下。

```
!%%%%% [ANSYS 算例]7_2(2) %%%%% begin %%%%%%
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,MODAL   !设定为模态分析
MP,EX,1,4E9     !定义 1 号材料的弹性模量
MP,DENS,1,0     !定义 1 号材料的密度，设置为零，则材料对振动不起作用
MP,PRXY,1,0.3   !设定 1 号材料的泊松比
ET,1,BEAM3      !选取单元类型 1(梁)
ET,2,COMBIN14,,,2 !选取单元类型 2(弹簧)
ET,3,MASS21,,,3 !选取单元类型 3(质量块)，设置 KEYOPT(3)=3
R,1,2400        !设定实常数 No.1，前悬架支撑的弹簧系数 k1 = 2400
R,2,10,10,10    !设定实常数 No.2，梁单元所需要的参数(这里可以设定为一个任意值)
R,3,100,1600    !设定实常数 No.3，MASS=100, IZZ=1600，当 KEYOPT(3)=3 时
R,4,10,10,10    !设定实常数 No.4，梁参数(任意)
R,5,2600        !设定实常数 No.5，后悬架支撑的弹簧系数 k2= 2600
N,1             !生成节点 1
N,2,,1          !生成节点 2
N,3,4,5,1       !生成节点 3
N,4,10,1        !生成节点 4
N,5,10          !生成节点 5
TYPE,2          !设定弹簧单元
E,1,2            !生成前悬架支撑(弹簧单元)
MAT,1            !设定为材料 No.1
TYPE,1          !设定单元 No.1，即梁单元
REAL,2          !设定实常数 No.2
E,2,3            !生成前车体(梁单元)
TYPE,3          !设定质量块单元
REAL,3          !设定实常数 No.3
E,3              !生成质量块单元
TYPE,1          !设定梁单元
REAL,4          !设定实常数 No.4
E,3,4            !生成后车体(梁单元)
TYPE,2          !设定弹簧单元
REAL,5          !设定实常数 No.5
E,4,5            !生成后悬架支撑(弹簧单元)
D,1,UX,,,5,4,UY !对节点 1 以及节点 5 施加 UX 以及 UY 固定的位移约束
D,3,UX          !对节点 3 施加 UX 固定的位移约束
FINISH          !结束前处理
```



```
/SOLU          !进入求解模块
MODOPT,LANB,5,0.001,100 !设定 LANB 方法求解, 可求 5 阶, 频率范围 0.001 至 100
SOLVE          !求解
*GET,FREQ1,MODE,1,FREQ !提取第 1 阶模态共振频率, 并赋值给参数 FREQ1
*GET,FREQ2,MODE,2,FREQ !提取第 2 阶模态共振频率, 并赋值给参数 FREQ2
*STATUS         !列出所有参数的内容
!%%%%%%%% [ANSYS 算例]7_2(2) %%%%%%% end %%%%%%
```

7.3 带有张拉的绳索的振动模态分析

【ANSYS 算例】7.3(1) 带有张拉的绳索的振动模态分析(GUI)

一条每单位长度质量为 ρ 的悬索两端固定, 由于受拉具有初始应变 ε_0 , 试确定此时悬索的应力 σ 以及所受的拉力 F , 并计算带有张拉的悬索的前三阶自由振动频率 f_i , $i=1,2,3$; 对该系统进行模态分析。模型中的各项参数如表 7-3 所示, 为与文献结果进行比较, 这里采用了英制单位。

表 7-3 带有张拉的绳索模型的参数

材料参数	几何参数	载荷
弹性模量 $E = 30 \times 10^6$ psi	绳索长度 $l = 100$ in	初始应变 $\varepsilon_0 = 0.00543228$
密度 $\rho = 0.00073$ lb-sec ² /in ⁴	绳索截面积 $A = 0.00306796$ in ²	

解答: 计算模型如图 7-3 所示。

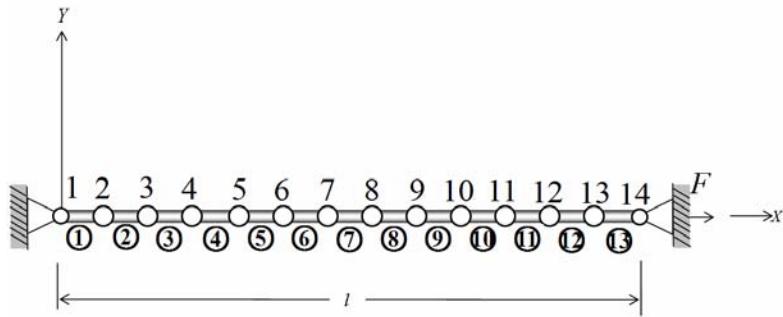


图 7-3 带有张拉的绳索的计算模型

这里选取足够数量的单元以确保能够充分体现动态分析的特征; 首先进行静力分析, 采用 3D 的单向杆单元(Tension-only or Compression-only Spar Elements: LINK10)。

建模的要点:

- ① 定义分析类型, 选取单元、实常数和材料参数;
- ② 依据算例定义节点和单元, 设置输出选项和位移约束;
- ③ 采用初应变来施加张力,
- ④ 为了在后续的模态分析中考虑预紧的初始张力, 需在静力分析与模态分析过程中, 同时确



保预应力效应打开< PSTRES,ON >

- ⑤求解预应力引起的应力状态；
- ⑥提取计算结果，进行模态分析；
- ⑦用命令<*GET>提取结果，对于一些线型单元(杆、梁、板)，需要采用单元列表<ETABLE>来提取应力。

最后将计算结果与参考文献所给出的解析结果进行比较，见表 7-4。

表 7-4 ANSYS 模型与文献的解析结果的比较

工况	结果的物理量及单位	Reference 7.3(1)的结果	ANSYS 结果	两种结果之比
静态	F, lb	500.	500.	1.000
	Stress, psi	162,974.	162,974.	1.000
模态	f1 , Hz	74.708	75.094	1.005
	f2 , Hz	149.42	151.29	1.012
	f3 , Hz	224.12	229.68	1.025

Reference 7.3(1): . Thomson W T. Vibration Theory and Applications, 2nd Printing, NJ: Prentice-Hall, Inc , 1965, 264

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname (设置工作文件名 String) : String → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Link : 3D Bilinear 10 → Ok (返回到 Element Types 窗口) → 选择 Type 1 LINK10 单击 Options... → K3: Tension only → OK → Close

(4) 定义实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add/Edit/Delete... → Add... → 选择 Type 1 LINK10 → OK → Real Constants Set No. : 1 (第 1 号实常数), AREA: 306796E-8 (绳索截面积), ISTRN: 543248E-8 → Ok → Close (关闭 Real Constants 窗口)

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX: 30e6 → Note: 确定 → OK, Density (定义材料密度) → 输入 DENS:73e-5, → OK → 关闭材料定义窗口

(6) 构造悬索模型

生成节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0, 0, 0 Apply → Node number: 14, X, Y, Z Location in active CS: 100, 0, 0 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → Fill between Nds 点击节点 1、14 → OK → OK



生成元素

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 1、2 号节点，生成第一个单元

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Copy → Elements → Auto Numbered → 选择第一个元素 → OK → Total number of copies: 13 → OK

(7) 模型加约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement On Nodes → Pick All → OK → Lab2: All DOF(全约束) → OK

(8) 求解预应力引起的应力状态

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Static → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → Sol'n controls 在 Basic 标签下选中 Calculate prestress effects → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK → Yes

(9) 存储应力计算数据

ANSYS Main Menu: General Postproc → Element Table → Define Table → Add... → Lab: STRS, Results data item: By sequence number, 右侧框中选择 LS, 下面框中输入 LS, 1 → OK → Close

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data → 分别选择 Result data, Elem table data → OK → Name of parameter to be defined: STRSS; Element number N: 13 → OK

ANSYS Main Menu: TimeHist Postpro → Define Variables → Add → 选择 Reaction forces → List of items: 1 → OK → Item, Comp Data item: Struct force FX → OK → close

ANSYS Main Menu: TimeHist Postpro → Store Data

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data → 分别选择 Result data, Time-hist var's → OK → Name of parameter to be defined: FORCE; Variable number N: 2, Data to be retrieved: Maximum val Vmax → OK

(10) 模态分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Modal → OK → Close(warning)

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → Analysis Options → [MODOPT] Block Lanczos, No. of modes to extract: 3 Expand mode shapes: Yes, No. of modes to expand: 3 [PSTRES]: Yes → OK → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → delete → Structural → Displacement → On Nodes → 选择 2 至 13 节点 → OK → 选择 UX → OK 删除从 2 号节点到 13 号节点上的 UX 约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → delete → Structural → Displacement → On Nodes → 选择 2 至 13 节点 → OK → 选择 UY → OK 删除从 2 号节点到 13 号节点上的 UY 约束

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK → Yes

(11) 存储模态计算数据并显示全过程计算结果

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data → 分别选择 Result data, Modal results → OK → Name of parameter to be defined: FREQ1; Variable number N: 1, Data to be retrieved: Frequency FREQ → OK

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data → 分别选择 Result data, Modal results → OK → Name of parameter to be defined: FREQ2; Variable number N: 2, Data to be retrieved: Frequency FREQ → OK

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data → 分别选择 Result data, Modal results → OK → Name of parameter to be defined: FREQ3; Variable number N: 3, Data to be retrieved: Frequency FREQ → OK

ANSYS Utility Menu: List → Status → Parameters → All Parameters

**(12) 退出系统**

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】7.3(2) 带有张拉的绳索的振动模态分析(命令流)

针对【ANSYS 算例】7.3(1)的 GUI 操作，提供完整的命令流。

解答：给出的命令流如下。

```
!%%%%% [ANSYS 算例]7_3(2) %%%%%%% begin %%%%%%
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,STATIC   !设置分析类型为静力结构分析
PSTRES,ON       !用于后面的模态分析中考虑预应力(该开关不影响静力分析)
ET,1,LINK10     !选取单元类型 1(单向杆单元)
KEYOPT,1,3,0     !设置仅承受拉应力，KEYOPT(3)=0
R,1,306796E-8,543248E-8   !设置实常数，包括绳索截面积(306796E-8)，初始应变(543248E-8)
MP,EX,1,30E6     !定义材料的弹性模量(1 号材料)
MP,DENS,1,73E-5   !定义材料的密度(1 号材料)
N,1             ! 定义第 1 号节点
N,14,100        ! 定义第 14 号节点
FILL            ! 均分填满第 2 号至第 13 号节点
E,1,2           !由节点 1 及节点 2 生成单元
EGEN,13,1,1      !依序复制生成 13 个单元
D,ALL,ALL        ! 对所有节点施加固定约束
FINISH           ! 前处理结束
/SOLU            ! 进入求解模块，求解预应力引起的应力状态
SOLVE           ! 求解
FINISH           ! 退出求解模块
/POST1           ! 进入一般的后处理
ETABLE,STRS,LS,1 !针对 LINK10 单元,建立单元列表 STRS,通过 LS 及特征号 1 来获得单元的轴向应力
*GET,STRSS,ELEM,13,ETAB,STRS   !针对单元列表 STRS, 提取 13 号单元的应力
FINISH           ! 后处理结束
/POST26          ! 进入时间历程后处理，处理支反力
RFORCE,2,1,F,X    !将 1 号节点上的 x 方向支反力提取，并存储到 2 号变量中
STORE            ! 存储
*GET,FORCE,VARI,2,EXTREM,VMAX !将 2 号变量的最大值赋给参数 FORCE
/SOLU            ! 再次进入求解模块，模态分析
ANTYPE,MODAL     ! 模态分析
MODOPT,SUBSP,3   ! 选择子空间迭代法，求 3 阶模态
MXPAND,3         ! 设定 3 阶模态扩展
PSTRES,ON       ! 用于在模态分析中考虑预应力(还需在前面的静力分析中也同时打开)
DDELE,2,UX,13    !删除从 2 号节点到 13 号节点上的 UX 约束
DDELE,2,UY,13    !删除从 2 号节点到 13 号节点上的 UY 约束
SOLVE           !求解
*GET,FREQ1,MODE,1,FREQ  ! 提取第 1 阶模态共振频率，并赋值给参数 FREQ1
*GET,FREQ2,MODE,2,FREQ  ! 提取第 2 阶模态共振频率，并赋值给参数 FREQ2
*GET,FREQ3,MODE,3,FREQ  ! 提取第 3 阶模态共振频率，并赋值给参数 FREQ3
*STATUS          !列出所有参数的实际内容
```

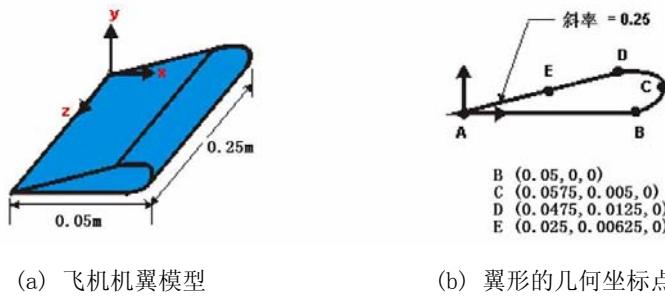


```
!%%%%% [ANSYS 算例]7_3(2) %%%%%% end %%%%%%
```

7.4 机翼模型的振动模态分析

【ANSYS 算例】7.4(1) 机翼模型的振动模态分析(GUI)

一个简化的飞机机翼模型如图 7-4 所示，该机翼沿延翼方向为等厚度。有关的几何尺寸见图 7-4，机翼材料的常数为：弹性模量 $E = 0.26\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ ，密度 $\rho = 886\text{kg/m}^3$ ；对该结构进行振动模态的分析。



(a) 飞机机翼模型

(b) 翼形的几何坐标点

图 7-4 振动模态分析计算模型示意图

解答：这里体单元 SOLID45 进行建模，并计算机翼模型的振动模态。

建模的要点：

- ①首先根据机翼横截面的关键点，采用连接直线以及样条函数<BSPLIN>进行连接以形成一个由封闭线围成的面；
- ②在生成的面上采用自由网格划分生成面单元(PLANE42)；
- ③设置体单元 SOLID45，采用<EXTOPT><VEXT>进行 z 方向的多段扩展；
- ④设置模态分析<ANTYPE,2>，采用 Lanczos 方法进行求解<MODOPT,LANB>
- ⑤在后处理中，通过<SET>调出相关阶次的模态；
- ⑥显示变形后的结构图并进行动态演示<PLDI><ANMODE>。

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS(设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): Modal→Run

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → Add... → Structural solid: Quad 4node 42 → Apply → solid → Brick 8node 45 → OK → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic: EX:0.26E9(弹性模量), PRXY:0.3(泊松比) → OK → Density:886 → OK →



Material → Exit

(5) 生成几何模型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → X,Y,Z location:0,0,0 → Apply → X,Y,Z location:0.05,0,0 → Apply → X,Y,Z location:0.0575,0,005,0 → Apply → X,Y,Z location:0.0475,0,0125,0 → Apply → X,Y,Z location:0.025,0,00625,0 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Lines → Straight Line → 依次选择关键点 1, 2, 5, 1 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Splines → With Options → Spline thru KPs → 依次选择关键点 2, 3, 4, 5 → OK → 输入以下数据:XV1:-0.025,YV1:0,ZV1:0 → 输入以下数据:XV6:-0.025,YV6:-0.00625,ZV6:0 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → By Lines → 选择所有 3 条线 → OK

(6) 网格划分

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → global → Set → Element edge length:0.00625 → OK → Mesh → Pick All → Close → Close(点击关闭 Mesh Tool 工具栏)

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Operate → Extrude → Elem Ext Opts → Element type number:2 SOLID45 → The No. of element divisions:10 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Operate → Extrude → Areas → By XYZ Offset → Pick All → Offsets for extrusion in the Z direction:0,0,0.25 → OK → Close

(7) 模型施加载荷

ANSYS Utility Menu: Select → Entities → Elements → By Attributes → Elem type num → The element type number:1 → Unselect → Apply

(8) 模型施加约束

ANSYS Utility Menu: Select → Entities → Nodes → By Location → Z coordinates → The Z coordinate location:0 → From Full → Apply

ANSYS Main Menu → Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → Pick All → All DOF → OK → By Num/Pick → Select All → 点击 Cancel(关闭窗口)

(9) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Modal → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → Analysis Options → 点击 Block Lanczos → No. of modes to extract: 5 → No. of modes to expand: 5 → OK → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → File → Close → OK → Yes → Yes → Close(Solution is done!).

(10) 结果显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Results Summary → Close(各阶模态的频率见表 7-5)。

ANSYS Main Menu: General Postproc → Read Results → First Set

ANSYS Utility Menu: Plot Ctrls → Animate → Mode Shape → OK → 在 Animation Controller 中做相应设置(这里不详细说明), 然后关闭当前窗口 → Close

ANSYS Main Menu: General Postproc → Read Results → Next Set

ANSYS Utility Menu: Plot Ctrls → Animate → Mode Shape → OK(各阶模态见图 7-5)。

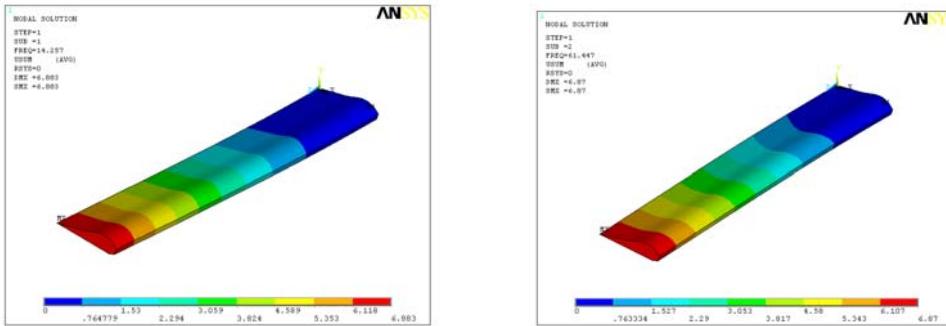


(11) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

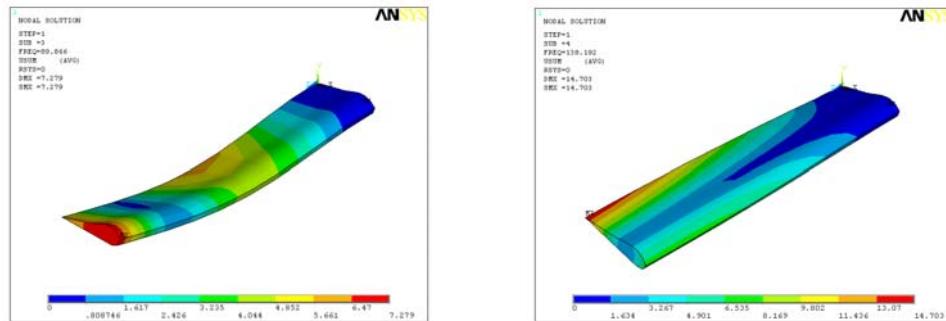
表 7-5 机翼模型的各阶模态频率

阶次 (SET)	1	2	3	4	5
频率 Hz	14.541	64.509	91.655	137.93	261.76



(a) 第 1 阶振动模态

(b) 第 2 阶振动模态



(c) 第 3 阶振动模态

(d) 第 4 阶振动模态

图 7-5 机翼模型的各阶振动模态

【ANSYS 算例】7.4(2) 机翼模型的振动模态分析(命令流)

针对【ANSYS 算例】7.4(1)的 GUI 操作，提供完整的命令流。

解答：给出的命令流如下。

```
!%%%%%%%% [ANSYS 算例]7_4(2) %%%%%%% begin %%%%%%
/PREP7          !进入前处理
ET,1,PLANE42   !选取单元类型 1(平面单元)
ET,2,SOLID45   !选取单元类型 2(空间单元)
MP,EX,1,0.26e9 !定义材料的弹性模量(1 号材料)
MP,DENS,1,886  !定义材料的密度(1 号材料)
MP,PRXY,1,0.3  !定义材料的泊松比(1 号材料)
K, ,,,          !生成几何点 1, 坐标(0,0,0)
K, ,0.05,,     !生成几何点 2, 坐标(0.05,0,0)
K, ,0.0575,0.005,, !生成几何点 3, 坐标(0.0575,0.005,0)
K, ,0.0475,0.0125,, !生成几何点 4, 坐标(0.0475,0.0125,0)
```



```
K,,0.025,0.00625,,      !生成几何点 5, 坐标(0.025,0.00625,0)
LSTR,1,2                 !连接点 1 和 2 生成直线 1
LSTR,5,1                 !连接点 5 和 1 生成直线 2
BSPLIN,2,3,4,5,,, -0.025,0,0,-0.025,-0.00625,0,   !采用 B 样条, 连接点 2,3,4,5 生成曲线 3
AL,1,2,3                !由线 1,2,3 围成一个面
ESIZE,0.00625           !在单元划分前, 定义单元的边的尺度为 0.00625
MSHAPE,0,2D              !设置单元划分的类型为 2D 四边形(key=0)
MSHKEY,0                 !设置网格的自由划分(0)
AMESH,all                !对所有的面进行网格划分(无设置时, 则默认为采用第 1 号类型单元)
TYPE, 2                  !设置单元类型 2(空间单元)
EXTOPT,ESIZE,10,0,        !设置体单元扩展为 10 段
VEXT,all,,,0,0,0.25,,,   !对所有的面进行 z 方向的体(包括单元)扩展, 每次扩展的 z 方向增量为 0.25
ESEL,U,TYPE,,1            !除单元类型 1 外, 选择所有的单元(实际上就是体单元)
NSEL,S,LOC,Z,0            !选择 z=0 的节点
D,all,, , , ,ALL, , , ,   !对所选择的节点施加全部的固定约束
NSEL,ALL                 !选择所有的节点
FINISH                   !前处理结束
/SOLU                     !进入求解模块
ANTYPE,2                  !设置模态分析(2)
MODOPT,LANB,5             !设定 LANB 方法, 提取 5 阶模态
MXPAND,5,,0               !设定模态扩展数为 5
MODOPT,LANB,5,0,0,,OFF   !设定 LANB 方法, 计算 5 阶模态
SOLVE                    !求解
FINISH                   !退出求解模块
/POST1                    !进入一般的后处理
/VIEW, 1,1,1,1            !设置视角
/ANG, 1
/REP,FAST
SET,FIRST                !调出第 1 阶的模态结果
SET,NEXT                 !调出下一阶的模态结果
SET,NEXT                 !调出下一阶的模态结果(实际上, 这时为第 3 阶模态)
PLDI,,
ANMODE,10,0.5,,0          !进行动画显示, 设置 10 帧, 每帧显示 0.5 秒
!%%%%% [ANSYS 算例]7_4(2)  %%%%%% end %%%%%
```

7.5 习题

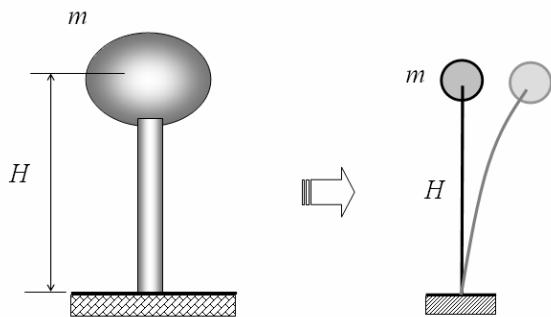
7-1 对于题图 3-8 所示的结构, 若结构所采用材料的密度为 $\rho = 2700\text{kg/m}^3$, 求出该结构的自振频率。

7-2 有一个均匀的钢丝吉他弦, 长为 710mm, 直径为 0.254mm, 弹性模量为 190GPa, 密度为 7920kg/m^3 , 该弦的两端固定, 并有一个张拉力为 $F=84\text{N}$, 参考【ANSYS 算例】7.3(1), 计算该弦的自振频率。



7-3 如题图所示为一个水塔，相应的参数为：水塔质量 $m = 5 \times 10^6 \text{ kg}$ ， $H = 30\text{m}$ ，水塔的支撑结构可以简化为内直径 $\phi_{inner} = 3\text{m}$ ，外直径为 $\phi_{out} = 6\text{m}$ 的空心圆柱，圆柱的材料密度 $\rho = 2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量 $E = 29\text{GPa}$ ，试在 ANSYS 平台上，完成以下任务。

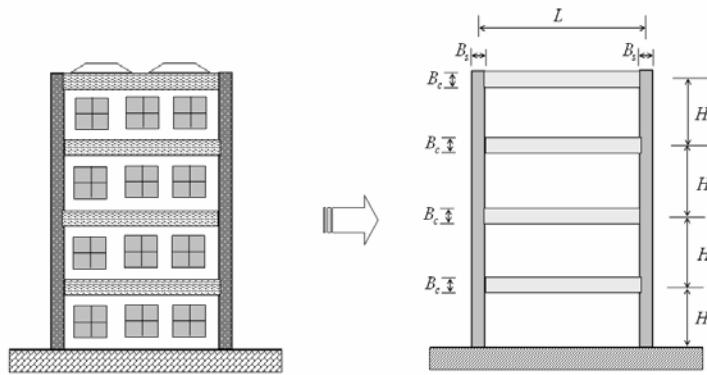
- (1) 建立相应的振动分析 3D 计算模型，对于水塔采用质量块单元，对于支撑结构采用梁单元，注意梁单元的质量密度等效。
- (2) 在以上建模的基础上，建立参数化的计算模型，并改变参数进行一系列的水塔设计和分析。



题图 7-3

7-4 如题图所示为一个四层建筑物的平面结构，假设相应的参数为：
 $L = 6\text{m}$, $H = 3\text{m}$, $B_c = 0.4\text{m}$, $B_s = 0.3\text{m}$ ；垂直支撑为钢架，材料密度为 $\rho_s = 7800\text{kg/m}^3$ ，
弹性模量 $E_s = 210\text{GPa}$ ，水平结构为混凝土楼板，材料密度 $\rho_c = 2500\text{kg/m}^3$ ，弹性模量
 $E_c = 29\text{GPa}$ ，试在 ANSYS 平台上，完成以下任务。

- (1) 采用梁单元建立相应的振动分析平面计算模型，虽为平面模型，但可设定不同的厚度进行计算，比较不同厚度下的自然频率及模态。
- (2) 在以上建模的基础上，建立参数化的计算模型，并改变参数进行一系列的设计和分析。



题图 7-4

7-5 对于习题 7-4 中的结构，试在 ANSYS 平台上，完成以下任务。

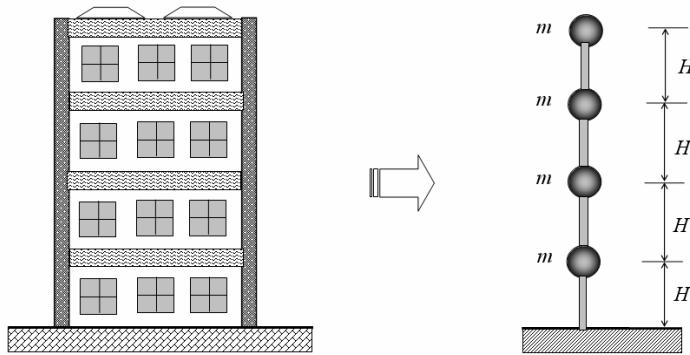
- (1) 针对单位厚度的平面模型，采用平面三角形单元进行分析，获得该结构的自然频率及模



态。

- (2) 针对单位厚度的平面模型，采用平面四边形单元进行分析，获得该结构的自然频率及模态。
- (3) 基于算例，比较三角形单元与四边形单元的计算精度。

7-6 对于习题 7-4 中的结构，试对其进行 1D 的简化，并在 ANSYS 平台上，进行自然频率及模态的分析，将结果与习题 7-4 和习题 7-5 进行比较。注意集中质量的等效计算。

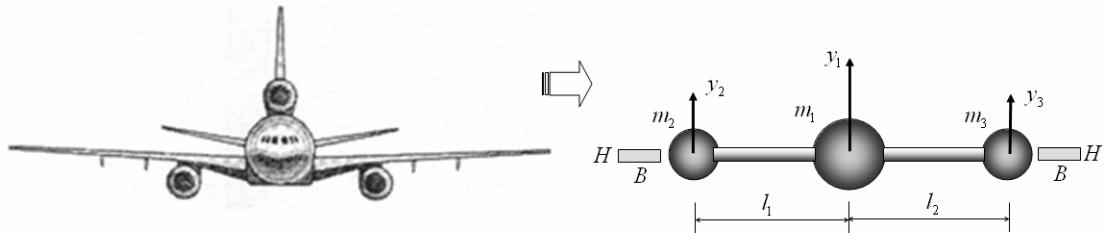


题图 7-6

7-7 如题图所示为一个飞机的简化模型，假设简化模型的参数为： $m_1 = 32 \times 10^3 \text{ kg}$ ，

$m_2 = m_3 = 5 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $l_1 = l_2 = 6 \text{ m}$ ，机翼的 $B = 2.5 \text{ m}$ ， $H = 1.2 \text{ m}$ 。试在 ANSYS 平台上，完成以下任务。

- (1) 采用梁单元和质量块单元，建立相应的振动分析 2D 计算模型，计算它的自然频率及模态；由于已考虑了质量块，对于机翼，可以不考虑它的密度。
- (2) 在以上建模的基础上，建立参数化的计算模型，并改变参数进行一系列的设计和分析。



题图 7-7

7-8 基于【ANSYS 算例】7.3(1)，分析并比较考虑张拉以及不考虑张拉时，绳索振动频率的差别。



第8章 传热过程的有限元分析

8.1 传热过程分析的基本原理

传热(heat transfer)是一种普遍的自然现象，它涉及到能源、环境、结构等一系列对象的交互作用，如建筑物的隔热保暖的环保型设计，发动机的循环冷却系统，高速列车制动的冷却系统、车箱的保温系统、宇宙飞船的人/机热环境系统、返回舱的隔热系统、运载火箭的热防护系统，甚至计算机芯片的散热系统都将是整个系统的关键问题。下面主要针对传热以及热应力问题进行讨论。

8.1.1 传热过程的基本方程

【基本方程】8.1.1(1) 传热过程的基本变量及方程

传热过程的基本变量就是温度，它是物体中的几何位置以及时间的函数。

根据 Fourier 传热定律(heat transfer theorem)和能量守恒定律(energy conservation theorem)，可以建立热传导问题的控制方程(governing equation)，即物体的瞬态温度场 $T(x, y, z, t)$ 应满足以下方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\kappa_z \frac{\partial T}{\partial z}) + \rho Q = \rho c_T \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8-1)$$

其中 ρ 为材料密度(kg/m^3)； c_T 为材料比热(specific heat)($\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$)； κ_x 、 κ_y 、 κ_z 分别为沿 x 、 y 、 z 方向的热传导系数(thermal conductivity of material)($\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$)； $Q(x, y, z, t)$ 为物体内部的热源强度(strength of heat source)(W/kg)。

传热边界条件有三类，即

第一类 BC(S_1)

$$T(x, y, z, t) = \bar{T}(t) \quad \text{on } S_1 \quad (8-2)$$

第二类 BC(S_2)

$$\kappa_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \kappa_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \kappa_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = \bar{q}_f(t) \quad \text{on } S_2 \quad (8-3)$$

第三类 BC(S_3)

$$\kappa_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \kappa_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \kappa_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = \bar{h}_c (T_\infty - T) \quad \text{on } S_3 \quad (8-4)$$

其中 n_x 、 n_y 、 n_z 为边界外法线的方向余弦， $\bar{T}(t)$ 为在边界 S_1 上给定的温度； $\bar{q}_f(t)$ 为在边界 S_2 上的给定热流量(W/m^2)， \bar{h}_c 为物体与周围介质的热交换系数(heat transfer coefficient)($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$)； T_∞ 为环境温度(temperature of surrounding medium)； t 为时间(s)；



并且物体 Ω 的边界为 $\partial\Omega = S_1 + S_2 + S_3$ 。

【求解原理】8.1.1(2) 传热过程分析的求解原理(求极值问题)

若该问题的初始条件(initial condition)IC为

$$T(x, y, z, t=0) = \bar{T}_0(x, y, z) \quad (8-5)$$

求解传热问题的提法为，在满足边界条件(8-2)–(8-4)及初始条件(8-5)的许可温度场中，真实的温度场使以下泛函 I 取极小值，即

$$\min_{\substack{T \in BC(S_1, S_2, S_3) \\ IC}} I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\kappa_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \kappa_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \kappa_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2(\rho Q - \rho c_T \frac{\partial T}{\partial t})T \right] d\Omega \quad (8-6)$$

在实际问题的处理过程中，边界条件(8-3)和(8-4)事先较难满足，因此，可将这两个条件耦合进泛函(8-6)中，即

$$\begin{aligned} \min_{\substack{T \in BC(S_1) \\ IC}} I &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\kappa_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \kappa_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \kappa_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2(\rho Q - \rho c_T \frac{\partial T}{\partial t})T \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{S_2} \bar{q}_f T dA + \frac{1}{2} \int_{S_3} h_c (T_{\infty} - T)^2 dA \end{aligned} \quad (8-7)$$

这实际上与结构分析中的最小势能原理类似，也是求一个积分函数(称为泛函)的极值问题。

8.1.2 稳态传热过程的有限元分析列式

对于稳态问题(steady problem)，即温度不随时间变化，有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (8-8)$$

【单元构造】8.1.2(1) 稳态传热过程的单元构造的基本表达式

将物体离散为单元体，将单元的温度场 $T^e(x, y, z)$ 表示为节点温度的插值关系，有

$$T^e(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \cdot \mathbf{q}_T^e \quad (8-9)$$

其中 $\mathbf{N}(x, y, z)$ 为形状函数矩阵， \mathbf{q}_T^e 为节点温度列阵，即

$$\mathbf{q}_T^e = [T_1 \quad T_2 \quad \cdots \quad T_n]^T \quad (8-10)$$

其中 T_1, T_2, \dots, T_n 为节点温度值。将(8-9)式代入到(8-7)，并求泛函极值， $\frac{\partial I}{\partial \mathbf{q}_T^e} = \mathbf{0}$ ，有

$$\mathbf{K}_T^e \cdot \mathbf{q}_T^e = \mathbf{P}_T^e \quad (8-11)$$

其中



$$\mathbf{K}_T^e = \int_{\Omega^e} \left[\kappa_x \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) + \kappa_y \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) + \kappa_z \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (8-12)$$

$$+ \int_{S_3^e} h_c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA$$

$$\mathbf{P}_T^e = \int_{\Omega^e} \rho Q \mathbf{N}^T d\Omega + \int_{S_2^e} \bar{q}_f \cdot \mathbf{N}^T dA + \int_{S_3^e} h_c T_\infty \cdot \mathbf{N}^T d\Omega \quad (8-13)$$

方程(8-11)叫做单元传热方程, \mathbf{K}_T^e 称为单元传热矩阵(heat transfer matrix), \mathbf{q}_T^e 为单元节点温度列阵, \mathbf{P}_T^e 为单元节点等效温度载荷列阵。

由泛函(8-7)式中的最高阶导数可以看出, 传热问题为 C_0 问题, 并且温度场为标量场, 因此, 所构造的有限元分析列式比较简单。

【单元构造】8.1.2(2) 平面 3 节点三角形传热单元

图 8-1 所示为一由 3 节点组成的平面三角形传热单元

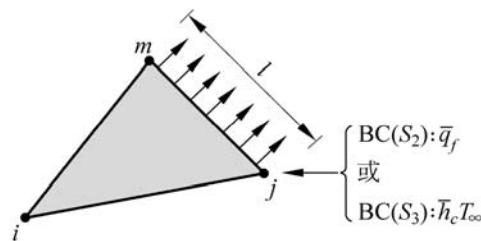


图 8-1 平面三节点三角形传热单元

该单元的节点温度列阵为

$$\mathbf{q}_T^e = [T_i \quad T_j \quad T_m]^T \quad (8-14)$$

根据第 4.3.1 节中关于一般 3 节点三角形单元的插值函数描述, 取单元温度场的插值关系

$$T^e(x, y, z) = N_i T_i + N_j T_j + N_m T_m = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_T^e \quad (8-15)$$

其中形状函数矩阵 \mathbf{N} 为

$$\mathbf{N} = [N_i \quad N_j \quad N_m] \quad (8-16)$$

而

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = -x_j + x_m$$



(i, j, m 循环)

下面就以下三种情形推导该热传导单元的传热矩阵 \mathbf{K}_T^e 和节点等效温度载荷列阵 \mathbf{P}_T^e

- * 无传热边界，即完全为内部单元；
- * 如果该单元的 jm 边为第二类传热边界 $BC(S_2)$ 时：由 g_f 参数来描述，
- * 如果该单元的 jm 边为第三类传热边界 $BC(S_3)$ 时：由 h_c 参数来描述。

①完全为内部单元（无传热边界）

将形状函数表达式(8-16)代入 \mathbf{K}_T^e 和 \mathbf{P}_T^e 的计算公式(8-12)及(8-13)中（注意这里仅考虑二维问题），有

$$\begin{array}{ccccccc} T_i & T_j & T_m & T_i & T_j & T_m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{K}_T^e = \frac{\kappa_x}{4A} & \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} & + \frac{\kappa_y}{4A} & \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} & & & (8-17) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A \end{array} \right] \leftarrow T_i \\ \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A \end{array} \right] \leftarrow T_j \\ \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A \end{array} \right] \leftarrow T_m \end{array} \quad (8-18)$$

②对于 jm 边为传热边界 $BC(S_2)$ 时

将形状函数表达式(8-16)和 $BC(S_2)$ 的式(8-3)代入 \mathbf{K}_T^e 和 \mathbf{P}_T^e 的计算公式(8-12)和(8-13)中（注意这里仅考虑二维问题）有

$$\begin{array}{ccccccc} T_i & T_j & T_m & T_i & T_j & T_m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{K}_T^e = \frac{\kappa_x}{4A} & \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} & + \frac{\kappa_y}{4A} & \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} & & & (8-19) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \end{array} \right] \leftarrow T_i \\ \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \end{array} \right] \leftarrow T_j \\ \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} q_f l \end{array} \right] \leftarrow T_m \end{array} \quad (8-20)$$

③对于 jm 边为传热边界 $BC(S_3)$ 时

同样，将形状函数表达式(8-16)和 $BC(S_3)$ 的式(8-4)代入 \mathbf{K}_T^e 和 \mathbf{P}_T^e 的计算公式(8-12)和



(8-13)中，有

$$\begin{array}{ccccccc} T_i & T_j & T_m & T_i & T_j & T_m & T_i \quad T_j \quad T_m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \end{array} \quad (8-21)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \frac{\kappa_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{\kappa_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} + \frac{1}{6} h_c l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_T^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho Q A \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} h_c T_\infty l \\ \frac{1}{3} \rho Q A + \frac{1}{2} h_c T_\infty l \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} T_i \\ T_j \\ T_m \end{array} \quad (8-22)$$

8.1.3 热应力问题的有限元分析列式

研究物体的热问题包括两个部分内容：(1) 传热问题研究，以确定温度场；(2)热应力问题研究，即在已知温度场的情况下确定应力应变。实际上这两个问题是相互影响和耦合的。但在大多数情况下，传热问题所确定的温度将直接影响物体的热应力(stress of temperature effect)，而后者对前者的耦合影响不大；因而可将物体的热问题的解耦分成两个过程来进行计算，关于传热问题的有限元分析列式前面已作讨论，下面讨论在已知温度分布的前提下所产生的热应力。

【基本方程】8.1.3(1) 热应力问题中的物理方程

设物体内存在温差的分布 $\Delta T(x, y, z)$ ，那么它将引起热膨胀，其热膨胀量(也称为热应变)为 $\alpha_T \cdot \Delta T(x, y, z)$ ， α_T 为热膨胀系数(thermal expansion coefficient)；则该物体的物理方程由于增加了热膨胀量(温度正应变)而变为

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \cdot \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{array} \right\} \quad (8-23)$$

可将上式写成指标形式

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^0 \quad (8-24)$$

或

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) \quad (8-25)$$



其中热应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 = [\alpha_T \cdot \Delta T \quad \alpha_T \cdot \Delta T \quad \alpha_T \cdot \Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (8-26)$$

【求解原理】8.1.3(2) 热应力问题求解的虚功原理

热应力问题的物理方程为式(8-25)，除此之外，其平衡方程、几何方程以及边界条件与普通弹性问题相同，弹性问题的一般虚功原理为 $\delta U - \delta W = 0$ ，即

$$\int_{\Omega} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \left[\int_{\Omega} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i dA + \int_{\Omega} D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \right] = 0 \quad (8-27)$$

这就是热应力问题的虚位移方程，也就是热应力问题的虚功原理。

【单元构造】8.1.3(3) 热应力问题分析的单元构造基本表达式

设单元的节点位移列阵为

$$\mathbf{q}^e = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_n \quad v_n \quad w_n]^T \quad (8-28)$$

与一般弹性问题有限元分析列式一样，将单元内的力学参量都表达为节点位移的关系，有

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N} \mathbf{q}^e \quad (8-29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e \quad (8-30)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^e &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \\ &= \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}^e - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ &= \mathbf{S}\mathbf{q}^e - \mathbf{D} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (8-31)$$

其中 \mathbf{N} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{S} 分别为单元的形状函数矩阵、几何矩阵、弹性系数矩阵和应力矩阵，它们都与一般弹性问题中所对应的矩阵完全相同；不同之处在于式(8-31)中包含有温度应变的影响，可以看出(8-31)中的最后一项表明温度变化只对正应力有影响，对剪应力没有影响。

对单元的位移式(8-29)和应变式(8-30)求变分(也就是求虚位移和虚应变)，有

$$\left. \begin{array}{l} \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{q}^e \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{q}^e \end{array} \right\} \quad (8-32)$$

将单元的位移式(8-29)、应变式(8-30)以及虚位移、虚应变式(8-32)代入虚位移方程(8-27)，

由于节点位移的变分增量 $\delta \mathbf{q}^e$ 具有任意性，消去该项后，有

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{P}_0^e \quad (8-33)$$

其中

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (8-34)$$

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dA \quad (8-35)$$

$$\mathbf{P}_0^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega \quad (8-36)$$



以上的 \mathbf{P}_0^e 也叫做温度等效载荷。和一般弹性问题的有限元列式相比，有限元方程(8-33)中的载荷端增加了温度等效载荷项 \mathbf{P}_0^e 。

8.2 平面矩形板的稳态温度场分析

【ANSYS 算例】8.2(1) 2D 矩形板的稳态热对流的自适应分析(GUI)

一个 2D 矩形区域的稳态热对流见图 8-2，模型的参数见表 8-1，由于在 AB 边上的外界温度为 $T_0 = 100^{\circ}\text{C}$ ，而在 BC 边上的外界温度为 $T_a = 0^{\circ}\text{C}$ ，则在它们的交点处(即 B 点)，会出现一个奇异区，在 BE 区间将有温度的高梯度的跨越，因此，要求采用自适应网格划分进行多次分析，最后得到一个满足计算精度要求的温度计算结果。

表 8-1 2D 矩形区域的稳态热对流计算模型的参数

材料性能	几何参数	边界条件
热传导系数 $k = 52.0 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}$	$a = 1.0 \text{ m}$	$T_o = 100^{\circ}\text{C}$
热对流系数 $h = 750.0 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$	$b = 0.6 \text{ m}$ $d = 0.2 \text{ m}$	$T_a = 0^{\circ}\text{C}$

解答：采用 2D 的计算模型，使用传热计算的平面单元 2-D Thermal Solid Elements (PLANE55)，采用自适应ADAPT命令来进行网格划分(不多于 10 次划分)，控制的传热能量模数的计算精度为 5% (thermal energy norm)。

建模要点：

- ①首先定义分析类型，对于稳态传热分析，设置<ANTYPE,STATIC>，并选取热分析单元，输入材料的热传导系数；
- ②建立对应几何关键点，注意给出需要关注的高梯度区域的 E 点，连点成线，再连线成面；
- ③定义热边界条件，包括给定边界温度，边界的对流系数
- ④设定自适应网格划分，不多于 10 次划分，或精度误差在 5% 以内
- ⑤在后处理中，用命令<*GET>来提取相应位置的计算分析结果。

最后将计算结果与参考文献所给出的解析结果进行比较，见表 8-2。

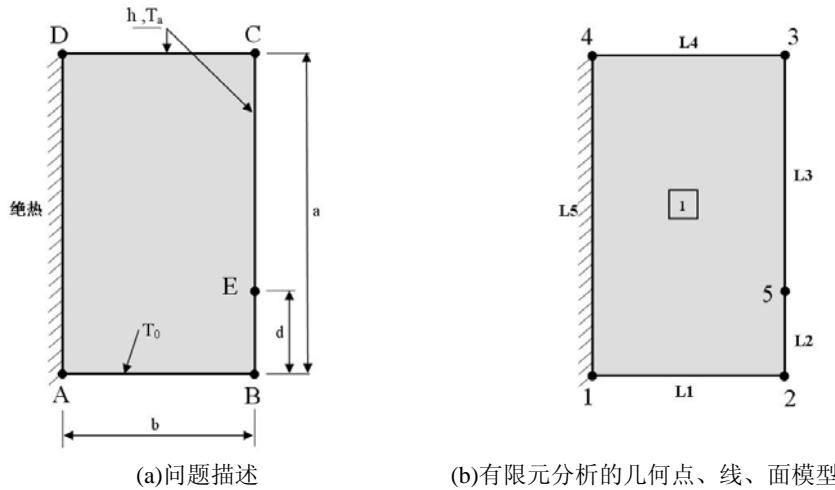


图 8-2 2D 矩形区域的稳态热对流



表 8-2 ANSYS 模型与文献解析结果的比较

	Reference 8.2(1)的结果	ANSYS 计算结果	两种结果之比
T, °C, 在 E 点	18.3	18.2	0.995

Reference 8.2(1): NAFEMS, The Standard NAFEMS Benchmarks, Rev. No. TSNB, National Engineering Laboratory, E. Kilbride, Glasgow, UK, 1989, Test No. T4.

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname: thermalRectangle (设置工作文件名) → heat → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Thermal → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Thermal Solid: Quad 4node 55 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Thermal → Conductivity → Isotropic → input KXX:52.0(定义导热系数) → OK → Close (关闭材料定义窗口)

(5) 生成几何模型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → NPT
Keypoint number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0,0,0 → Apply → 同样输入其余 4 个关键点坐标, 坐标分别为 (0,6,0), (0,6,1,0), (0,1,0), (0,6,0,2) → OK → Lines → Lines → Straight Line → 分别连接各关键点 (1→2)、(2→5)、(5→3)、(3→4)、(4→1) → OK → Areas → Arbitrary → By Line → 选择所有的直线 → OK

(6) 模型加约束

ANSYS Utility Menu: PlotCtrls → Numbering ... (出现 Plot Numbering Control 对话框) → KP: On, LINE: On → OK

ANSYS Main Menu → Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Thermal → Temperature → On Keypoints → 点 关键点 1 → OK (出现 Apply TEMP on Keypoints 对话框) → Lab2: TEMP; VALUE: 100; KEXPND: Yes → Apply → 点 关键点 2 → OK (出现 Apply TEMP on Keypoints 对话框) → Lab2: TEMP; VALUE: 100; KEXPND: Yes → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Thermal → Convection → On Lines → 点 直线 2 (L2) → OK (出现 Apply CONV on Lines 对话框) → VALI: 750.0; VAL2I: 0.0 → OK → On Lines (Main Menu 下) → 点 直线 3 (L3) → OK (出现 Apply CONV on Lines 对话框) → VALI: 750.0; VAL2I: 0.0 → OK → On Lines (Main Menu 下) → 点 直线 4 (L4) → OK (出现 Apply CONV on Lines 对话框) → VALI: 750.0; VAL2I: 0.0 → OK

(7) 自适应网格划分求解

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Adaptive Mesh (出现 Adaptive Meshing and Solution 对话框) → NSOL: 10; TTARGT: 5; FACMN: 0.2; FACMX: 1 → OK

(8) 后处理及结果显示

显示温度云图

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu (出现 Contour



Nodal Solution Data 对话框) → DOF Solution → Nodal Temperature → OK (显示节点温度)

列出模型 E 点处的温度

ANSYS Utility Menu: Select → Entities ... (出现 Select Entities 对话框) → 在第一个下拉菜单中选择 KeyPoints → OK (出现 Select KeyPoints 对话框) → 输入数字 5 → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Entities ... (出现 Select Entities 对话框) → 在两个下拉菜单中分别选择 Nodes、Attached to; 点中 KeyPoints → OK (出现 Select KeyPoints 对话框) → 输入数字 5 → OK

ANSYS Utility Menu: Numbering ... (出现 Plot Numbering Control 对话框) → NODE: On → OK (出现所选择节点的编号 30)

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data ... (出现 Get Scalar Data 对话框) → 选择 Result data, Nodal results → OK (出现 Get Nodal results Data 对话框) → Name: TEMP1; Node number N: 30; Results data to be retrieved: DOF solution, Temperature TEMP → OK

ANSYS Utility Menu: List → Status → Parameters → All Parameters (显示所有计算结果)

(9) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】8.2(2) 2D 矩形板的稳态热对流的自适应分析(命令流)

针对【ANSYS 算例】8.2(1)的 GUI 操作，提供完整的命令流。

解答：给出的命令流如下。

```
!%%% [%ANSYS 算例]8_2(2) %%% begin %%%%
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,STATIC   !设置分析类型为静(稳)态分析
ET,1,PLANE55    !选取单元类型 1(平面传热单元)
MP,KXX,1,52.0    !定义材料的热传导系数(KXX=52)
K,1             !定义第 1 号几何点(0,0)
K,2,.6           !定义第 2 号几何点(0.6,0)
K,3,.6,1.0       !定义第 3 号几何点(0.6,1.0)
K,4,,1.0         !定义第 4 号几何点(0,1)
K,5,.6,.2        !定义第 5 号几何点(0.6,0.2)
L,1,2            !生成线, 由 1 号几何点与 2 号几何点
L,2,5            !生成线, 由 2 号几何点与 5 号几何点
L,5,3            !生成线, 由 5 号几何点与 3 号几何点
L,3,4            !生成线, 由 3 号几何点与 4 号几何点
L,4,1            !生成线, 由 4 号几何点与 1 号几何点
AL,ALL           !生成面, 由所有的线
DK,1,TEMP,100,,1 !在几何点 1 处定义温度(100), 后一个 1 表示作标记
DK,2,TEMP,100,,1 !在几何点 2 处定义温度(100)
SFL,2,CONV,750.0,,0.0 !在几何线 2 上施加热对流条件, 系数为 750.0
SFL,3,CONV,750.0,,0.0 !在几何线 3 上施加热对流条件, 系数为 750.0
SFL,4,CONV,750.0,,0.0 !在几何线 4 上施加热对流条件, 系数为 750.0
FINISH          !前处理结束
ADAPT,10,,5,0.2,1 !进行网格自适应划分, 并求解, 控制误差 5%, 或 10 次循环以内, 网格最大最小尺寸 0.2,1
/POST1          !进入一般的后处理(稳态)
PLNSOL,TEMP     !显示计算的温度分布云图
```



```

*GET,TEPC,PRERR,,TEPC !获取传热计算的能量模的误差参数，并赋值给 TEPC
KSEL,,,5           !选择编号为 5 的几何点
NSLK               !选择附属在几何点上的节点
*GET,N1,NODE,,NUM,MAX !在所选择节点中，获取最大节点编号，赋值给 N1
*GET,TEMP1,NODE,N1,TEMP !获取 N1 节点上的温度值
ALLSEL,ALL         !选择所有对象
*status,parm        !列出所有参数的实际内容
!%%% [ANSYS 算例]8_2(2) %%%%

```

8.3 金属材料凝固过程的瞬态传热分析

【ANSYS 算例】8.3(1) 金属材料凝固过程的瞬态传热分析(GUI)

一个钢件的铸造工艺如图 8-3 所示，钢件的热力学参数见表 8-3，型砂的热力学参数及条件见表 8-4；就对应的凝固过程的传热过程进行瞬态分析。

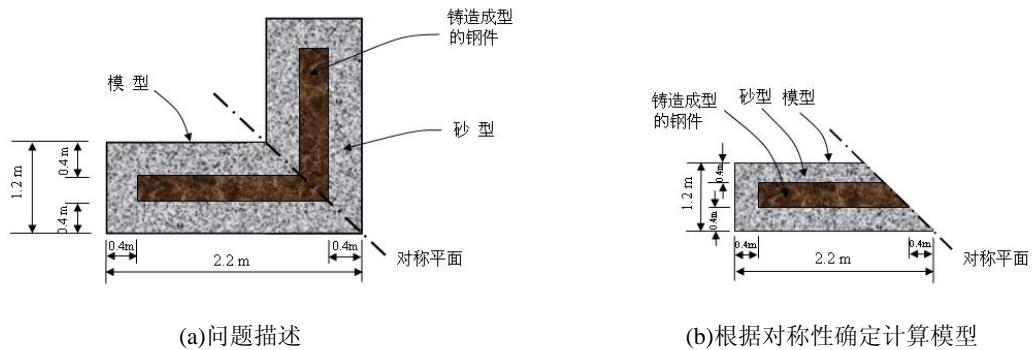


图 8-3 铸造成型的计算分析模型

表 8-3 钢材随温度变化的热力学参数

温度	钢材的热传导系数 K_x	钢件材料的熵(ENTH)
0°F	1.44 Btu/(hr-in-°F)	0.0 Btu/in ³
2643°F	1.54 Btu/(hr-in-°F)	128.1 Btu/in ³
2750°F	1.22 Btu/(hr-in-°F)	163.8 Btu/in ³
2875°F	1.22 Btu/(hr-in-°F)	174.2 Btu/in ³

表 8-4 型砂的热力学参数及条件

型砂的热力学参数	初始条件	热交换系数
热传导系数 K_x 为 0.025 Btu/(hr-in-°F) 材料密度 ρ 为 0.054 lb/in ³ 材料比热 C_T 为 0.28 Btu/(lb-°F)	钢件的温度为 2875 °F 型砂的温度为 80 °F	在 80 °F 下为 0.014 Btu/(hr-in ² -°F)

解答：基于对称性，取一半作为计算分析模型，如图 8-3 所示。

建模的要点：

- ① 定义单元、1 号材料(型砂)的不变化的热参数；



- ②采用<MPTEMP/MPDATA>设置2号材料(钢件)的热传导系数以及熵对应于温度的变化值;
- ③设定为瞬态分析<ANTYPE,4>, 激活优化非线性求解方式<SOLCONTROL,ON>;
- ④在时间历程的后处理中, 按照位置获取节点编号<node(16,6,0)>, 再获取该节点处的温度变量<NSOL>;
- ⑤图形显示2号变量随时间变化的曲线<PLVAR>;
- ⑥进行动画显示<ANTIME>。

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS

程序→ANSYS → Interactive→Working directory (设置工作目录) →Initial jobname(设置工作文件名): mold →Run

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences...→Thermal→OK

(3) 选择单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor→ Element Type→ Add/Edit/Delete...→Add...→Solid: Quad 4 node 55→OK→Close

(4) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor→ Material Props → Material Models → Thermal →Conductivity → Isotropic→ KXX:0.025→OK→ Specific Heat→ C:0.28→OK →Density→DENS:0.054→OK

Material Props window: Material→ New Model→Material ID: 2→ OK→ Isotropic→点击三次 Add Temperature, 分别输入 T1:0, T2:2643, T3:2750, T4:2875, KXX:1.44 at T1, KXX:1.54 at T2, KXX:1.22 at T3, KXX:1.22 at T4→拷贝上述四个温度→OK→ Enthalpy→点击三次 Add Temperature→粘贴上述温度→ENTH:0 at T1, ENTH:128.1 at T2, ENTH:163.8 at T3, ENTH:174.2 at T4→OK

Material Models Defined window→Thermal conduct (iso) →Graph→ OK → Enthalpy→Graph→OK
(to see the material properties vs. temperature) →OK→鼠标点击该窗口右上角的“X”来关闭该窗口

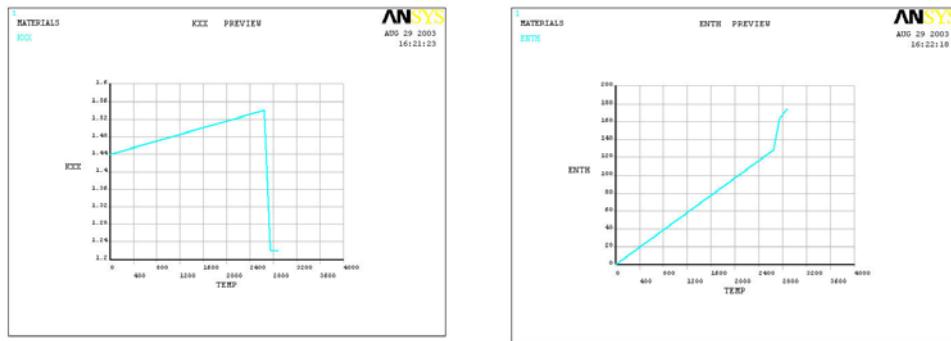


图 8-4 热导—温度曲线

图 8-5 焓—温度曲线

(5) 生成几何模型

①生成模具外轮廓的特征点

ANSYS Main Menu: Preprocessor→ Modeling→ Create→ Keypoints→ In Active CS...→按次序输入平面的4个特征点, 方式为: 只在 X, Y, Z 三个空格中填入点的坐标值, 每完成一个点输入, 用 Apply 结束, 4个特征点:(1(0,0,0), 2(2.2,0,0), 3(1,1.2,0), 4(0,1.2,0)→OK

②生成模具外轮廓

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → Through KPs → Pick keypoints 1、2、3、4(注意先后顺序) → OK



ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → X1: 0.4, X2:2.2, Y1:0.4, Y2:0.8 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Overlap → Areas → Pick All

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Delete → Area and Below → 点击面 3 → OK

(6) 网格划分

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → Smart Sizing → 拖动滑条至 4 → Mesh → 点击面 5 → OK (in the picking menu) → MeshTool... → 位于 Size Controls 下的 Global: Set → NDIV:4(每一条线分为 2 段) → OK → Mesh → 点击面 4 → OK → Close (关闭 MeshTool 窗口)

(7) 模型施加载荷

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Thermal → Convection → On Lines → 用鼠标点击选择 3 条线(包括线 1,3,4) → OK → Film coefficient: 0.014, Bulk temperature: 80 → OK

(8) 分析计算

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Transient → OK → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Entities → Areas → OK → 点击面 4 → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Everything Below → Selected Areas

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Initial Condit'n → Define → Pick All → Lab: TEMP, Value: 2875 → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Entities → Nodes → Attached to → Areas, all → Invert → Cancel

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Initial Condit'n → Define → Pick All → Lab: ALIL DOF, Value: 80 → OK

ANSYS Utility Menu: Select → Everything

ANSYS Main Menu: Solution → Load Step Opts → Time/Frequency → Time-Time Step → Time at end of load step: 4; initial time step size: 0.01 → Choose Stepped loading → Minimum time step size: 0.001; Maximum time step size: 0.25 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Load Step Opts → Output Ctrls → DB/Results File → 设置文件输出频率 Every substep → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → File → Close → OK → Close(Solution is done!).

(9) 结果显示

ANSYS Utility Menu: Parameters → Scalar Parameters → 定义变量: "cntr_pt = node (1.6,0.6,0)" → Accept → Close

ANSYS Main Menu: Time Hist Postproc → Add Value → Nodal Solution → DOF Solution → Temperature → User-specified label: center → picker and press enter: cntr_pt → OK → OK → File → Close

ANSYS Main Menu: Time Hist Postproc → Graph Variables → NVAR1: 2 → OK 显示中心点的温度随时间变化曲线

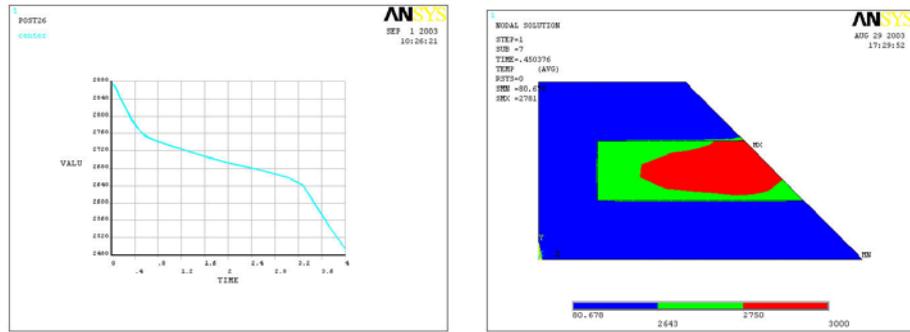


图 8-6 中心点的温度随时间变化曲线

图 8-7 模型温度变化过程模拟图

ANSYS Main Menu: General Postproc → Read Results → First Set

ANSYS Utility Menu: Plot Ctrls → Style → Contours → Non_uniform Contours → V1: 2643 → V2: 2750 → V3: 3000 → OK

ANSYS Utility Menu: Plot Ctrls → Animate → Over Time → Number of animation frames: 10 → OK → 关闭 Auto Contour Scaling 窗口

(10) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】8.3(2) 金属材料凝固过程的瞬态传热分析(命令流)

针对【ANSYS 算例】8.3(1)的 GUI 操作，提供完整的命令流。

解答：给出的命令流如下。

```
!%%%% [ANSYS 算例]8_3(2) %%% begin %%%%
/PREP7          !进入前处理, 若不专门设定的话, 默认分析类型为静(稳)态分析
ET,1,PLANE55   !选取单元类型 1(平面传热单元)
MP,KXX,1,0.025 !定义 1 号材料的热传导系数(KXX=0.025)
MP,DENS,1,0.054 !定义 1 号材料的密度(0.054)
MP,C,1,0.28    !定义 1 号材料的比热(0.28)

!下面定义 2 号材料的性能(钢材)
MPTEMP,1,0,2643,2750,2875,,      !设置温度变化的几个点
MPDATA,KXX,2,1,1.44,1.54,1.22,1.22,, !设置 2 号材料的热传导系数对应于温度的变化值
MPDATA,ENTH,2,1,0,128.1,163.8,174.2 !设置 2 号材料的热熵对应于温度的变化值
MPPLT,KXX,2,,,           !画出 2 号材料的热传导系数随温度变化的图
MPPLT,ENTH,2,,,           !画出 2 号材料的熵随温度变化的图

K,1,0,0,0          ! 定义第 1 号几何点(0,0,0)
K,2,22,0,0         !定义第 2 号几何点(22,0,0)
K,3,10,12,0        !定义第 3 号几何点(10,12,0)
K,4,0,12,0         ! 定义第 4 号几何点(12,0,0)
A,1,2,3,4          !由点 1,2,3,4 生成面
RECTNG,4,22,4,8    !生成矩形 x 方向尺寸 4~22,y 方向尺寸 4~8
APLOT              !显示面
AOVLAP,1,2          !交叠生成新的切割面
ADELE,3,,,1         !删去 3 号面
!划分网格(若不指定的话, 默认单元类型 1, 材料类型 1)
SMRT,5              !设置自动网格划分的单元尺度因子为 5
```



```
MSHAPE,0,2D          !设置四边形网格单元
MSHKEY,0             !设置自由划分
AMESH,5              !对面积编号为 5 的区域进行单元划分
TYPE,1               !设置单元类型为 1
MAT,2               !设置材料类型为 2
REAL                 ! 设置实常数类型为 1(默认值为 1)
ESYS,0              !设置单元的坐标系
AMESH,4              ! 对面积编号为 4 的区域进行单元划分
SFL,1,CONV,0.014,,80,, !在几何线 1 上施加热对流条件,系数为 0.014,体积温度为 80
SFL,3,CONV,0.014,,80,, !在几何线 3 上施加热对流条件,系数为 0.014,体积温度为 80
SFL,4,CONV,0.014,,80,, !在几何线 4 上施加热对流条件,系数为 0.014,体积温度为 80
SAVE                !保存信息
FINISH              !前处理结束
/SOLU               !进入求解模块
ANTYPE,4            !设定为瞬态分析
SOLCONTROL,ON,0     !激活优化非线性求解方式
APLOT               !显示面
ASEL,S,,,4          !选择 4 号面(即铸造面)
NSLA,S,1            !选择附属在面上的节点
NPLOT               !显示铸造区域的节点
IC,ALL,TEMP,2875    !针对铸造区域的节点施加初始条件, 温度 2875F
NSEL,INVE           !选择反向区域的节点(即 5 号面积号区域的节点)
/REPLOT              !显示模型
IC,ALL,TEMP,80      !针对铸模区域的节点施加初始条件, 温度 80F
ALLSEL,ALL          !选择所有的对象
SAVE                !保存
TIME,3              !设置加载结束时的时间为 3
AUTOTS,-1           !由程序自动选择计算的时间步长, 并纪录到 log 文件中
DELTIM,0.01,0.001,0.25,1 !对本载荷步设置起始时间为 0.01,
                           !(续)并在最小 0.001 与最大 0.25 之间由程序自动选择
KBC,1               !设置加载过程为台阶加载方式
OUTRES,ALL,ALL      !将每一步计算的结果写入文件中
SAVE                !保存
/STAT,SOLU           !显示计算过程的设置
/REPLOT              !用图形显示所有的节点
APLOT               !用图形显示所有的面
SOLVE               !进行求解
FINISH              !计算模块结束
/POST26              !启用时间历程的后处理
EPLOT               !用图形显示单元
cntr_pt=node(16,6,0) !获取位置为(16,6,0)的节点编号, 并赋值给 cntr_pt
NSOL,2,cntr_pt,TEMP,,center !将 cntr_pt 节点处的温度变化值设为 2 号变量, 并给出标识 center
PLVAR,2              !图形显示 2 号变量随时间变化的曲线
ANTIME,30,0.5, ,0,0,0,0 !进行动画显示, 30 帧, 每帧显示 0.5 秒
FINISH              !结束后处理
!%%% [ANSYS 算例]8_3(2) %%% end %%%%
```

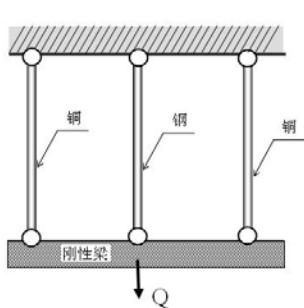
8.4 温度变化下的结构热应力分析

**【ANSYS 算例】8.4(1) 升温条件下杆件支撑结构的热应力分析(GUI)**

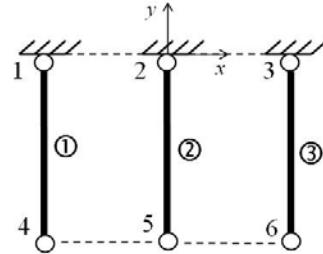
一个由两根铜杆以及一根钢杆组成的支撑结构, 见图 8-8(a); 三杆的横截面积都为 $A=0.1 \text{ in}^2$, 三杆的端头由一个刚性梁连接, 整个支撑结构在装配后承受一个力载荷以及升温的作用, 分析构件的受力状况。模型中的各项参数如表 8-5 所示, 为与文献结果进行比较, 这里采用了英制单位。

表 8-5 三杆结构的模型参数

材料参数	载荷
铜的弹性模量: $16 \times 10^6 \text{ psi}$ 铜的热膨胀系数: $92 \times 10^{-7} \text{ in/in}^{-\circ} \text{ F}$	$Q = 4000 \text{ lb}$
钢的弹性模量: $30 \times 10^6 \text{ psi}$ 钢的热膨胀系数: $70 \times 10^{-7} \text{ in/in}^{-\circ} \text{ F}$	$\Delta T = 10^\circ \text{ F}$



(a) 三杆支撑结构



(b) 计算模型

图 8-8 三杆支撑结构的受力以及计算模型

解答:计算模型如图 8-8(b)所示。采用 2D 的计算模型, 使用杆单元 2-D Spar (or Truss) Elements (LINK1)来进行建模, 假设杆的长度为 20in, 杆的间距为 10in, 设定一个参考温度(70°F), 三杆连接的刚性梁采用约束方程来进行等效。

建模的要点:

- ①首先定义分析类型并选取单元, 输入实常数;
- ②建立对应几何模型, 并赋予各单元类型对应各参数值
采用耦合方程来进行刚性梁连接的等效
- ③在后处理中, 用命令`*GET`来提取其计算分析结果(频率)。
- ④通过命令`*GET`来提取构件的应力值;

最后将计算结果与参考文献所给出的解析结果进行比较, 见表 8-6。

表 8-6 ANSYS 模型与文献的解析结果的比较

构件的应力及单位	Reference 8.4(1)的结果	ANSYS 结果	两种结果之比
钢杆的应力 ,psi	19,695.	19,695.	1.000
铜杆的应力 ,psi	10,152.	10,152.	1.000

Reference 8.4(1) Timoshenko S. Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Edition, New York: D. Van Nostrand Co., Inc., 1955, 30

(1) 进入 ANSYS



程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname(设置工作文件名): Links with Temperature → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → link: 2d spar 1 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(4) 定义实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants... → Add... → Type 1 LINK1 → OK → Real Constants Set No.: 1, AREA: 0.1 → Close (关闭 Real Constants 窗口)

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Isotropic → EX: 16E6(弹性模量), PRXY: 0(泊松比) → OK (返回 Define Material Model Behavior 窗口) → Structural → Thermal expansion → Secant Coefficient → Isotropic → Alpx: 92E-7 → OK (返回 Define Material Model Behavior 窗口) → Material → New model → Structural → Linear → Isotropic → EX: 30E6, PRXY: 0 → OK (返回 Define Material Model Behavior 窗口) → Structural → Thermal expansion → Secant Coefficient → Isotropic → Alpx: 70E-7 → OK → Close (关闭材料定义窗口)

(6) 设定初始温度

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Settings → Reference Temp → TREF: 70 → OK

(7) 构造分析模型

生成节点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number: 1, X, Y, Z Location in active CS: -10, 0, 0 Apply → 依次输入 3 号节点(10, 0, 0)、4 号节点(-10, -20, 0)与 6 号节点(10, -20, 0)

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → Fill between Nds → 用鼠标单击 1、3 两个节点 → OK → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → Fill between Nds → 用鼠标单击 4、6 两个节点 → OK → OK

生成元素并分配材料类型、实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → MAT,1, TYPE,1 LINK1, REAL,1 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 1、4 号节点 → Apply → 点击 3、6 号节点 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → MAT:2; TYPE:1 LINK1; REAL:1 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → 点击 2、5 号节点 → OK

(8) 模型加约束

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Coupling/Ceqn → Couple DOFs: 点击 4、5、6 三个节点 → OK → NSET: 1, Lab: UY → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement On Nodes → 选取 1、2、3 号节点 → OK → Lab2: ALL DOF → OK

(9) 施加载荷



ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 点击 5 号节点 → OK → Lab: FY, Value: -4000 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Other → Fluence → Uniform Fluen → BFUNIF: 80

(10) 计算分析

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Load Step Opts → Output Ctrl → Solu Printout → Item: Basic quantities, FREQ: Every Nth Step, Value of N: 1, → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Load Step Opts → Output Ctrl → Solu Printout → Item: Elem Nodal Loads, FREQ: Every Nth Step, Value of N: 1, → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → New Analysis → Static → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → Basic → Number of substeps: 1

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK → Yes → Close

(11) 计算结果

ANSYS Main Menu: General Postproc → Element Table → Define Table → Add... → Lab: Strs St, Item: By Sequence number 右侧选项选择 LS, 下侧输入 LS, 1 → Apply → Add... → Lab Strs Co, Item: By Sequence number 右侧选项选择 LS, 下侧输入 LS, 1 → 观察钢杆、铜杆各自应力

ANSYS Utility Menu: List → Elements → Nodes + Attributes 查看各个元素的材料分配 (MAT=2 代表钢铁)

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data... → Type of data to be retrieved: Results data; Elem table data → OK → Name of parameters to be defined: STRSS ST; Element number N: STEEL E; Element data to be retrieved: STRS ST → OK

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data... → Type of data to be retrieved: Results data; Elem table data → OK → Name of parameters to be defined: STRSS CO; Element number N: COPPER E; Element data to be retrieved: STRS CO → OK

ANSYS Utility Menu: List → Status → Parameters → All Parameters

(12) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】8.4(2) 升温条件下杆件支撑结构的热应力分析(命令流)

针对【ANSYS 算例】8.4(1)的 GUI 操作，提供完整的命令流。

解答：提供的命令流如下。

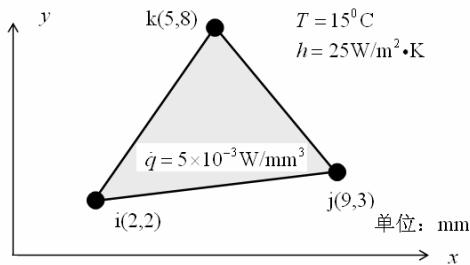
```
!%%%%%%%%% [ANSYS 算例]8_4(2) %%% begin %%%%
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,STATIC   !设置静力分析 S
ET,1,LINK1      !选取单元类型 1(杆)
R,1,.1          !设定实常数
MP,EX,1,16E6    !定义 1 号材料的弹性模量(铜)
MP,ALPX,1,92E-7 !定义 1 号材料的热膨胀系数(铜)
MP,EX,2,30E6    !定义 1 号材料的弹性模量(钢)
MP,ALPX,2,70E-7 !定义 1 号材料的热膨胀系数(钢)
TREF,70         !定义参考温度
N,1,-10         !生成节点 1
N,3,10          !生成节点 3
```



```
FILL          !在 1 号节点与 3 号节点之间进行填充生成(即生成 2 号节点)
N,4,-10,-20   !生成节点 4
N,6,10,-20    !生成节点 6
FILL          !在 4 号节点与 6 号节点之间进行填充生成(即生成 5 号节点)
E,1,4          !由节点 1 及 4 生成单元
E,3,6          !由节点 3 及 6 生成单元
MAT,2          !设定材料类型 2
E,2,5          !由节点 2 及 5 生成单元
CP,1,UY,5,4,6  !在节点 4,5,6 之间建立耦合方程
D,1,ALL,,,3   ! 对节点 1,2,3 施加所有固定的位移约束
F,5,FY,-4000  ! 对节点 5 施加 FY=-4000 的力
BFUNIF,TEMP,80 ! 对施加一个均匀温度载荷 80 (为参考温度+10)
FINISH         !前处理结束
/SOLU          !进入求解模块
OUTPR,BASIC,1 !计算结果的输出设置, 就 1 步加载下的基本力学量进行输出
OUTPR,NLOAD,1 !计算结果的输出设置, 就 1 步加载下的单元节点载荷进行输出
NSUBST,1       !设定载荷子步的数量, 1 步
SOLVE          !求解
FINISH         !结束计算
/POST1          !进入一般的后处理
STEEL_N = NODE (,,,)      !获取位置为(0,0,0)的节点编号, 并赋值给 STEEL_N
COPPER_N = NODE (10,0,0)    !获取位置为(10,0,0)的节点编号, 并赋值给 COPPER_N
STEEL_E = ENEARN (STEEL_N)  !获取最接近节点为 STEEL_N 的单元号
COPPER_E = ENEARN (COPPER_N) !获取最接近节点为 COPPER_N 的单元号
ETABLE,STRS_ST,LS,1 !针对杆单元,建立单元列表 STRS_ST,通过 LS 及特征号 1 来获得轴向应力
ETABLE,STRS_CO,LS,1 !针对杆单元,建立单元列表 STRS_CO,通过 LS 及特征号 1 来获得轴向应力
*GET,STRSS_ST,ELEM,STEEL_E,ETAB,STRS_ST
  !(针对上一行)在单元列表 STRS_ST 中, 提取 STEEL_E 号单元的轴向应力, 赋值给 STRSS_ST
*GET,STRSS_CO,ELEM,COPPER_E,ETAB,STRS_CO
  !(针对上一行)在单元列表 STRS_CO 中, 提取 COPPER_E 号单元的轴向应力, 赋值给 STRSS_CO
*STATUS          !列出所有参数的内容
!%%%%%% [ANSYS 算例]8_4(2) %%% end %%%
```

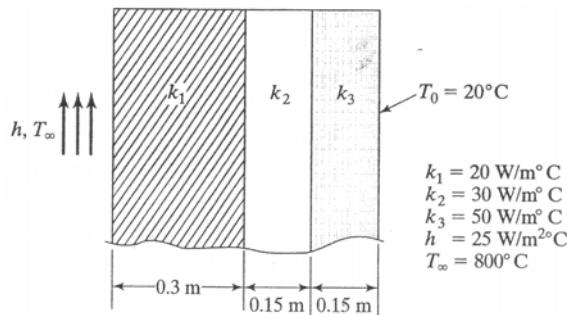
8.5 习题

8-1 试计算如图所示三角形单元的单元矩阵, 该单元的热传导系数为 $k = 170 \text{W/m}\cdot\text{K}$, 介质的温度 $T = 15^\circ\text{C}$, 介质与单元的换热系数 $h = 25 \text{W/m}^2\cdot\text{K}$, 单元内部的热源 $\dot{q} = 5 \times 10^{-3} \text{W/mm}^3$ 。



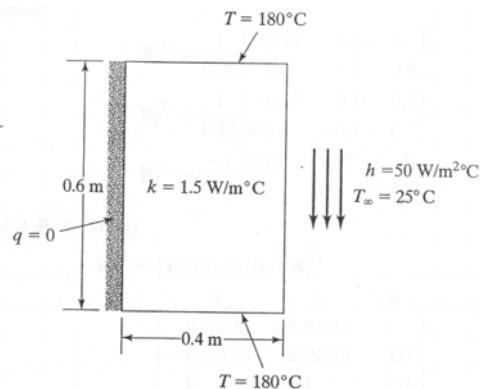
题图 8-1

8-2 一个复合墙体由三种不同的材料组成, 如题图所示, 外表面温度为 $T_0=20^{\circ}\text{C}$, 对流发生在内表面上, 内表面的温度为 $T_\infty=800^{\circ}\text{C}$, 取 $h=25\text{W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$, 求墙体内的温度分布。



题图 8-2

8-3 一个具有矩形横断面的长条, 热传导系数为 $1.5\text{W/m}^0\text{C}$, 给定边界条件如题图所示; 两个对边保持 180°C 的恒温条件, 该长条的一边为绝热, 另一边为对流条件, 其 $T_\infty=25^{\circ}\text{C}$ 和 $h=50\text{W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$, 求温度场分布。

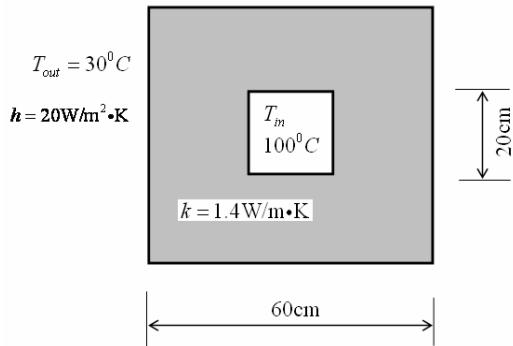


题图 8-3

8-4 有一个小的工业烟筒, 如图所示, 假设热传导率为 $k=1.4\text{W/m} \cdot \text{K}$, 烟筒的内表面都为 $T_{in}=100^{\circ}\text{C}$, 外表面与空气接触, 空气的温度为 $T_{out}=30^{\circ}\text{C}$, 相应的自然对流系数为

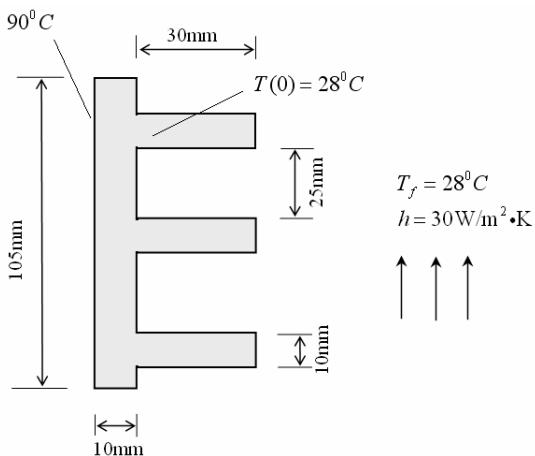


$h = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ 。求稳态条件下烟筒内部的温度分布。



题图 8-4

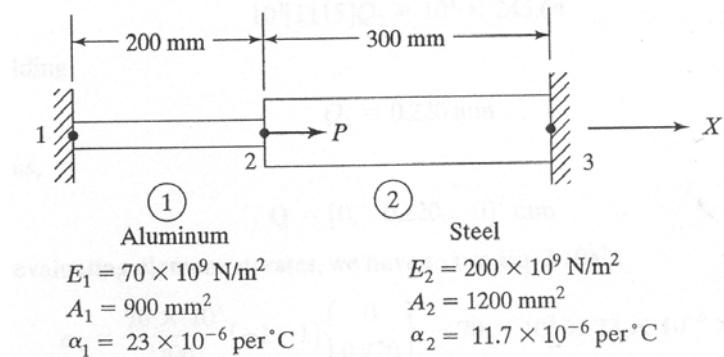
8-5 一个铝制散热片的结构如题图所示，所用材料的参数为 $k = 170 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ，
 $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$ ， $c = 870 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ；散热片的初始温度为 28°C ，当设备使用时，散热片的基座温度很快上升到 90°C ，周围空气的温度为 $T_f = 28^\circ\text{C}$ ，相应的热传递系数为 $h = 30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ，求铝制散热片在这一过程稳定后的温度分布。



题图 8-5

8-6 在 20°C 时，有一个轴向外力 $P = 300 \times 10^3 \text{ N}$ 作用在如题图所示的杆件上，随后温度上升到 60°C ；在这种情况下，完成以下工作。

- (a) 集成 \mathbf{K} 和 \mathbf{F} 阵。
- (b) 求节点位移和单元应力。



题图 8-6



第9章 弹塑性材料的有限元分析

9.1 弹塑性材料分析的基本原理

在一般的结构工程中，都是考虑处于弹性受力状态的设计，而且还有选取一定的安全系数；但研究材料的弹塑性行为，并进行相应的受力分析还是具有非常重要的意义，其一，许多结构都会因设计和工艺上的需要开有孔洞或出现应力/应变集中区，材料容易、有时不可避免地产生局部区域的塑性行为；其二，有的结构需要利用材料的塑性行为来进行结构设计，如轿车在发生碰撞时，需要充分利用材料的塑性来吸收能量，以尽量保护乘员；其三，在材料的加工工程中，就是专门利用材料的塑性行为来获得具有形状功能的结构件，其塑性行为将是衡量材料加工性能的重要指标。

研究弹塑性问题(elastic-plastic problem)的关键在于物理方程的处理。

9.1.1 弹塑性材料的物理方程

【基本原理】9.1.1(1) 材料的弹塑性行为实验

典型的实验曲线是通过标准试样的单向拉伸与压缩来获得的，如图 9-1 所示。

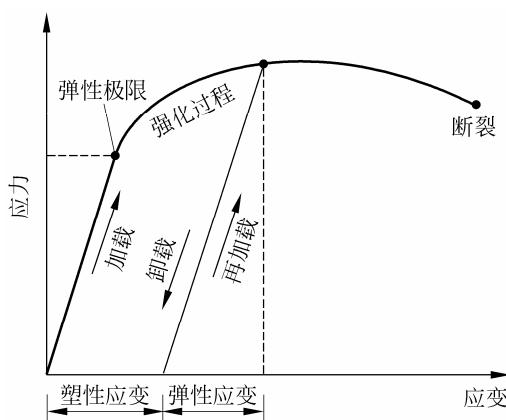


图 9-1 材料弹塑性行为的实验

在实际结构中，真实的情况是材料处于复杂的受力状态，即 σ_{ij} 中的各个分量都存在，如何基于材料的单拉应力-应变实验曲线，来描述复杂应力状态下材料的真实弹塑性行为(elastic-plastic behavior)，就必然涉及屈服准则(yielding criteria)、塑性流动法则(plastic flow rule)、塑性强化准则(plastic hardening rule)这三个方面的描述，有了这三个方面的描述就可以完全确定出复杂应力状态下材料的真实弹塑性行为。

【基本原理】9.1.1(2) 材料塑性行为的三方面准则

① 屈服准则

用来确定材料产生屈服时的临界应力状态(critical state of stress)。大量的实验表明：材料的弹性极限(elastic limit)或塑性屈服(plastic yielding)与静水压力无关；对于复杂应力状态，由等倾面组成的八面体平面上的正应力恰好就是静水压力，该八面体平面上的切应力为



$$\begin{aligned}\tau_8 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}\end{aligned}\quad (9-1)$$

它是决定材料是否产生屈服的力学参量，因此，初始屈服条件为

$$\tau_8 = \tau_{yd} \quad (9-2)$$

其中 τ_{yd} 为临界屈服剪应力，将由实验来确定，一般是通过单拉实验来获得，单拉实验获得的是临界屈服拉应力 σ_{yd} ，所以通过以下关系来换算

$$\tau_{yd} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{yd}}{3} \quad (9-3)$$

如果定义等效应力(equivalent stress)为

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_8 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}\end{aligned}\quad (9-4)$$

则初始屈服条件(9-2)可以写成

$$\sigma_{eg} = \sigma_{yd} \quad (9-5)$$

将等效应力写成更一般的形式，有

$$\sigma_{eg} = f(\sigma_{ij}) \quad (9-6)$$

其中 σ_{ij} 表示该点的应力状态，对于 2D 情况，它就是 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 。则屈服面函数(function of yielding surface)为

$$F(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_{yd} = 0 \quad (9-7)$$

图 9-2 给出各种形式的屈服面函数。

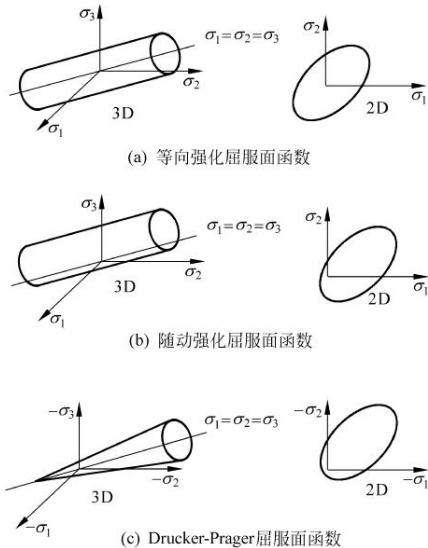


图 9-2 各种形式的屈服面函数

② 塑性流动法则

它用来确定塑性应变变化的大小和方向，它沿着一个势函数(potential function)的法向增长，即

$$d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (9-8)$$

其中 $d\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$ 为塑性应变增量(incremental of plastic strain)， λ 为塑性增长乘子(plastic multiplier)，

Q 为塑性势函数，若为关联塑性流动(associative plastic flow)，则 Q 就是屈服面函数；即

$$Q(\boldsymbol{\sigma}) = F(\boldsymbol{\sigma}) \quad (9-9)$$

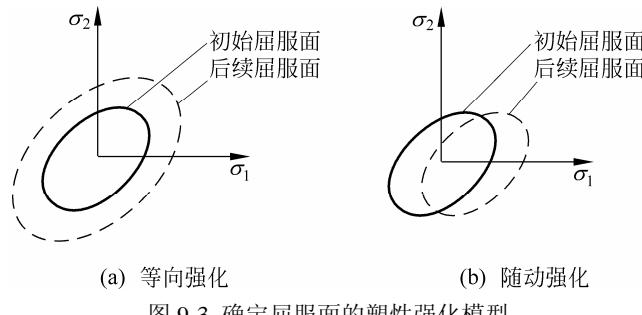
当材料从一个塑性状态出发，其后继的行为是继续塑性加载/loading 还是弹性卸载(unloading)要通过以下关系来判断：

- 如果 $F = 0$ ，并且 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} > 0$ ，则继续塑性加载
- 如果 $F = 0$ ，并且 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} < 0$ ，则由塑性转为弹性卸载
- 如果 $F = 0$ ，并且 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} = 0$ ，则对于理想弹塑性材料(elastic/perfectly plastic material)，是塑性加载；对于硬化材料(hardening material)，此情况为中性变载，即继续为塑性状态，但不发生新的塑性流动。

③ 塑性强化准则

用来描述屈服面是如何改变的，以确定后续屈服面的状态，一般有以下几种模型

- 等向强化(isotropic hardening)模型
- 随动强化(kinematic hardening)模型
- 混合强化(非等向)(anisotropic hardening)模型



(a) 等向强化 (b) 随动强化

图 9-3 确定屈服面的塑性强化模型

等向强化和随动强化的模型如图 9-3 所示，在发生塑性强化的情况下，材料的临界屈服应力将随着塑性应变的积累而发生变化，即

$$\sigma_{yd} = \sigma_{yd}(\kappa, \mathbf{a}) \quad (9-10)$$

其中 κ 为塑性功(plastic work), \mathbf{a} 为屈服面的平移量(yielding surface translation), 这两个量都可以通过实验来确定。

(3) 复杂应力状态下塑性应变增量的实际计算

基于以上的三方面准则，可以给出复杂应力状态下本构关系的增量形式，即

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon} \quad (9-11)$$

其中 \mathbf{D}^{ep} 叫做弹塑性张量(矩阵)。

9.1.2 基于全量理论的有限元分析列式

全量理论假设：整个加载过程为比例加载(proportionally loading)，其结果只与状态有关，与加载过程无关。

【单元表征】9.1.2(1) 基于全量理论的单元构造的基本表达式

可将物理方程(9-11)写成状态方程，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (9-12)$$

其中 $\mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\epsilon})$ 为弹塑性状态方程中的弹塑性矩阵；则所建立的有限元分析列式将为

$$\mathbf{K}^{ep}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (9-13)$$

其中

$$\mathbf{K}^{ep}(\mathbf{q}) = \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T [\mathbf{D}^{ep}(\mathbf{q})] \mathbf{B} d\Omega \quad (9-14)$$

由于为弹塑性本构关系，这时的刚度矩阵 $\mathbf{K}^{ep}(\mathbf{q})$ 是位移 \mathbf{q} 的函数，不是定常数矩阵。

9.1.3 基于增量理论的有限元分析列式

【单元表征】9.1.3(1) 基于增量理论的单元构造的基本表达式



增量理论将考虑真实的加载过程，即变形结果与加载历史有关，写出增量形式下的弹塑性物理方程为

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (9-15)$$

在施加外载增量 $\Delta\bar{\mathbf{b}}$ 和 $\Delta\bar{\mathbf{p}}$ 的情况下，这时施加之前已有应力状态 $(\boldsymbol{\sigma}(t), \bar{\mathbf{b}}(t), \bar{\mathbf{p}}(t))$ 是处于平衡的，所以相应的虚功方程为

$$\int_{\Omega} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D}^{ep} \cdot \delta(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \Delta\bar{\mathbf{b}} \cdot \delta(\Delta\mathbf{u}) \cdot d\Omega - \int_{S_p} \Delta\bar{\mathbf{p}} \cdot \delta(\Delta\mathbf{u}) \cdot dA = 0 \quad (9-16)$$

设基于单元节点的位移及应变表达式为

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\mathbf{u}^e = \mathbf{N} \cdot \Delta\mathbf{q}^e \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{q}^e \end{array} \right\} \quad (9-17)$$

其中 $\Delta\mathbf{q}^e$ 为单元的节点位移增量， \mathbf{N} 和 \mathbf{B} 分别为形状函数矩阵和几何矩阵。

可以给出整体有限元分析方程为

$$\mathbf{K}^{ep}(\mathbf{q}) \cdot \Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{P} \quad (9-18)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{ep}(\mathbf{q}) &= \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{ep}(\mathbf{q}^e) \mathbf{B} d\Omega \\ \Delta\mathbf{q} &= \sum_e \Delta\mathbf{q}^e \\ \Delta\mathbf{P} &= \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \cdot \Delta\bar{\mathbf{b}} d\Omega + \sum_e \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \cdot \Delta\bar{\mathbf{p}} dA \end{aligned}$$

9.1.4 非线性方程求解的 Newton-Raphson (N-R) 迭代法

由上面的有限元分析方程可知，方程(9-13)为非线性方程组，目前主要的求解方法有

- 直接迭代法
- Newton-Raphson (N-R) 迭代法
- 改进的 N-R 迭代法

下面主要介绍 Newton-Raphson 迭代法。

【求解原理】9.1.4(1) Newton-Raphson (N-R) 迭代法的原理

Newton-Raphson (N-R) 迭代法(iteration algorithm)的主要思路是进行分步逼近计算，在每一载荷增量步中，采用已得到的位移值带入并求得与位移相关的弹塑性矩阵的值，再进行线性计算，通过反复调整计算的载荷值与设定的载荷值的差来进行迭代，使其达到设定的精度。

因此，将总载荷分成一系列载荷段，在每一载荷段内进行非线性方程的迭代，该方法的主要步骤如下。

Step1： 将总外载 $\bar{\mathbf{P}}$ 分为一系列载荷段，

$$\bar{\mathbf{P}}^{(1)}, \bar{\mathbf{P}}^{(2)}, \bar{\mathbf{P}}^{(3)}, \dots, \bar{\mathbf{P}}^{(n)}$$



Step2：在每一载荷段中进行多步循环迭代，直到在该载荷段内收敛。

其中每一步的迭代计算公式为

$$\mathbf{K}_\tau^{ep}(\mathbf{q}_i^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{q}_i^{(k)} = \Delta \mathbf{P}_i^{(k)} \quad (9-19)$$

上式中的上标(k)表示第 k 个载荷步，下标 i 表示该载荷步中的第 i 次迭代；公式(8-18)中的

$\Delta \mathbf{P}_i^{(k)}$ 为

$$\Delta \mathbf{P}_i^{(k)} = \mathbf{P}_{i+1}^{(k)} - \mathbf{P}_i^{(k)} \quad (8-20)$$

Step3：进行所有载荷段的循环迭代，并将结果进行累加，如图 9-4 所示。

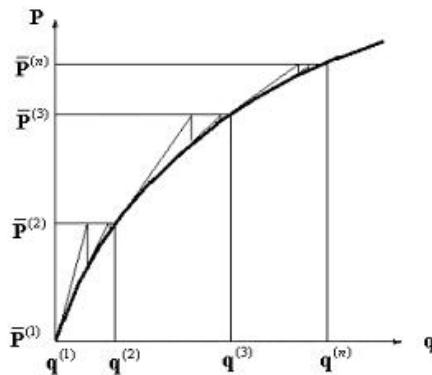


图 9-4 进行所有载荷段内的迭代计算

由于 Newton-Raphson (N-R) 迭代法需要每次重新形成切线刚度矩阵(tangent stiffness matrix)并进行求逆，带来较大的计算量；如果切线刚度矩阵总是采用初始的，并且保持不变，则可以大大减少计算量，这种方法叫做修正的 Newton-Raphson (modified N-R) 迭代法，如图 9-5 所示。

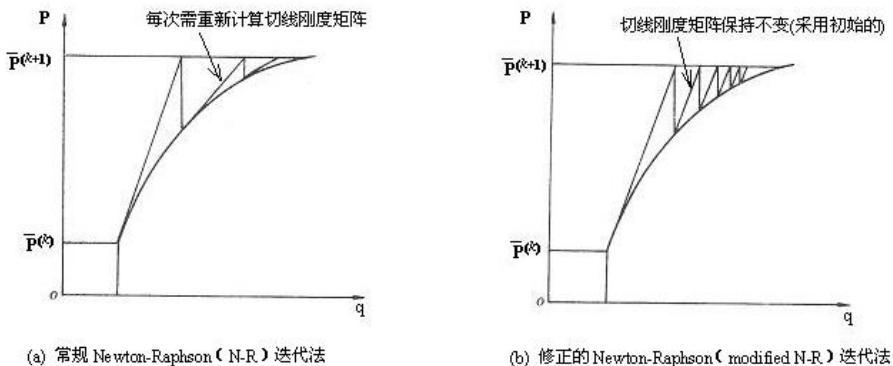


图 9-5 Newton-Raphson 迭代法与修正的 Newton-Raphson 迭代法

9.2 三杆结构塑性卸载后的残余应力分析

【ANSYS 算例】9.2(1) 三杆结构塑性卸载后的残余应力计算(GUI)

三杆结构以及受力状况见图 9-6，杆件的材料为冷轧钢，屈服极限为 σ_y ，有关的材料

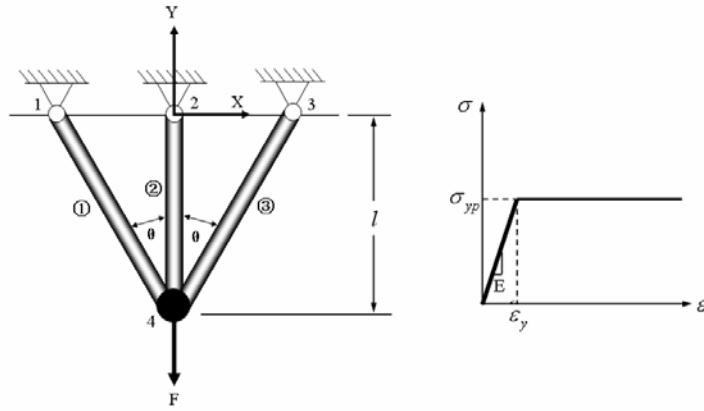


及几何参数如表 9-1 所示, 分析该结构在小于弹性极限的载荷 $F_1 = 51,961.5 \text{ lb}$ 作用下的位移, 以及在三杆全部进入塑性状态($F_2 = 81,961.5 \text{ lb}$)并卸载后的残余应力。为与文献结果进行比较, 这里采用了英制单位。

表 9-1 模型的材料及几何参数

材料性能	几何参数	边界条件
弹性模量 $E = 3 \times 10^7 \text{ psi}$ 屈服极限 $\sigma_y = 30,000 \text{ psi}$	$A = 1 \text{ in}^2$, $l = 100 \text{ in}$ $\theta = 30^\circ$	$F_1 = 51,961.5 \text{ lb}$ $F_2 = 81,961.5 \text{ lb}$

注: F1 及 F2 的值是通过理论分析进行反算得到的。



(a) 三杆结构以及受力状况 (b) 材料的行为

图 9-6 三杆结构的受力状况及材料行为

解答: 采用 2D 的计算模型, 使用平面杆单元 2-D Spar (or Truss) Elements (LINK1), 材料采用双线性弹塑性模型, 进行加载以及卸载过程的分析。

建模的要点:

- ①首先定义分析类型, 并选择相应单元, 输入材料的双线性弹塑性模型(包括: 弹性模量、屈服极限);
- ②生成对应节点以及单元;
- ③定义位移边界条件, 以及施加载荷; 对于卸载, 应施加零载荷(即施加叠加后的状态载荷);
- ④在后处理中, 用命令<*GET>来提取相应位置的计算分析结果。

最后将计算结果与参考文献所给出的解析结果进行比较, 见表 9-2。

表 9-2 ANSYS 模型与文献解析结果的比较

	Reference 9.2(1)的结果	ANSYS 结果	两种结果之比
第 4 点处的垂直位移 $F_1, \text{ in}$	-0.07533	-0.07534	1.000
中间杆单元的残余应力, psi	-5,650.	-5,650	1.000

Reference 9.2(1) Crandall S H, Dahl N C. An Introduction to the Mechanics of Solids, New York: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1959, 234

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname:



ThreeSpar (设置工作文件名) → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Link: 2d
spar 1 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(4) 定义实常数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Real Constants → Add/Edit/Delete → Add... → select Type 1
Link1 → OK → input Real Constants Set No.: 1, AREA: 1 → OK (返回到 Real Constants 窗口) → Close (关闭 Real Constants 窗口)

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → input EX:30e6 (定义弹性模量) → OK , Nonlinear (定义屈服应力) → Elastic → Rate Independent → Kinematic Hardening Plasticity → Mises Plasticity → Bilinear → Yield Stss: 30000 → OK → Close (关闭材料定义窗口)

(6) 定义参数及指定角度单位

ANSYS Utility Menu: Parameters → Scalar Parameters ... (出现 Scalar Parameters 对话框) → Selection
下输入 L=100 → Accept → 输入 THETA=30 → Accept → Close

ANSYS Utility Menu: Parameters → Angular Units ... → Units for angular: Degrees DEG → OK

ANSYS Utility Menu: Parameters → Scalar Parameters ... (出现 Scalar Parameters 对话框) → Selection
下输入 XLOC=L*TAN(THETA) → Accept → Close

(7) 生成有限元模型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → NODE
Node number: 1; X, Y, Z Location in active CS: -XLOC, 0 → Apply → NODE Node number: 3; X,
Y, Z Location in active CS: XLOC, 0 → OK → Nodes- Fill between Nds → 选择节点 1 和 3 → OK (出现 Create Nodes Between 2 Nodes 对话框) → OK → Nodes- In Active CS → NODE Node number: 4; X, Y,
Z Location in active CS: 0, -L → OK → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes (出现 Elements ... 对话框) → 选择节点 1 和 4 → Apply → 选择节点 2 和 4 → Apply → 选择节点 3 和 4 → OK

(8) 设置求解输出控制

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Load Step Opts → Output Ctrls → Solu Printout (出现 Solution Printout Controls 对话框) → FREQ Print frequency: Every Nth substep; Value of N: 1 → OK

(9) 模型加约束及载荷

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural →
Displacement → On Nodes → 选择节点 1、2 和 3 → OK (出现 Apply U, ROT on Nodes 对话框) → Lab2: All
DOF; VALUE: 0; → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural →
Force/Moment → On Nodes → 选择节点 4 → OK (出现 Apply F/M on Nodes 对话框) → Lab: FY; VALUE:
-51961.5 → OK

(10) 求解(施加 F1 求解)

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS (出现 Solve Current Load Step 对话框, 关闭 /STATUS Command 记事本) → OK → Close (关闭出现的 Solution is done 消息框)

(11) 提取节点 4Y 方向的位移, 赋给变量 DEF

ANSYS Utility Menu: Parameters → Get Scalar Data ... (出现 Get Scalar Data 对话框) → 选择 Result
data, Nodal results → OK (出现 Get Nodal results Data 对话框) → Name: DEF; Node number N: 4; Reseluts



data to be retrieved: DOF solution, UY →OK

(12) 设置求解及输出控制

ANSYS Main Menu: Finish

ANSYS Main Menu: Solution →Analysis Type →Sol'n Controls →Basic (出现 Solution Controls 对话框) →Time Control, Automatic time stepping: On; Number of substeps: 10; Write Items to Results File: All solution items; Frequency: Write every Nth substep, N: 10→OK

(13)施加载荷

ANSYS Utility Menu: Plot →Multi-Plots

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment→ On Nodes →选择节点 4 → OK(出现 Apply F/M on Nodes 对话框)→Lab: FY; VALUE: -81961.5→OK

(14)求解(施加 F2 求解)

ANSYS Main Menu: Solution →Solve →Current LS (出现 Solve Current Load Step 对话框, 关闭 /STATUS Command 记事本) →OK →Close (关闭出现的 Solution is done 消息框)

(15) 设置求解及输出控制

ANSYS Main Menu: Solution →Analysis Type →Sol'n Controls →Basic (关闭出现的 Warning 对话框, 出现 Solution Controls 对话框)→Time Control, Number of substeps: 5; Frequency: Write every Nth substep, N: 5 →OK

(16)施加载荷

ANSYS Utility Menu: Plot →Multi-Plots

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment→ On Nodes →选择节点 4 → OK(出现 Apply F/M on Nodes 对话框)→Lab: FY; VALUE: 0→OK

(17)求解(卸载求解)

ANSYS Main Menu: Solution →Solve →Current LS (出现 Solve Current Load Step 对话框, 关闭 /STATUS Command 记事本) →OK →Close (关闭出现的 Solution is done 消息框)

(18)提取单元 2 的应力, 赋给变量 STRSS

ANSYS Main Menu: General Postproc →Element Table →Define Table (出现 Element Table Data 对话框) →press Add ... (出现 Define Additional Element Table Items 对话框) → Lab: STRSS; Item, Comp: LS, 1 →OK →CLOSE (关闭 Element Table Data 对话框)

ANSYS Utility Menu: Parameters →Get Scalar Data ... (出现 Get Scalar Data 对话框) →选择 Result data, Elem table data→OK (出现 Get Element Table Data 对话框) →Name: STRSS; Element number N: 2→OK

(19)列出所有参数值

ANSYS Utility Menu: List →Status→Parameters →All Parameters (出现一文本文件列出所有的参数值)

(20) 退出系统

ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】9.2(2) 三杆结构塑性卸载后的残余应力计算(命令流)

针对【ANSYS 算例】9.2(1)的 GUI 操作, 提供完整的命令流。

解答: 给出的命令流如下。

```
%%%%%% [ANSYS 算例]9_2(2) %%% begin %%%%
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,STATIC   !设置为静力结构分析
```



```
ET,1,LINK1      !选取单元类型 1(单向杆单元)
R,1,1          !设置实常数, 截面积为 1
MP,EX,1,30E6   !定义材料的弹性模量(1 号材料)
TB,BKIN        !设置双线性随动硬化模型
TBTEMP,100     !定义数据表的设置温度 100
TBDATA,1,30000 !定义数据表(仅为 1 个数), 这里为屈服应力值 30000
L=100          !设置一个参数 L
*AFUN,DEG      !设置角度函数的单位为度
THETA=30       !设置一个参数 THETA
XLOC=L*TAN(THETA) !进行函数计算
N,1,-XLOC     !生成节点 1
N,3,XLOC      !生成节点 3
FILL           !在 1 号节点与 3 号节点之间进行填充生成(即生成 2 号节点)
N,4,-L         !生成节点 4
E,1,4 $E,2,4 $E,3,4 !分别由两节点生成单元(这里的$符号为将多行命令流写成一行)
OUTPR,,1       !设置输出
D,1,ALL,,,3   !对节点 1,2,3 施加所有固定的位移约束
F,4,FY,-51961.5 !在节点 4 处施加力 FY=-51961.5
FINISH         !前处理结束
/SOLU          !进入求解模块
SOLVE         !求解
FINISH         !退出求解模块
/POST1         !进入一般的后处理
BOT_NODE = NODE (0,-100,0)      !获取位置为(0,-100,0)的节点编号, 并赋值给 BOT_NODE
*GET,DEF,NODE,BOT_NODE,U,Y    !获取 BOT_NODE 节点处的位移 UY, 并赋值给 DEF
FINISH         !结束后处理
/SOLU          !进入求解模块
AUTOTS,ON     !将自动加载步长开关打开
!下面针对加载过程
NSUBST,10     !设定载荷子步的数量, 10 步
OUTPR,,10     !结果输出的设置, 每 10 步输出一次
F,4,FY,-81961.5 !在节点 4 处施加力 FY=-81961.5
SOLVE         !求解
!下面针对卸载过程
!(ANSYS 是按照节点载荷的状态来进行加载的, 卸载时的节点载荷状态为无载荷, 这时应加零载)
!(对于非线性计算, ANSYS 将自动将后面的子步计算结果往前一次计算结果上进行叠加)
NSUBST,5      !设定载荷子步的数量, 5 步
OUTPR,,5      !结果输出的设置, 每 5 步输出一次
F,4,FY        !在节点 4 处施加力 FY=0, 实际上是卸载
SOLVE         !求解
FINISH         !结束计算
/POST1         !进入一般的后处理
ETABLE,STRS,LS,1 !针对杆单元,建立单元列表 STRS,通过 LS 及特征号 1 来获得单元的轴向应力
*GET,STRSS,ELEM,2,ETAB,STRS !在单元列表 STRS 中, 提取 2 号单元的应力, 并赋值给 STRSS
```



```
*status,parm          !列出所有参数的实际内容  
%%%%%% [%ANSYS 算例]9_2(2) %%% end %%%%%
```

9.3 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性分析

【ANSYS 算例】9.3(1) 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性计算(GUI)

一个左端固定的悬臂梁见图 9-7(a), 厚度为 1cm, 在它的右段中点上施加有一个集中力, 该集中力为循环载荷见图 9-7(b), 悬臂梁的材料为多线性弹性材料, 材料的弹性模量为 20000 N/cm^2 , 实验获得的该材料的非线性应力-应变行为见表 9-3, 分析该悬臂梁在循环载荷作用下的观测点 P 的水平方向上的应力应变历程。

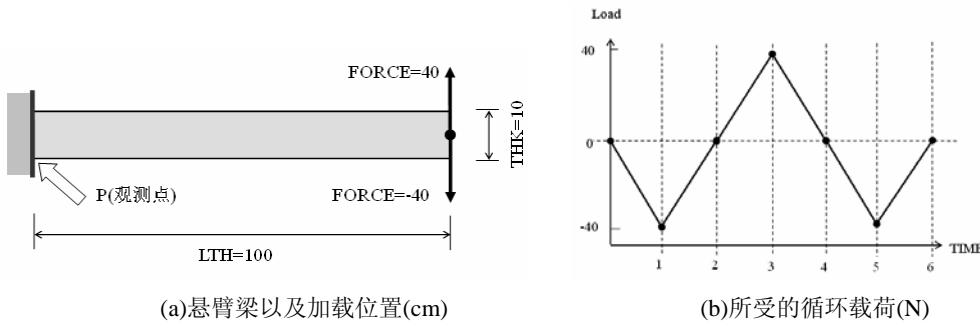


图 9-7 一个悬臂梁以及加载历程

表 9-3 材料的应力-应变行为实验数据

	实验点 1	实验点 2	实验点 3	实验点 4	实验点 5
应变	0	0.004	0.015	0.03	0.08
应力(N/cm^2)	0	80	160	210	280

解答: 为考察悬臂梁根部 P 点的应力-应变历程, 采用 2D 的计算模型, 使用平面单元 PLANE42, 材料采用多线性弹塑性模型(mkin), 进行循环加载过程的分析。

建模的要点:

- ① 设置几何以及材料参数,
- ② 输入材料的多线性弹塑性模型(包括: 弹性模量、屈服极限), 见图 9-8;
- ③ 通过设置 time 来给出加载历程, 每次加载都输入当时的状态载荷值, 不是增量加载, 每次加载后, 必须进行计算, 再进入下一步的计算;
- ④ 在时间后处理中, 通过设置几何位置来查询对应的 P 观测点的节点编号, 并设置观测点的应力显示变量(2 号变量)以及塑性应变为显示变量(3 号变量), 最后将 3 号变量设置为横轴, 画出 2 号变量随 3 号变量的变化曲线见图 9-9, 可以看出, 该材料具有非常明显的 Bauschinger 效应(即正向屈服与反向屈服之和是单拉实验屈服极限的 2 倍)。

给出的基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)过程如下。

(1) 进入 ANSYS (设定工作目录和工作文件)

程序 → ANSYS → ANSYS Interactive → Working directory (设置工作目录) → Initial jobname
(设置工作文件名) : Beams → Run → OK

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → Structural → OK

(3) 设定不显示时间

ANSYS Utility Menu: PlotCtrls → Window Controls → Window Options... → DATE: No Date or



Time → OK

(4) 定义单元类型

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete... → Add... → Solid: Quad 4node 42 → OK (返回到 Element Types 窗口) → Close

(5) 定义材料参数

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → 输入 EX: 2E4, PRXY: 0.3 (定义弹性模量及泊松比) → OK → 返回 Define Material Model Behavior 窗口 Structural → NonLinear → Inelastic → Rate Independent → Kinematic Hardening Plasticity → Mises Plasticity → Multilinear (Fixed table) → 在 Strain一行中对应 1 至 4 号点输入 0.004、0.015、0.03、0.08 → 在 Curve1 中对应 1 至 4 号点输入 80、160、210、280 → 点击右下角 Graph → OK → Close (关闭材料定义窗口),, 见图 9-8, 观察窗口中的多线性弹塑性模型

(6) 构造模型

生成关键点

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → Keypoints number: 1, X, Y, Z Location in active CS: 0, 0, 0 → Apply → 同样依次输入其他三个关键点 (100, 0, 0)、(100, 10, 0) 与 (0, 10, 0) → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → Through KPs → 用鼠标依次点击 1、2、3、4 关键点, 生成面单元

(7) 网格划分

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → Mesher Opt → Mesher Type : Mapped → OK → 2D Shape Key : Quad → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → size contrls → ManualSize → Lines → Picked Lines → 选择上下两条横边线, Ok → NDIV 设置为 20 → Apply → 选择两条竖边线 → Ok → NDIV 设置为 8 → OK

ANSYS Main Menu: Preprocessor → Meshing → Mesh → Areas → Target Surf → 点击生成面几何体的位置, 显示矩形面被选中 → OK

(8) 模型加约束

ANSYS Main Menu: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement On Lines → 选取左侧边线 (L4) → OK → select Lab2: All DOF(施加全部约束) → OK

(9) 求解设置

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Analysis Options 为 Large Displacement Satic, Number of substeps: 8, Max no. of substeps :25 Min no. Of substeps:2, Frequency 设置为 Write N number of substeps Where N = 10 → OK

(10) 按照时间步施加循环载荷

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Time at end of loadstep:1 → OK

ANSYS Main Menu : Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择右侧边缘中点 (26 号节点) → OK → Lab: Fy, Value: -40 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

ANSYS Utility Menu : Plot → Replot

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Time at end of loadstep: 2 → OK

ANSYS Main Menu : Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择右侧边缘中点 (26 号节点) → OK → Lab: Fy, Value: 0 → OK



ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

ANSYS Utility Menu : Plot → Replot

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Time at end of loadstep: 3 → OK

ANSYS Main Menu : Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择右侧边缘中点 (26 号节点) → OK → Lab: Fy, Value: 40 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

ANSYS Utility Menu : Plot → Replot

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Time at end of loadstep: 4 → OK

ANSYS Main Menu : Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择右侧边缘中点 (26 号节点) → Lab: Fy, Value: 0 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

ANSYS Utility Menu : Plot → Replot

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Time at end of loadstep: 5 → OK

ANSYS Main Menu : Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择右侧边缘中点 (26 号节点) → Lab: Fy, Value: -40 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

ANSYS Utility Menu : Plot → Replot

ANSYS Main Menu : Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → 在 Basic 标签下设置 Time at end of loadstep: 6 → OK

ANSYS Main Menu : Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → 选择右侧边缘中点 (26 号节点) → Lab: Fy, Value: 0 → OK

ANSYS Main Menu: Solution → Solve → Current LS → OK

(11) 计算结果

ANSYS Main Menu: General Postproc → Read Results → Last Set

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape → Def + Undeformed → OK (观察最后变形情况)

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Element solu → Plastic Strain → Equivalent plastic strain → OK (观察累计的等效塑性应变)

ANSYS Main Menu: TimeHist Postpro → 关闭弹出窗口 → Define Variables → Add... → Element Results → OK 在方框中输入 2 → OK 在方框中输入 4 → OK → 在 Item, Comp Data item 中选择 Stress, X-direction SX → OK 返回 Define Time-History Variables → Add... → Element Results → OK 在方框中输入 2 → OK 在方框中输入 4 → OK → 在 Item, Comp Data item 中选择 Strain-plastic, X-dir'n EPPL X → OK → Close

ANSYS Main Menu: TimeHist Postpro → 关闭弹出窗口 → Settings → Graph → Single Variable No. 输入 3 → OK

ANSYS Main Menu: TimeHist Postpro → 关闭弹出窗口 → Graph Variables → Nvar1 中输入 2 → OK 观察观测点 P 上的应力应变历程(SX), 见图 9-9。

ANSYS Utility Menu: File → Exit → Save Everything → OK

【ANSYS 算例】9.3(2) 悬臂梁在循环加载作用下的弹塑性计算(命令流)

针对【ANSYS 算例】9.3(1)的 GUI 操作, 提供完整的命令流。

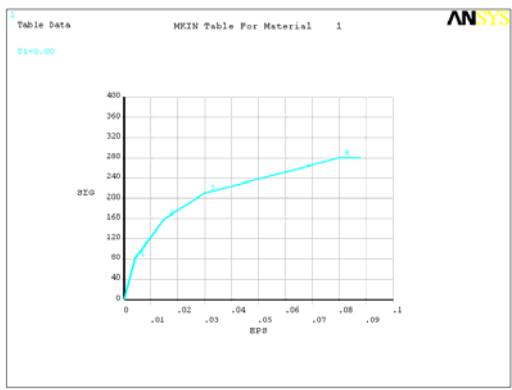


图 9-8 多线性弹塑性模型

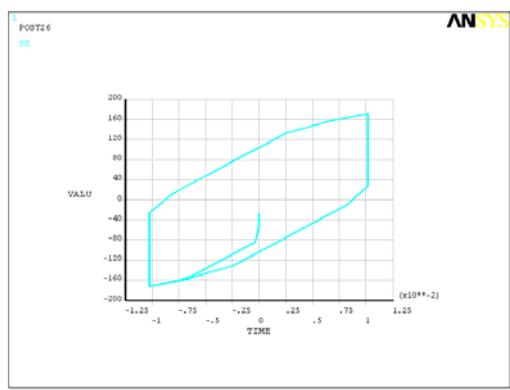


图 9-9 观测点 P 上的应力应变历程(SX)

解答：给出的命令流如下。

```
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]9_3(2) %%% begin %%%%%%%%
/PREP7          !进入前处理
/PLOPTS,DATE,0    !设置不显示日期和时间
!=====设置几何以及材料参数
FORCE=40          !设置力参数
LTH=100           !设置悬臂梁的长度
THK=10            !设置梁的高度
EXX=20000         !设置弹模
sts1=80           !设置屈服应力
!=====以下为多线性弹塑性模型的应力-应变数据点
stn1=sts1/exx
sts2=160
stn2=0.015
sts3=210
stn3=0.03
sts4=280
stn4=0.08
mp,ex,1,EXX
mp,nuxy,1,0.3
tb,mkin,1          !设置多线性随动硬化模型
tbtemp,,strain
tbdata,,stn1,stn2,stn3,stn4  !多线性弹塑性模型的应变数据点
tbtemp,,
tbdata,,sts1,sts2,sts3,sts4  !多线性弹塑性模型的应力数据点
TBPLOT, mkin,1          !图形显示多线性弹塑性模型实际输入曲线
!=====设置单元以及几何
ANTYPE,STATIC        !设置为静力结构分析
ET,1,PLANE42         !选取单元类型 1(平面单元 PLANE42)
K,1,0,0,0             !生成几何点 No.1
K,2,LTH,0,0           !生成几何点 No.2
K,3,LTH,THK,0         !生成几何点 No.3
```



```
K,4,0,THK,0          !生成几何点 No.4
A,1,2,3,4           !由 4 个几何点连成几何面 No.1
LESIZE,1,,20,,,1    !对线 1, 画分 20 段(单元划分前的设置)
LESIZE,3,,20,,,1    !对线 3, 画分 20 段(单元划分前的设置)
LESIZE,2,,8,,,1     !对线 2, 画分 8 段(单元划分前的设置)
LESIZE,4,,8,,,1     !对线 4, 画分 8 段(单元划分前的设置)
MSHAPE,0,2D         !设置四边形单元
MSHKEY,1            !设置映射划分
AMESH,1              !对面 No.1 进行网格划分
DL,4, ,ALL,         !对几何线 4 进行完全约束
FINISH               !结束前处理
!=====在求解模块中, 按照时间历程施加外力, 进行求解
/SOLU                !进入求解模块
nlgeom,on            !打开几何大变形的开关
outres,all,-10       !每 10 步存储一次计算结果
nsubst,8,25,2         !每一个步长设置 8 个子步, 最大 25 步, 最小 2 步
NP=NODE(100,5,0)      !获取几何位置为(100,5,0)所对应的节点号码, 赋值给 NP
!以下按照时间步来施加循环载荷
time,1                !时刻 1(第 1 个时间步)
F,NP,FY,-FORCE       !在节点 NP 上施加力 FY=-FORCE
solve                 !求解
time,2                !时刻 2(第 1 个时间步)
F,NP,FY,0              !在节点 NP 上施加力 FY=0
solve                 !求解
time,3                !时刻 3(第 1 个时间步)
F,NP,FY, FORCE        !在节点 NP 上施加力 FY=FORCE
solve                 !求解
time,4                !时刻 4(第 1 个时间步)
F,NP,FY,0              !在节点 NP 上施加力 FY=0
solve                 !求解
time,5                !时刻 5(第 1 个时间步)
F,NP,FY,- FORCE       !在节点 NP 上施加力 FY=-FORCE
solve                 !求解
time,6                !时刻 6(第 1 个时间步)
F,NP,FY,0              !在节点 NP 上施加力 FY=0
solve                 !求解
!=====进入一般的后处理模块
/post1                !进入一般的后处理
set,last               !读取最后一步的计算结果 .
PLDISP,2              !图形显示计算结果的变形后与前的形貌
PLESOL,nl,epeq        !图形显示累计的等效塑性应变
FINISH                !结束后处理
!=====进入时间历程的后处理模块
/post26               !进入时间历程的后处理
KEY= NODE (10,0,0)     !获取位置为(10,0,0)的节点编号, 并赋值给 KEY
```



```
ELM = ENEARN (KEY)      ! 获取最接近节点为 KEY 的单元号，并赋值给 ELM  
ESOL,2,ELM,KEY,S,X,     ! 将 ELM 号单元的 KEY 号节点的应力 SX 设置为 2 号变量  
ESOL,3,ELM,KEY,EPPL,X,   ! 将 ELM 号单元的 KEY 号节点的弹塑性应变 EPPL 设置为 3 号变量  
XVAR,3                  ! 将 3 号变量设置为横坐标  
PLVAR,2                 ! 图形显示 2 号变量随时间变化的曲线  
FINISH                  ! 结束后处理  
!%%%%%%%%%%%%% [ANSYS 算例]9_3(2) %%% end %%% %%% %%
```

9.4 习题

9-1 对于 z 方向受约束的平面应变状态，在体积不变的条件下(即取 $\mu=0.5$)，证明其 Mises 屈服条件为

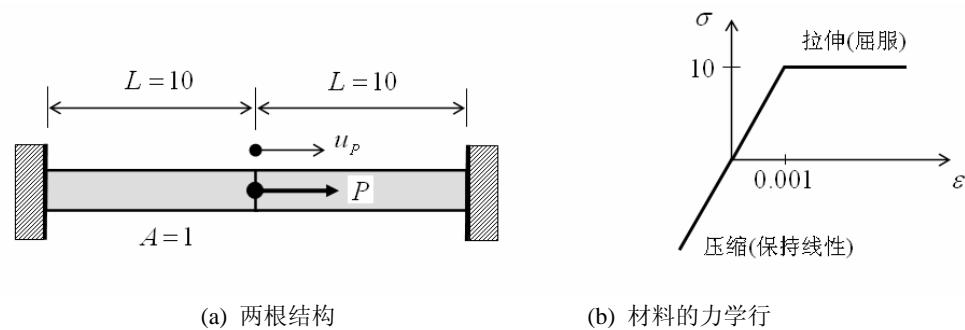
$$\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2$$

9-2 等倾八面体表面上的剪应力为

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

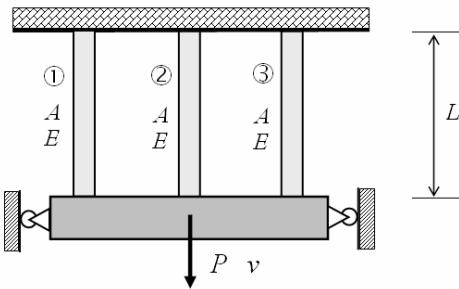
其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为三个主应力，工程中可以基于 τ_8 来描述屈服状态，若单拉试验测得某一材料的拉伸屈服应力为 σ_s ，试求该材料屈服时用 τ_8 表示的屈服临界值。

9-3 有一个由两根杆焊接组成的结构被固定在刚性墙上，见题图 9-3(a)，在杆的中部作用有集中载荷 P ，材料的力学行为见题图 9-3(b)；假定载荷从零开始，连续的载荷增量为 $\Delta P_1 = 20$ ， $\Delta P_2 = 10$ ， $\Delta P_3 = -30$ ；求出中点的载荷位移关系 $P \sim u_P$ 。



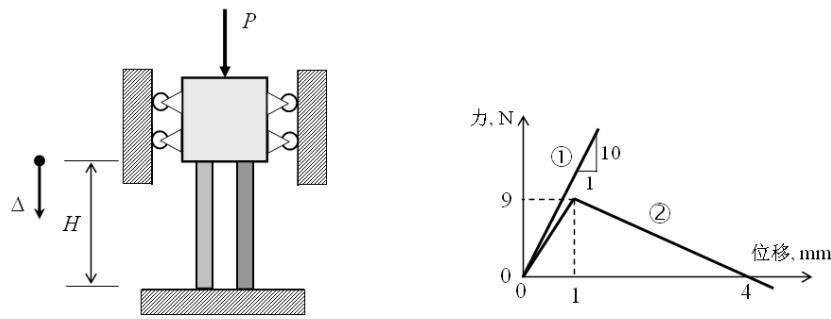
题图 9-3

9-4 有一个由三杆组成的结构见题图，三杆的水平连杆为刚体，当垂直加载移动时，刚体保持水平；假定三根垂直杆都是理想弹塑性体，且 $A = 1, E = 1, L = 2$ ，三根杆的屈服点载荷分别为 $F_1 = 2, F_2 = 4, F_3 = 6$ ，试计算该结构的载荷位移曲线 $P \sim v$ ，并确定整个结构的极限载荷。



题图 9-4

9-5 图示为一个滑块压在两根支撑杆上, $H = 100\text{mm}$, 两根支撑杆的载荷位移曲线如题图 9-5(b)所示, 当加载 $P = 24\text{N}$ 时, 计算加载过程的 $P \sim \Delta$ 曲线。



题图 9-5



参考文献

- [1] Zienkiewicz O C and Cheung Y K, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, London: McGraw-Hill 1967.
- [2] Zienkiewicz O C, The finite element methods, from intuition to generality, Applied Mechanics Reviews, 1970, 23(2).
- [3] Courant R, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bulletin of American Mathematical Society, 1943, 49, 1-23
- [4] Turner M J, Clough R W, Martin H C and Topp L J, Stiffness and deflection analysis of complex structures, Journal of Aeronautical Sciences, 1956, 23:805-824.
- [5] Clough R W. Thoughts about the origin of the finite element method. Computers & Structures, 2001, 79:2029-2030
- [6] Clough R W. Early history of the finite element method from the view point of a pioneer, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004, 60:283 - 287
- [7] Argyris J H, Energy Theorems and Structural Analysis, London: Butterworth, 1960 (根据 Aircraft Enginnering, 1954 Oct- 1955 May 重印)
- [8] 胡海昌, 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理, 物理学报, 1954, 10(3),259.
- [9] 钱伟长, 变分法及有限元, 北京: 科学出版社, 1980.
- [10] Siefkes T. Upfront CAE in the rail industry - Promises, Challenges and Lessons Learnt. Keynote Presentations, European HyperWorks Technology Conference 2007
- [11] Clemen G. HyperWorks applications in aerospace. Technical session 8: Safety, European HyperWorks Technology Conference 2007
- [12] Astier V. A finite element model of the shoulder for many applications: trauma and orthopaedics. Technical session 9: Biomechanics, European HyperWorks Technology Conference 2007
- [13] Hutton D V(美)著, Fundamentals of Finite Element Analysis(缩编版), 重庆: 重庆大学出版社, 2007
- [14] Cook R D(美)等, 有限元分析的概念与应用(第4版, 关正西等译), 西安: 西安交通大学出版社, 2007
- [15] 陆明万, 张雄, 葛东云, 工程弹性力学与有限元法, 北京: 清华大学出版社, 2005
- [16] Kattan P I(德), MATLAB 有限元分析与应用(韩来彬译), 北京: 清华大学出版社, 2004
- [17] 徐芝纶, 弹性力学(上), 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [18] 陆明万, 罗学富, 弹性理论基础, 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [19] Zienkiewicz O C(英)等. 有限元方法第1卷: 基本原理(第5版, 曾攀等译), 北京: 清华大学出版社, 2008
- [20] Moaveni S(美)著, 有限元分析—ANSYS 理论与应用(第3版, 王崧等译), 北京: 电子工业出版社, 2008
- [21] Wüst A. Optimization techniques in the development of a lower bumper stiffener for pedestrian protection. Technical session 1: Optimization, European HyperWorks Technology Conference 2007
- [22] 曾攀. 有限元分析及应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
- [23] Babuska I and Dorr M R, Error estimates for the combined h and p versions of finite element method. SIAM J. Numer. Analysis, 1981, 18(3):257-277
- [24] Oden J T et al. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989, 77:113-180
- [25] Chandrupatla T R(美)等. 工程中的有限元方法(第3版, 曾攀译), 北京: 清华大学出版社, 2006



附录 A MATLAB 程序的基本操作

A.1 MATLAB 菜单与窗口

典型的 MATLAB 窗口如图 A-1 所示，主要组件包括：

- (1)菜单条：包含一些常用的命令，如文件调入、存贮、编辑、调试等操作。
- (2)当前目录：显示当前的工具目录，用户可进行修改或重新设置。
- (3)当前目录窗口：显示工作目录内所有的文件及其类型。
- (4)工作内存状态窗口：显示所定义、赋值或计算得到的所有变量的内容。
- (5)命令窗口：用户可直接输入变量及操作 MATLAB 命令。
- (6)命令历史记录：显示已进行过的 MATLAB 操作。它还显示当前操作的记录。

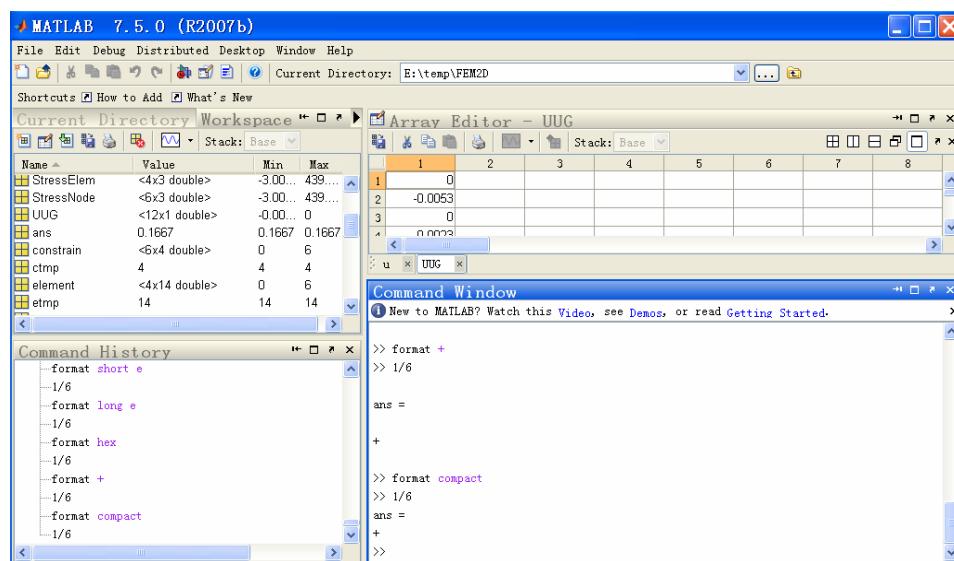


图 A-1 MATLAB 操作界面

几点说明：

- (1)用户在工作时，相应设定自己的工作目录，并将自己编制的各个子程序(function)及数据文件都放在该工作目录中。
- (2)若需将准备的数据以文件的形式调入，可以使用以下 load 命令，例如
 `>>load E:\matlabFEM\FEM2D\node.txt`
- (3)注释采用%符号；
- (4)在输入或运算后，MATLAB 将立即显示出相应的结果，若不需显示，则在命令结尾处使用“;”符号；例如
 `>>x=[1 2 3 4];`
- (5)若需要查询 help，用户可以在 MATLAB 命令窗口输入 help 命令即可。

A.2 MATLAB 的工作文件与 M 文件

启动 MATLAB 后，首先在 Current Directory 窗口上将工作目录设置到用户指定的位置上，对一些简单的操作，用户可直接在 MATLAB 的命令窗口输入变量和发布命令。不过，



对一些比较长的程序；可能就需要用到 M 文件

用户可用命令 `save ->文件名` 将工作空间保存到一个文件中。然后，用户可以命令 `load +文件名` 从硬盘中将这个文件读入内存中。在一段时间内，用户可能创建了许多的文件，此时可用命令 `dir` 列出该目录的所有内容。对于一些简单的操作，用户可直接在命令窗口输入变量和 MATLAB 命令。不过，当用户写的程序较长时，最好使用 M 文件。

M 文件的后缀为.m，它是用户根据需要采用文本编辑器或利用 MATLAB 自身的编辑器将自己的一系列 MATLAB 程序集成的文件。为了建立 M 文件，应先打开 M 文件编辑器，这时 MATLAB 会打开一个新窗口，用户可在里面输入程序。在输入程序时，用户将注意到 MATLAB 会在窗口的左侧一列赋予行编号，这便于用户调试自己的程序。应注意的是，不要使自己的文件名与 MATLAB 的命令同名。可在 MATLAB 的命令窗口中输入 `exist('文件名')` 来检查是否与 MATLAB 命令同名。若要运行自己的程序，可以点击 Debug->Run(或 F5 键)。

A.3 数据精度及显示格式

一般情况下，MATLAB 仅显示四位数字，若想显示更多的有效数字，先输入 `format long` 命令，再作计算或显示即可，其它的格式见表 A-1。

表 A-1

命令	x=1/6 的显示结果	解释
<code>format short</code>	0.1667	显示四位数字——默认模式
<code>format long</code>	0.1666666666666667	显示 14 位有效数字
<code>format rat</code>	1/6	显示分式形式
<code>format bank</code>	0.17	显示两位有效数字
<code>format short e</code>	1.6667e-001	显示带有四位有效数字的科学数字表示法
<code>format long e</code>	1.666666666666667e-001	显示带 14 位有效数字的科学数字表示法
<code>format hex</code>	3fc5555555555555	显示十六进制数格式
<code>format +</code>	+	根据计算结果的正负或零显示+，-和空格
<code>format compact</code>		抑制输出结果中的空格

MATLAB 提供了用于显示文本或数值的命令 `disp`；例如，对于数组 $x = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$ ，有以下的显示命令。

```
>>x=[1 2 3 4]; %数组的赋值  
>>disp(x) %显示 x 的内容  
1 2 3 4 5  
>> disp('Results')  
Results
```

注意，用户想显示的文本必须用单引号(') 引起来。

MATLAB 中的 `fprintf` 显示命令具有更大的灵活性；既可以用它来显示文本，也可以用它来显示所需的有效数字，而且还可以用特定的格式字符如\n 和\t 来控制分行和缩进，例如

```
>>x=10; %对 x 赋值  
>> fprintf("The value of x is %g \n", x) %显示字符以及 x 值
```

The value of x is 10



A.4 基本的数据定义

下面给出几种常用的基本数据赋值。

【标量】

```
>> x=5 %常数的直接赋值  
x =  
5
```

【数组】

```
>>y=0:20:100 %在数据范围内的增量赋值  
y =  
0 20 40 60 80 100  
>>z=10:-2:0 %在数据范围内的减量赋值  
z =  
10 8 6 4 2 0
```

【矩阵】

```
>> A=[5 1 3; 8 3 4; 2 6 9] %一个 3X3 矩阵的直接赋值  
A =  
5 1 3  
8 3 4  
2 6 9
```

【字符串】

```
>> s='matrix operation' %字符串的赋值  
s =  
matrix operation  
>>[p,q]=size(s) %计算字符串(可以看成为数组)的维数  
p =  
1  
q =  
16  
>>s(6) %查询第 6 个字符串(可以看成为数组)的内容  
ans =  
x
```

A.5 数据运算

【常数或变量】

对于常数或变量，常用的运算操作符见表 A-2。

表 A-2 MATLAB 基本的常量操作符

操作	符号	例如： x=7, y=6	结果
加	+	x+y	13
减	-	x-y	1
乘	*	x*y	42
除	/	(x+y)/2	6.5



【数组的元素运算】

对于数组中的元素, MATLAB 提供了非常方便的直接操作运算功能, 常用的运算操作符见表 A-3。

表 A-3 MATLAB 的元素运算符

操作	数学运算	元素间等价的运算符
加	+	+
减	-	-
乘	*	.*
除	/	. /
幂	^	. ^

下面给出几个进行数组中对应元素运算的实例。

```
>>A=[1 2 3 4 5];
>>B=[2 4 6 8 10];
>>C=B+A
C =
    3     6     9    12    15
>>D=B.*A          %对两个数组的元素之间进行直接的相乘
D =
    2     8    18    32    50
>>E=B./A          %对两个数组的元素之间进行直接的相除
E =
    2     2     2     2     2
>>F=[A(1:3) B(3:5)]      %取某一段数组进行赋值
F =
    1     2     3     6     8    10
```

【矩阵运算】

对于矩阵, MATLAB 提供了非常方便的直接操作运算功能, 常用的运算操作符见表 A-4。

表 A-4 MATLAB 的矩阵运算操作符

操作	符号或命令	已知矩阵 A 和矩阵 B
加	+	A+B
减	-	A-B
乘	*	A*B
倒置	矩阵名'	A'
求逆	inv	inv(A)
行列式	det(矩阵名)	det(A)
特征值	eig(矩阵名)	eig(A)
矩阵左除 (用高斯消元法求解线性方程组)	\	A\B



假设，有一个线性方程组

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2 \end{array} \right\} \quad (\text{A-1})$$

下面给出几个进行矩阵运算以及求解的算法。

```
>>A=[4 2 6;1 2 3;8 6 2] %输入一个 3X3 的系数矩阵  
A =  
4 2 6  
1 2 3  
8 6 2  
  
>>B=[4;8;2] %输入一个 3X1 的系数列阵  
B =  
4  
8  
2  
  
>>x=A\B %由方程 A*x=B 求解未知量 x  
x =  
-2.6111  
3.3889  
1.2778  
  
>>INV_A=inv(A) %求 A 矩阵的逆  
INV_A =  
0.1944 -0.4444 0.0833  
-0.3056 0.5556 0.0833  
0.1389 0.1111 -0.0833  
  
>>y=inv(A)*B %由方程 A*y=B 求解未知量 y=inv(A)*B  
y =  
-2.6111  
3.3889  
1.2778  
  
>>[v,lambda]=eig(A) %求 A 矩阵的特征值及向量,v 为特征向量,lambda 为特征值  
v =  
-0.6388 -0.4912 0.6004  
-0.2893 -0.2874 -0.7997  
-0.7129 0.8223 -0.0063  
  
lambda =  
11.6023 0 0  
0 -4.8752 0  
0 0 1.2729
```

A.6 MATLAB 函数



MATLAB 提供了完整的内部函数,若有一个数组 $\text{Mass}=[1102 \ 115 \ 99 \ 106 \ 103 \ 95 \ 97 \ 102 \ 98 \ 96]$, 利用 MATLAB 内部函数对该数组的处理见表 A-5。

表 A-5 工程分析中常用的一些 MATLAB 函数

函数	说明	举例	结果
Sum	数组求和	sum(Mass)	1013
mean	计算数组的平均值	mean(Mass)	101.3
max	求数组中的最大值	Max(Mass)	115
Min	求数组中的最小值	sin(Mass)	95
std	计算数组的标准差	std(Mass)	5.93
sort	按升序对数组排序	sort(Mass)	95 96 97 98 99 102 103 106 115
pi	圆周率 $3.141\ 592\ 653\ 589\ 7$	pi	3.1415926535897
tan	正切函数, 单位必须是弧度	tan(pi/4)	1
cos	余弦函数, 单位必须是弧度	cos(pi/2)	0
sin	正弦函数, 单位必须是弧度	sin(pi/2)	1

其它的 MATLAB 内部函数见表 A-6。

表 A-6 MATLAB 函数

sqrt(x)	x 值的平方根
factorial(x)	阶乘函数, 例如 $\text{factorial}(5) = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$
反三角函数	
acos(x)	反余弦函数, 返回角度值
asin(x)	反正弦函数, 返回角度值
atan(x)	反正切函数, 返回角度值
指数函数与对数函数	
exp(x)	自然指数函数 e^x
log(x)	自然对数函数, x 必须大于 0
log10(x)	以 10 为底的对数函数
log2(x)	以 2 为底的对数函数

下面给出一个算例。

```
>>Weight = [1020 1015 990 1060 1030 950 975 1020 980 960]; % 赋值一个数组  
>> Weight_Average=mean(Weight) % 求数组的平均值  
Weight_Average =  
1000.00  
>> Weight_Standard_Deviation=std(Weight) % 求数组的标准差  
Weight_Standard_Deviation =  
34.5607
```

A.7 循环与逻辑运算

MATLAB 提供的逻辑关系运算符见表 A-7。



表 A-7 MATLAB 的逻辑关系运算符

关系运算符	含义
<	小于
\leq	小于或等于
$= =$	等于
>	大于
\geq	大于或等于
\neq	不等于

下面就几种常用的循环运算给出算例。

【for/end 命令】

例如，要计算 x 等于 2.0, 2.5, 3.0, 3.5 和 4.0 时函数 $y = x^3 + 2$ 的值，它的计算结果是 10, 17.625, 29.00, 44.875 和 66.00；相应的 MATLAB 程序如下。

```
>>x = 2.0; % 赋初值  
>>for i = 1:1:5 % 给出循环计数器的起始值,增量,结束值  
    y = x^3+2; % 计算函数值  
    disp ([x y]) % 显示 x 及 y 值  
    x = x + 0.5; % 自变量累加  
end
```

显示的结果为

```
2      10  
2.5000  17.6250  
3      29  
3.5000  44.8750  
4      66
```

【while/end 命令】

```
>>x = 2.0; % 赋初值  
>>while x<=4.0 % 给出自变量 x 循环的结束值  
    y = x^3+2; % 计算函数值  
    disp ([x y]) % 显示 x 及 y 值  
    x = x + 0.5; % 自变量累加  
end
```

显示的结果为

```
2      10  
2.5000  17.6250  
3      29  
3.5000  44.8750  
4      66
```

【if/else 命令】

例如，假设有一组成绩：65, 82, 40, 87, 80, 59, 65, 77, 72, 59，不仅要显示分数低于 60 分的成绩，还要显示已通过的成绩。相应的 MATLAB 程序如下。

```
>>scores = [65 82 40 87 80 59 65 77 72 59]; % 输入数据(数组)
```



```
>>for i=1:1:10
    if scores ( i ) > 60
        fprintf ('\t %g \t \t \t \t \t PASSING\n', scores(i)); % 满足条件(>60)时的输出
    else
        fprintf ('\t %g \t \t \t \t \t FAILING\n', scores(i)) % 不满足条件(<60)时的输出
    end
end
```

显示的结果为

65	PASSING
82	PASSING
40	FAILING
87	PASSING
80	PASSING
59	FAILING
65	PASSING
77	PASSING
72	PASSING
59	FAILING

A.8 函数拟合

对于一组数据 $[x_i, y_i]_{i=1,2,\dots,n}$ ，若可以用多项式

$$y = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \dots + c_n \quad (\text{A-2})$$

来进行拟合的话，MATLAB 提供了 `polyfit(x,y,n)` 命令，可以进行多项式系数 $(c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ 的最佳拟合。一般可以先将数据点用图形进行显示，初步判断一下它应尊从的函数规律，然后试探选择一个多项式进行拟合。

例如：有一组实验的数据点 $[x_i, y_i]_{i=1,2,\dots,n}$ ，数据见表 A-8。

表 A-8 一组实验的数据点

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	4.8	7.6	9.6	12.8	15.6

通过数据点的分析，可以发现，数据点基本上为线性规律，因此，采用线性函数进行拟合，对照公式(A-2)，取 n=1。相应的 MATLAB 程序如下。

```
>>format compact %
>>x = [1:0.5:3]'; % 以竖排的形式输入 x 的数据
>>y = [4.8 7.6 9.6 12.8 15.6]'; % 以竖排的形式输入 y 的数据
>>Coefficients= polyfit ( x,y,1) % 进行一次函数的拟合，并得到拟合系数 c0 及 c1
```



```
Coefficients =  
5.3600 -0.6400  
>>f = polyval(Coefficients,x) %再根据拟合的函数来计算函数值  
f =  
4.7200  
7.4000  
10.0800  
12.7600  
15.4400  
>>table = [x y f y-f] %将原始的数据点,拟合后的函数计算值,函数的计算差进行列表  
table =  
1.0000 4.8000 4.7200 0.0800  
1.5000 7.6000 7.4000 0.2000  
2.0000 9.6000 10.0800 -0.4800  
2.5000 12.8000 12.7600 0.0400  
3.0000 15.6000 15.4400 0.1600  
>>plot(x,y,'o',x,f,'-') %对数据点(符号 o)以及拟合的函数计算值(符号-)进行图形显示  
>>axis([1 3 4 20]) %调整坐标轴的取值范围
```

得到的图形见图 A-2。

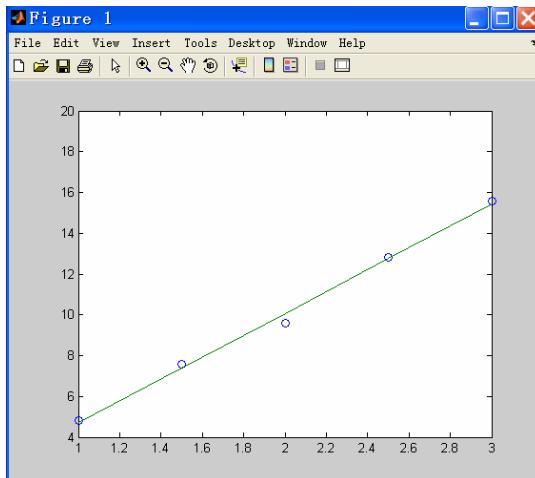


图 A-2 数据点(符号 o)以及拟合的函数计算值(符号-)的图形显示

最后得到的系数为 $c_0 = 5.36$, $c_1 = -0.64$, 则拟合函数为

$$y = 5.36x - 0.64 \quad (\text{A-3})$$

A.9 符号运算

下面给出一个函数, 表 A-9 给出相应的 MATLAB 符号操作的结果。



$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) = x^2 - 5x + 6 \\ f_2(x) = x - 3 \\ f_3(x) = (x+5)^2 \\ f_4(x) = 5x - y + 2x - y \end{array} \right\} \quad (A-4)$$

表 A-9 MATLAB 的符号操作

函数	说明	例子	结果
sym	建立一个符号函数	F1x = sym('x^2-5*x+6')	F1x = x^2 - 5 * x + 6
		F2x = sym ('x-3')	F2x = x - 3
		F3x = sym('(x+5) ^2')	F3x = (x+5)^2
		F4x =sym('5*x-y+2*x-y')	F4x = 5*x-y+2*x-y
factor	因式分解	factor(F1x)	(x - 2) * (x - 3)
simplify	函数简化	simplify(F1x/F2x)	x - 2
expand	将函数展开	expand(F3x)	x^2+10*x+25
collect	表达式化简合并	collect(F4x)	7*x-2*y
solve	求解表达式	solve(F1x)	x= 2 和 x= 3
ezplot(f,min,max)	在 min 和 max 范围	ezplot(F1x,0,2)	绘制函数图 F1x

A.10 图形绘制

这里仅就最常用的 2D 函数图形显示进行介绍, MATLAB 提供的命令 `plot(x, y)`, 可以在平面上绘制 x 和 y 点值。用户可用 `plot(x, y, s)` 命令来设置不同的线型、绘图符号或颜色, 其中 s 是一个定义线型、绘图符号或线颜色的一个字符串, 它取值如表 A-10 所示。

例如, 使用命令 `plot(x,y, 'k * -')` 时, MATLAB 绘出的曲线是黑色实线, 每一数据点用“o”符号, 如果不指定线颜色, MATLAB 自动为它指定一个。

表 A-10 MAILAB 的图形显示的符号表

s	颜色	s	数据符号	s	线类型
b	蓝色	.	点	-	实线
g	绿色	o	圆	:	点
r	红色	x	x 记号	-.	点划线
c	紫色	+	加号	--	虚线
m	品红色	*	星号		
y	黄色	s	方框		
k	黑色	d	菱形符		
		v	下三角符		
		^	上三角符		
		<	左三角符		
		>	右三角符		

下面给出用图形进行数据点的显示, 结果见图 A-3。

```
>>x = 1:0.5:3; % 输入 x 的数据
>>y = [4.8 7.6 9.6 12.8 15.6]; % 输入 y 的数据
```



```
>> plot(x,y,'o') %对数据点(符号 o)进行图形显示  
若给定一个函数
```

$$z = f(x) = (15 - 5x) \cdot (10 - 3x) \cdot x \quad (\text{A-5})$$

下面对该函数进行图形显示，相应的 MATLAB 程序如下，结果见图 A-4。

```
>> x = 0:0.1:5; %设置自变量的取值点(数组形式)  
>> z= (15-5*x).*(10-3*x).*x; %定义函数,并计算函数值(数组元素的计算)  
>> plot (x,z) %就 x 及 z 进行图形显示  
>> title('z as a function of x') %在图形的上方给出总标题  
>> xlabel ('x(cm)') %对 x 轴给出标题  
>> ylabel ('z(cm^3)') %对 y 轴给出标题  
>> grid minor %打开细密的网格线
```

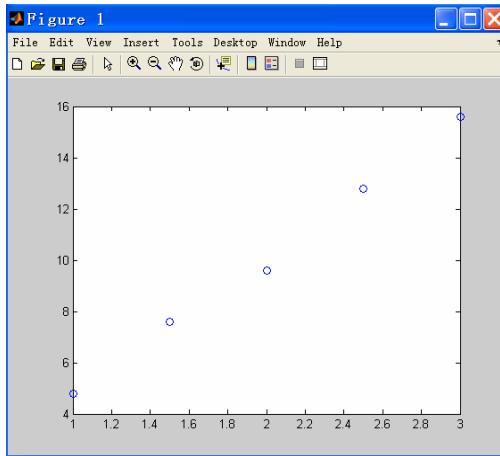


图 A-3 数据点的图形显示

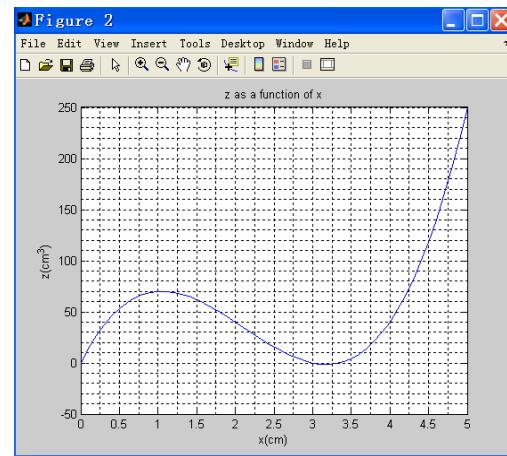


图 A-4 函数的图形显示

A.11 求解方程

对于线性方程组，可以采用矩阵的方法进行求解，见 A.5；下面用 MATLAB 的符号求解器来获得线性方程组的解

$$\left. \begin{array}{l} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{array} \right\} \quad (\text{A-6})$$

首先对每一个方程进行定义，然后利用 solve 命令来获得它们的解。solve 命令的基本形式为 solve (eqn1,eqn2,...,eqnn)；相应的 MATLAB 程序如下。

```
>> eq1='10*x1-x2+2*x3=10'; % 定义方程 1  
>> eq2='2*x1+x2-3*x3=8'; % 定义方程 2  
>> eq3='5*x1-2*x2+2*x3=7'; % 定义方程 3  
>> [x1, x2, x3] = solve(eq1,eq2,eq3) %求取解的表达式  
  
x1 =  
49/39  
x2 =  
-128/39  
x3 =
```



-38/13

```
>>vpa([x1;x2;x3]) % 使用变量精度进行计算  
ans =  
1.2564102564102564102564103  
-3.2820512820512820512820513  
-2.9230769230769230769230769
```

参考文献：Moaveni S(美)著，有限元分析—ANSYS 理论与应用(第3版，王崧等译)，北京：电子工业出版社，2008



附录 B ANSYS 软件的基本操作

下面通过一个简例来展示 ANSYS 程序的基本操作流程，包括：基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)、log 命令流文件的调入操作方式、完全的直接命令输入操作方式、APDL 参数化编程的初步操作。

【ANSYS 算例】两端约束杆件的支反力分析

如图 B-1 所示，一个两端固定的、横截面为正方形的杆，设杆的横截面积为 1，在中部受有两个集中力 F_1 和 F_2 的作用，求两端的支反力 R_1 和 R_2 。模型的有关参数见表 B-1，为与文献结果进行比较，这里采用了英制单位。下面基于 ANSYS 平台，对该平面结构进行整体建模和分析，所使用的文件名：**bar**。

表 B-1 模型的有关参数

材料性能	几何参数	载荷
$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$	$l = 10 \text{ in}, a = 7 \text{ in}, b = 4 \text{ in}$	$F_1 = 2F_2 = 1000 \text{ lb}$

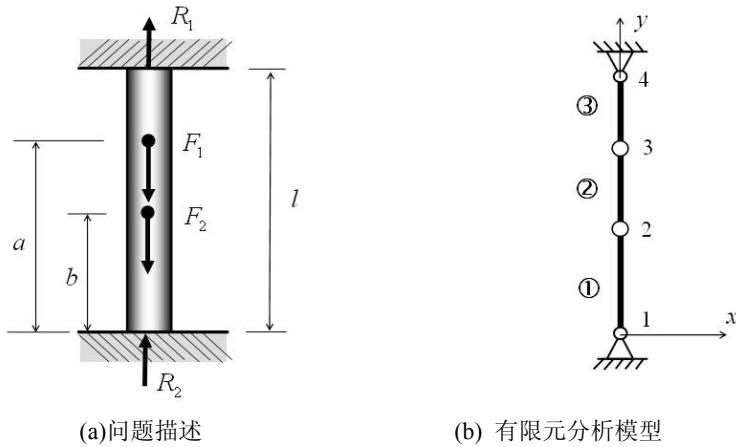


图 B-1 平面问题的计算分析模型

建模分析的要点：

- ① 由于结构和受力都处于平面内，可以采用平面模型，在有结构突变及外力作用位置处，都必须划分节点，其他情况下，杆结构不用细化单元；
- ② 在 ANSYS 环境中，设置分析类型、单元类型，输入材料参数；
- ③ 根据坐标生成节点，由节点连成单元；
- ④ 施加位移约束，施加外力，进行计算；
- ⑤ 在后处理中，通过命令<ESHAPE>，对于线型单元(如杆、梁)按实体效果进行显示；
- ⑥ 在后处理中，定义线型单元的节点轴力<ETABLE>，画出线型单元的轴力图<PLS>；
- ⑦ 打印单元的支反力结果<PRRSOL>。



B.1 基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)

(1) 进入 ANSYS

程序 → ANSYS → Interactive → change the working directory into yours → input Initial jobname: bar → Run

(2) 设置计算类型

ANSYS Main Menu: Preferences... → select Structural → OK

(3) 选择单元类型

Main Menu → Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → Defined → Element Types, Add → Library of Types: Structural Link, 2D spar 1, Element type reference number [1] → OK

(4) 定义材料参数

Preprocessor → Material Props → Material Models → Material Models Available → Structural (双击打开子菜单) → Linear (双击) → Elastic (双击) → Isotropic (双击) → EX [30E6] (弹性), PRXY[0] (泊松比) → OK → 关闭材料定义菜单 (点击菜单的右上角 X)

(5) 定义实常数

Preprocessor → Real Constants → Add/Edit/Delete → Defined Real Constant-Sets, Add → Choose element type : Type 1 Linl1 → OK → Real Constant Set No.[1] (第 1 号实常数), AREA [1] (横截面积) → OK → Close

(6) 生成几何模型

step1 生成第 1 号节点: (x=0, y=0, z=0)

Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number [1], XYZ Location in active CS, [0][0][0] → OK

step2 生成第 2 号节点: (x=0, y=4, z=0)

Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number [2], XYZ Location in active CS, [0][4][0] → OK

step3 生成第 3 号节点: (x=0, y=7, z=0)

Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number [3], XYZ Location in active CS, [0][7][0] → OK

step4 生成第 4 号节点: (x=0, y=10, z=0)

Preprocessor → Modeling → Create → Nodes → In Active CS → Node number [4], XYZ Location in active CS, [0][10][0] → OK

(7) 直接由节点生成单元

step1 生成第一个单元(通过连接第 1 号节点和第 2 号节点)

Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes → (弹出选择菜单, 点选图中的节点 1 和节点 2 (即最下面的两节点)) → OK

step2 在已有的单元状况下生成新的单元(再重复产生 3 个单元, 每次的节点号都加 1)

Preprocessor → Modeling → Copy → Elements → Auto Numbered → (弹出选择菜单, 点击图中的 1 号单元 (这时只有一个单元)) → OK → I TIME[3], NINC[1] → OK

(8) 对模型施加约束(包括位移和外力)

step1 施加位移约束(对 1 号和 4 号节点, 各个方向完全约束, 节点起始号为 1, 终止号为 4, 节点号增量为 3)



Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Nodes → (弹出选择菜单, 点击图中的 1, 4 号节点(即最上和最下端节点)) → OK → Lab2 , All DOF → OK →

step2 施加节点力(对 2 节点, FY=-5000)

Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → (弹出选择菜单, 点击图中的 2 号节点) → OK → Lab: FY , VALU[-5000] → OK

step3 施加节点力(对 3 节点, FY=-1000)

Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes → (弹出选择菜单, 点击图中的 3 号节点) → OK → Lab: FY , VALU[-1000] → OK

(9) 分析计算

Main Menu → Solution → Solve → Current LS → (弹出一个对话框) OK → (求解完成后, 弹出一个对话框) Solution is done! Close → (关闭信息文件右上角的 X) / STATUS Command

(10) 结果的一般显示

(a) 变形位移的显示

ANSYS Main Menu: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape... → select Def + Undeformed → OK

(b) 对于线单元(如杆、梁)按实体效果进行显示(以 0.5 倍实常数的比例)

Utility Menu → PlotCtrls → Style → Size and Shape → ESHAPE, [✓]ON, SCALE:[0.5] → OK

(c) 对计算结果进行云图显示(这里对于 UY)

Main Menu → General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → DOF Solution, Y-Component of Displacement → OK

(d) 将所显示的图形存入一个文件中(效果为黑白反相, PNG 格式, 文件名: bar001.png), 见图 B-2 及 B-3

Utility Menu → PlotCtrls → Hard Copy → To file → [✓]Color, [✓]PNG, [✓]Reverse Video, [✓]Portrait, Save to: [bar001.png] → OK

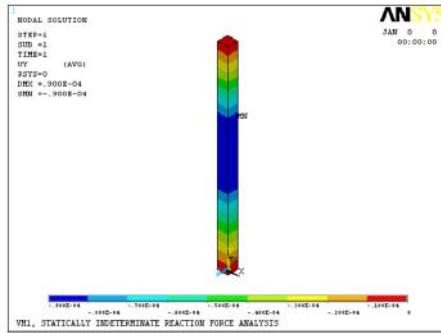


图 B-2 棱形杆的位移情况(UY)

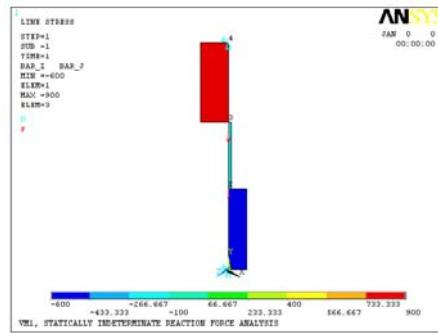


图 B-3 棱形杆的轴力情况

(11) 线型单元内力结果的显示和打印

(a) 内力结果的显示

对于线型单元(如杆, 梁), 若要计算和显示它的的内力, 需要按照以下步骤进行操作。

step1 定义线型单元 I 节点的轴力

Main Menu → General Postproc → Element Table → Define Table → Add → Lab:[bar_I], By sequence num: [SMISC,1] → OK → Close

step2 定义线型单元 J 节点的轴力

Main Menu → General Postproc → Element Table → Define Table → Add → Lab:[bar_J], By sequence



num: [SMISC,1] → OK → Close

step3 画出线型单元的受力图

Main Menu → General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Line Elel Res → LabI:[bar_I], LabJ:[bar_J], Fact:[1] → OK

(用 Utility Menu → PlotCtrls → Hard Copy → To file → 将所显示的图形生成一个图形 PNG 文件, 见第(10)步, 然后在 word 文件中, 以插入一个文件图片的方式将得到的 PNG 文件调入, 如图 0-3 所示)

(b) 打印单元的计算结果

打印单元的轴向力

Utility Menu → List → Results → Element Solution → Element Solution: Miscellaneous Items, Summable data (SMISC,1):[1] → OK → OK

打印出计算的单元内的轴力如下:

PRINT SUMMABLE MISCELLANEOUS ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT

***** POST1 ELEMENT SUMMABLE MISCELLANEOUS RECORD LISTING *****

```
LOAD STEP=      1   SUBSTEP=      1  
TIME=     1.0000    LOAD CASE=     0  
ELEM      SMIS1  
    1   -600.00  
    2   -100.00  
    3    900.00  
  
MINIMUM VALUES  
ELEM          0  
VALUE   -600.00  
  
MAXIMUM VALUES  
ELEM          0  
VALUE    900.00
```

从以上结果清单可以看出, 1 号单元的轴力为-600, 2 号单元的轴力为-100, 3 号单元的轴力为 900, 见图 vm1-3 的显示结果。

打印单元的支反力结果

Utility Menu → List → Results → Reaction Solution → Lab:[All items] → OK

打印出计算的支反力结果如下:

PRINT REACTION SOLUTIONS PER NODE

***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****

```
LOAD STEP=      1   SUBSTEP=      1  
TIME=     1.0000    LOAD CASE=     0  
  
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES  
NODE      FX          FY  
    1    0.0000      600.00  
    4    0.0000      900.00  
  
TOTAL VALUES  
VALUE    0.0000      1500.0
```

从以上结果清单可以看出, 1 号节点的支反力为 600, 4 号节点的支反力为 900, 与参考文献所给出结果的比较见表 B-2。

(12) 退出系统



ANSYS Utility Menu: File → Exit... → Save Everything → OK

计算结果的验证

表 B-2 计算结果与文献解析解的比较

支反力	Reference B-1 的结果	ANSYS	Ratio
R ₁ , lb	900.0	900.0	1.000
R ₂ , lb	600.0	600.0	1.000

Reference B-1 Timoshenko S. Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Edition, New York:D. Van Nostrand Co., Inc., 1955, 26

B.2 log 命令流文件的调入操作(可由 GUI 环境下生成 log 文件)

在完成了以上的 GUI 操作后，在工作目录内，将发现和文件名 bar.*相关的文件，其中 bar.log 文件是操作的最原始记录，非常有用，对该文件的内容可以增添和修改，可以进行参数化处理，可以实现满足你个人要求的二次开发，可以实现不同 ansys 版本间的移植。生成的 bar.log 为文本文件，文件很小，如果在工作目录中只有该文件，而无 ansys 分析的其它文件(bar.db, bar.emat, bar.rst, bar.err, bar.tri)，在 ansys 系统中调入该文件，可以自动完成前面已经作过的几何建模、有限元网格划分、施加约束和外载、计算和分析等所有步骤，并生成所有文件(bar.db, bar.emat, bar.rst, bar.err, bar.tri);在 ansys 系统中调入该文件并运行的方式如下：

(1) 进入 ANSYS

程序 → ANSYsed → Interactive → change the working directory into yours → input Initial jobname: bar_new(设置一个新的工作文件，也可以使用原工作文件，但会覆盖原文件) → Run

(2) 在 ANSYS 中(当前的工作文件是 bar_new)调入 bar.log 文件

ANSYS/Structural U Utility Menu → file → read input from → bar.log(相应目录中的文件) → OK，则可以全自动地完成前面所有操作。

B.3 完全的直接命令输入方式操作

以下为求解上述问题的各行命令，在 ANSYS 菜单界面的命令输入窗口中逐行输入。也可以将所有命令形成一个文本文件(.log)，然后在 **Option Utility Menu → file → read input from → bar.log**(相应目录中的文件) → OK 的方式调入。

以下为命令流语句。

```
!%%%%%%%%%%%%% bar.log %%%%%% begin %%%%%%
!----以“!”打头的文字为注释内容，其后的文字和符号不起运行作用
!----在 ansys 的命令中，一般识别前 4 个字母，不区别大小写，因此，应注意名称的前 4 个字符的差别
!---- 例如命令 FINISH 与命令 fini 是相同的 -----
/PREP7          !进入前处理
ANTYPE,STATIC   !设置分析类型(静力分析)
ET,1,LINK1      ! 设置单元类型(第 1 号：杆单元 LINK1)
R,1,1           !设置实常数(第 1 号：横截面积为 1)
MP,EX,1,30E6    !设置材料常数(弹性模量)(第 1 号：30E6)
N,1             !建立节点(第 1 号：x=0, y=0, z=0)
```



```
N,2,,4      !建立节点(第 2 号: x=0, y=4, z=0)
N,3,,7      !建立节点(第 3 号: x=0, y=7, z=0)
N,4,,10     !建立节点(第 4 号: x=0, y=10, z=0)
E,1,2       !建立一个单元(通过连接第 1 号节点和第 2 号节点)
EGEN,3,1,1   !再重复产生 3 个单元, 每次的节点号都加 1
D,1,ALL,,,4,3 !施加完全约束, 节点起始号为 1, 终止号为 4, 增量为 3
F,2,FY,-500  !施加节点力(对 2 节点, FY=-5000)
F,3,FY,-1000 !施加节点力(对 3 节点, FY=-1000)
FINISH       !结束以上流程
/SOLU        !进入求解状态
OUTPR,BASIC,1 !输出方式的设置
SOLVE        !求解
FINISH       !结束以上流程
/POST1        !进入后处理
/ESHAPE,0.5   !对于线单元(如杆、梁)按实体效果进行显示(以 0.5 倍实常数的比例)
PLNSOL, U,Y, 0,1,0 !对计算结果进行云图显示(这里对于 UY)
ETABLE,bar_I,SMISC,1 !定义线型单元 I 节点的轴力
ETABLE,bar_J,SMISC,1 !定义线型单元 J 节点的轴力
PLLS, bar_I, bar_J    !画出线型单元的受力图
PRESOL,SMISC,1       !打印单元的计算结果(单元的轴向力)
PRRSOL              !打印单元的支反力结果
FINISH               !结束以上流程
!%%%%%%%%%%%%% bar.log %%%%%% end %%%%%%
```

B.4 APDL 参数化编程的初步操作

APDL 的含义为：ANSYS Parametric Design Language

(1) 如果希望将前两个杆以及总长度设为参数(每个变量不超过 8 个字符):

```
Bar_1=4      bar_2=7      bar_L=10
```

(2) 将弹性模量设为参数

```
bar_el=30E6
```

(3) 如果希望将杆的横截面积设为参数:

```
bar_a=1
```

(4) 将外载值设为参数

```
force1=-500    force2=-1000
```

以下为经 APDL 参数化设定后的命令流文件(.log)

```
!%%%%%%%%%%%%%parameterized log file: bar_para.log %%%%%% begin %%%%%%
```

!-----注：以下命令流中的符号\$，表示可将多行命令流写成一行-----

!设置参数---begin---

```
bar_1=4      ! 设置外力 F2 作用点距下端的距离
```

```
bar_2=7      ! 设置外力 F1 作用点距下端的距离
```

```
bar_L=10     !杆的长度
```

```
bar_a=1      !杆的横截面积
```

```
bar_el=30E6   !弹性模量
```



```
force_1=-500      !设置外力 F1 的数值
force_2=-1000    ! 设置外力 F2 的数值
!设置参数-----end---
/PREP7           !进入前处理
ANTYPE,STATIC    !设置分析类型(静力分析)
ET,1,LINK1       ! 设置单元类型(第 1 号: 杆单元 LINK1)
R,1,bar_a        !设置实常数(第 1 号: 横截面积为 bar_a)
MP,EX,1, bar_el  !设置材料常数(弹性模量)(第 1 号: bar_el)
N,1   $N,2,, bar_1  $N,3,, bar_2  $N,4,, bar_L      !根据坐标建立 1,2,3,4 号节点
E,1,2            !建立一个单元(通过连接第 1 号节点和第 2 号节点)
EGEN,3,1,1       !再重复产生 3 个单元, 每次的节点号都加 1
D,1,ALL,,,4,3   !施加完全约束, 节点起始号为 1, 终止号为 4, 增量为 3
F,2,FY, force_1  !施加节点力(对 2 节点, FY= force_1)
F,3,FY, force_2  !施加节点力(对 3 节点, FY= force_2)
FINISH          !结束以上流程
/SOLU            !进入求解状态
OUTPR,BASIC,1   !输出方式的设置
SOLVE           !求解
FINISH          !结束以上流程
/POST1           !进入后处理
/ESHAPE,0.5      !对于线单元(如杆、梁)按实体效果进行显示(以 0.5 倍实常数的比例)
!将变形图输出到 JPEG
JPGPRF,1500,300,1 !设置输出文件格式
/SHOW,JPEG        ! 设置输出文件格式
PLNSOL,U,Y,0,1,0  !显示变形图, 并将输出 file000.jpg
ETABLE,bar_I,SMISC,1 !定义线型单元 I 节点的轴力
ETABLE,bar_J,SMISC,1 !定义线型单元 J 节点的轴力
PLLS, bar_I, bar_J !画出线型单元的受力图
PRESOL,SMISC,1     ! 显示单元的轴向力(可以看到支反力), 并将输出 file001.jpg
!(续)有时最后一个图形文件将在退出 ansys 才能得到
PRRSOL          !打印单元的支反力结果
FINISH          !结束以上流程
%%%%%%%%%%%%%parameterized log file: bar_para.log %%%%%% end %%%%%%
```



附录 C 部分材料的力学性质

部分材料的力学性质 (SI 单位制)^①

材料	密度 ρ (Mg/m ³)	弹性 模量 E (GPa)	屈服强度(MPa)			极限强度(MPa)			泊松比 ν	热膨胀 系数 α 10^6°C
			σ_Y 拉力	σ_Y 压力 ^②	剪力	σ_u 拉力	σ_u 压力	剪力		
金属										
铝[2014-T6]	2.79	73.1	414	414	172	469	469	290	0.35	23
铝[6061-T6]	2.71	68.9	255	255	131	290	290	186	0.35	24
铸铁[灰色 ASTM 20]	7.19	67.0	—	—	—	179	669	—	0.28	12
铸铁[锻造 ASTM A-197]	7.28	172	—	—	—	276	572	—	0.28	12
铜合金[黄铜 C83400]	8.74	101	70.0	70.0	—	241	241	—	0.35	18
[青铜 C86100]	8.83	103	345	345	—	655	655	—	0.34	17
合金[Am 1004-T61]	1.83	44.7	152	152	—	276	276	152	0.30	26
[结构钢 A36]	7.85	200	250	250	—	400	400	—	0.32	12
钢[不锈钢 304]	7.86	193	207	207	—	517	517	—	0.27	17
[工具钢 L2]	8.16	200	703	703	—	800	800	—	0.32	12
钛合金[Ti-6Al-4V]	4.43	120	924	924	—	1.000	1.000	—	0.36	9.4
非金属										
混凝土[低强]	2.38	22.1	—	—	12	—	—	—	0.15	11
[高强]	2.38	29.0	—	—	38	—	—	—	0.15	11
塑料钢[Kevlar49]	1.45	131	—	—	—	717	483	20.3	0.34	—
[30%玻璃]	1.45	72.4	—	—	—	90	131	—	0.34	—
木材[道格拉斯冷杉]	0.47	13.1	—	—	—	2.1 ^③	26 ^④	6.2 ^④	0.29 ^⑤	—
[云杉]	0.360	9.65	—	—	—	2.5 ^③	36 ^④	6.7 ^④	0.31 ^⑤	—

① 对于具体材料, 由于合金、矿物成分、力学性质、热条件等影响, 表中数值可能会变化, 确切的值, 请参考材料方面的资料。

② 延性材料的屈服强度对于拉伸和压缩可以假设是一样的。

③ 垂直木纹方向的值。

④ 平行木纹方向的值。

⑤ 沿着木纹方向加载荷时, 测量的是垂直木纹方向的变形。

参考文献: Moaveni S(美)著, 有限元分析—ANSYS 理论与应用(第 3 版, 王崧等译), 北京: 电子工业出版社, 2008



附录 D 常用材料的热力学参数

部分材料的热力学性质（除标明温度外，其余均为室温）(SI 单位制)

材料	密度 (kg/m ³)	比热容 (J/kg·K)	热传导系数 (W/m·K)
铝 (合金 1100)	2740	896	221
沥青	2110	920	0.74
水泥	1920	670	0.029
黏土	1000	920	
混凝土	2300	653	1.0
黏土砖	1790@373K	829	1.0@473K
碱化玻璃	2470	750	1.0@366K
铅质玻璃	4280	490	1.4
钢化玻璃	2230	840	1.0@366K
铸铁	7210	500	47.7@327K
锻铁, 熟铁	7700@373K		60.4
纸	930	1300	0.13
土壤 ^①	2050	1840	0.5
低碳钢	7830	500	45.3
岑树木	690		0.172@323K
桃木	550		0.13
橡木	750	2390	0.176
松木	430		0.11

① 参考：Incropera,F.,and Dewitt D., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*,4th ed.New York,John Wiley and Sons,1996.



附录 E 英制单位和公制单位的换算表

物理量	SI (国际标准单位) → 英制单位	英制单位 → SI (国际标准单位)
长度单位	1mm=0.039 37in	1in=25.4mm
	1mm=0.003 28ft	1ft=304.8mm
	1cm=0.393 70in	1in=2.54cm
	1cm=0.0328ft	1ft=34.48cm
	1m=39.3700in	1in=0.025m
	1m=3.28ft	1ft=0.3048m
面积单位	1mm ² =1.55E-3in ²	1in ² =645.16mm ²
	1mm ² =1.0764E-5ft ²	1ft ² =92 903mm ²
	1cm ² =0.155in ²	1in ² =6.4516cm ²
	1cm ² =1.07E-3ft ²	1ft ² =92.903cm ²
	1m ² =1550in ²	1in ² =645.16E-4m ²
	1m ² =10.76ft ²	1ft ² =0.0929m ²
体积单位	1mm ³ =6.1024E-5in ³	1in ³ =16 387mm ³
	1mm ³ =3.5315E-8ft ³	1ft ³ =28.317E6mm ³
	1cm ³ =0.061 024in ³	1in ³ =16.387cm ³
	1cm ³ =3.5315E-5ft ³	1ft ³ =28 317cm ³
	1m ³ =61 024in ³	1in ³ =1.6387E-5m ³
	1m ³ =35.315ft ³	1ft ³ =0.028 317m ³
惯性矩 (长度四次方)	1mm ⁴ =2.402E-6in ⁴	1in ⁴ =416.231E3mm ⁴
	1mm ⁴ =115.86E-12ift ⁴	1ft ⁴ =8.63097E9mm ⁴
	1cm ⁴ =24.205E-3in ⁴	1in ⁴ =41.623cm ⁴
	1cm ⁴ =1.586E-6ft ⁴	1ft ⁴ =863 110cm ⁴
	1m ⁴ =2.40251E6in ⁴	1in ⁴ =416.231E-9m ⁴
	1m ⁴ =115.86ft ⁴	1ft ⁴ =8.631E-3m ⁴
质量单位	1kg=68.521E-3slug	1slug=14.593kg
	1kg=2.2046 lbm	1lbm=0.4536kg
密度单位	1kg/m ³ =0.001 938slug/ft ³	1slug/ft ³ =515.7kg/m ³
	1kg/m ³ =0.062 481bm/ft ³	1lbm/ft ³ =16.018kg/m ³
力单位	1N=224.809E-3lbf	1lbf=4.448N
力矩单位	1N·m=8.851in·lb	1in·lb=0.113N·m
	1N·m=0.7376ft·lb	1ft·lb=1.356N·m
压强、应力、弹性模量及体积模量单位	1Pa=145.0377E-6lb/in ²	1lb/in ² =6.8947E3Pa
	1Pa=20.885E-3lb/ft ²	1lb/ft ² =47.880Pa
	1KPa=145.0377E-6Ksi	1Ksi=6.8947E3KPa
功、能量单位	1J=0.7375ft·lb	1ft·lb=1.3558J
	1KW·hr=3.41214E3Btu	1Btu=2930.71E-6
功率单位	1w=0.7375 ft·lb/sec	1ft·lb/sec=1.3558W
	1KW=3.41214E3Btu/hr	1Btu/hr=293.07E-6KW
	1KW=1.341hp	1hp=0.7457KW
温度单位	°C=5/9(°F-32)	°F=9/5°C+32



中文索引

A

埃尔米特插值函数 (Hermite interpolation)

B

半带宽(semi-bandwidth)

半解析法(semi-inverse method)

半正定(positive semi-definite)

背应力(back stress)

本构方程(constitutive equation)

逼近性离散(approximated discretization)

比例加载(proportionally loading)

比热(specific heat)

边界条件(boundary condition)

编号方案(numbering scheme)

变换矩阵(transformation matrix)

变形(deformation)

变形体(deformed body)

变形协调条件(compatibility condition)

变形体(deformed body)

变形力列阵(deformed force matrix)

泊松比(Poisson's ratio)

标准化(standardization)

C

C0 型单元 (C0 element)

C1 型单元(C1 element)

参数单元(parametric element)

常应变 CST 单元(constant strain triangle)

超参元(super-parametric element)

初始条件(initial condition)

处理边界条件(treatment of boundary condition)

传热(heat transfer)

传热导定律(heat transfer theorem)

传热矩阵(heat transfer matrix)

D

2D 自然坐标 (2D 自然面积坐标)

3D 自然面积坐标(3D natural coordinate)

达朗伯原理(D'Alembert principle)

带宽(bandwidth)

带状(banded)

待定系数(unknowns)

单调收敛(monotonic convergence)

单元(element)

单元编号(numbering of element)

单元刚度方程(stiffness equation of element)

单元刚度矩阵(stiffness matrix of element)

弹塑性问题(elastic-plastic problem)

弹塑性行为(elastic-plastic behavior)

弹性模量(elastic modulus)

弹性系数矩阵 (elastic matrix)

等参元(iso-parametric element)

等向强化(isotropic hardening)

等效节点载荷(equivalent nodal load)

等效应力(equivalent stress)

迭代法(iteration algorithm)

叠加原理(superposition principle)

多线性等向强化(multilinear isotropic)

多线性随动强化(multilinear kinematic)

待定系数(unknown constant)

F

罚函数法(penalty approach)

泛函(functional)

非等向(混合)强化(anisotropic)

非柔性结构(compact structure)

非协调元(incompatible element)

分块矩阵(block matrix)

傅立叶级数(Fourier series)

G

Galerkin 加权残值法(Galerkin WRM)

Gauss 积分(Gauss integration)

杆单元(bar element)

杆梁结构(truss/frame structure)

刚化(stiffening)

刚度方程(stiffness equation)

刚度系数(stiffness coefficient)

刚体位移(rigid displacement)

高次多项式(high-order polynomial)

高阶单元(high-order element)

各向同性(isotropy)

功的互等定理(reciprocal theorem of work)

关联塑性流动(associative plastic flow)

惯性矩(moment of inertia)

惯性力(inertial force)



广义胡克定理(generalized Hooke law)

规范性(standard)

构件(component)

可行性(feasibility)

空间问题(3-dimensional problem (3D problem))

L

H

Hermite 插值(Hermite interpolation)

h 方法(h-method)

h 方法(h-version)

环境温度(temperature of surrounding medium)

环向位移(circumferential displacement)

换热系数(heat transfer coefficient)

混合非等向强化(anisotropic hardening)

虎克定律(Hooke law)

拉格朗日插值(Lagrange interpolation)

拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)

拉格朗日乘子法(Lagrangian multiplier algorithm)

拉格朗日矩形单元(Lagrangian rectangle element)

离散单元的装配(assembly of discrete elements)

离散体结构(discrete structure)

离散逼近(discretized approximation)

理想弹塑性材料(elastic/perfectly plastic material)

连续体结构(continuum structure)

连续性(continuity)

梁单元(beam element)

列(column)

临界条件(critical condition)

临界应力状态(critical state of stress)

临界阻尼情形(critically damped case)

六面体单元(hexahedron element)

J

基底函数(base function)

基准函数(base function)

基准单元(parent element)

基准坐标系(reference coordinate)

集中质量矩阵(lumped mass matrix)

几何方程(strain-displacement relationship)

几何非线性(geometric nonlinear)

几何矩阵(strain-displacement matrix)

加权残值法(weighted residual method)

加权平均(weighted average)

加载/loading)

剪切模量(shear modulus)

剪应力(shear stress)

剪应力互等定理(reciprocal theorem of shear stress)

简谐响应分析(harmonic response analysis)

节点(node)

节点编号(nodal numbering)

节点力列阵(nodal force vector)

节点位移(nodal displacement)

节点位移列阵(nodal displacement vector)

结构振动(structural vibration)

解耦(uncoupling)

解耦方程(uncoupled equation)

解析法(analytical method)

径向正应变(radial normal strain)

静力学情形 (static case)

静水压力(hydrostatic pressure)

局部坐标系(local coordinate system)

矩形单元(rectangular element)

绝热条件(adiabatic condition)

M

面积映射(mapping of area)

面积坐标(area coordinate)

名义应力(nominal stress)

模态分析(modal analysis)

模态阻尼比(modal damping ratio)

磨平 (smooth improving)

磨平(smoothing)

N

内力列阵(inner force matrix)

内部节点(inner node)

挠度(deflection)

能量守恒定律(energy conservation theorem)

P

p 方法(p-method)

p 方法(p-version)

帕斯卡三角形(Pascal triangle)

偏导数映射(mapping of partial differential)

平衡方程(equilibrium equation)

平面问题(2-dimensional problem (2D problem))

平面应变(plane strain)

平面应力(plane stress)

普遍性(generalization)

K

**Q**

奇异(singularity)
前处理(pre-processing)
切线刚度矩阵(tangent stiffness matrix)
切向正应变(tangent normal strain)
曲率(curvature)
屈服面函数(function of yielding surface)
屈服面平移(yielding surface translation)
屈服准则(yielding criteria)
强度(strength)、刚度(stiffness)
权系数(weight coefficient)

随动强化(kinematic hardening)
随机谱分析(spectrum analysis)

T

特征方程 (eigen equation)
特征建模(characterized modeling)
特征向量(eigen vector)
特征值(eigen value)
体积力(body force)
体积应变(bulk strain)
体积应变(volume strain)
体积坐标(volume coordinate)

R

Rayleigh-Ritz 原理(Rayleigh-Ritz principle)
热传导系数(thermal conductivity of material)
热膨胀系数(thermal expansion coefficient)
热应力(stress of temperature effect)
热应力(thermal stress)
热源强度(strength of heat source)
软件平台/software platform)
瑞利-里兹方法(Rayleigh-Ritz principle)

W

外部节点(connective node)
外力功(work by force)
外力列阵(load matrix),
完备(completeness)
完全 Lagrange 格式(total Lagrange formulation)
完整解答(total solution)
微小体元(representative volume)
位移(displacement)
位移模式(displacement model)
稳态问题(steady problem)
无阻尼情形(undamped case)
无阻尼自由振动(free vibration of undamped system)
物理坐标系(physical coordinate)

S

Serendipity 单元(Serendipity element)
三节点三角形单元(3-node triangular element)
商业化程序(commercial code)
上界.upper bound)
圣维南原理(Saint-Venant principle)
势函数(potential function)
势能(potential energy)
试函数(trial function)
适应性(adaptability)
收敛(convergence)
收敛准则(convergence criterion)
数值积分(numerical integration)
瞬态传热(transient heat transfer)
瞬态动力学分析(transient dynamic analysis)
四面体单元(tetrahedron element)
塑性功(plastic work)
塑性流动法则(plastic flow rule)
塑性强化准则(plastic hardening rule)
塑性屈服(plastic yielding)
塑性应变增量(incremental of plastic strain)
塑性增长乘子(plastic multiplier)
算子矩阵(operator matrix)

X

稀疏矩阵(spars matrix)
细长梁(long beam)
下界(lower bound)
下限 (upper limit)
线弹性(linear elasticity)
小变形 (small deformation)
协调(compatibility)
协调单元(compatible element)
协调方程(compatibility equation)
斜支座(inclined support)
卸载(unloading)
形状函数矩阵(shape function matrix)
虚功(virtual work)
虚功原理(principle of virtual work)
虚位移(virtual displacement)
虚应力(virtual stress)
许可位移(admissible displacement)

**Y**

雅可比矩阵(Jacobian matrix)	自然离散 (natural discretization)
亚参元(sub-parametric element)	自然频率 (natural frequency)
杨氏模量(Young's modulus)	自然圆频率(natural circular frequency)
一致质量矩阵(consistent mass matrix)	自然坐标(natural coordinate)
应变(strain)	自适应方法(adaptive method)
应变能(strain energy)	自由度 DOF (degree of freedom)
应变能(virtual strain energy)	自由振动(free vibration)
应力(stress)	自由指标 (free index)
应力矩阵(stress-displacement matrix)	自主程序(home-code)
应力应变关系(stress-strain relationship)	阻尼矩阵(damping matrix)
应力函数(stress function)	阻尼力(damping force)
映射(mapping)	最佳逼近(best approximation)
硬化材料(hardening material)	最小二乘法(least squares method)
硬件平台 (Hardware platform)	最小势能原理(principle of minimum potential energy)
有限元方法(finite element method)	最大拉应力准则(max. tensile stress criterion)
有限元分析(finite element analysis)	最大剪应力准则(max. shearing stress criterion)
有限元分析建模(FEA modeling)	最大畸变能准则(max. distortion energy criterion)
有限元分析列式(formulation of finite element analysis)	坐标映射(mapping of coordinate)
有限元分析求解(FEA solving)	自由度(DOF, degree of freedom)
有限元分析软件(FEA code)	局部坐标系(local coordinate)
约束方程(constraint equation)	

Z

子域(sub-domain)的分段函数(pieces function)
真实解(true solution)
振型(mode)
振型叠加法(mode superposition)
整体刚度方程(global stiffness equation)
整体坐标系 (global coordinate system)
正定(positive definite)
正应力(normal stress)
支反力(reaction force)
支座反力(reaction force of support)
质量矩阵(mass matrix)
中性层(neutral layer)
轴对称单元(axisymmetric ring element)
轴对称问题(axisymmetric problem)
轴向自由振动(longitudinal free vibration)
主方向(principal direction)
主节点(master node)
主应力(principal stress)
转换(transformation)
转角(slope)
准确解(correct solution)
自编有限元分析程序(FEA home-code)



英文索引

A

adaptability(适应性)
adaptive method(自适应方法)
adiabatic condition(绝热条件)
admissible displacement(许可位移)
analytical method(解析法)
anisotropic hardening(混合非等向强化)
anisotropic(非等向(混合)强化)
approximated discretization(逼近性离散)
area coordinate(面积坐标)
assembly of discrete elements(离散单元的装配)
associative plastic flow(关联塑性流动)
axisymmetric problem(轴对称问题)
axisymmetric ring element(轴对称单元)

B

back stress(背应力)
Banded(带状)
Bandwidth(带宽)
bar element(杆单元)
base function(基底函数)
beam element(梁单元)
best approximation(最佳逼近)
block matrix(分块矩阵)
body force 体积力)
boundary condition(边界条件)
bulk strain(体积应变)

C

C0 element(C0 型单元)
C1 element (C1 型单元)
characterized modeling(特征建模)
circumferential displacement(环向位移)
column(列)
commercial code(商业化程序)
compact structure(非柔性结构)
compatibility condition(变形协调条件)
compatibility equation(协调方程)
compatibility(协调)
compatible element(协调单元)

completeness(完备)
component(构件)
connective node(外部节点)
consistent mass matrix(一致质量矩阵)
constant strain triangle(常应变 CST 单元)
constitutive equation(本构方程)
constraint equation(约束方程)
continuity(连续性)
continuum structure(连续体结构)
convergence criterion(收敛准则)
convergence(收敛)
correct solution(准确解)
critical condition(临界条件)
critical state of stress(临界应力状态)
critically damped case(临界阻尼情形)
curvature(曲率)

D

2-dimensional problem(2D problem)(平面问题)
3-dimensional problem (3D problem)(空间问题)
D'Alembert principle(达朗伯原理)
damping force(阻尼力)
damping matrix(阻尼矩阵)
deflection 挠度)
deformation(变形)
deformed body (变形体)
deformed body(变形体)
deformed force matrix(变形力列阵)
degree of freedom(自由度 DOF)
discrete structure(离散体结构)
discretized approximation(离散逼近)
displacement model(位移模式)
displacement(位移)
DOF, degree of freedom(自由度)

E

eigen equation(特征方程)
eigen value (特征值)
eigen vector(特征向量)
elastic matrix(弹性系数矩阵)
elastic modulus(弹性模量)



elastic/perfectly plastic material(理想弹塑性材料)	hexahedron element(六面体单元)
elastic-plastic behavior(弹塑性行为)	high-order element(高阶单元)
elastic-plastic problem(弹塑性问题)	high-order polynomial(高次多项式)
element(单元)	h-method(h 方法)
energy conservation theorem(能量守恒定律)	home-code(自主程序)
equilibrium equation(平衡方程)	Hooke law(虎克定律)
equivalent nodal load(等效节点载荷)	h-version(h 方法)
equivalent stress(等效应力)	hydrostatic pressure(静水压力)

F

FEA code(有限元分析软件)
FEA home-code(自编有限元分析程序)
FEA modeling(有限元分析建模)
FEA solving(有限元分析求解)
Feasibility(可行性)
finite element analysis(有限元分析)
finite element method(有限元方法)
formulation of finite element analysis(有限元分析列式)
Fourier series(傅立叶级数)
free index(自由指标)
free vibration of undamped system(无阻尼自由振动)
free vibration(自由振动)
function of yielding surface(屈服面函数)
functional(泛函)

G

Galerkin WRM(Galerkin 加权残值法)
Gauss integration(Gauss 积分)
generalization(普遍性)
generalized Hooke law(广义胡克定理)
geometric nonlinear(几何非线性)
global coordinate system(整体坐标系)
global stiffness equation(整体刚度方程)

H

hardening material(硬化材料)
Hardware platform(硬件平台)
harmonic response analysis(简谐响应分析)
heat transfer coefficient(换热系数)
heat transfer matrix(传热矩阵)
heat transfer theorem(传热导定律)
heat transfer(传热)
Hermite interpolation(Hermite 插值)
Hermite interpolation(埃尔米特插值函数)

I

inclined support(斜支座)
incompatible element(非协调元)
incremental of plastic strain(塑性应变增量)
inertial force(惯性力)
initial condition(初始条件)
inner force matrix(内力列阵)
inner node(内部节点)
iso-parametric element(等参元)
isotropic hardening(等向强化)
isotropy(各向同性)
iteration algorithm(迭代法)

J

Jacobian matrix(雅可比矩阵)

K

kinematic hardening(随动强化)

L

Lagrange interpolation(拉格朗日插值)
Lagrange multiplier(拉格朗日乘子)
Lagrangian multiplier algorithm(拉格朗日乘子法)
Lagrangian rectangle element(拉格朗日矩形单元)
least squares method(最小二乘法)
linear elasticity(线弹性)
load matrix(外力列阵)
loading(加载)
local coordinate system(局部坐标系)
local coordinate(局部坐标系)
long beam(细长梁)
longitudinal free vibration(轴向自由振动)
lower bound(下界)
lumped mass matrix(集中质量矩阵)



M

mapping of area(面积映射)
mapping of coordinate(坐标映射)
mapping of partial differential(偏导数映射)
mapping(映射)
mass matrix(质量矩阵)
master node(主节点)
max. distortion energy criterion(最大畸变能准则)
max. shearing stress criterion(最大剪应力准则)
max. tensile stress criterion(最大拉应力准则)
modal analysis(模态分析)
modal damping ratio(模态阻尼比)
mode superposition(振型叠加法)
mode(振型)
moment of inertia(惯性矩)
monotonic convergence(单调收敛)
multilinear isotropic (多线性等向强化)
multilinear kinematic(多线性随动强化)

N

2D natural coordinate (2D 自然面积坐标)
3D natural coordinate (3D 自然面积坐标)
3-node triangular element(三节点三角形单元)
natural circular frequency(自然圆频率)
natural coordinate(自然坐标)
natural discretization(自然离散)
natural frequency(自然频率)
neutral layer(中性层)
nodal displacement vector(节点位移列阵)
nodal displacement(节点位移)
nodal force vector(节点力列阵)
nodal numbering(节点编号)
node(节点)
nominal stress(名义应力)
normal stress(正应力)
numbering of element(单元编号)
numbering scheme(编号方案)
numerical integration(数值积分)

O

operator matrix(算子矩阵)

P

parametric element(参数单元)
parent element(基准单元)
Pascal triangle(帕斯卡三角形)
penalty approach(罚函数法)
physical coordinate(物理坐标系)
plane strain(平面应变)
plane stress (平面应力)
plastic flow rule(塑性流动法则)
plastic hardening rule(塑性强化准则)
plastic multiplier(塑性增长乘子)
plastic work(塑性功)
plastic yielding(塑性屈服)
p-method (p 方法)
Poisson's ratio (泊松比)
positive definite(正定)
positive semi-definite(半正定)
potential energy(势能)
potential function(势函数)
pre-processing(前处理)
principal direction(主方向)
principal stress(主应力)
principle of minimum potential energy(最小势能原理)
principle of virtual work(虚功原理)
proportionally loading(比例加载)
p-version (p 方法)

R

radial normal strain (径向正应变)
Rayleigh-Ritz principle(Rayleigh-Ritz 原理)
Rayleigh-Ritz principle(瑞利-里兹方法)
reaction force of support 支座反力
reaction force(支反力)
reciprocal theorem of shear stress(剪应力互等定理)
reciprocal theorem of work(功的互等定理)
rectangular element(矩形单元)
reference coordinate(基准坐标系)
representative volume(微小体元)
rigid displacement(刚体位移)

S

Saint-Venant principle(圣维南原理)
semi-bandwidth(半带宽)



semi-inverse method(半解析法)	temperature of surrounding medium(环境温度)
Serendipity element(Serendipity 单元)	tetrahedron element(四面体单元)
shape function matrix(形状函数矩阵)	thermal conductivity of material(热传导系数)
shear modulus(剪切模量)	thermal expansion coefficient(热膨胀系数)
shear stress(剪应力)	thermal stress 热应力)
singularity (奇异)	total Lagrange formulation(完全 Lagrange 格式)
slope(转角)	total solution(完整解答)
small deformation(小变形)	transformation matrix(变换矩阵)
smooth improving(磨平)	transformation(转换)
smoothing(磨平)	transient dynamic analysis(瞬态动力学分析)
software platform(软件平台)	transient heat transfer(瞬态传热)
spars matrix(稀疏矩阵)	treatment of boundary condition(处理边界条件)
specific heat(比热)	trial function(试函数)
spectrum analysis(随机谱分析)	true solution(真实解)
standard(规范性)	truss/frame structure(杆梁结构)
Standardization(标准性)	U
static case(静力学情形)	uncoupled equation(解耦方程)
steady problem (稳态问题)	uncoupling (解耦)
stiffening(刚化)	undamped case(无阻尼情形)
stiffness coefficient(刚度系数)	unknown constant(待定系数)
stiffness equation (刚度方程)	Unknowns(待定系数)
stiffness equation of element(单元刚度方程)	unloading(卸载)
stiffness matrix of element(单元刚度矩阵)	upper bound(上界)
stiffness(刚度)	upper limit(下限)
strain (应变)	V
strain energy(应变能)	virtual displacement(虚位移)
strain-displacement matrix(几何矩阵)	virtual strain energy(应变能)
strain-displacement relationship(几何方程)	virtual stress(虚应力)
strength of heat source 热源强度)	virtual work(虚功)
strength(强度)	volume coordinate(体积坐标)
stress function(应力函数)	volume strain(体积应变)
stress of temperature effect(热应力)	W
stress(应力)	weight coefficient(权系数)
stress-displacement matrix(应力矩阵)	weighted average(加权平均)
stress-strain relationship(应力应变关系)	weighted residual method(加权残值法)
structural vibration(结构振动)	work by force(外力功)
sub-domain (子域) pieces function (的分段函数)	Y
sub-parametric element(亚参元)	yielding criteria(屈服准则)
super-parametric element(超参元)	yielding surface translation 屈服面平移)
superposition principle(叠加原理)	Young's modulus(杨氏模量)

T

tangent normal strain(切向正应变)
tangent stiffness matrix(切线刚度矩阵)



单元及编程索引

基于 MATLAB 平台

Bar1D2Node _Stiffness(E,A,L)

Bar1D2Node _Assembly(KK,k,i,j)

Bar1D2Node _Stress(k,u,A)

Bar1D2Node_Force(k,u)

Bar2D2Node_Stiffness(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha)

Bar2D2Node_Assembly(KK,k,i,j)

Bar2D2Node_Stress(E,x1,y1,x2,y2,alpha,u)

Bar2D2Node_Forces(E,A,x1,y1,x2,y2,alpha,u)

Beam1D2Node_Stiffness(E,I,L)

Beam1D2Node_Assembly(KK,k,i,j)

Beam1D2Node_Strain(x,L,y)

Beam1D2Node_Stress(E,B,u)

Beam1D2Node_Deflection(x,L,u)

Beam2D2Node_Stiffness(E,I,A,L)

Beam2D2Node_Assemble(KK,k,i,j)

Beam2D2Node_Forces(k,u)

Triangle2D3Node_Stiffness(E,NU,t,xi,yi,xj,yj,xm,ym,ID)

Triangle2D3Node_Assembly(KK,k,i,j,m)

Triangle2D3Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,u,ID)

Quad2D4Node_Stiffness(E,NU,h,xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,ID)

Quad2D4Node_Assembly(KK,k,i,j,m,p)

Quad2D4Node_Stress(E,NU,xi,yi,xj,yj,xm,ym,xp,yp,u,ID)

Tetrahedron3D4Node_Stiffness(E,NU,xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn)

Tetrahedron3D4Node_Assembly(KK,k,i,j,m,n)

Tetrahedron3D4Node_Stress(E,NU,xi,yi,zi,xj,yj,zj,xm,ym,zm,xn,yn,zn,u)

Hexahedral3D8Node_Stiffness(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8)

Hexahedral3D8Node_Assembly(KK,k,i,j,l,m,n,o,p,q)

Hexahedral3D8Node_Stress(E,NU,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8,u)

基于 ANSYS 平台

ANTYPE,STATIC !设定为静态分析(或为 1)



ANTYPE,MODAL !设定为模态分析(或为 2)
ANTYPE,TRANS !设定为瞬态分析(或为 4)

ET,1,LINK1 !设置杆单元
ET,1,LINK10 !设置单向杆单元
ET,1,COMBIN14,,,2 !设置弹簧单元
ET,1,beam3 ! 设置梁单元
ET,1,PLANE42 !设置平面单元
ET,1,SOLID45 !设置空间单元
ET,1,PLANE55 !设置平面传热单元

TB,BKIN !设置双线性随动硬化模型
tb,mkin,1 !设置多线性随动硬化模型
TBPLOT, mkin,1 !图形显示多线性弹塑性模型实际输入曲线

CE,1,0,4,UX,1,4,UY,-1 !建立约束方程(No.1): 0=node4_UX*1+node_UY*(-1)
local,11,0,2,0,0,45 !在 4 号节点建立局部坐标系, 旋转 40 度
nrotat, 4 !将 4 号节点坐标系旋转为与局部坐标系相同

ADAPT,10,,5,0.2,1 !进行网格自适应划分, 并求解, 控制误差 5%, 或 10 次循环以内, 网格最大最小尺寸 0.2,1
PSTRES,ON !考虑预应力效应
nlgeom,on !打开几何大变形的开关
outres,all,-10 !每 10 步存储一次计算结果
nsubst,8,25,2 !每一个步长设置 8 个子步, 最大 25 步, 最小 2 步

MODOPT,LANB,5.0.001,100 !设定 LANB 方法求解, 可求 5 阶, 频率范围 0.001 至 100
SOLCONTROL,ON,0 !激活优化非线性求解方式
MODOPT,SUBSP,3 ! 选择子空间迭代法, 求 3 阶模态

/POST1 !进入一般的后处理
PLDISP,1 !计算的变形位移显示(变形前与后的对照)
PLNSOL, U,Y, 0,1.0 !显示 Y 方向位移
PRRSOL !打印单元的支反力结果
ETABLE,bar_I,SMISC, 1 !显示线型单元轴力
PLLS,BAR_I,BAR_J,0.5,1 !画出轴力图
NB=NODE(1,0,0) !获取几何位置为(1,0,0) (B 点)所对应的节点号码, 赋值给 NB
NB_UX=UX(NB) !获取节点号 NB 处的位移 UX, 赋值给 NB_UX
ETABLE,STRS,LS,1 !建立单元列表
*GET,STRSS,ELEM,13,ETAB,STRS !针对单元列表 STRS, 提取 13 号单元的应力
*GET,FREQ1,MODE,1,FREQ !提取第 1 阶模态共振频率, 并赋值给参数 FREQ1
ANMODE,10,0.5, ,0 !进行动画显示, 设置 10 帧, 每帧显示 0.5 秒

/POST26 !进入时间历程后处理
RFORCE,2,1,F,X !将 1 号节点上的 x 方向支反力提取, 并存储到 2 号变量中
XVAR,3 !将 3 号变量设置为横坐标



PLVAR,2 !图形显示 2 号变量随时间变化的曲线

/PLOPTS,DATE,0 !设置不显示日期和时间
/ESHAPE,0.5 !对于线单元(如杆、梁)按实体效果进行显示(以 0.5 倍实常数的比例)
JPGPRF,1500,300,1 !设置输出文件格式, 将变形图输出到 JPEG
/SHOW,JPEG ! 设置输出文件格式
*STATUS !列出所有参数的内容