数学分析笔记

Give yourself an epsilon of room.

林晓烁

https://xiaoshuo-lin.github.io

2023 年春季

目录

第一章　数学分析中的主要结论

1.1　Taylor 展开

定义 1.1.1 设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数, 这里 n 是任意给定的正整数. 令

$$T_n(x;x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称它为 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式.

1.1.1　带 Peano 余项的 Taylor 展开

定理 1.1.2 设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数, 则对任意固定的 $x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x)=T_n(x;x_0)+o\left((x-x_0)^n\right).$$

证明 写成极限形式, 即证

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n-1}(x;x_0)}{\frac{1}{n!}(x-x_0)^n}.$$

而这可由连续运用 $n-1$ 次 L'Hospital 法则得到. □

注 1.1.3 应该注意此处只是在 x_0 处存在 n 阶导数, 而其附近不一定存在 n 阶导数, 故不能直接求 n 阶导数来证明. (而由 n 阶导数的存在能推出 x_0 附近存在 $n-1$ 阶导数.)

1.1.2　带 Lagrange 余项的 Taylor 展开

定理 1.1.4 设函数 f 在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, 则对任意固定的 $x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x)=T_n(x;x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里 ξ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数.

证明 (常数变易法) 固定 x, 令变量 $t \coloneqq x_0$, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x)-T_n(x;t)\right)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)\\
=&-\left(f'(t)-\frac{f'(t)}{1!}+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-2\cdot\frac{f''(t)}{2!}(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right.\\
&\left.-\cdots-n\cdot\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)\\
=&-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{[f(x)-T_n(x;t)]\Big|_x^{x_0}}{\frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\Big|_x^{x_0}} \xlongequal[\xi\text{ 位于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}]{\text{Cauchy 中值定理}} \left.\frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x)-T_n(x;t))}{-\frac{1}{n!}(x-t)^n}\right|_{t=\xi} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\frac{1}{n!}(x-\xi)^n} = f^{(n+1)}(\xi).
$$

注意到 $[f(x)-T_n(x;t)]\Big|_{t=x} = \frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\Big|_{t=x} = 0$, 于是就有

$$
f(x) = T_n(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.
$$

□

注 1.1.5 Lagrange 余项也可由在 O.Schlömilch–Roche 余项中取 $p = n+1$ 得到.

1.1.3　带 O.Schlömilch–Roche 余项的 Taylor 展开

定理 1.1.6 设函数 f 在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, $p>0$, 则对任意固定的 $x_0 \in (a,b)$, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$
f(x) = T_n(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}.
$$

证明 (常数变易法) 固定 x, 令变量 $t \coloneqq x_0$, 设

$$
S_n(t) \coloneqq f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{F^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,
$$

$$
\varphi(t) = (x-t)^p.
$$

则

$$\begin{aligned}S_n'(t) =& f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - 2\cdot\frac{f''(t)}{2!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \\ & - \cdots - n\cdot\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ =& \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,\end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = -p(x-t)^{p-1}.$$

那么

$$\begin{aligned}f(x) - S_n(x_0) &= \frac{S_n(x) - S_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}\left(\varphi(x) - \varphi(x_0)\right) \\ &\xlongequal[\xi\text{ 位于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}]{\text{Cauchy 中值定理}} \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-p(x-\xi)^{p-1}}\left(-(x-x_0)^p\right) \\ &\xlongequal[\theta\in(0,1)]{\xi=x_0+\theta(x-x_0)} \frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}.\end{aligned}$$

□

1.1.4　带 Cauchy 余项的 Taylor 展开

定理 1.1.7 设函数 f 在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, 则对任意固定的 $x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x) = T_n(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0),$$

这里 ξ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数.

证明 在 O.Schlömilch–Roche 余项中取 $p=1$ 即得. □

1.1.5　带积分余项的 Taylor 展开

定理 1.1.8 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有直到 $n+1$ 阶导数, $f^{(n+1)}(x)\in\mathcal{R}[a,b]$, 则对任意固定的 $x_0\in(a,b)$ 有

$$f(x) = T_n(x;x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 (常数变易法) 固定 x, 令变量 $t \coloneqq x_0$, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x)-T_n(x;t)\right)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)\\
=&-\left(f'(t)-\frac{f'(t)}{1!}+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-2\cdot\frac{f''(t)}{2!}(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right.\\
&\left.-\cdots-n\cdot\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)\\
=&-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}$$

由 $f^{(n+1)}(x)\in\mathcal{R}[a,b]$ 知 $-\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\in\mathcal{R}[a,b]$. 根据 Newton–Leibniz 公式, 等式两边对 t 从 x_0 到 x 积分, 得到

$$f(x)=T_n(x;x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

证明 (分部积分法) 在高阶分部积分公式 (定理 1.3.1) 中, 令 $u=f(x)$, $v=(b-x)^n$. 此时

$$v'=-n(b-x)^{n-1},v''=n(n-1)(b-x)^{n-2},\cdots,v^{(n)}=(-1)^n n!,v^{(n+1)}=0;$$

当 $x=b$ 时所有函数 $v,v',v'',\cdots,v^{(n-1)}$ 都变成零. 则

$$\begin{aligned}
0=&(-1)^n\left[n!f(b)-n!f(a)-n!f'(a)(b-a)-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2-\cdots-f^{(n)}(a)(b-a)^n\right]\\
&+(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

移项得

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

再用 x 代替 b, x_0 代替 a, 就得到

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(x)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

【利用定理 1.3.1 中形式更对称的高阶分部积分公式可得到更简洁的证明:

将公式中的 n 替换成 $n-1$, 变成

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)v^{(n)}(a+b-x)\,\mathrm{d}x=&\sum_{k=0}^{n-1}\left[u^{(k)}(a)v^{(n-1-k)}(b)-u^{(k)}(b)v^{(n-1-k)}(a)\right]\\
&+\int_a^b u^{(n)}(x)v(a+b-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

如果要求 $v^n(x) \equiv 1$, 且所有的 $v^{(k)}(b)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ 都不出现, 则可唯一确定一个 n 次多项式:

$$v(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n.$$

此时, 若令 $f(x) = \int_a^x u(x)\,\mathrm{d}x$, 则高阶分部积分公式变成

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,\mathrm{d}x,$$

这就是函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的带有积分余项的 n 阶的 Taylor 公式.】 □

注 1.1.9 在边界点处 $f^{(n+1)}(x)$ 存在可减弱为在边界点处 $f^{(n)}(x)$ 连续.

带积分余项的 Taylor 公式的特点是表达式中不包含任何未知数. 同时, 从它还能导出带 O.Schlömilch–Roche 余项的 Taylor 公式:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n+1-p} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\frac{n+1}{p}(1-\theta)^{n+1-p}, \end{aligned}$$

也能直接导出带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

1.1.6　实解析函数

定义 1.1.10 $f \in C^{\omega}(a,b) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in C^{\infty}(a,b)$, 且对任意 $x_0 \in (a,b)$, 在 x_0 附近有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

注 1.1.11 $f \in C^{\omega}(a,b)$ 的一个等价描述是: $f \in C^{\infty}(a,b)$, 且对任意 $x_0 \in (a,b)$, 在 x_0 附近有

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - T_n(x;x_0)\right) = 0.$$

定理 1.1.12 (实解析判别准则) $f \in C^\omega(a,b) \iff f \in C^\infty(a,b)$, 且成立局部一致 Cauchy 不等式, 即对任意 $x_0 \in (a,b)$, 存在 $\delta > 0$, $M > 0$, $R > 0$, 使得对任意的 $x_0 \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leqslant \frac{M}{R^n}.$$

1.2　不定积分的计算

1.2.1　不定积分备忘录

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C.$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C.$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$$
$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C.$$
$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C.$$
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = -\coth x + C.$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \tanh x + C.$$

1.2.2　含三角函数的积分

关于 $R(\sin x, \cos x)$ 的积分式总可以用替换 $t = \tan\dfrac{x}{2}(-\pi < x < \pi)$ 有理化.

定理 1.2.1 如果有理整式或分式函数 $R(u,v)$ 满足 $R(-u,v) = R(u,v)$, 则这个有理函数可以化成只包含 u 的偶次幂的形状:

$$R(u,v) = R_1(u^2, v).$$

相反地, 如果 $R(-u,v) = -R(u,v)$, 则这个有理函数可以化成下面的形状:

$$R(u,v) = R_2(u^2, v)u.$$

由此, 我们得到:

(1) 关于 $\sin x$ 奇的积分式总可以用替换 $t=\cos x$ 有理化;

(2) 关于 $\cos x$ 奇的积分式总可以用替换 $t=\sin x$ 有理化;

(3) 关于 $\sin x,\cos x$ 偶的积分式总可以用替换 $t=\tan x$ 有理化.

任何有理表达式 $R(u,v)$ 总可以被表示成上面三种类型表达式的和:

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+\frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

1.2.3　含根式的积分

对于 $\displaystyle\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s,\cdots\right)\mathrm{d}x$, 其中所有的指数 $r,s,\cdots$ 都是有理数, 只要把这些指数化成公分母 m, 就变成关于 $R'\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ 的积分式, 再利用替换 $t=\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ 即可.

下面考虑二项式微分 $x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$.

(1) 若 p 是整数, 用 λ 表示分数 m 及 n 的分母的最小公倍数, 就化为 $R(\sqrt[\lambda]{x})\,\mathrm{d}x$.

(2) 作替换 $z=x^n$, 化为 $\dfrac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\,\mathrm{d}z$, 并令 $\dfrac{m+1}{n}-1=q$, 即有

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q\,\mathrm{d}z.$$

若 q 是整数, 用 ν 表示分数 p 的分母, 即得 $R(z,\sqrt[\nu]{a+bz})$, 作替换 $t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}$ 就将其有理化. 最后, 将积分式改写成

$$\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,\mathrm{d}z.$$

若 $p+q$ 是整数, 可化为 $R\left(z,\sqrt[\nu]{\dfrac{a+bz}{z}}\right)$, 作替换 $t=\sqrt[\nu]{\dfrac{a+bz}{z}}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$ 即可有理化. 事实上, 以上情形便是二项式微分所有的可积情形, 即 p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n}+p$ 中有一个是整数时.

1.2.4　利用欧拉变换计算椭圆积分

考虑椭圆积分

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x.$$

(1) 第 I 种变换: 当 $a>0$ 时, 假定

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x,$$

得到 $bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$, 于是

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},\ \mathrm{d}x=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) 第 II 种变换: 当 $c>0$ 时, 令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c},$$

得到 $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$, 于是

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2},\ \mathrm{d}x=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(3) 第 III 种变换: 当 ax^2+bx+c 有相异的实根 λ 与 μ 时, 令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}=t(x-\lambda),$$

得到 $a(x-\mu)=t^2(x-\lambda)$, 于是

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},\ \mathrm{d}x=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1.2.5　用复分析手段处理

要求积分

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x,\quad \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

等价于求积分

$$\int e^{ax}\left(\cos bx+i\sin bx\right)\,\mathrm{d}x=\int e^{(a+bi)x}\,\mathrm{d}x,$$

而此积分等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x}&=\frac{\cos bx+i\sin bx}{a+bi}e^{ax}\\&=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+i\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.\end{aligned}$$

由实部与虚部分别相等, 就得到

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C_1,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C_2.$$

1.2.6　技巧备忘录

例 1.2.2

$$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

解 因为

$$\sin 2nx \xlongequal{\text{裂项}} \sum_{k=1}^{n}[\sin 2kx-\sin(2k-2)x] \xlongequal{\text{和差化积}} 2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x,$$

所以

$$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n}\int \cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+C.$$

□

注 1.2.3 类似地,

$$\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = x+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx}{2k}+C.$$

例 1.2.4

$$I_k=\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}x \quad (k=1,2,3,\cdots).$$

解 用分部积分,

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^k}+2k\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^k}+2kI_k-2ka^2I_{k+1}, \end{aligned}$$

所以得到递推公式

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^k}+(2k-1)I_k\right].$$

第一项

$$I_1=\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

□

回顾 1.2.5 双曲函数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的基本性质:

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$, $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$;

(2) $(\sinh x)'=\cosh x$, $(\cosh x)'=\sinh x$;

(3) $y=\sinh x$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $y=\cosh x$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

下面利用双曲函数进行换元积分:

例 1.2.6 当 $a > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sinh t} \int \mathrm{d}t \\
&= t + C \\
&= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + C \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\cosh t} \int \mathrm{d}t \\
&= t + C \\
&= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C'.
\end{aligned}$$

例 1.2.7

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sin t} \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C \\
&\xlongequal{\tan\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}} \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C.
\end{aligned}$$

□

例 1.2.8

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x.$$

当 $a \geqslant 0$ 或 $a \leqslant 0$ 时, 这即是例 1.2.6. 但用下面的方法可直接解决 $a \in \mathbb{R}$ 的情形:

解 令 $\sqrt{x^2+a} = t - x$ 并取 t 作为新的变量, 得到 $x = \dfrac{t^2-a}{2t}$, 于是

$$\sqrt{x^2+a} = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t},\ \mathrm{d}x = \frac{t^2+a}{2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

□

例 1.2.9

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha < x < \beta).$$

解 令 $x = \alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$[1], 于是

$$x-\alpha = (\beta-\alpha)\sin^2\varphi,\quad \beta - x = (\beta-\alpha)\cos^2\varphi,\quad \mathrm{d}x = 2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

那么

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}\varphi = 2\varphi + C = 2\arctan\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C.$$

□

1.3　定积分的计算

1.3.1　高阶分部积分公式

定理 1.3.1 若 u, v 在 $[a,b]$ 上有直到 $n+1$ 阶导数, 且 $u^{(n+1)}, v^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,b]$, 则

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,\mathrm{d}x = \left[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v\right]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,\mathrm{d}x.$$

它还可以写成下面更对称的形式:

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(a+b-x)\,\mathrm{d}x = &\sum_{k=0}^{n}\left[u^{(k)}(a)v^{(n-k)}(b) - u^{(k)}(b)v^{(n-k)}(a)\right]\\ &+\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(a+b-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

---

[1]当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时, $\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ 与 $\dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha}$ 都是正数, 且它们的和为 1, 因此可设

$$\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \sin^2\varphi \quad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

1.3.2 技巧备忘录

例 1.3.2 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$

提示 利用替换 $t=-x$.

例 1.3.3 计算 $\int_0^{\pi}\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x&=-\int_0^{\pi}\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}(\pi-x)\\&=\int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x-(\pi-x)\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t\Big|_0^{\pi}\\&=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2.\end{aligned}$$

□

例 1.3.4 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 1 被积函数在 $x=0$ 时没有定义, 但是从 $\sin x\sim x\,(x\to0^+)$ 和 $x\ln x\to0\,(x\to0^+)$ 可知被积函数在 $x=0$ 右侧有界.

初步尝试:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-\cos x\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}\ln\sin x.$$

由于右边第一项为无穷大, 因此不能解决问题. 不过利用 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\,(x\to0)$, 我们可以将上面的 $\mathrm{d}(-\cos x)$ 改为 $\mathrm{d}(1-\cos x)$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \,\mathrm{d}(1-\cos x) \\
&= (1-\cos x)\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\,\mathrm{d}(\ln\sin x) \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= [\cos x - \ln(1+\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \ln 2 - 1.
\end{aligned}
$$

□

解 2 作代换 $x = 2t$,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2t \ln\sin 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2t\left(\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2t\ln\sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2t\ln\cos t\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{s=\frac{\pi}{2}-t} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2t\ln\sin t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2s\ln\sin s\,\mathrm{d}s \\
&= \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin t\cos t\ln\sin t\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\sin t = u} \ln 2 + \int_0^1 4u\ln u\,\mathrm{d}u \\
&= \ln 2 - 1.
\end{aligned}
$$

□

注 1.3.5 解 1 中处理分部积分的方法具有普遍意义. 由于两个不同的原函数之间只差一个常数, 因此在分部积分公式中左边的 $u(x)\,\mathrm{d}v(x)$ 可改为 $u(x)\,\mathrm{d}(v(x)+c)$, 其中 c 待定.

例 1.3.6 设 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解 由于 $x=0$ 是被积函数的第二类间断点, 不能用对变动上限求导的方法来求 $F'(0)$, 而只能按照定义来计算导数. 根据定义 $F(0)=0$, 而当 $x\neq 0$ 时, 由分部积分公式可得

$$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}(t^2)=x^2\cos\frac{1}{x}-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

按照导数的定义计算极限:

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\\&\xlongequal{\text{L'Hospital 法则}}\lim_{x\to 0^+}2x\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

□

注 1.3.7 $F'(0)$ 的计算也可以通过补充定义 $2t\cos\dfrac{1}{t}$ 在 $t=0$ 处的函数值为 0 使其在 $t=0$ 处连续直接得到. (本题直接使用 L'Hospital 法则后得到的极限不存在, 但这并不矛盾, 因为这不满足 L'Hospital 法则的使用条件.)

下面命题是对称性在定积分计算中的应用:

命题 1.3.8 设函数 f 在 $[0,a]$ 上可积, 记 $f(x)+f(a-x)=g(x)$, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

借助此命题, 可以得出:

例 1.3.9 对任意两个不同时为零的实数 a,b,

$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x=0.$$

例 1.3.10

$$I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

证明

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

□

例 1.3.11

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

证明

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\ln(1+\tan t)+\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]=\ln(1+\tan t)+\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)=\ln 2.$$

所以

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln 2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

□

下面这个例子也利用了对称性来计算定积分:

例 1.3.12 计算 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{a^n\sin^2 x+b^n\cos^2 x}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a^n+b^n}\int_0^{\pi}\frac{(a^n+b^n)(a^n\sin^2 x+b^n\cos^2 x)}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a^n+b^n}\int_0^{\pi}\frac{(a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x)+a^nb^n(\sin^2 x+\cos^2 x)}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{a^n+b^n}+\frac{1}{a^n+b^n}\int_0^{\pi}\frac{a^nb^n}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{a^nb^n}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n\sin^2 x+\left(\frac{b}{a}\right)^n\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n\tan^2 x+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\,\mathrm{d}\tan x\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n t^2+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\,\mathrm{d}t\\&=2\arctan\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n t\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\&=\pi.\end{aligned}$$

故

$$I=\frac{2\pi}{a^n+b^n}.$$

□

例 1.3.13 设 f 为连续函数, 证明:

$$\int_1^a\frac{f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^a\frac{f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

证明 对欲证等式左边, 作替换 $t=x^2$,

$$\int_1^a \frac{f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{a^2}\frac{f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)}{2t}\,\mathrm{d}t.$$

对欲证等式右边, 作替换 $t=\dfrac{a^2}{x}$,

$$\int_1^a \frac{f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_a^{a^2}\frac{f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

于是只需证

$$\int_1^a \frac{f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)}{2t}\,\mathrm{d}t=\int_a^{a^2}\frac{f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)}{2t}\,\mathrm{d}t.$$

这可由对左边积分作替换 $u=\dfrac{a^2}{t}$ 得到. □

例 1.3.14 (Fejér 积分) 证明: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}$.

证明 1 记 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x$, $(n\in\mathbb{N})$. 首先,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2nx}{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=2x}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos nt}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

由

$$\cos(n+1)t+\cos(n-1)t=2\cos nt\cos t$$

就有

$$1-\cos(n+1)t=2(1-\cos t)\cos nt+2(1-\cos nt)-\left[1-\cos(n-1)t\right].$$

于是

$$\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t+2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos nt}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(n-1)t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

也即

$$I_{n+1}=2I_n-I_{n-1},\ (n\in\mathbb{N}_+).$$

所以

$$I_{n+1}-I_n=I_n-I_{n-1}=\cdots=I_1-I_0=\frac{\pi}{2},$$

累加即得

$$I_n=\frac{n\pi}{2}.$$

□

证明 2

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 nx\,\mathrm{d}(-\cot x)\\&=-\cot x\cdot\sin^2 nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot n\sin 2nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由注 1.2.3 的结果, 对 $n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}.$$

□

例 1.3.15 计算 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x.$

解 因为

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}\sin nx\\&=\frac{1}{n}\left[\cos^n x\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin nx\cos^{n-1}x\,\mathrm{d}x\right]\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin nx\cos^{n-1}x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}2I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\left(\cos x\cos nx+\sin x\sin nx\right)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos(n-1)x\\&=I_{n-1}.\end{aligned}$$

而

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

故

$$I_n=\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

□

1.4　积分中值定理

1.4.1　积分第一中值定理

定理 1.4.1 若 $f \in C[a,b]$, $g \in \mathcal{R}[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若 $g \in C[a,b]$, $g > 0$, 则可取中值为内点 $\xi \in (a,b)$.

注 1.4.2 注意到此定理的证明核心是利用连续函数的介值性质, 而 Darboux 介值定理说明导函数也有介值性质, 因此将 $f \in C[a,b]$ 改为 f 是某个函数的导数, 结论仍成立.

1.4.2　积分第二中值定理

定理 1.4.3 若 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, 且 f 是非负单调减函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.4.4 若 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, 且 f 是非负单调增函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.4.5 若 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, 且 f 是单调函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.5　Riemann 可积性理论

1.5.1　Riemann 可积条件

定理 1.5.1 (可积的第一充分必要条件) 有界函数 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0.$$

定理 1.5.2 (可积的第二充分必要条件) 有界函数 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 的充分必要条件是对每个 $\varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分划 π, 使得

$$\sum_\pi \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

定理 1.5.3 (可积的第三充分必要条件) 有界函数 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 的充分必要条件是对任意的 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分划 π, 使振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε.

1.5.2 Lebesgue 定理

定理 1.5.4 若函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

1.5.3 一个经典例子: $x^\alpha \sin x^\beta$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

通过振幅和频率两个控制部分, 我们可以作出不同的 α 与 β 对应的函数 $y = x^\alpha \sin x^\beta$ 的大致图像:

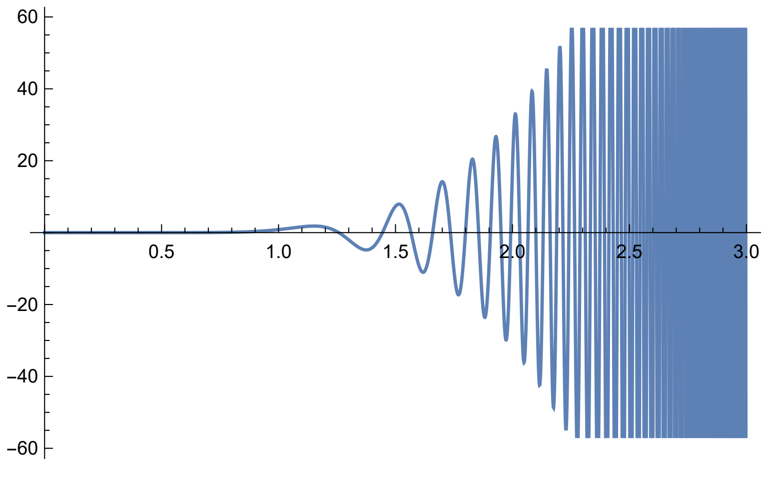

图 1.1: $\alpha > 0, \beta > 0$

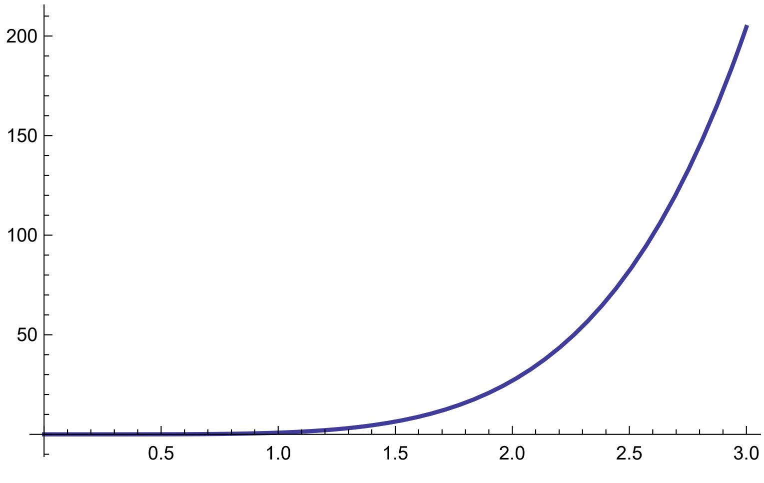

图 1.2: $\alpha > 0, \beta = 0$

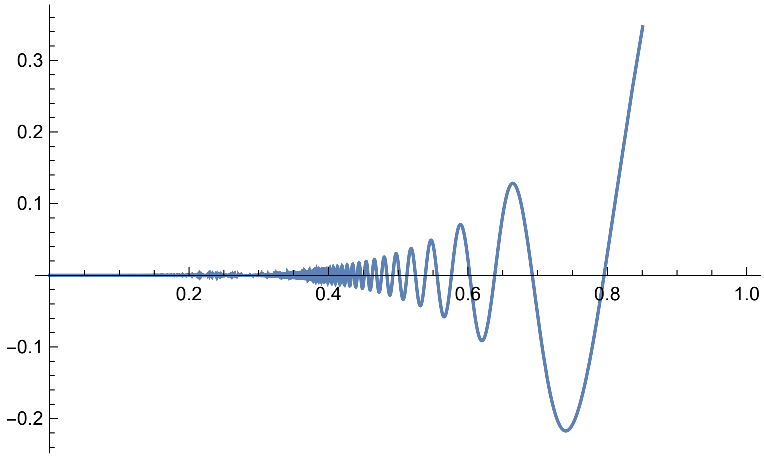

图 1.3: $\alpha > 0, \beta < 0$

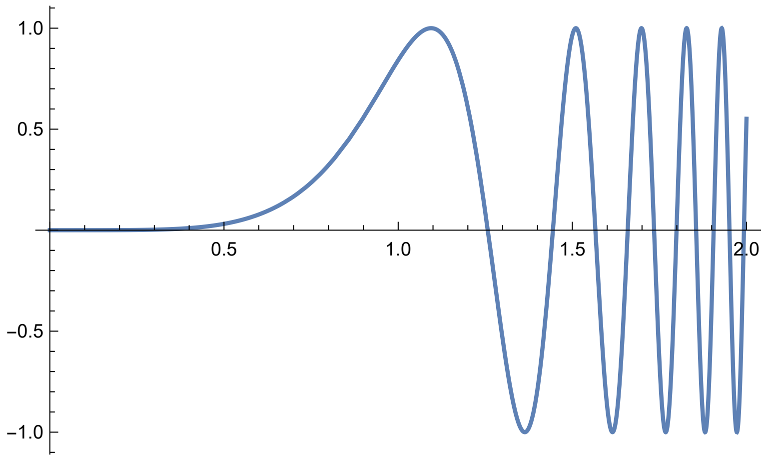

图 1.4: $\alpha = 0, \beta > 0$

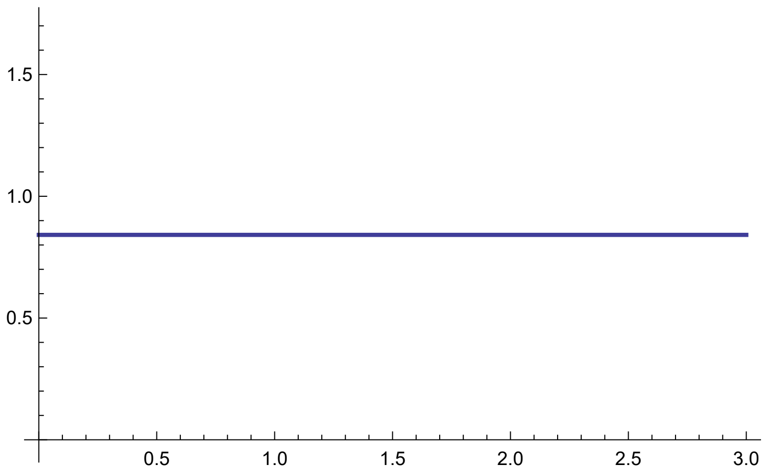

图 1.5: $\alpha = 0, \beta = 0$

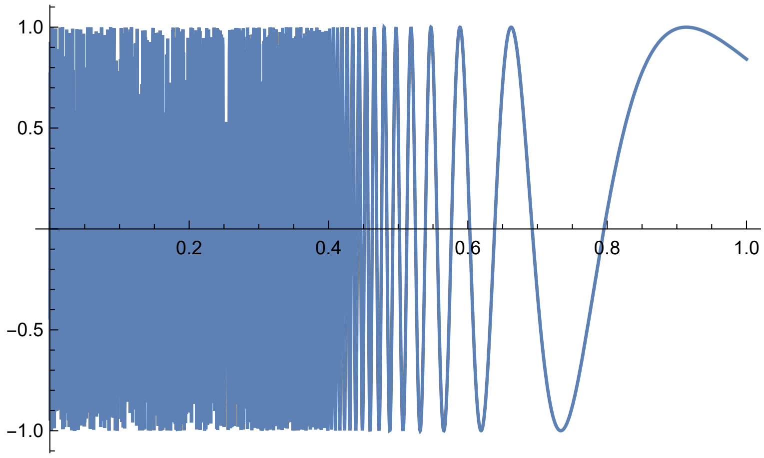

图 1.6: $\alpha = 0, \beta < 0$

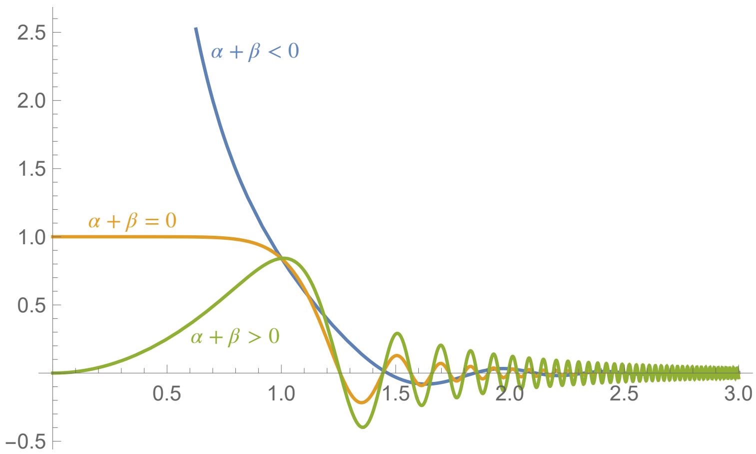

图 1.7: $\alpha < 0, \beta > 0$

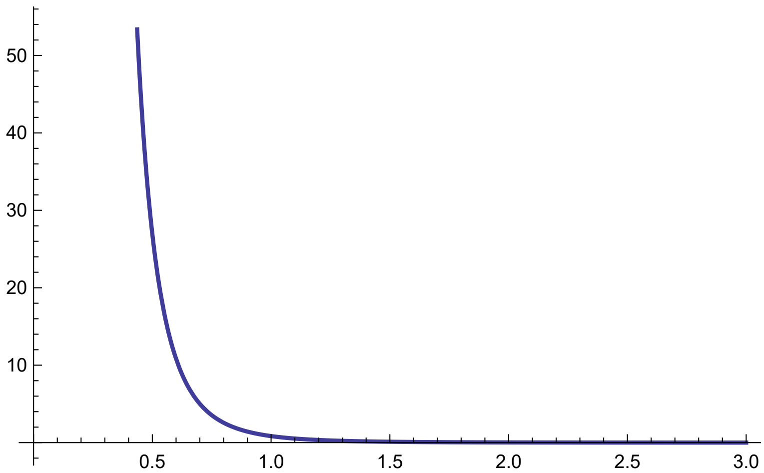

图 1.8: $\alpha < 0, \beta = 0$

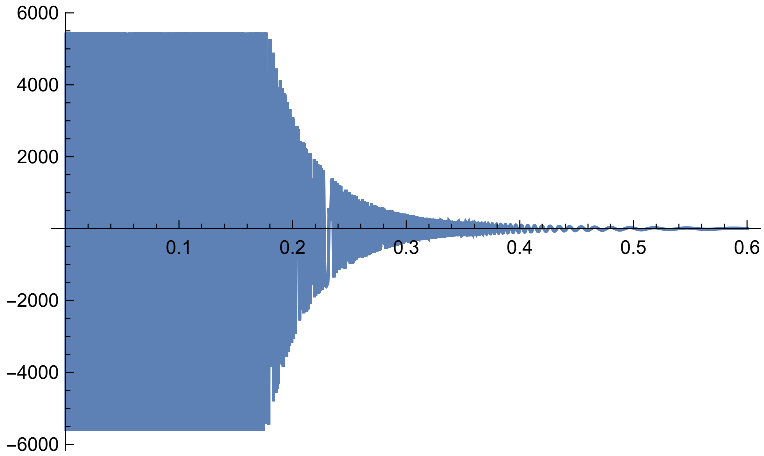

图 1.9: $\alpha < 0, \beta < 0$

¶ 何时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导

因为 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导等价于

$$f'_+(0) \coloneqq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin x^{\beta} \text{ 存在},$$

结合前面的图像可知

$$f(x)\text{在}[0,1]\text{上可导} \iff \alpha - 1 > 0 \quad \text{或} \begin{cases} \alpha - 1 = 0, \\ \beta \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} \alpha - 1 < 0, \\ \beta > 0, \\ \alpha + \beta - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

这些条件可以进一步简化为

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geqslant 1, \\ \beta \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} \alpha > 1, \\ \beta < 0. \end{cases}$$

满足以上条件的点 (α, β) 可用图 1.10 表示.

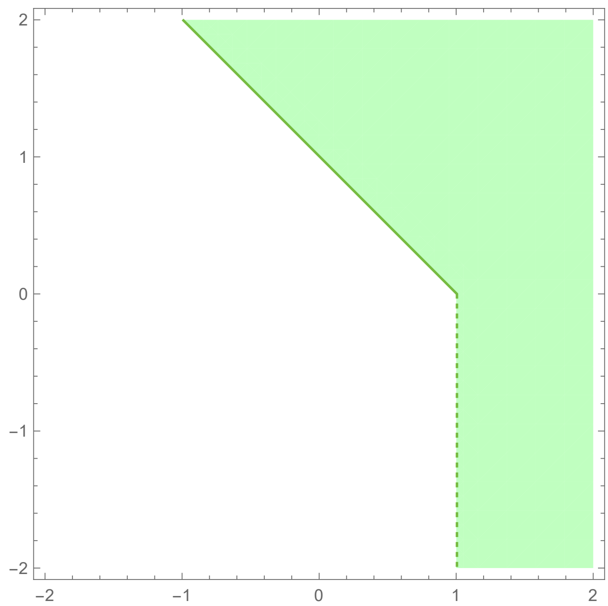

图 1.10: 满足 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导的区域

¶ 何时 $f(x) \in C^1[0,1]$

在前面的基础上, 我们注意到仅当 $\alpha+\beta=1$ 且 $\beta \geqslant 0$ 时 $f'_+(0)=1$, 而其余情形下 $f'_+(0)=0$. 又当 $x \in (0,1]$ 时,

$$f'(x)=x^{\alpha-1}\left(\alpha \sin x^{\beta}+\beta x^{\beta} \cos x^{\beta}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) \in C^1[0,1] &\iff \begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \beta \geqslant 0,\\ 1=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\alpha+\beta.\end{cases} \text{或} \begin{cases}\alpha+\beta>1,\\ \beta \geqslant 0,\\ 0=\lim\limits_{x\to 0^+} f'_+(x).\end{cases} \text{或} \begin{cases}\alpha>1,\\ \beta<0,\\ 0=\lim\limits_{x\to 0^+} f'_+(x).\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \beta \geqslant 0.\end{cases} \text{或} \begin{cases}\alpha+\beta>1,\\ \beta \geqslant 0.\end{cases} \text{或} \begin{cases}\alpha>1,\\ \beta<0,\\ \alpha+\beta-1>0.\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \beta \geqslant 0.\end{cases} \text{或}\ \alpha+\beta>1.
\end{aligned}$$

满足以上条件的点 (α,β) 可用图 1.11 表示.

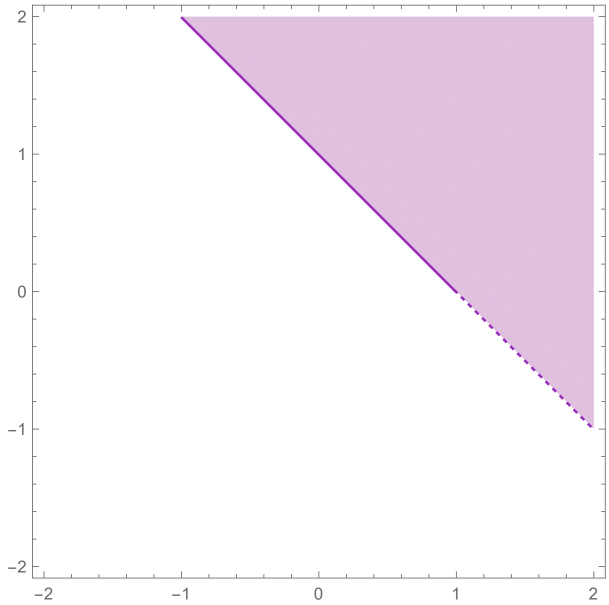

图 1.11: 满足 $f(x) \in C^1[0,1]$ 的区域

¶ 何时 $f(x) \in \mathcal{R}[0,1]$

由 Lebesgue 定理, $f(x) \in \mathcal{R}[0,1] \iff f$ 在 $[0,1]$ 上有界且几乎处处连续, 而在任何情形下 $f(x)$ 至多在 $x=0$ 处不连续, 故只需要求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界. 于是可得

$$f(x) \in \mathcal{R}[0,1] \implies \alpha \geqslant 0 \quad \text{或} \quad \begin{cases} \alpha < 0, \\ \alpha + \beta \geqslant 0. \end{cases}$$

满足以上条件的点 (α, β) 可用图 1.12 表示.

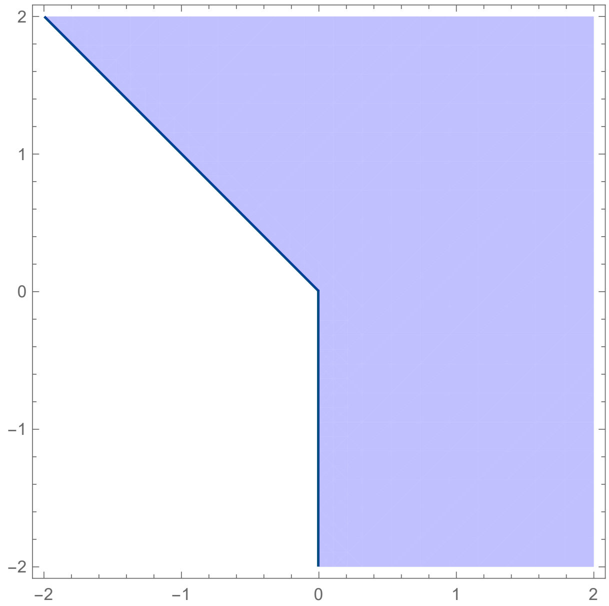

图 1.12: 满足 $f(x) \in \mathcal{R}[0,1]$ 的区域

¶ 何时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义 Riemann 可积

① 由狭义 Riemann 可积的讨论可以确定 $\alpha \geqslant 0$ 时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义 Riemann 可积.

② 当 $\alpha < 0, \beta \geqslant 0$ 时, 若 $\alpha + \beta < 0$, 由 p-积分判别法, 可得条件

$$\begin{cases} \alpha < 0, \\ \beta \geqslant 0, \\ -1 < \alpha + \beta < 0, \end{cases}$$

结合狭义 Riemann 可积的讨论可得

$$\begin{cases} \alpha < 0, \\ \beta \geqslant 0, \\ \alpha + \beta + 1 > 0. \end{cases}$$

③ 当 $\alpha < 0, \beta < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义 Riemann 可积 $\iff \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} x^{\alpha} \sin x^{\beta}$ 收敛. 通过替换 $t = x^{\beta}$ 可转化为

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1}^{\varepsilon^{\beta}} -t^{\frac{\alpha}{\beta}} \sin t \cdot \frac{1}{\beta} \cdot t^{\frac{1}{\beta}-1} \, \mathrm{d}t \text{ 收敛}.$$

移除常数项后就转化为

$$\int_{1}^{+\infty} t^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin t \, \mathrm{d}t \text{ 收敛}.$$

下面记 $p \coloneqq \dfrac{\alpha-\beta+1}{\beta}$, 当 $p \geqslant 0$ 时, 由积分第一中值定理,

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} t^p \sin t \,\mathrm{d}t \geqslant (2k\pi)^p \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = 2\cdot(2k\pi)^p, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

由 Cauchy 准则可知此时广义积分不收敛.

当 $p<0$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $A=\left\lfloor \exp\left(\dfrac{\ln\frac{\varepsilon}{4}}{p}\right)\right\rfloor+1$. 对任意 $A_1, A_2>A$, 由积分第二中值定理, 存在 $\xi\in[A_1,A_2]$, 使得

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} t^p \sin t\,\mathrm{d}t\right| &= \left|A_1^p\int_{A_1}^{\xi}\sin t\,\mathrm{d}t + A_2^p\int_{\xi}^{A_2}\sin t\,\mathrm{d}t\right| \\ &= A_1^p\left|\int_{A_1}^{\xi}\sin t\,\mathrm{d}t\right| + A_2^p\left|\int_{\xi}^{A_2}\sin t\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant 2\left(A_1^p+A_2^p\right) < 4A^p < \varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则可知此时广义积分收敛.

于是就得到

$$\begin{cases}\alpha<0,\\ \beta<0,\\ \alpha-\beta+1>0.\end{cases}$$

综合 ① ② ③ 的讨论, 我们得到

$$f(x)\text{在}[0,1]\text{上广义 Riemann 可积} \iff \alpha\geqslant 0 \quad \text{或}\begin{cases}\alpha<0,\\ \beta\geqslant 0,\\ \alpha+\beta+1>0.\end{cases} \quad \text{或}\begin{cases}\alpha<0,\\ \beta<0,\\ \alpha-\beta+1>0.\end{cases}$$

满足以上条件的点 (α,β) 可用图 1.13 表示.

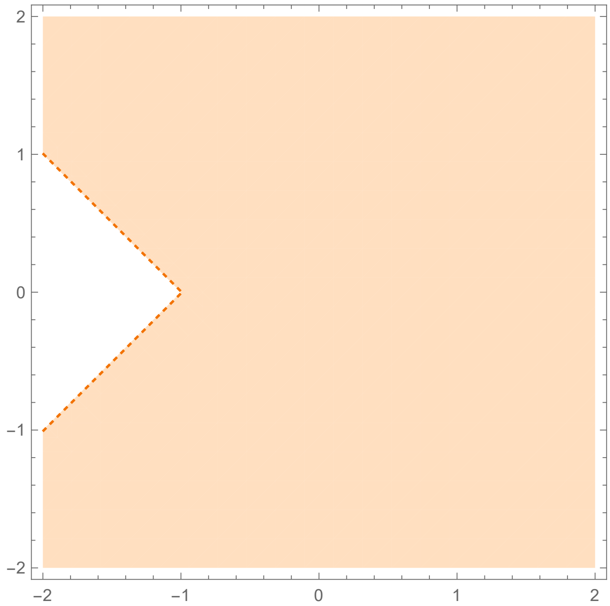

图 1.13: 满足 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义 Riemann 可积的区域

¶ 何时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数

【我们可以先确定一些情形. 当 $\alpha>0$ 或 $\alpha=0,\beta>0$ 或 $\alpha<0,\beta>0,\alpha+\beta>0$ 时, $f(x)\in C[0,1]$, 由 Newton–Leibniz 公式, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数; 当 $\alpha\leqslant 0,\beta=0$ 或 $\alpha<0,\beta>0,\alpha+\beta\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 不具有介值性, 一定没有原函数. 仅剩情形 $\alpha\leqslant 0,\beta<0$ (可参考图 1.6 与图 1.9) .】

我们也可以从头进行讨论. 先根据 $f(x)\in C(0,1]$ 构造出 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的一个原函数

$$F(x) := -\int_x^1 t^\alpha \sin t^\beta \,\mathrm{d}t,\quad x\in(0,1].$$

于是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数就等价于

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)\text{ 存在, 且}F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=0.$$

下面分别考虑这两个条件:

① $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ 存在即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义可积, 由前面的讨论知这要求

$$\alpha\geqslant 0\quad\text{或}\begin{cases}\alpha<0,\\ \beta\geqslant 0,\\ \alpha+\beta+1>0.\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}\alpha<0,\\ \beta<0,\\ \alpha-\beta+1>0.\end{cases}$$

② 由 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

要使该极限值为 0, 即

$$\alpha>0 \quad \text{或} \begin{cases}\alpha=0,\\ \beta>0.\end{cases} \quad \text{或} \begin{cases}\alpha<0,\\ \beta>0,\\ \alpha+\beta>0.\end{cases}$$

由 ① ② 条件同时成立可得

$$f(x)\text{在}[0,1]\text{上有原函数} \iff \alpha>0 \quad \text{或} \begin{cases}\alpha=0,\\ \beta>0.\end{cases} \quad \text{或} \begin{cases}\alpha<0,\\ \beta>0,\\ \alpha+\beta>0.\end{cases}$$

满足以上条件的点 (α,β) 可用图 1.14 表示.

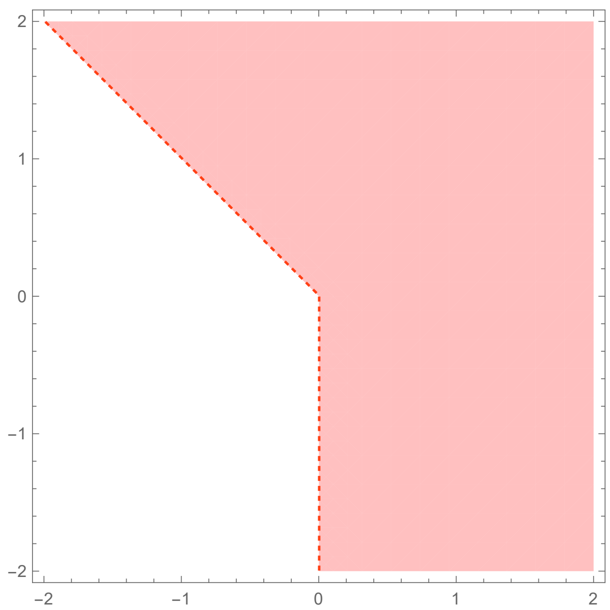

图 1.14: 满足 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数的区域

¶ **总结**

借助前面的讨论 (特别是满足要求的区域的图像) , 我们可以构造不少例子, 如 $[0,1]$ 上广义可积但没有原函数的函数.

1.6 Wallis 公式与 Stirling 公式

1.6.1 Wallis 公式

定理 1.6.1

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi} \quad (n \to \infty).$$

注 1.6.2 Wallis 公式也可以写成

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

1.6.2 Stirling 公式

定理 1.6.3

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty).$$

注 1.6.4 Stirling 公式也可以写成

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}}, \quad \theta(n) \in (0,1).$$

1.7 广义积分

定义 1.7.1 设 I 为区间, 函数 f 在 I 上有定义, 如果对任意有界闭区间 $[a,b] \subseteq I$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 则称 f 在 I 上内闭可积.

定义 1.7.2 称 b 为函数 $f(x)$ 在定义域区间 $[a,b)$ 上的奇点, 如果 $b = +\infty$ 或 $f(x)$ 在点 b 左侧邻近无界.

1.7.1 广义积分的比较判别法

定理 1.7.3 设 f 在 $[a,+\infty)\,(a>1)$ 上内闭可积, 且已知广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

证明 如果 f 非负, 则

$$0 \leqslant \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^A xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中两个积分作为变上限 A 的函数都是单调增加函数. 由于右边在 $A \to +\infty$ 时存在极限, 中间的积分作为 $A \in [a, +\infty)$ 的函数就是有上界的单调增加函数, 因此当 $A \to +\infty$ 时也有极限. 对于 f 非正情况的讨论是类似的. 而当 f 为变号函数时, 任取 $a < A < A'$, 对于积分

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_A^{A'} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|,$$

利用右边积分号下第二个因子 $\dfrac{1}{x}$ 单调且非负, 由积分第二中值定理, 存在 $\xi \in (A, A')$, 使得

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi} xf(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

又因为 $\displaystyle\int_a^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由广义积分的 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 A, A' 充分大时有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi} xf(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

再由 Cauchy 收敛准则得到 f 在 $[a, +\infty)$ 上广义可积. □

1.7.2　广义积分的 Dirichlet 判别法

定理 1.7.4 设 f 在 $[a, b)$ 上内闭可积, b 为奇点, 广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是存在分解 $f = uv$, 使得

(1) 函数 u 在 $[a, b)$ 上单调, 且 $\displaystyle\lim_{x\to b^-} u(x) = 0$;

(2) 对任何 $b' > a$, 积分 $\displaystyle\int_a^{b'} v(x)\,\mathrm{d}x$ 存在且有界.

证明 下面只对 $b = +\infty$ 的情况给出证明, 其他情况的证明是类似的.

(1) 充分性: 设 $\left|\displaystyle\int_a^{b'} v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M$. 由 $\displaystyle\lim_{x\to b^-} u(x) = 0$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 A_0, 只要 $A' > A_0$, 便有 $|u(A')| < \dfrac{\varepsilon}{8M}$. 现取 $A'' > A' > A_0$, 对任意的 $A \in [A', A'']$, 有

$$\left|\int_{A'}^{A} v(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{A} v(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A'} v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{A} v(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{A''} v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M.$$

由积分第二中值定理知, 存在 $\xi \in [A', A'']$, 使得

$$\begin{aligned}\left|\int_{A'}^{A''} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|u(A')\int_{A'}^{\xi} v(x)\,\mathrm{d}x + u(A'')\int_{\xi}^{A''} v(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant 2M\left(|u(A')| + 2\,|u(A'')|\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 必要性: 由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则, 存在 $A_1 > a$, 使得对于任意 $B > A \geqslant A_1$, 都有 $\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 1$.

归纳可知, 对于 $n \geqslant 2$, 存在 $A_n \geqslant A_{n-1} + 1$, 使得对于任意 $B > A \geqslant A_n$, 都有 $\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{n^3}$. 这样得到的 $\{A_n\}$ 是严格单调增加的无穷大数列.

现在定义

$$u(x) = \begin{cases} 1 & ,a \leqslant x \leqslant A_1, \\ \dfrac{1}{n} & ,A_n < x \leqslant A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

和

$$v(x) = \frac{f(x)}{u(x)}, a \leqslant x < +\infty,$$

这样就有分解 $f = uv$, 其中函数 u 满足条件 (1) 是明显的, 下面只需验证函数 v 满足条件 (2) . 容易看出 v 在 $[a, +\infty)$ 上内闭可积, 因此只需要证明它在任意区间 $[a, A]$ 上的积分有界.

由于当 $a \leqslant A \leqslant A_1$ 时 $v(x) = f(x)$, 因此存在常数 $L > 0$, 使得对这样的 A 有

$$\left|\int_a^A v(x)\,\mathrm{d}x\right| < L.$$

若 $A > A_1$, 则存在 n, 使得 $A_n < A \leqslant A_{n+1}$. 这时

$$\begin{aligned} \int_a^A v(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\int_a^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + 2\int_{A_2}^{A_3} + \cdots + (n-1)\int_{A_{n-1}}^{A_n} + n\int_{A_n}^{A}\right] f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left|\int_a^{A_1} f\right| + \left|\int_{A_1}^{A_2} f\right| + 2\left|\int_{A_2}^{A_3} f\right| + \cdots + (n-1)\left|\int_{A_{n-1}}^{A_n} f\right| + n\left|\int_{A_n}^{A} f\right| \\ &\leqslant L + 1 + 2\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots + (n-1)\cdot\frac{1}{(n-1)^3} + n\cdot\frac{1}{n^3} \\ &= L + 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &< L + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} < L + 2. \end{aligned}$$

□

命题 1.7.5 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上周期为 T 的函数, 而函数 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且趋于 0. 若常义积分 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 若 $\int_a^{a+T} = K \neq 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

证明 若 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 对任意 $A > a$, 取 $k = \left\lfloor \dfrac{A-a}{T} \right\rfloor$, 则

$$\left|\int_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{A-kT} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{a+T} |f(x)|\,\mathrm{d}x =: L,$$

结合 Dirichlet 判别法即得结论.

若 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = K \neq 0$, 则由已证, 积分 $\int_a^{+\infty}\left[f(x) - \dfrac{K}{T}\right] g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 由此可知 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散. □

命题 1.7.6 若 $f'(x)$ 单调递增且趋于 $+\infty$, 则积分

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(f(x)\right)\,\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_0^{+\infty} \cos\left(f(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 假定从 $x = a$ 开始, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 由有限增量公式,

$$f(x+1) \xlongequal{\exists\theta\in(0,1)} f(x) + f'(x+\theta) \geqslant f(a) + f'(x),$$

因此, $f(x)$ 也趋于 $+\infty$. 引入新的变量 $t = f(x)$, 以 g 表示 f 的反函数, 则

$$x = g(t), \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

原先的积分 (从下限 a 开始) 分别变为

$$\int_{f(a)}^{+\infty} \sin t \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t \quad 与 \quad \int_{f(a)}^{+\infty} \cos t \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

但在这个区间 $g'(t) = \dfrac{1}{f'(x)}$ 单调递减且趋于 0, 由 Dirichlet 判别法可知积分收敛. □

注 1.7.7 由此可知, Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

都是收敛的. 这两个例子也表明

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

1.7.3 广义积分的 Abel 判别法

定理 1.7.8 设 f 在 $[a,b)$ 上内闭可积, b 为奇点, 广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是存在分解 $f=uv$, 使得

(1) 函数 u 在 $[a,b)$ 上单调有界;

(2) 积分 $\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 下面只对 $b=+\infty$ 的情况给出证明, 其他情况的证明是类似的.

(1) 充分性: 由条件 (1) 知 $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=l$ 存在且有限, 因而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)-l)=0$. 由 Dirichlet 判别法, 知 $\int_a^{+\infty}(u(x)-l)v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 因而

$$\int_a^{+\infty} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}(u(x)-l)v(x)\,\mathrm{d}x+l\int_a^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

(2) 必要性: 令 $u\equiv 1$, $v\equiv f$. □

1.7.4 广义积分的计算

¶ 技巧备忘录

定理 1.7.9 任意一个函数 $f(x)$ 都能表示为一个偶函数与一个奇函数之和:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad 与 \quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

则 Cauchy 主值

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 1.7.10

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\,\mathrm{d}x.$$

解

$$\left\{\begin{aligned} I &\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t(1+\tan^\alpha t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\alpha t}\,\mathrm{d}t,\\ I &\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^\alpha s}{1+\tan^\alpha s}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}\right. \implies 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

故 $I=\dfrac{\pi}{4}$. □

例 1.7.11 计算积分

$$K_n=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)x}\cdot L_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $p>0$ 而 $L_n(x)$ 为第 n 个 Čebyšev–Laguerre 多项式:

$$L_n(x)=e^x\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x})\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

解 利用高阶分部积分公式 (定理 1.3.1) 就有

$$\begin{aligned}K_n=&\int_0^{+\infty}e^{-px}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^ne^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\\=&\left[e^{-px}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(x^ne^{-x}\right)-(-p)e^{-px}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\left(x^ne^{-x}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}(-p)^{n-1}e^{-px}x^ne^{-x}\right]\Bigg|_0^{+\infty}\\&+(-1)^n\int_0^{+\infty}(-p)^ne^{-px}x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x\\=&p^n\int_0^{+\infty}x^ne^{-(p+1)x}\,\mathrm{d}x\\=&p^n\left(-\frac{1}{p+1}x^ne^{-(p+1)x}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{n}{p+1}\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-(p+1)x}\,\mathrm{d}x\right)\\=&\frac{np}{p+1}K_{n-1}.\end{aligned}$$

而

$$K_0=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1},$$

故

$$K_n=\frac{n!p^n}{(p+1)^n}K_0=\frac{p^n}{(p+1)^{n+1}}\cdot n!.$$

□

例 1.7.12 (适当变换简化计算) 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}I&\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{z=x-\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z^2+2}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

□

¶ Euler 积分

例 1.7.13 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 因为

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin(2x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2\\&=I-\frac{\pi}{2}\ln 2,\end{aligned}$$

故

$$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

□

注 1.7.14 从 Euler 积分出发, 还可以得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x\,\mathrm{d}x=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

以及

$$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

¶ Froullani 积分

例 1.7.15 设函数 $f\in C[0,+\infty)$, 极限 $f(+\infty)$ 存在且有限, $0<a<b$, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解 对 $0<r<R<+\infty$, 由定积分的换元积分法,

$$\begin{aligned}\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对上式右边的两个定积分分别应用积分第一中值定理, 得到

$$\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(ar<\xi<br),$$

$$\int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = f(\eta)\int_{aR}^{bR} \frac{\mathrm{d}x}{x} = f(\eta)\ln\frac{b}{a} \quad (aR < \eta < bR).$$

在上两式中分别令 $r \to 0^+$, $R \to +\infty$, 注意到这时 $\xi \to +\infty, \eta \to +\infty$, 由于 $f(0^+) = f(0)$, $f(+\infty)$ 存在且有限, 而且 $\int_r^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在这时的极限就是 Froullani 积分, 便得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = [f(0) - f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}.$$

□

注 1.7.16 从上面的证明过程可以得到 Froullani 积分的两种变形:

(1) 若 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 没有极限, 但是对某个 $A > 0$, 积分

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 若 f 在 0 点不连续, 甚至右极限也不存在, 但对于某个 $A > 0$, 积分

$$\int_0^{A} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(+\infty)\cdot\ln\frac{a}{b}.$$

¶ Dirichlet 积分

例 1.7.17 证明: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

证明 首先

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

由 L'Hospital 法则,

$$f(x) := \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = O(x) \quad (x \to 0),$$

因此 f 在 $[0,\pi]$ 上常义可积. 由 Riemann–Lebesgue 引理 (定理 1.13.3) ,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

最后利用变量代换

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

令 $n \to \infty$, 就得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

□

¶ Euler–Poisson 积分

例 1.7.18 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证明 1 利用对于每个 t, 数列 $\left\{\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n\right\}$ 的极限是 e^{-t^2}, 我们研究积分

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

作代换 $t = \sqrt{n}\sin x$, 就有

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (n\to\infty).$$

由于右边的极限值已经是概率积分的数值, 而且又有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

因此只需要再证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t = 0.$$

利用关于指数函数的一个不等式: 当 $a \geqslant 1$ 时在区间 $[0,a]$ 上成立

$$0 \leqslant e^{-x} - \left(1-\frac{x}{a}\right)^a \leqslant \frac{x^2}{a}e^{-x},$$

在其中令 $x = t^2$, $a = n$, 就得到估计式

$$0 \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{n}.$$

由于当 $n \to \infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0. □

证明 2 利用不等式

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2}\,(0 \leqslant x \leqslant 1),\; e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}\,(x \geqslant 0),$$

有

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n},$$

而

$$\int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{n}x} \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \xlongequal{x=\tan\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\mathrm{d}\theta.$$

记 $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$. 由分部积分,

$$\begin{aligned}
I_n &= x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2n\left(\int_0^1 (x^2-1)(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2n(I_{n-1}-I_n),
\end{aligned}$$

所以 $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$. 又 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, 得到

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

再由 Wallis 公式,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由夹逼定理,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

¶ Cauchy–Schlömilch 变换

定理 1.7.19 假设以下积分均存在. 设 $a,b>0$, 则

$$\int_0^{+\infty} f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

证明 因为

$$\int_0^{+\infty} f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{b}{ax}} \frac{b}{a}\int_0^{+\infty} f\left[\left(at-\frac{b}{t}\right)^2\right]t^{-2}\,\mathrm{d}t,$$

所以将该积分的两种表达式相加可得

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{LHS}&=\int_0^{+\infty} f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x+\frac{b}{a}\int_0^{+\infty} f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]x^{-2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}\left(ax-\frac{b}{x}\right)\\&\xlongequal{u=ax-\frac{b}{x}}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u^2\right)\,\mathrm{d}u=2\,\mathrm{RHS}.\end{aligned}$$

□

例 1.7.20 代入 $f(x)=e^{-x}$ 并结合 Euler–Poisson 积分结果就得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax-b/x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

再对上式作变换 $a\to\sqrt{a}, b\to\sqrt{b}$ 就有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2-b/x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

¶ Lobachevsky 积分公式

引理 1.7.21 (余割函数的 Fourier 级数)

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

定理 1.7.22 设 f 是以 π 为周期的偶函数, $f\in\mathcal{R}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 我们把左边的积分表示成级数的形式:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{n\pi} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{(-1)^n\sin x}{x+n\pi}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{n\pi} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{(-1)^n\sin x}{x-n\pi}\,\mathrm{d}x,$$

由此推知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n f(x)\sin x\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{控制收敛定理}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

注 1.7.23 Dirichlet 积分可作为本定理的推论.

1.7.5 发散积分的广义值

¶ 一种与级数广义和 Cesàro 法类似的求法

设函数 $f(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 有定义, 并在每一个有限区间 $[0,x]$ 上常义可积, 但在 $[0,+\infty]$ 不可积. 定义函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

若其平均值存在有限极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,\mathrm{d}u = I,$$

则把这个数视作积分的广义值.

例 1.7.24 对发散积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

我们有 $F(x) = 1-\cos x$, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x} = 1.$$

定理 1.7.25 (正则性) 具有有限值 I 的收敛积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 用这种方法求得的“广义值”也是 I.

提示

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \implies \lim_{x\to+\infty} F(x) = I.$$

¶ 一种与级数广义和 Poisson–Abel 法类似的求法

设函数 $f(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 有定义, 并在每一个有限区间 $[0,x]$ 上常义可积, 但在 $[0,+\infty]$ 不可积. 若积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $k>0$ 时收敛并存在有限极限

$$\lim_{k\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-kx} f(x)\,\mathrm{d}x = I,$$

则把这个极限取作积分的广义值.

例 1.7.26 对发散积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2+1} \to 1 \quad (k\to 0^+).$$

1.8　Euler 积分

1.8.1　第一型 Euler 积分

定义 1.8.1 形如

$$\mathsf{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x \quad (p,q>0)$$

的积分称为第一型 Euler 积分. 该积分确定出两个参变量 p 与 q 的一个函数: β 函数.

首先, 利用代换 $x = 1-t$ 可得

$$\mathsf{B}(p,q) = \mathsf{B}(q,p).$$

当 $b>1$ 时, 由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^1(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\frac{x^p}{p}\\&=\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x^p=x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)}\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,\mathrm{d}x-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q-1)-\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q),\end{aligned}$$

由此,

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)\quad(q>1).$$

由 B 的对称性可得另一个递推公式

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)\quad(p>1).$$

如果 q 等于自然数 n, 就有

$$\mathrm{B}(p,n)=\frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\cdots\frac{1}{p+1}\cdot\mathrm{B}(p,1).$$

而

$$\mathrm{B}(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}.$$

因此,

$$\mathrm{B}(p,n)=\mathrm{B}(n,p)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot(p+2)\cdot\cdots\cdot(p+n-1)}.$$

若 p 也等于自然数 m, 就有

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

1.8.2　第二型 Euler 积分

定义 1.8.2 形如

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\quad(a>0)$$

的积分称为第二型 Euler 积分. 该积分确定出 Γ 函数.

令 $x=\ln\dfrac{1}{z}$, 得

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}\mathrm{d}z.$$

利用

$$\ln\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$$

就有

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty}n^{a-1}\int_0^1\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}\mathrm{d}z.$$

再用替换 $z=y^n$,

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty}n^a\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}n^a\mathsf{B}(n,a).$$

这就导出了

定理 1.8.3 (Euler–Gauss 公式)

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty}n^a\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\cdots\cdot(a+n-1)}.$$

由分部积分公式,

$$a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x=x^ae^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty x^ae^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

也即

$$\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a).$$

若取 $a=1$ 并注意到

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x=1,$$

就得到

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

1.9 数值积分

1.9.1 矩形公式

定义 1.9.1 用某一个由矩形组成的阶梯状图形面积代替所求曲边图形的面积 (即用积分和代替定积分) , 得到近似公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\triangleq\frac{b-a}{n}\left[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_{n-1})\right],$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}(i=0,1,\cdots,n-1)$. 这个近似公式就叫做矩形公式.

注 1.9.2 实际上通常取 $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+\frac{1}{2}}$, 如果对应的中间纵坐标 $f(\xi_i) = f(x_{i+\frac{1}{2}})$ 用 $y_{i+\frac{1}{2}}$ 表示, 则矩形公式可改写为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}\right).$$

下面假定 $f \in C^2[a,b]$. 设

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $F \in C^3[a,b]$. 由 Taylor 公式可得

$$F(b) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}F'''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,$$
$$F(a) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{1}{2}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}F'''(\zeta)\left(\frac{a-b}{2}\right)^3,$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= F(b) - F(a)\\ &= F'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{F'''(\xi)+F'''(\zeta)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\\ &\xlongequal{\text{Darboux 介值定理}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta),\end{aligned}$$

其中 $\eta \in [a,b]$. 这说明恢复公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

准确度的余项

$$\rho = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta).$$

由此可得

定理 1.9.3

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}\right) + R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n} \xlongequal[\eta^*\in[a,b]]{\text{Darboux 介值定理}} \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta^*)$$

即矩形公式的余项.

注 1.9.4 当 n 增加时这个余项大致像 $\dfrac{1}{n^2}$ 那样减小 (注意 η^* 可以随 n 变化) .

1.9.2 梯形公式

定义 1.9.5 用一系列梯形组成的图形的面积代替所求曲边图形的面积, 得到近似公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right),$$

其中 $y_i=f(x_i),(i=0,1,\cdots,n-1)$. 这个近似公式就叫做梯形公式.

下面假定 $f\in C^2[a,b]$. 记 f 在 $[a,b]$ 上的线性插值

$$l(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b),$$

则

$$l(x)-f(x)=\frac{b-x}{b-a}\left(f(a)-f(x)\right)+\frac{x-a}{b-a}\left(f(b)-f(x)\right).$$

由 Taylor 公式可得

$$f(a)-f(x)=f'(x)(a-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2\quad (a<\xi<x),$$
$$f(b)-f(x)=f'(x)(b-x)+\frac{1}{2}f''(\zeta)(b-x)^2\quad (x<\zeta<b),$$

因此

$$l(x)-f(x)=\frac{(b-x)(x-a)}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}f''(\xi)+\frac{b-x}{b-a}f''(\zeta)\right).$$

注意到

$$\frac{x-a}{b-a}>0,\frac{b-x}{b-a}>0,\text{且}\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1,$$

所以

$$\frac{x-a}{b-a}f''(\xi)+\frac{b-x}{b-a}f''(\zeta)\xlongequal[\eta\in[a,b]]{\text{Darboux 介值定理}}f''(\eta).$$

故对应于近似公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

的余项为

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta).$$

由此可得

定理 1.9.6

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

其中

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\frac{f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\cdots+f''(\eta_{n-1})}{n}\xlongequal[\eta^*\in[a,b]]{\text{Darboux 介值定理}}-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta^*)$$

即梯形公式的余项.

注 1.9.7 当 n 增加时这个余项也大致像 $\frac{1}{n^2}$ 那样减小, 即应用梯形公式与应用矩形公式所引起的误差是同级的.

1.9.3 凸函数积分平均不等式

定理 1.9.8 (Hadamard 不等式) 若 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数, 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证明 首先需要证明 f 可积. 由 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数知 f 在 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上连续, 再根据 Riemann 可积性定理得 $f \in \mathcal{R}[a,b]$. 由凸函数定义,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a+\theta(b-a))+f(b-\theta(b-a))}{2},$$

再由凸函数四点判别法,

$$\frac{f(a+\theta(b-a))+f(b-\theta(b-a))}{2} \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

这里 $\theta \in [0,1]$. 将上面两个不等式对 θ 在 $[0,1]$ 上积分,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(a+\theta(b-a))\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^1 f(b-\theta(b-a))\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

注意到

$$\int_0^1 f(a+\theta(b-a))\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{x=a+\theta(b-a)} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 f(b-\theta(b-a))\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{x=b-\theta(b-a)} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

□

注 1.9.9 与求矩形公式和梯形公式的余项相比, 凸函数积分平均不等式不要求 $f \in C^2[a,b]$. 若 $f \in C^2[a,b]$, 则凸函数积分平均不等式可由前面两种余项的正负性推出.

1.9.4 Jensen 不等式 (次线性的积分形式)

定理 1.9.10 设 $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ 是凸函数, $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$. $f, \omega \in C[a,b]$, $\mathrm{d}\mu(x) \coloneqq \omega(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $[a,b]$ 上的概率测度, 则

$$\varphi\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \leqslant \int_a^b \varphi\left(f(x)\right)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

证明 因为 φ 是凸函数, 所以对任意 $c \in [\alpha, \beta]$, 存在 k 使得 $\varphi(y) \geqslant \varphi(c) + k(y-c)$ 对任意 $y \in [\alpha, \beta]$ 成立. 我们取 $y = f(x), c = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \in [\alpha, \beta]$, 对所得不等式两边积分,

$$\int_a^b \varphi\left(f(x)\right)\,\mathrm{d}\mu(x) \geqslant \varphi(c)\int_a^b \mathrm{d}\mu(x) + k\int_a^b \left(f(x) - c\right)\,\mathrm{d}\mu(x) = \varphi(c).$$

□

1.10 积分的几何应用

1.10.1 光滑曲线的弧长

值得注意的是, 我们这里不直接说 "曲线弧长的计算", 因为与体积不同, "一般" 曲线的弧长是一个还没有被定义的量.

定义 1.10.1 若 (非闭的或闭的) 平面曲线 σ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta], \varphi, \psi \in C[\alpha, \beta]$$

给定, 且在曲线上没有重点 (即除去曲线是闭的时两个重合端点的情形下, 每一个点只由参变量 t 的一个值得到) , 则称这样的曲线为简单连续曲线.

引入这一概念时对曲线性质的要求并非无来由, 我们可以从以下几个引理的证明中进行体会。下设对由上给出的曲线 σ, 有 $\alpha \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \beta$, 而与参数值 t_1 和 t_2 相应的两个点是 M_1 和 M_2.

引理 1.10.2 对于任意 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $|t_2 - t_1| < \eta$ 时, 弦长 $\overline{M_1M_2} < \delta$.

证明 由函数 φ 和 ψ 的 (一致) 连续性, 对于任意 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $|t_2 - t_1| < \eta$ 时, 同时有

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, |\psi(t_2) - \psi(t_1)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

由此

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{[\varphi(t_2) - \varphi(t_1)]^2 + [\psi(t_2) - \psi(t_1)]^2} < \delta$$

. □

引理 1.10.3 在非闭曲线的情形, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当弦长 $\overline{M_1M_2} < \delta$ 时, 对于于这弦的端点的参变量数值之差 $|t_2 - t_1| < \varepsilon$.

证明 用反证法, 假设存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意 $\delta > 0$, 都存在曲线上两点 $M_1(t_1)$ 和 $M_2(t_2)$, 使得当 $\overline{M_1M_2} < \delta$ 时 $|t_2 - t_1| \geqslant \varepsilon$. 取收敛于 0 的序列 $\{\delta_n\}$, 并依次令 $\delta = \delta_n(n = 1, 2, \cdots)$, 我们得到两个点列 $\{M_{1n}(t_{1n})\}$ 和 $\{M_{2n}(t_{2n})\}$, 对于它们 $\overline{M_{1n}M_{2n}} < \delta_n$, 但 $|t_{2n} - t_{1n}| \geqslant \varepsilon(n = 1, 2, \cdots)$. 由 Bolzano–Weierstrass 定理, 不失一般性, 可以假设 $t_{1n} \to t^*, t_{2n} \to t^{**}$, 显然 $|t^{**} - t^*| \geqslant \varepsilon$, 所以 $t^* \neq t^{**}$. 同时对于对应的点 M^* 和 M^{**} 有 $\overline{M^*M^{**}} = 0$, 即这两个点应当重合, 但这与曲线没有重点也不是闭的矛盾. □

注 1.10.4 该引理对闭曲线不成立 (考虑重合端点附近) 。

定义 1.10.5 设点 A 是参数值 $t = \alpha$ 所对应的, 点 B 是参数值 $t = \beta$ 所对应的, 这时把 A 叫做曲线的起点, 而 B 叫做曲线的终点. 一般曲线的点 M 依参变量 t 增加的次序排列, 即异于 A 和 B 而在它们之间的两点, 我们认作对应较大的参变量值的点是较后面的点. 这样就确定了曲线的方向.

这个定义在形式上与所选的参变量方程有关, 然而, 曲线的方向这一概念实际上与曲线的具体给定法无关。

定义 1.10.6 曲线 $\widehat{AB}$ 上的一可能的内接折线周长 p 的集合的上确界 S, 叫做曲线 $\widehat{AB}$ 的长. 如果这个数 S 有限, 则称曲线是可求长的.

注 1.10.7 由三角不等式不难得出, 上述关于曲线"可求长"的定义等价于"曲线上割线长度随分割加细的极限存在".

定理 1.10.8 上述曲线弧长的概念具有可加性.

定义 1.10.9 若平面曲线 σ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta], \varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$$

给定, 且其切向量处处非零 (即 $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$) , 则称 σ 为一条光滑曲线.

定理 1.10.10 光滑曲线是可求长的, 且如上定义的曲线 σ 的弧长

$$L(\sigma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

证明 设点 A 和 B 分别是曲线 σ 的起点和终点, 我们按照 σ 的定向, 在 σ 上取 $n + 1$ 个点:

$$A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n = B,$$

再设点 A_i 对应于参数值 $t_i(i=0,1,2,\cdots,n)$, 那么曲线 σ 上的分割诱导了参数区间 $[\alpha,\beta]$ 上的分割 π:

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta.$$

那么

$$\begin{aligned}L(\sigma)&=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2}\\&=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}\Delta t_i,\end{aligned}$$

应该注意, 这并不是一个真正的 Riemann 和 (因为 ξ_i 与 η_i 未必相等) . 我们记

$$I=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\right)\Delta t_i,$$

则

$$L(\sigma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t+I.$$

下面只需证 $I=0$:

$$\begin{aligned}|I|&\leqslant\limsup_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\right|\Delta t_i\\&\leqslant\limsup_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)\right|\Delta t_i\\&\leqslant\limsup_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\psi')\Delta t_i\\&=0.\end{aligned}$$

其中第二个不等号用到了三角不等式 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$, 第三行中的 $\omega_i(\psi')$ 表示函数 ψ' 在第 i 个子区间上的振幅, 末尾的等号是因为 $\psi'(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的 Riemann 可积函数. 由此得 $I=0$. □

注 1.10.11 若条件改为 $\varphi',\psi'\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$, 上述曲线长度的积分公式仍然成立.

推论 1.10.12 若平面光滑曲线 σ 是由显式方程 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出的, 则其弧长

$$L(\sigma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

推论 1.10.13 若平面光滑曲线 σ 是由极坐标方程 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出的, 则其弧长

$$L(\sigma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

因为变弧 $s=s(t)$ 是参变量 t 的连续 (严格) 单调增函数, 所以也可以反过来, 把 t 看成是 s 的单值连续函数: $t=\omega(s)$, 式中的 s 从 0 变动至所考察的曲线的全长 S. 由此就得到流动坐标 x 及 y 作为 s 的函数的表达式:

$$\begin{cases} x=\varphi(\omega(s))=\Phi(s), \\ y=\psi(\omega(s))=\Psi(s). \end{cases}$$

当曲线参数是弧长参数时, 切向量长度是单位长度, 即 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2=1$. 因此若把 ($\mathbb{R}^n$ 中的) 光滑曲线写成向量参数方程 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, 由于 $\|\dot{\mathbf{r}}(s)\|_2=1^2$, 即 $\langle\dot{\mathbf{r}}(s),\dot{\mathbf{r}}(s)\rangle=1$, 对 s 求导即得 $\langle\dot{\mathbf{r}}(s),\ddot{\mathbf{r}}(s)\rangle=0$, 这说明对任意的 s, $\dot{\mathbf{r}}(s)\perp\ddot{\mathbf{r}}(s)^3$.

1.10.2 平面图形面积的计算

定理 1.10.14 在平面直角坐标系下, 若平面图形 $\Omega_1=\{(x,y):x\in[a,b],y\in[f_1(x),f_2(x)]\}$, 则 Ω_1 的面积

$$S(\Omega_1)=\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

若平面图形 $\Omega_2=\{(x,y):y\in[c,d],x\in[\phi(y),\varphi(y)]\}$, 则 Ω_2 的面积

$$S(\Omega_2)=\int_c^d\int_{\phi(y)}^{\varphi(y)}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

注 1.10.15 在面积的计算中, x 与 y 的地位相同.

定理 1.10.16 在极坐标系下, 若平面图形 $\Omega=\{(r,\theta):\theta\in[\alpha,\beta],r\in[0,r(\theta)]\}$, 则 Ω 的面积

$$S(\Omega)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

推论 1.10.17 在极坐标系下, 若平面图形 $\Omega=\{(r,\theta):\theta\in[\alpha,\beta],r\in[r_1(\theta),r_2(\theta)]\}$, 则 Ω 的面积

$$S(\Omega)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left(r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right)\mathrm{d}\theta.$$

---

[2]我们约定用记号 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 表示对弧长参数 s 求导, 即 $\dot{\mathbf{r}}(s)\coloneqq\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}$ (字母 s 特指弧长参数) , 而用 $\mathbf{r}'(t)$ 表示对一般参数 t 求导. 我们约定用记号 $\mathbf{T}=\mathbf{T}(s)=\dot{\mathbf{r}}(s)$ 表示这单位长切向量.

[3]这一结果符合几何直观. 因为 $\dot{\mathbf{r}}(s)=1$, 所以可把 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面上的曲线. 由于这条曲线上每点与原点距离相同, 每点处切向量方向一定没有径向 (即 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 方向) 分量, 于是 $\dot{\mathbf{r}}(s)\perp\ddot{\mathbf{r}}(s)$.

1.10.3　旋转体体积的计算

祖暅原理观察到的就是“体积是面积的叠加”这一现象。计算旋转体体积利用的是旋转体截面是圆这一特性, 用重积分的语言叙述就是旋转体体积是截面积的一重积分.

定理 1.10.18 平面图形 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.10.19 参数曲线

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in[\alpha,\beta],\varphi,\psi\in C^1[\alpha,\beta],\varphi'>0$$

绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

$$V=\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理 1.10.20 关于极轴对称的极坐标曲线 $r=r(\theta)(\theta\in[0,2\pi])$ 绕极轴旋转所得旋转体的体积

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi r^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

注 1.10.21

$$\begin{aligned}\text{旋转体体积微元}&=\text{截面积浓缩于质心所走过的距离}\times\text{面积}\\&=2\pi(\frac{2}{3}r)\sin\theta\cdot\frac{1}{2}r(r\,\mathrm{d}\theta).\end{aligned}$$

1.10.4　旋转体侧面积的计算

需特别注意, 旋转体侧面积局部是台体, 台体侧面积涉及的是斜长 (对曲线而言即弧长 $\mathrm{d}s$) 而不是 $\mathrm{d}x$.

定理 1.10.22 平面图形 $y=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.10.23 参数曲线

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in[\alpha,\beta],\varphi,\psi\in C^1[\alpha,\beta],\psi>0$$

绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

推论 1.10.24 若视地球为球体, 设地球半径为 r, 两纬线所处平面间的距离为 h, 则这两条纬线围成的环带面积 $S=2\pi rh$.

证明 1

$$S=\int_c^{c+h}2\pi\sqrt{r^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y=2\pi rh.$$

□

证明 2

$$S=\int_{y=c}^{y=c+h}2\pi x\,\mathrm{d}s\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}\int_{y=c}^{y=c+h}2\pi r\cos\theta r\,\mathrm{d}\theta=\int_{y=c}^{y=c+h}2\pi r\,\mathrm{d}y=2\pi rh.$$

□

注 1.10.25 这说明环带面积与纬度无关.

1.11　面积原理

我们所说的 "面积原理", 就是用积分来估计和式.

1.11.1　第一面积原理

定理 1.11.1 若 $x\geqslant m\in\mathbb{N}^*$ 时, f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi\geqslant m$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=m}^{\lfloor\xi\rfloor}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant f(\xi).$$

注 1.11.2 值得注意的是, 这里并不要求 $f\in C[m,+\infty)$, 这是因为由单调性可推出 f 的跳跃点集是至多可数的, 从而其不连续点构成零测集.

1.11.2　第二面积原理

定理 1.11.3 若 $x\geqslant m\in\mathbb{N}^*$ 时, f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n}f(k)-\int_m^{n}f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

存在 (记为 $\gamma(f)$) , 且 $0 \leqslant \gamma(f) \leqslant f(m)$. 更进一步, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{\lfloor\xi\rfloor} f(k)-\int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x-\gamma(f)\right| \leqslant f(\xi-1),$$

这里 $\xi \geqslant m+1$.

推论 1.11.4 若当 $x \geqslant 1$ 时, $f \geqslant 0$ 且递减, 则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

1.11.3　由面积原理看 Riemann ζ 函数

定理 1.11.5

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\zeta}} \xlongequal[\exists r(\zeta)\in[0,1],\text{且}\, r|_{(-\infty,0]}=0]{\zeta\in(-\infty,1]} \int_1^{n}\frac{1}{x^{\zeta}}\,\mathrm{d}x+r(\zeta)+O\left(\frac{1}{n^{\zeta}}\right).$$

注 1.11.6 当 $\zeta \leqslant 0$ 时, 对应于第一面积原理 (注意此时等号右边 $r(\zeta)=0$) ; 当 $0<\zeta\leqslant 1$ 时, 对应于第二面积原理 (此时 $r(\zeta):=\gamma\left(\dfrac{1}{x^{\zeta}}\right)$) . 特别地, 当 $\zeta=1$ 时, 就得到了公式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $\gamma := \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)-\ln n\right]=0.577\cdots$ 为 Euler 常数.

1.11.4　Young 不等式及其衍生物

定理 1.11.7 若 $\varphi \in C[0,+\infty)$, φ 严格递增, 且 $\varphi(0)=0$. 设 $\psi=\varphi^{-1}$, 则对任意 $a \geqslant 0, 0 \leqslant b \leqslant \varphi(+\infty)$, 有

$$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b \psi(x)\,\mathrm{d}x,$$

等号成立 $\iff b=\varphi(a)$. 这个不等式称为 Young 不等式.

Young 不等式的几何意义十分明显, 下面给出一个分析证法:

证明 不妨设 $\varphi \in C^1[0,+\infty)$ 且 $b \leqslant \varphi(a)$. 则由介值定理知, 存在 $c\in[0,a]$, 使得 $b=\varphi(c)$. 所以

$$\int_0^c \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b \psi(y)\,\mathrm{d}y \xlongequal[y=\varphi(x)]{x=\psi(y)} \int_0^c \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^c x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^c (x\varphi(x))'\,\mathrm{d}x=bc,$$

$$\int_c^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varphi(c)(a-c) = b(a-c).$$

两式相加即得

$$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

定义 1.11.8 若 $p,q \geqslant 1$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则称 p,q 为一对共轭指数.

定理 1.11.9 设 $p,q>1$ 是一对共轭指数, $a,b \geqslant 0$, 则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

等号成立 $\iff$ $a^p = b^q$.

证明 取 $\varphi(x) = x^{p-1}$, $\psi(y) = y^{q-1}$. 因为 $y = x^{p-1} \iff y^{q-1} = x^{(q-1)(p-1)} \xlongequal{pq=p+q} x$, 所以 φ 与 ψ 互为反函数. 运用 Young 不等式, 得到

$$ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

等号成立 $\iff$ $b = \varphi(a) = a^{p-1} \iff a^p = b^q$. □

定理 1.11.10 设 p,q 是一对共轭指数, $a = (a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $b = (b_1,\cdots,b_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 则

$$|\langle a,b\rangle| \leqslant \|a\|_p \|b\|_q,$$

其中 $\|a\|_p \coloneqq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \|b\|_q \coloneqq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. 等号成立 $\iff$ $(a_1^p,\cdots,a_n^p) \parallel (b_1^q,\cdots,b_n^q)$. 这个不等式称为 (离散的) Hölder 不等式.

定理 1.11.11 设 p,q 是一对共轭指数, $f,g \in \mathcal{R}^+[a,b]$, 则

$$|\langle f,g\rangle| \leqslant \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q,$$

其中 $\langle f,g\rangle \coloneqq \displaystyle\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \|fg\|_1 \coloneqq \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x, \|f\|_p \coloneqq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \|g\|_q \coloneqq \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$. 等号成立 $\iff$ $|f|^p$ 与 $|g|^q$ 相差常数因子几乎处处相等. 这个不等式称为 (连续的) Hölder 不等式.

注 1.11.12 当 $p=q=2$ 时, 右半不等式就是对于 L^2 可积函数的 Cauchy–Schwarz 不等式.

定义 1.11.13 若 $\left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, 则称 f 在区间 $[a,b]$ 上是 L^p 可积的, 记作 $f \in L^p[a,b]$.

定理 1.11.14 若 $f,g \in L^p[a,b], p \in [1,+\infty]$, 则

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,$$

等号成立当且仅当 f,g 相差常数因子几乎处处相等. 这个不等式称为 Minkowski 三角不等式.

证明 当 $p=1$ 时, 由 $|f+g| \leqslant |f|+|g|$ 积分即得

$$\int_a^b |f+g| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x + \int_a^b |g| \,\mathrm{d}x.$$

当 $p>1$ 时,

$$\begin{aligned}
\Big\|f+g\Big\|_p^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(|f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \Big\|f(f+g)^{p-1}\Big\|_1 + \Big\|g(f+g)^{p-1}\Big\|_1,
\end{aligned}$$

这时取实数 q 使得 p,q 是一对共轭指数, 由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
\Big\|f+g\Big\|_p^p &\leqslant \Big\|f(f+g)^{p-1}\Big\|_1 + \Big\|g(f+g)^{p-1}\Big\|_1 \\
&\leqslant \|f\|_p \Big\||f+g|^{p-1}\Big\|_q + \|g\|_p \Big\||f+g|^{p-1}\Big\|_q \\
&= \|f\|_p \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(\int_a^b |f+g|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int_a^b |f+g|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \Big\|f+g\Big\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&\Longrightarrow \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.
\end{aligned}$$

□

1.12　积分不等式集萃

1.12.1　Wirtinger 不等式

定理 1.12.1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的连续可导函数, 且满足 $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 的函数, 则

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立 $\iff f(x)=a\sin x+b\cos x$.

证明 先证明存在 $x_0\in[0,\pi)$, 使得 $f(x_0)=f(x_0+\pi)$:

若 $f(0)=f(\pi)$, 则证毕; 否则, 设 $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$, 则

$$g(0)=f(0)-f(\pi),\, g(\pi)=f(\pi)-f(0),$$

可见 $g(0)$ 与 $g(\pi)$ 符号相反. 由连续函数的介值性质, 存在 $x_0\in(0,\pi)$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=f(x_0+\pi)$. 设 $c=f(x_0)=f(x_0+\pi)$. 注意到恒等式

$$f'^2-(f-c)^2-(f'-(f-c)\cot(x-x_0))^2=\left((f-c)^2\cot(x-x_0)\right)',$$

两边积分[4], 得到

$$\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}(f(x)-c)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left((f(x)-c)^2\cot(x-x_0)\right)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

因此

$$\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 2\pi c^2\geqslant 0.$$

等号成立当且仅当 $c=0$ 且 $f'(x)=f(x)\cot(x-x_0)$, 所以 $f(x)=A\sin(x-x_0)$. □

定理 1.12.2 对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 和满足 $f(a)=f(b)=0$ 的函数 $f\in C^1[a,b]$, 有

$$\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\dfrac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 是最佳常数, 等号成立 $\iff f(x)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{b-a}x\right)$.

---

[4]由 f 的可导性, 有

$$f(x)-c=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),$$

这就保证了尽管 x_0 是 $\cot(x-x_0)$ 的奇点, 对等式积分仍是可行的 ($x_0+\pi$ 同理) .

1.12.2 Opial 不等式

定理 1.12.3 设 $x(t) \in C^1[0,h]$, $x(0)=x(h)=0$, 且在 $(0,h)$ 上 $x(t)>0$. 则有以下不等式:

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h (x'(t))^2\ \mathrm{d}t.$$

其中 $\dfrac{h}{4}$ 是最佳常数.

证明 (Opial) 我们需要如下引理:

引理 设 $p_0=0, p_1, p_2, \cdots, p_{2n+1}$ 非负且满足

$$p_{2i} \leqslant p_{2i-1} \quad 且 \quad p_{2i} \leqslant p_{2i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

那么成立如下不等式:

$$\left[\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})\right]^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2.$$

【引理的证明: 对 $n=1$, 我们有

$$(p_1+p_3-p_2)^2 + p_2^2 = p_1^2 + p_3^2 + 2(p_1-p_2)(p_3-p_2) \geqslant p_1^2+p_3^2,$$

结论正确. 下设结论对 $n-1$ $(n>1)$ 成立, 则有

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})\right]^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2 \\
=&\left[\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i}) + (p_{2n+1}-p_{2n})\right]^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2 \\
=&\left[\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 + p_{2n+1}^2 + 2(p_{2n+1}-p_{2n})\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i+2}) \\
\geqslant&\left[\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 + p_{2n+1}^2 \\
\geqslant&\sum_{i=0}^{n-1} p_{2i+1}^2 + p_{2n+1}^2 \\
=&\sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2.
\end{aligned}$$

由数学归纳法, 引理得证.】

在区间 $[0,h]$ 上定义 $y(t)=\int_0^t |x'(s)|\ \mathrm{d}s$, 则 $y'(t)=|x'(t)|$, 从而

$$\int_0^h y(t)\,|x'(t)|\ \mathrm{d}t=\int_0^h y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}y^2(h).$$

另一方面, 我们有

$$y(h)=\int_0^h |x'(t)|\ \mathrm{d}t,$$

再根据 Cauchy–Schwarz 不等式得到

$$y^2(h)\leqslant h\int_0^h (x'(t))^2\ \mathrm{d}t,$$

因此只需证

$$4\int_0^h x(t)\,|x'(t)|\ \mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^h y(t)\,|x'(t)|\ \mathrm{d}t=y^2(h).$$

我们先假设 $x(t)$ 在 $[0,h]$ 上有有限个极值点, 并设极大值依次为 $p_1,p_3,\cdots,p_{2n+1}$, 极小值依次为 $p_0=0,p_2,\cdots,p_{2n},p_{2n+2}=0$ (如图 1.15 所示) . 显然, $p_0,p_1,\cdots,p_{2n+1}$ 满足引理中的条件.

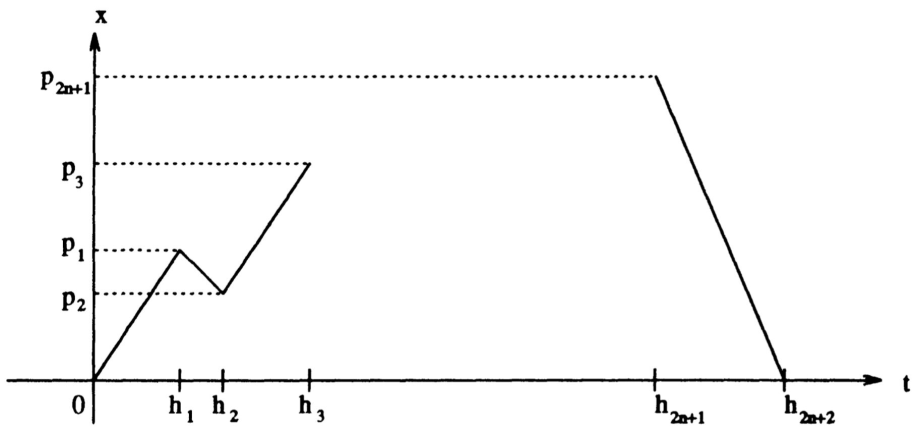

图 1.15: 函数 $x(t)$ 的极值点分布

设 h_i 为点 p_i $(0\leqslant i\leqslant 2n+2)$ 的 t 坐标. 则有

$$\begin{aligned}
y(h)&=\sum_{i=0}^{2n+1}\int_{h_i}^{h_{i+1}}|x'(t)|\ \mathrm{d}t\\
&=\sum_{i=0}^{n}\int_{h_{2i}}^{h_{2i+1}}x'(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n+1}\int_{h_{2i-1}}^{h_{2i}}x'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})-\sum_{i=1}^{n+1}(p_{2i}-p_{2i-1})\\
&=2\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i}).
\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\int_0^h x(t)\,|x'(t)|\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n p_{2i+1}^2 - \sum_{i=1}^n p_{2i}^2.$$

利用引理即可得到欲证不等式.

对于一般的 $x(t)$, 我们只需考虑一个每项均满足定理条件且在 $[0,h]$ 上只有有限个极值点的函数序列 $\{x_n(t)\}$, 且对这个序列, 在 $[0,h]$ 上一致地成立

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t), \quad \lim_{n\to\infty} x_n'(t) = x'(t).$$

则通过在下面不等式的积分号内取极限就得证:

$$\int_0^h |x_n(t)x_n'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h (x_n'(t))^2\ \mathrm{d}t, \quad n=1,2,\cdots.$$

考虑下面的函数:

$$x_0(t) = \begin{cases} ct, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{h}{2}, \\ c(h-t), & \dfrac{h}{2} \leqslant t \leqslant h, \end{cases}$$

其中 $c>0$ 是任意常数. 虽然这个函数在 $t=\dfrac{h}{2}$ 处不可导, 但是我们可以将其修正为 $C^1[0,h]$ 中的函数. 因此 $\dfrac{h}{4}$ 是最佳常数. □

定理 1.12.4 设 $x(t)$ 在 $[0,h]$ 上绝对连续, 且 $x(0)=x(h)=0$. 则有以下不等式:

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h (x'(t))^2\ \mathrm{d}t.$$

等式成立 $\iff x(t) = x_0(t)$, 其中

$$x_0(t) = \begin{cases} ct, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{h}{2}, \\ c(h-t), & \dfrac{h}{2} \leqslant t \leqslant h, \end{cases}$$

c 是任意常数.

证明 (Olech) 设 $y(t) = \displaystyle\int_0^t |x'(s)|\ \mathrm{d}s$、$z(t) = \displaystyle\int_t^h |x'(s)|\ \mathrm{d}s$. 则有如下关系:

$$y'(t) = |x'(t)| = -z'(t), \tag{1}$$

$$|x(t)| \leqslant y(t), \quad |x(t)| \leqslant z(t), \quad t\in[0,h]. \tag{2}$$

因此

$$\int_0^{\frac{h}{2}} |x(t)x'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{h}{2}} y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}y^2\left(\frac{h}{2}\right),$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{h}|x(t)x'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant -\int_{\frac{h}{2}}^{h} z(t)z'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}z^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

两式相加, 得到

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left[y^2\left(\frac{h}{2}\right)+z^2\left(\frac{h}{2}\right)\right].$$

另一方面, 由 Cauchy–Schwarz 不等式, 有

$$y^2\left(\frac{h}{2}\right)=\left(\int_0^{\frac{h}{2}}|x'(t)|\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{h}{2}\int_0^{\frac{h}{2}}\left(x'(t)\right)^2\ \mathrm{d}t,$$

$$z^2\left(\frac{h}{2}\right) \leqslant \frac{h}{2}\int_{\frac{h}{2}}^{h}\left(x'(t)\right)^2\ \mathrm{d}t.$$

这样就得到

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h \left(x'(t)\right)^2\ \mathrm{d}t.$$

若不等式等号成立, 就有

$$\left(\int_0^{\frac{h}{2}}|x'(t)|\ \mathrm{d}t\right)^2 = \frac{h}{2}\int_0^{\frac{h}{2}}\left(x'(t)\right)^2\ \mathrm{d}t,$$

$$\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h}|x'(t)|\ \mathrm{d}t\right)^2 = \frac{h}{2}\int_{\frac{h}{2}}^{h}\left(x'(t)\right)^2\ \mathrm{d}t,$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式的取等条件, 这等价于在 $\left[0,\frac{h}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{h}{2},h\right]$ 上 $|x'(t)| \xlongequal{\text{a.e.}}$ 常数. 再结合 (1) (2) 两式可知 $x(t)=x_0(t)$. □

1.12.3 Grüss 不等式

定理 1.12.5 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}\in\mathcal{R}[a,b]$ 且满足

$$\phi\leqslant f(x)\leqslant\Phi,\quad \gamma\leqslant g(x)\leqslant\Gamma,\quad \forall x\in[a,b],$$

其中 $\phi,\Phi,\gamma,\Gamma\in\mathbb{R}$. 则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{4}(\Phi-\phi)(\Gamma-\gamma),$$

其中

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^5,$$

且 $\dfrac{1}{4}$ 是最佳常数.

[5]这个表达式称作 Čebyšev 泛函.

证明 注意以下等式成立:

$$T(f,g)=\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

连续应用 Cauchy–Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)]\,[g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^2\\ \leqslant&\left(\int_a^b\sqrt{\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b[g(x)-g(y)]^2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y\right)^2\\ \leqslant&\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\int_a^b\int_a^b[g(x)-g(y)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即

$$T^2(f,g)\leqslant T(f,f)\cdot T(g,g).$$

同样由 Cauchy–Schwarz 不等式可得

$$T(f,f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 0.$$

此外, 还有

$$\begin{aligned}T(f,f)=&\left(\Phi-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\phi\right)\\&-\frac{1}{b-a}\int_a^b[\Phi-f(x)]\,[f(x)-\phi]\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此推出

$$T(f,f)\leqslant\left(\Phi-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\phi\right).$$

进而得到

$$T^2(f,g)\leqslant(\Phi-F)(F-\phi)(\Gamma-G)(G-\gamma),$$

此处 $F=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ G=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

因为

$$4(\Phi-F)(F-\phi)\leqslant(\Phi-\phi)^2,$$

$$4(\Gamma-G)(G-\gamma)\leqslant(\Gamma-\gamma)^2,$$

所以

$$T^2(f,g)\leqslant\frac{1}{16}(\Phi-\phi)^2(\Gamma-\gamma)^2.$$

代入 $f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$, 可见 $\dfrac{1}{4}$ 是最佳常数. □

定理 1.12.6 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}\in\mathcal{R}[a,b]$ 且满足

$$\gamma\leqslant g(x)\leqslant\Gamma,\quad\forall x\in[a,b],$$

其中 $\gamma,\Gamma\in\mathbb{R}$. 则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T(f,f)}.$$

1.12.4 Čebyšev 不等式

定理 1.12.7 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是绝对连续函数, 且导函数 f' 与 g' 在 $[a,b]$ 上有界. 则

$$|T(f,g)|\leqslant\frac{1}{12}(b-a)^2\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty,$$

其中

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

且所有出现的积分均有意义. 等号成立 $\iff$ f' 和 g' 是常值函数.

证明 由 Grüss 不等式 (定理 1.12.5) 的证明可得 Čebyšev 泛函满足

$$T^2(f,g)\leqslant T(f,f)\cdot T(g,g).$$

因此只需证

$$T(f,f)\leqslant\frac{(b-a)^2}{12}\|f'\|_\infty^2.$$

直接验证可知 Čebyšev 泛函具有平移不变性:

$$T(f+c,f+c)=T(f,f),\quad\forall c\in\mathbb{R}.$$

所以

$$\begin{aligned}
T(f,f)&=T\left(f-f\left(\frac{a+b}{2}\right),f-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\right)^2\\
&\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f'(\xi_x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty^2\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{(b-a)^2}{12}\|f'\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

□

1.12.5　Gronwall 不等式

¶ 微分形式

定理 1.12.8 设 $\eta(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负绝对连续函数, 且几乎处处成立不等式

$$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

其中 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数. 则

$$\eta(t) \leqslant \exp\left(\int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s\right) \cdot \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right], \quad \forall t \in [0,T].$$

证明 因为对 $s \in [0,T]$ 几乎处处成立

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\eta(s)\exp\left(-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r\right)\right) &= \exp\left(-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r\right)[\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)] \\ &\leqslant \exp\left(-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r\right)\psi(s),\end{aligned}$$

所以将不等式两端积分, 可得对任意 $t \in [0,T]$,

$$\eta(t)\exp\left(-\int_0^t \phi(r)\,\mathrm{d}r\right) - \eta(0) \leqslant \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r\right)\psi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

□

推论 1.12.9 特别地, 若在 $[0,T]$ 上 $\eta' < \phi\eta$ 且 $\eta(0) = 0$, 那么在 $[0,T]$ 上 $\eta \equiv 0$.

¶ 积分形式

定理 1.12.10 设 $\xi(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数, 且几乎处处成立不等式

$$\xi(t) \leqslant C_1\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s + C_2, \quad \text{常数 } C_1, C_2 \geqslant 0.$$

则

$$\xi(t) \leqslant C_2\left(1 + C_1te^{C_1t}\right), \quad \text{a.e. } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

证明 设 $\eta(t) := \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$, 则 $\eta' \leqslant C_1\eta + C_2$ 在 $[0,T]$ 上几乎处处成立. 由微分形式的 Gronwall 不等式,

$$\eta(t) \leqslant e^{C_1t}(\eta(0) + C_2t) = C_2te^{C_1t}.$$

再由条件所给不等式可得

$$\xi(t) \leqslant C_1\eta(t) + C_2 \leqslant C_2\left(1 + C_1te^{C_1t}\right).$$

□

推论 1.12.11 特别地, 若

$$\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{a.e. } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

则

$$\xi(t) \xlongequal{\text{a.e.}} 0.$$

1.12.6　变分法

例 1.12.12 考虑

$$C_0^1[0,1] \coloneqq \left\{ f \in C^1[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0 \right\},$$

并计算使得下式成立的最佳常数 B:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant B \left(\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in C_0^1[0,1].$$

解 我们相当于要计算

$$B = \sup_{\substack{f \in C_0^1[0,1] \\ f \not\equiv 0}} \frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

设存在 $\overline{f} \in C_0^1[0,1]$ 使得

$$\frac{\int_0^1 \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_0^1 \left|\overline{f}'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}} = B.$$

任取 $\varphi \in C_0^1[0,1]$, 则作为 α 的函数,

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \left(\overline{f}(x) + \alpha\varphi(x)\right)\,\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_0^1 \left|\overline{f}'(x) + \alpha\varphi'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}}$$

在 $\alpha = 0$ 处取得最大值 B. 因此它在 $\alpha = 0$ 处的导数为 0. 我们有[6]

$$\int_0^1 \overline{f}'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

其中

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_0^1 \left|\overline{f}'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x}.$$

[6]我们总是假设足够的光滑性使得积分与导数可以交换.

从而[7]

$$\int_0^1 \left(\overline{f}'(x) + \lambda x\right) \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1[0,1].$$

任取 $\psi \in C[0,1]$, $\varphi'(x) = \psi(x) - \displaystyle\int_0^1 \psi(t) \, \mathrm{d}t$ 在 $C_0^1[0,1]$ 中有解[8]. 于是

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\overline{f}'(x) + \lambda x\right) \psi(x) \, \mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \left(\overline{f}'(x) + \lambda x\right) \cdot \left(\varphi'(x) + \int_0^1 \psi(t) \, \mathrm{d}t\right) \, \mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \left(\overline{f}'(x) + \lambda x\right) \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \psi(x) \, \mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \overline{f}'(x) \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \psi(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \lambda x \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \psi(x) \, \mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \frac{\lambda}{2} \psi(x) \, \mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in C[0,1].
\end{aligned}$$

由此得到

$$\overline{f}'(x) + \lambda \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

结合边界条件解得

$$\overline{f}(x) = \frac{\lambda x(1-x)}{2}.$$

故

$$B = \frac{\displaystyle\int_0^1 \overline{f}(x) \, \mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_0^1 \left|\overline{f}'(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

□

注 1.12.13 利用变分思想找到函数类型后我们可以写出以下解答:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)' \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f'(x) \left(\frac{1}{2} - x\right) \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}} \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in C_0^1[0,1].
\end{aligned}$$

[7]这里通过分部积分产生相同因子 $\varphi'(x)$.

[8]这样处理是为了在保留 $\varphi \in C_0^1[0,1]$ 这一信息的同时将 φ' 换为另一个函数.

等号成立当且仅当存在非负常数 C, 使得 $f'(x) = C\left(\frac{1}{2} - x\right)$, 即

$$f(x) = \frac{Cx(1-x)}{2}.$$

例 1.12.14 设 $f \in C^1[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 证明

$$4\pi^2 \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left|f'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 记

$$X \coloneqq \left\{ f \in C^1[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

假设存在 $\overline{f} \in X$ 使得

$$\sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \frac{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^1 \overline{f}^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \left|\overline{f}'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x},$$

任取 $\varphi \in X$, 则作为 α 的函数,

$$\frac{\int_0^1 \left|\overline{f}(x) + \alpha\varphi(x)\right|^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \left|\overline{f}'(x) + \alpha\varphi'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x}$$

在 $\alpha = 0$ 处取得最大值. 因此它在 $\alpha = 0$ 处的导数为 0. 我们有

$$\int_0^1 \overline{f}'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 \overline{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

其中

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left|\overline{f}'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \overline{f}^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

设 $\overline{F}(x) \coloneqq \int_0^x \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t$, 运用分部积分可将上式化为

$$\int_0^1 \left(\overline{F}''(x) + \lambda\overline{F}(x)\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi \in X.$$

对于 $\psi \in C[0,1]$, 方程 $\varphi'(x) = \psi(x)$ 在 X 中有解的充要条件是

$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是任取 $\psi \in C[0,1]$, 我们有

$$\int_0^1 \left(\overline{F}''(x)+\lambda\overline{F}(x)\right)\left[\psi(x)-\int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t-12\left(x-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\psi(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=0.$$

即

$$\int_0^1\left(\overline{F}''(x)+\lambda\overline{F}(x)+\gamma+\mu\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\psi(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \forall\psi\in C[0,1],$$

其中 γ,μ 是两个常数. 因此

$$\overline{F}''(x)+\lambda\overline{F}(x)+\gamma+\mu\left(x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

于是 $\overline{F}\in C^\infty[0,1]$. 从而

$$\overline{f}''(x)+\lambda\overline{f}(x)+\mu=0.$$

结合 $\overline{f}\in X$ 得 $\mu=0,\sqrt{\lambda}=2k\pi$ (再经过计算, 根据最优性得 $k=1$) ,

$$\overline{f}(x)=C\sin(2\pi x+\theta),$$

其中 C 为非零常数, θ 为常数. 故

$$\max_{\substack{f\in X\\ f\neq 0}}\frac{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x}=\frac{\displaystyle\int_0^1 \overline{f}^2(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \left|\overline{f}'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{4\pi^2},$$

□

例 1.12.15 设 $f\in C^1[0,1]$ 满足 $f(0)=-2$, $f(1)=3$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求 $\min\displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$.

解 记

$$X:=\left\{f\in C^1[0,1]\mid f(0)=-2,f(1)=3,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}.$$

假设存在 $\overline{f}\in X$, 使得

$$\min_{f\in X}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\overline{f}'(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

再记

$$Y:=\left\{g\in C^1[0,1]\mid g(0)=g(1)=0,\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}.$$

任取 $\varphi\in Y$, 则作为 α 的函数,

$$\int_0^1\left(\overline{f}'(x)+\alpha\varphi'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

在 $\alpha=0$ 处取得最小值. 因此它在 $\alpha=0$ 处的导数为 0. 我们有

$$\int_0^1 \overline{f}'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

由分部积分公式可得

$$0=\overline{f}'(x)\varphi(x)\Big|_0^1-\int_0^1\overline{f}''(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\overline{f}''(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_0^1\overline{f}''(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \forall\varphi\in Y.$$

由此猜想$\overline{f}''(x)\equiv$ 常数, 即 $f(x)$ 是二次函数. 通过待定系数可解得

$$\overline{f}(x)=3x^2+2x-2.$$

计算可得 $\displaystyle\int_0^1\left(\overline{f}'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=28$. 因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{28}\left(\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1(6x+2)^2\,\mathrm{d}x\right)\\
&\geqslant\frac{1}{28}\left(\int_0^1 f'(x)(6x+2)\,\mathrm{d}x\right)^2\\
&=\frac{1}{28}\left[6\left(xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)+2\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\
&=28.
\end{aligned}$$

故

$$\min\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=28.$$

□

1.12.7　技巧备忘录

¶ 构造函数求导

✓从变动中考察常量

例 1.12.16 设 f 在 $[0,1]$ 上可微且当 $x\in(0,1)$ 时, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, $f(0)=0$. 证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=x$ 时等号成立.

提示 作辅助函数 $F(x) := \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0$, 只需证 $F'(x)>0$.

例 1.12.17 设凸函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 求证:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

提示 作辅助函数 $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$, 由凸函数性质可得 $F'(x) \geqslant 0$.

¶ 拆分积分区间

✓引入特殊点拆分

例 1.12.18 (最值点) 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 求证: 对任意 $t \in [0,1]$, 都有

$$f^2(t) \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 t_0 为 $f^2(t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值点, 并不妨设 $t_0 \in (0,1)$, 则只需证

$$f^2(t_0) \leqslant \frac{1}{4}\left(\int_0^{t_0} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right).$$

对上式右端运用 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \int_0^{t_0} \frac{1}{\left(2\sqrt{t_0}\right)^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{t_0} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^1 \frac{1}{\left(2\sqrt{1-t_0}\right)^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{t_0}^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \left[\int_0^{t_0} \frac{f'(x)}{2\sqrt{t_0}}\,\mathrm{d}x\right]^2 + \left[\int_{t_0}^1 \frac{f'(x)}{2\sqrt{1-t_0}}\,\mathrm{d}x\right]^2 \\
&= \frac{f^2(t_0)}{4t_0} + \frac{f^2(t_0)}{4(1-t_0)}.
\end{aligned}$$

因此只需证

$$\frac{1}{t_0} + \frac{1}{1-t_0} \geqslant 4,$$

而这可由调和-算术平均不等式得到. □

例 1.12.19 (中值点) 设 $f \in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 且当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x) \neq 0$. 求证:

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

证明 不妨设当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x)>0$. 设 $x_0 \in (0,1)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值点. 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (0,x_0), \eta \in (x_0,1)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = \frac{f(x_0)}{x_0}, \quad f'(\eta) = \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1} = \frac{f(x_0)}{x_0-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x &\geqslant \frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{f(x_0)}\int_\xi^\eta|f''(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{f(x_0)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{f(x_0)}|f'(\eta)-f'(\xi)|\\ &= \frac{1}{f(x_0)}\left|\frac{f(x_0)}{x_0-1}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right| = \frac{1}{x_0(1-x_0)} \geqslant 4.\end{aligned}$$

□

例 1.12.20 (中值点) 设 $f\in C^1[a,b]$, 求证: 对任意 $t\in[a,b]$, 都有

$$|f(t)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据积分第一中值定理, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$|f(\xi)|=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

对任意 $t\in[a,b]$, 不妨设 $t\geqslant\xi$. 则

$$\begin{aligned}\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_a^\xi|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\int_\xi^t|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\int_t^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_\xi^t|f'(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是只需证

$$|f(t)|-|f(\xi)|\leqslant\int_\xi^t|f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

而这可由

$$|f(t)|-|f(\xi)|\leqslant|f(t)-f(\xi)|=\left|\int_\xi^t f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\xi^t|f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

得到. □

✓拆分出长度为 ε 的区间

通常用于被积函数在积分区间内函数值差异极大 (如含 n 次方) 的情形 (见问题 17) .

例 1.12.21 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_\omega^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}=0\ (\omega\in(0,1))$.

证明 由 Weierstrass 逼近定理 (定理 1.13.5) 证明中的引理 (1) 可知,

$$\begin{aligned}\frac{\int_\omega^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t} &< \frac{\sqrt{n}}{2}\int_\omega^1\left(1-t^2\right)^n\,\mathrm{d}t \xlongequal[\varepsilon=\arcsin\omega]{t=\sin x} \frac{\sqrt{n}}{2}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{\pi\sqrt{n}\cos^{2n+1}\varepsilon}{4}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

□

✓按被积函数的正负拆分区间, 使其在区间内不变号

例 1.12.22 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调递减, $n\in\mathbb{N}^*$, 求证:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

证明 将区间 $[0,2\pi]$ 按函数 $\sin nx$ 的特性拆分为:

$$\left[0,\frac{2\pi}{n}\right],\left[\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n}\right],\cdots,\left[\frac{(2n-2)\pi}{n},2\pi\right].$$

对 $k\ (k=1,\cdots,n)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{(2k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{变量代换}} \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx+\pi)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} \left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0,\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

□

¶ 利用 Taylor 展开

✓在积分区间两端点展开

例 1.12.23 设 $f\in C^1[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$. 求证:

$$\max|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

✓在积分区间的中点展开

例 1.12.24 (参考定理 1.9.3) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二次可微. 求证:

$$\left|\int_a^b \left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24},\quad \text{其中} M:=\max|f''(x)|.$$

证明 记 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, 将被积函数在 $x=x_0$ 处按带 Lagrange 余项的 Taylor 公式展开,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\eta_x)}{2}(x-x_0)^2,$$

其中 η_x 位于 x_0 与 x 之间. 对上式在 $[a,b]$ 上积分得到

$$\int_a^b [f(x)-f(x_0)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b (x-x_0)^2 f''(\eta_x)\,\mathrm{d}x.$$

上式右端中 $f''(\eta_x)$ 不一定是 x 的连续函数, 但由于导函数具有介值性, 积分第一中值定理的结论仍然成立 (见注 1.4.2) , 即存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b (x-x_0)^2 f''(\eta_x)\,\mathrm{d}x = f''(\xi)\int_a^b (x-x_0)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

故

$$\left|\int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\,\mathrm{d}x\right| = \frac{(b-a)^3}{24}\left|f''(\xi)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24}.$$

□

¶ 将常数或可导函数变形为定积分

✓$c = \displaystyle\int_a^b \frac{c}{b-a}\,\mathrm{d}x$

例 1.12.18 与问题 32 的证明 1 就用到这一技巧.

✓结合题设将常数变为某简单函数的积分

问题 20 就利用了 $1 = \displaystyle\int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$, 注 1.12.13 就利用了 $\dfrac{1}{12} = \displaystyle\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$. 这一技巧往往与变分法结合, 在找出极值对应的函数类型后用 Cauchy–Schwarz 不等式写出标准的解答.

✓$f(x) = \displaystyle\int_c^x f'(x)\,\mathrm{d}x + f(c)$, 通常还有 $f(c) = 0$

¶ 化 $\mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}(x-c)$

注 1.12.13 解答中第一步变换就是 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

¶ 利用线性变换

如果问题涉及到函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的均值 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 则对均值作线性变换, 令

$$t = \frac{x-a}{b-a} \iff x = a + (b-a)t,$$

可得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f\left(a+(b-a)t\right)\,\mathrm{d}t.$$

这样就能把积分区间不同的两个定积分置于同一个区间进行比较.

例 1.12.25 若 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数, 则 $g(x) \coloneqq \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 也是 $[a,b]$ 上的凸函数.[9]

[9]因为开区间上的凸函数必为连续函数, 所以 $f \in C(a,b)$ 且有界, 从而 $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

证明 作线性变换 $s=\dfrac{t-a}{x-a}$ 可得

$$g(x)\xlongequal[\mathrm{d}t=(x-a)\,\mathrm{d}s]{t=(1-s)a+sx}\int_0^1 f\left((1-s)a+sx\right)\,\mathrm{d}s.$$

设 $x_1<x_2<x_3$, 则

$$\frac{g(x_3)-g(x_2)}{x_3-x_2}=\int_0^1\frac{f\left((1-s)a+sx_3\right)-f\left((1-s)a+sx_2\right)}{[(1-s)a+sx_3]-[(1-s)a+sx_2]}s\,\mathrm{d}s,$$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\int_0^1\frac{f\left((1-s)a+sx_2\right)-f\left((1-s)a+sx_1\right)}{[(1-s)a+sx_2]-[(1-s)a+sx_1]}s\,\mathrm{d}s.$$

由凸函数的三点判别法,

$$\frac{f\left((1-s)a+sx_3\right)-f\left((1-s)a+sx_2\right)}{[(1-s)a+sx_3]-[(1-s)a+sx_2]}\geqslant\frac{f\left((1-s)a+sx_2\right)-f\left((1-s)a+sx_1\right)}{[(1-s)a+sx_2]-[(1-s)a+sx_1]},$$

因此

$$\frac{g(x_3)-g(x_2)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}\implies g(x)\text{是}[a,b]\text{上的凸函数}.$$

□

例 1.12.26 设 $f\in\mathcal{R}[0,1]$, 且 f 单调递减. 求证:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\quad\forall a\in(0,1).$$

证明【当 $f\in C[0,1]$ 时, 由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)&=\frac{1}{x}\left(f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\&\xlongequal{\exists\xi\in[0,x]}\frac{f(x)-f(\xi)}{x}\leqslant 0,\end{aligned}$$

可知

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

但在 $f\in\mathcal{R}[0,1]\backslash C[0,1]$ 时此法失效.】

我们转而使用线性变换 $t=\dfrac{x}{a}$, 并利用 $f(ax)\geqslant f(x)$ 得到

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=a\int_0^1 f(at)\,\mathrm{d}t\geqslant a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

1.13　函数的逼近

1.13.1　线性插值

定理 1.13.1 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上有二阶导数, l 是由 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 确定的线性函数:

$$l(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

如果 $|f''|$ 在 $[a,b]$ 上的上界为 M, 那么对任意 $x \in [a,b]$, 有

$$|f(x) - l(x)| \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2.$$

证明 把 $f(x)$ 写成

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(x) + \frac{x-a}{b-a}f(x),$$

于是

$$l(x) - f(x) = \frac{b-x}{b-a}\left[f(a) - f(x)\right] + \frac{x-a}{b-a}\left[f(b) - f(x)\right].$$

由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 有

$$f(a) - f(x) = (a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\xi) \quad (a < \xi < x),$$

$$f(b) - f(x) = (b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta) \quad (x < \eta < b).$$

从而

$$l(x) - f(x) = \frac{(b-x)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{b-a}f''(\xi) + \frac{b-x}{b-a}f''(\eta)\right].$$

由于 $\dfrac{x-a}{b-a} > 0, \dfrac{b-x}{b-a} > 0$, 且它们的和为 1, 所以

$$\begin{aligned}
|l(x) - f(x)| &\leqslant \frac{(b-x)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{b-a}\left|f''(\xi)\right| + \frac{b-x}{b-a}\left|f''(\eta)\right|\right] \\
&\leqslant \frac{M}{2}(b-x)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}\left(\frac{b-x+x-a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{M}{8}(b-a)^2.
\end{aligned}$$

□

1.13.2　稠密性定理

定理 1.13.2 设 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, f_n 是 f 在区间 $[a,b]$ 上 n 等分的分段线性连续函数. 则

$$\lim_{n\to\infty} f_n \xlongequal{L^1[a,b]\text{收敛}} f,$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

证明 在分割的第 i 个区间, $f_n(x)$ 是线性函数, 不妨设为单调递增函数. 则对任意 $x\in[a,b]$, 都有

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant \max\left\{|f(x)-f(\text{右端点})|\,,|f(x)-f(\text{左端点})|\right\}\leqslant\omega_i.$$

那么

$$\limsup_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0.$$

□

1.13.3　Riemann–Lebesgue 引理

定理 1.13.3 设 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,\ \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

证明 可以先证明一个比较弱的版本: 我们假设 f 是连续可微的. 由分部积分公式,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{p}\int_a^b f'(x)\cos px\,\mathrm{d}x+\frac{1}{p}f(a)\cos(pa)-\frac{1}{p}f(b)\cos(pb)\\&\leqslant\frac{1}{p}\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{p}|f(a)|+\frac{1}{p}|f(b)|,\end{aligned}$$

于是

$$\limsup_{p\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\limsup_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{p}|f(a)|+\frac{1}{p}|f(b)|\right)=0.$$

这就证明了

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0.$$

这时对 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 用分段线性连续函数 f_p 逼近 f, 就有

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| &= \limsup_{p\to+\infty}\left|\int_a^b f_p(x)\sin px\,\mathrm{d}x+\int_a^b (f(x)-f_p(x))\sin px\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \limsup_{p\to+\infty}\left|\int_a^b f_p(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|+\limsup_{p\to+\infty}\int_a^b |f(x)-f_p(x)|\,\mathrm{d}x\\ &= 0.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0.$$

同理可证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

□

Riemann–Lebesgue 引理可以从直观上得到 “印证”: 图 1.16 中蓝线对应 $y=\ln x$ 的图像, 而红线对应 $y=\sin(50x)\cdot\ln x$ 的图像. 当 p 很大时, $y=\sin px$ 在有限区间 $[a,b]$ 上 “急剧” 振荡, 同时 $f(x)$ 可视作局部常值函数, 因此我们可以期望正负振荡抵消.

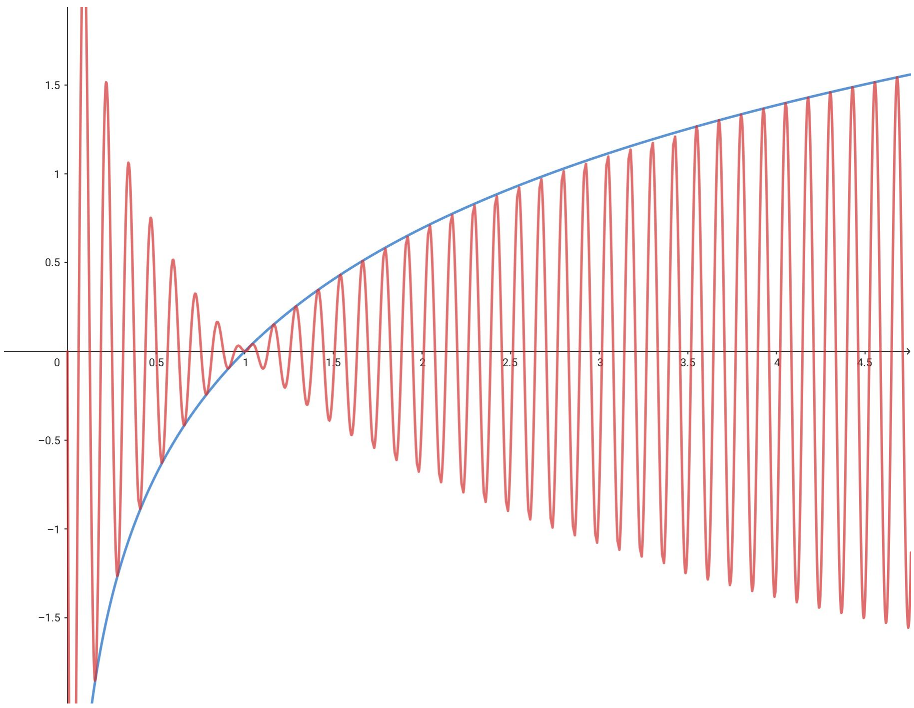

图 1.16: 当 p 很大时正负振荡 “抵消”

Riemann–Lebesgue 引理可以推广为以下定理:

定理 1.13.4 (Riemann 定理) 设 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, g 以 T 为周期且在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设 $\displaystyle\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$ (否则用 $G(x):=g(x)-\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x$ 代替 $g(x)$) . 由于 g 以 T 为周期且在 $[a,b]$ 上可积, 所以存在 $M>0$, 使得对任意 $x\in\mathbb{R}$, $|g(x)|<M$. 由稠密性定理, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在分段线性连续函数 f_n, 满足

$$\int_a^b|f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_a^b (f(x)-f_n(x))\,g(px)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f_n(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_a^b|f(x)-f_n(x)|\,|g(px)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_a^b f_n(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_a^b f_n(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

因此只需证 $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f_n(x)g(px)\,\mathrm{d}x=0$. 而 $f_n(x)\in C[a,b]$, 设 $|f_n(x)|<N\,(x\in[a,b])$. 由积分第一中值定理,

$$\left|\int_a^b f_n(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|\xlongequal{\exists\xi_p\in[a,b]}\left|f_n(\xi_p)\int_a^b g(px)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant N\left|\int_a^b g(px)\,\mathrm{d}x\right|.$$

所以只需证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(px)\,\mathrm{d}x=0.$$

对任意 $p>0$, 设 $pb-pa=n_pT+r_p$, 其中 $n_p\in\mathbb{N}$, $0\leqslant r_p<T$, 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(px)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\frac{1}{p}\int_{pa}^{pb}g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{p}\int_{pa}^{pa+n_pT+r_p}g(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\frac{1}{p}\int_0^{n_pT+r_p}g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{p}\int_0^{r_p}g(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&<\frac{MT}{p}\to0\quad(p\to+\infty),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{p\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

再由 $\varepsilon>0$ 的任意性可知

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=0.$$

□

1.13.4 Weierstrass 逼近定理

定理 1.13.5 设 $f \in C[a,b]$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个多项式 P, 使得

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

证明 先对 f 做一些改造. 首先通过对区间的拉伸和平移, 我们不妨设 $[a,b] = [0,1]$; 其次通过将 f 减去一个线性函数, 我们不妨设 $f(0) = f(1) = 0$; 最后将 f 在整个 $\mathbb{R}$ 上做零延拓, 使其成为定义在 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数.

接下来, 对于任意正整数 n 定义

$$P_n(x) = \frac{\int_{-1}^{1} f(x+t)\left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \mathrm{d}t},$$

下面将证明, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个正整数 n, 使得 $P_n(x)$ 就是所求.

引理 (1) 记 $c_n = \left(\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t\right)^{-1}$, 则 $c_n < \sqrt{n}$.

【引理 (1) 的证明: 因为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \mathrm{d}t &= 2\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t \\ &\geqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(1-nt^2\right) \mathrm{d}t = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

所以 $c_n < \sqrt{n}$.】

引理 (2) 记 $Q_n(t) = c_n\left(1-t^2\right)^n$, 则

$$\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

且对于固定的 $\delta \in (0,1)$, 以及任意的 $t \in [-1,1]$, 只要 $|t| \geqslant \delta$, 就有

$$Q_n(t) \leqslant \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n.$$

引理 (3) 对于任意正整数 n, $P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$ 是一个多项式.

【引理 (3) 的证明: 因为 f 在 $\mathbb{R}\backslash[0,1]$ 上取值恒为 0, 所以

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{s=x+t} \int_0^1 f(s)Q_n(s-x)\,\mathrm{d}s.$$

最后一个积分中将多项式 $Q_n(x)$ 展开后可将所有 x 的幂次提到积分前, 最终得到的就是 x 的多项式.】

最后回到定理的证明. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 f 一致连续, 所有存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x-y| < \delta$, 就有 $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 记 M 为 $|f(x)|$ 的最大值, 根据之前的各引理, 我们有

$$\begin{aligned}
|P_n(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}(f(x+t)-f(x))\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2M\left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{\delta}^{1}\right)Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

注意当 $n\to\infty$ 时, 上式第一项极限为 0, 所以必然存在某个 n, 使得 $|P_n(x)-f(x)| < \varepsilon$. □

注 1.13.6 此定理的证明是经典的调和分析手法, 所选的 $Q_n(t)$ 是一个好核 (Good Kernel) 函数.

例 1.13.7 设 $f\in C[a,b]$. 若 $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 求证: $f(x)\equiv 0$.

证明 由题设可知, 对任一多项式 $Q(x)$, 有 $\displaystyle\int_a^b Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 又根据 Weierstrass 逼近定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x)-P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x\in[a,b].$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[f^2(x)-f(x)P(x)\right]\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)|\,|f(x)-P(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 可知 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 故 $f(x)\equiv 0$. □

1.14 正项级数

1.14.1 比较判别法

定理 1.14.1 设正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 的通项之间满足条件 $a_n \leqslant b_n, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\sum b_n \text{收敛} \implies \sum a_n \text{收敛};$$
$$\sum a_n \text{发散} \implies \sum b_n \text{发散}.$$

注 1.14.2 常用的比较级数如

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}.$$

需熟记的级别关系:

$$\ln n \ll n^{\varepsilon} \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (a > 1, \varepsilon > 0).$$

定理 1.14.3 若对于正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 存在 (广义) 极限

$$c = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n},$$

则当 $0 < c < +\infty$ 时 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同敛散, 当 $c = 0$ 时可以从 $\sum a_n$ 收敛推出 $\sum b_n$ 收敛, 或从 $\sum b_n$ 发散推出 $\sum a_n$ 发散, 当 $c = +\infty$ 时有相反的结论.

注 1.14.4 此判别法体现出研究通项数列 $\{a_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的渐近性态的重要性.

定理 1.14.5 设对于正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 的通项当 n 充分大时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则

$$\sum b_n \text{收敛} \implies \sum a_n \text{收敛};$$
$$\sum a_n \text{发散} \implies \sum b_n \text{发散}.$$

例 1.14.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

证明

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!!(2n-1)!!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{n}{2n-1} < \frac{1}{2^n}.$$

□

例 1.14.7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.

证明 把这个级数跟已知的发散级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\ln \ln(n+1) - \ln \ln n]$$

相比较. 由有限增量公式,

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = \frac{1}{(n+\theta) \ln(n+\theta)} \quad (0 < \theta < 1),$$

故给定级数更是发散的. □

例 1.14.8 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p > 0)$ 发散.

证明 对于充分大的 n, $(\ln n)^p < n$. □

例 1.14.9 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

证明 $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ (对于充分大的 n). □

注 1.14.10 类似地, $\frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ (对于充分大的 n) $\Longrightarrow$ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

例 1.14.11 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ 发散.

证明 对于充分大的 n, $\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$. □

例 1.14.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right)$ $(a \neq 1)$ 发散.

证明 $\left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) : \frac{1}{n} \to \ln a$. □

例 1.14.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^n$ 发散.

证明 用 x_n 表示这个级数的通项对 $\frac{1}{n}$ 的比值, 则

$$\ln x_n = \ln n + n \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right).$$

利用 $\ln(1+x)$ 的展开式, 有

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=-\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+a_n\cdot\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2.$$

其中 $a_n\to 0$, $n\to\infty$. 于是

$$\ln x_n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2 n}{n}+a_n\cdot\frac{\ln^2 n}{n}\to 0,$$

因而 $x_n\to 1$. 即所给的级数发散. □

例 1.14.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$ 收敛.

证明 利用 $\ln(1+x)$ 的展开式, 有

$$\ln\frac{2n+1}{2n-1}=\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)=\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+\beta_n\cdot\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3.$$

其中 $\beta_n\to 0$, $n\to\infty$. 于是

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1=\frac{2n+3}{3(2n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2+\beta_n\cdot\frac{8n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2.$$

这样, 所考虑的级数的通项对 $\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的比值具有极限 $\dfrac{1}{3}$, 即所给的级数收敛. □

由于存在收敛 (发散) 速度不同的正项级数, 因此用特定的比较级数得到的比较判别法的能力总是有限制的. 事实上, 不论是为了判定级数收敛还是发散, 都不存在万能的比较级数:

定理 1.14.15 (Du Bois-Reymond 定理) 对于一个给定的收敛正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 一定存在一个收敛正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, 使得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

证明 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的余式为 γ_n, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\gamma_{n-1}}-\sqrt{\gamma_n}),$$

则从 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\sqrt{\gamma_0}-\sqrt{\gamma_n}\leqslant\sqrt{\gamma_0}$ 和

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\gamma_{n-1}-\gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}}-\sqrt{\gamma_n}}=\sqrt{\gamma_{n-1}}+\sqrt{\gamma_n}\to 0$$

可见 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为满足要求的收敛级数. □

定理 1.14.16 (Abel 定理) 对于一个给定的发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 一定存在一个发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 D_n, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \equiv \sqrt{D_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}),$$

则从 $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sqrt{D_n}$ 和

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}}{D_n - D_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}}} \to 0$$

可见 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为满足要求的发散级数. □

1.14.2 Cauchy 判别法

定理 1.14.17 对级数 $\sum a_n$ 作序列 $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$. 如果当 n 充分大时, 不等式 $\mathcal{C}_n \leqslant q$ 成立, 其中 q 是小于 1 的常数, 则级数收敛; 如果从某处开始, $\mathcal{C}_n \geqslant 1$, 则级数发散.

定理 1.14.18 假定序列 $\mathcal{C}_n$ 存在 (广义) 极限

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}.$$

那么当 $\mathcal{C} < 1$ 时级数收敛, 而当 $\mathcal{C} > 1$ 时级数发散.

注 1.14.19 当 $\mathcal{C} = 1$ 时, 这个判别法不能判断出级数是否收敛.

例 1.14.20 取级数

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \cdots ,$$

其中 a 与 b 是两个相异的正数. 则 $\mathcal{C}_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}}$, $\mathcal{C}_{2n} = \sqrt[2n]{a^nb^{n-1}}$, 于是 $\mathcal{C} = \sqrt{ab}$. 当 $ab < 1$ 时级数收敛, 当 $ab > 1$ 时级数发散 (显然, 当 $ab = 1$ 时也发散) .

例 1.14.21 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$, 其中 $x > 0$ 而 $\tau(n)$ 表示自然数 n 的因数个数. 因为

$$x \leqslant \mathcal{C}_n = \sqrt[n]{\tau(n)} \cdot x \leqslant \sqrt[n]{n} \cdot x,$$

于是 $\mathcal{C} = x$, 当 $x < 1$ 时级数收敛, 而当 $x > 1$ 时级数发散 (显然, 当 $x = 1$ 时也发散) .

1.14.3 d'Alembert 判别法

定理 1.14.22 考虑对于级数 $\sum a_n$ 的序列 $\mathcal{D}_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. 如果当 n 充分大时, 不等式 $\mathcal{D}_n \leqslant q$ 成立, 其中 q 是小于 1 的常数, 则级数收敛; 如果从某处开始, $\mathcal{D}_n \geqslant 1$, 则级数发散.

定理 1.14.23 假定序列 $\mathcal{D}_n$ 存在 (广义) 极限

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D}.$$

那么当 $\mathcal{D} < 1$ 时级数收敛, 而当 $\mathcal{D} > 1$ 时级数发散.

注 1.14.24 当 $\mathcal{D} = 1$ 时, 这个判别法不能判断出级数是否收敛.

例 1.14.25 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0)$, $\mathcal{D}_n = \dfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}$, $\mathcal{D} = \dfrac{x}{e}$: 当 $x < e$ 时级数收敛, 当 $x > e$ 时发散; 当 $x = e$ 时, 因为序列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 递增地接近 e, 于是 $\mathcal{D}_n > 1$, 级数发散.

例 1.14.26 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $(x > 0)$, $\mathcal{D}_n = x\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\mathcal{D} = x \cdot e$: 当 $x < \dfrac{1}{e}$ 时级数收敛, 而当 $x > \dfrac{1}{e}$ 时发散; 当 $x = \dfrac{1}{e}$ 时, 因为 $\mathcal{D}_n$ 从下面接近 $\mathcal{D} = 1$, 所以用 d'Alembert 判别法得不出结果.

注 1.14.27 从例 1.14.26 就能体现出 d'Alembert 判别法中强调 $q < 1$ 是常数的原因. 当 $x = \dfrac{1}{e}$ 时可用 Raabe 判别法 (见例 1.14.32) .

例 1.14.28 对例 1.14.20, 若用 d'Alembert 判别法, 只能在 a, b 都小于 1 或都大于 1 时作出判断.

1.14.4 Raabe 判别法

定理 1.14.29 对级数 $\sum a_n$ 作序列 $\mathcal{R}_n = n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. 如果当 n 充分大时, 不等式 $\mathcal{R}_n \geqslant r$ 成立, 其中 r 是大于 1 的常数, 则级数收敛; 如果从某处开始, $\mathcal{R}_n \leqslant 1$, 则级数发散.

定理 1.14.30 假定序列 $\mathcal{R}_n$ 存在 (广义) 极限

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n = \mathcal{R}.$$

那么当 $\mathcal{R} > 1$ 时级数收敛, 而当 $\mathcal{R} < 1$ 时级数发散.

注 1.14.31 (1) 当 $\mathcal{R}=1$ 时, 这个判别法不能判断出级数是否收敛.

(2) 注意到 $\mathcal{R}_n = n\cdot\left(\dfrac{1}{\mathcal{D}_n}-1\right)$, 当 $\mathcal{D}<1$ 时有等于 $+\infty$ 的极限 $\mathcal{R}$, 而当 $\mathcal{D}>1$ 时有等于 $-\infty$ 的极限 $\mathcal{R}$. 这就说明 Raabe 判别法比 d'Alembert 判别法强得多.

例 1.14.32 对级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $\mathcal{R}_n = n\left[\dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right]$. 为计算这个序列的极限, 我们用下列更普遍的表达式来代替它:

$$\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-1\right]\quad (x\to 0),$$

这样就可以应用微分学的方法了. 由 L'Hospital 法则, 取导数的比值

$$-\frac{e}{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\right\}=\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2}.$$

由

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ \frac{x}{1+x}=x-x^2+o(x^2),$$

即得 $\mathcal{R}=\dfrac{1}{2}<1$, 级数发散.

1.14.5　Kummer 判别法

设 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 是使级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散的一个正数序列. 对所考虑的级数 $\sum a_n$ 作序列 $\mathcal{K}_n = c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}$. 若 (对于 $n>N$) 不等式 $\mathcal{K}_n\geqslant\delta$ 成立, 其中 δ 是一个正常数, 则级数收敛. 如果 (对于 $n>N$) $\mathcal{K}_n\leqslant 0$, 则级数发散.

定理 1.14.33 假定序列 $\mathcal{K}_n$ 存在 (广义) 极限

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_n=\mathcal{K}.$$

那么当 $\mathcal{K}>0$ 时级数收敛, 而当 $\mathcal{K}<0$ 时级数发散.

注 1.14.34 令 $c_n=1$, 就得到 d'Alembert 判别法; 令 $c_n=n$, 就得到 Raabe 判别法; 令 $c_n=n\ln n$, 由例 1.14.7 知级数 $\sum\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散, 就得到 Bertrand 判别法.

1.14.6　Bertrand 判别法

定理 1.14.35 对级数 $\sum a_n$ 作序列 $\mathcal{B}_n=\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=\ln n\cdot(\mathcal{R}_n-1)$. 假定序列 $\mathcal{B}_n$ 存在 (广义) 极限

$$\mathcal{B}=\lim_{n\to\infty}\mathcal{B}_n.$$

那么当 $\mathcal{B}>1$ 时级数收敛, 而当 $\mathcal{B}<1$ 时级数发散.

1.14.7 Gauss 判别法

定理 1.14.36 设对于级数 $\sum a_n$, 比值 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 可以表示成

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

其中 λ 与 μ 是常数, 而 θ_n 是有界量: $|\theta_n| \leqslant L$; 那么

$$\lambda > 1 \text{或} \lambda = 1,\ \mu > 1 \implies \sum a_n \text{收敛};$$
$$\lambda < 1 \text{或} \lambda = 1,\ \mu \leqslant 1 \implies \sum a_n \text{发散}.$$

例 1.14.37 对级数

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p + \cdots \quad (p > 0),$$

按照 Taylor 公式,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由此

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (\theta_n\text{有界}),$$

所以当 $p > 2$ 时级数收敛, 当 $p \leqslant 2$ 时级数发散.

1.14.8 Maclaurin–Cauchy 积分判别法

定理 1.14.38 假设 f 是 $[1, +\infty)$ 上正的单调递减连续函数, 所考虑的级数有下面的形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

则级数 $\sum a_n$ 的敛散性取决于函数

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $x \to +\infty$ 时是否具有有限的或无穷的极限.

1.14.9　Ermakov 判别法

定理 1.14.39 假定函数 $f(x)$ 当 $x>1$ 时是正的单调递减连续函数. 若对充分大的 x,

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}\leqslant q<1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛; 若对充分大的 x,

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

证明 设当 $x\geqslant x_0$ 时第一个不等式成立, 则对任意 $x\geqslant x_0$ 有

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=e^u} \int_{x_0}^{x} f(e^u)e^u\,\mathrm{d}u \leqslant q\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

由此,

$$\begin{aligned}(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &\leqslant q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &\leqslant q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

上面最后一个不等号是因为从 $e^x>x$ 推出方括号内第二项是正的. 在这种情况下,

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

在不等式两端加上 $\displaystyle\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t$, 得到

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = L,$$

考虑到 $e^x>x$, 就更有

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant L \quad (x\geqslant x_0).$$

因为随 x 的增加, 积分值增加, 所以当 $x\to+\infty$ 时存在有限的极限

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

按照 Cauchy 积分判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

设当 $x \geqslant x_0$ 时第二个不等式成立, 则对任意 $x \geqslant x_0$ 有

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=e^u} \int_{x_0}^{x} f(e^u)e^u\,\mathrm{d}u \geqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

在不等式两端加上 $\int_x^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t$, 得到

$$\int_x^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = \gamma > 0.$$

($\gamma > 0$ 是因为 $x_0 < e^{x_0}$) . 现在定义序列

$$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots$$

其中令 $x_n = e^{x_{n-1}}$; 按照已证明的有

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \gamma,$$

于是

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant n\gamma.$$

由此显然有

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

由 Cauchy 积分判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. □

注 1.14.40 出现在 Ermakov 判别法中的函数 e^x, 可用任意其他单调增加、有连续导数并满足 $\varphi(x) > x$ 的正函数 $\varphi(x)$ 代替.

1.14.10 Cauchy 凝聚判别法

定理 1.14.41 设 $\{a_n\}$ 是单调减少的正数数列, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: 凝聚项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛.

证明 由于该正项级数的通项单调减少, 因此对 $k \geqslant 1$, 有

$$2^{k-1}a_{2^k} \leqslant a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k} \leqslant 2^{k-1}a_{2^{k-1}}.$$

取 k 从 1 到 n 并相加, 即得

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^k} \leqslant a_2+a_3+\cdots+a_{2^n} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}2^k a_{2^k},$$

可见原来的级数的部分和与凝聚项级数的部分和同时有界或无界. □

1.14.11 Abel–Dini 定理

定理 1.14.42 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 发散, 而 D_n 表示级数的第 n 和, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n}$ 也发散, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}\,(\sigma>0)$ 收敛.

证明 我们有:

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}}+\cdots+\frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{d_{n+1}+\cdots+d_{n+m}}{D_{n+m}} = 1-\frac{D_n}{D_{n+m}}.$$

不论取 n 如何大, 总可以选出这样的 m, 使得

$$\frac{D_n}{D_{n+m}} < \frac{1}{2},$$

从而

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}}+\cdots+\frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{1}{2}.$$

由级数的 Cauchy 收敛准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n}$ 发散.

为了证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ 的收敛性, 我们把有限增量公式应用到由 $x=D_{n-1}$ 到 $x=D_n$ 的区间中的函数 $\int\frac{1}{x^{1+\sigma}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{x^{\sigma}}$ 上:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{D_n^{\sigma}}\right)=\frac{d_n}{\overline{D}_n^{1+\sigma}}, \text{其中} D_{n-1}<\overline{D}_n<D_n.$$

这样, 所考虑级数的每一项分别小于收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{D_n^{\sigma}}\right)$ 的每一项, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ 收敛. □

注 1.14.43 从无穷乘积理论可以给出另证 (见 1.18.12) .

定理 1.14.44 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 而 γ_n 表示此级数第 n 项以后的余式, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\gamma_{n-1}}$ 发散, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}}\,(0<\sigma<1)$ 收敛.

1.14.12　Sapagof 判别法

定理 1.14.45 设正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

证明 记 $b_n = 1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. 由于正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 因此有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 若 $a>0$, 则 $b_n \leqslant \dfrac{a_n-a_{n+1}}{a}$. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_1-a_n) = a_1-a,$$

可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 若 $a=0$, 则有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_{n+1}} = 1-\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}}.$$

对每个给定的 n, 利用 $a_n\to 0$ 的条件, 总可以取到充分大的 p, 使上式大于 $\dfrac{1}{2}$. 由级数的 Cauchy 收敛准则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

注 1.14.46 定理 1.14.45 有以下等价形式:

(1) 设 $\{a_n\}$ 为单调增加的正数数列, 则该数列与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散;

(2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

例 1.14.47 问: 在什么条件下数列 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 其中

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ n=1,2,\cdots.$$

解 若 α 为非负整数, 则数列至多只有前有限项不等于 0, 因此是无穷小量. 否则, 只需讨论 $\{|a_n|\}$. 从

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1-\frac{\alpha+1}{n+1}$$

可见当 $\alpha\leqslant 1$ 时有 $|a_{n+1}|\geqslant|a_n|$, 因此数列不可能趋向于 0.

当 $\alpha>-1$ 时 $\{|a_n|\}$ 当 n 充分大时单调减少. 由 Sapagof 判别法, 从

$$1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\alpha+1}{n+1}$$

和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha+1}{n+1}$ 发散可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

1.15　任意项级数

在研究变号级数 $\sum a_n$ 的敛散性时, 可以先分析对应的正项级数 $\sum |a_n|$ 的敛散性. 对后者可以用正项级数的各种判别法. 若 $\sum |a_n|$ 收敛, 则原来的级数必定收敛. 若 $\sum |a_n|$ 发散, 则 $\sum a_n$ 的敛散性有两种可能: 条件收敛或发散. 这时以比较判别法为基础的各种判别法都不能奏效, 仅仅 Cauchy 判别法和 d'Alembert 判别法是例外, 也即

定理 1.15.1

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \text{或} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{发散}.$$

其原因在于这两种判别法背后的比较级数是 (正项) 几何级数, 它在公比大于 1 时的级数通项不收敛于 0, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 因此它们的反面也等价.

1.15.1　幂级数

定理 1.15.2 (Cauchy–Hadamard 定理) 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 考虑序列 $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, 设

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \rho_n,$$

则幂级数的收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho}$.

定理 1.15.3 (Knopp 定理) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 Lambert 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ 对所有的 x 值 ($x = \pm 1$ 除外) 都收敛; 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 Lambert 级数恰好在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛的那些 x 值下收敛.

定理 1.15.4 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 $R > 0$, 则任取 $0 < r < R$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上对于 x 一致收敛.

证明 因为 $r < R$, 所以当 $x = r$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. 当 $|x| \leqslant r$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的项的绝对值不超过级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ 的对应项, 根据 Weierstrass 判别法即得证. □

推论 1.15.5 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和 $f(x)$ 在 $(-R, R)$ 上是 x 的连续函数.

定理 1.15.6 设两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x=0$ 邻近有同样的和, 则这两级数恒等 (即对应系数相等) .

注 1.15.7 这即是函数用幂级数展开的唯一性. 由此可得: 偶 (奇) 函数用 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 形式幂级数的展开只可能包含 x 的偶 (奇) 次项.

定理 1.15.8 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间端点 $x=R$ 是发散的, 则它在 $[0,R)$ 的收敛不可能是一致的.

定理 1.15.9 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间端点 $x=R$ 是收敛的 (可以是非绝对收敛) , 则它在 $[0,R)$ 的收敛必然是一致的.

证明 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n \quad (0 \leqslant x \leqslant R),$$

且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 因子 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 组成单调、一致有界的序列:

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \cdots,$$

所以由 Abel 判别法可立即得证. □

根据定理 1.15.9, 我们可以把定理 1.27.13 应用到整个区间 $[0,R]$ 上, 得到:

定理 1.15.10 (Abel 定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=R$ 时收敛, 则

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

例 1.15.11 我们只在 $x \in (-1,1)$ 时有展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

但由于知道级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

收敛, 由 Abel 定理即得这级数的和是 $\ln 2$.

定理 1.15.12 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[0,x]$ 上可以逐项积分, 其中 $|x|<R$, 也即

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots .$$

若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间的一个端点上收敛, 其中 x 值就可以与这端点的值重合.

例 1.15.13 先应用 Abel 定理, 再应用幂级数的逐项积分可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{3n}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}\\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

例 1.15.14 利用二项式级数可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (-1<x<1),$$

利用级数逐项求积分可得反正弦函数的展开式:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1<x<1).$$

因为这级数对 $x=\pm 1$ 也收敛, 所以按照 Abel 定理, 展开式当 $x=\pm 1$ 时也是对的. 特别地, 当 $x=1$ 时, 可得 π 的级数:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

同样地, 我们有

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\\ &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t\\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1).\end{aligned}$$

这就是 $\sinh x$ 的反函数.

例 1.15.15 (Catalan 常数)

$$G=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{7}x^6+\cdots\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}.$$

例 1.15.16 因为

$$x^{-x}=e^{-x\ln x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n\ln^n x}{n!}[10],$$

函数 $|x\ln x|$ 在 $(0,1]$ 上的最大值是 $\frac{1}{e}$, 所以当 $x\in(0,1]$ 时, 可以写出优级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n!},$$

所以级数对于 $x\in(0,1]$ 一致收敛, 可逐项积分. 因为

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\,\mathrm{d}x=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

所以

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^m}.$$

例 1.15.17 我们有展开式

$$\arctan x=\frac{x}{1+x^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

代入 $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, 且考虑到 $\arctan\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin y$, 得到

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}y^{2p+1}\quad\left(0\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

从 0 到 y 对这个等式积分, 同时对右端逐项积分:

$$\frac{1}{2}(\arcsin y)^2=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}\cdot\frac{y^{2p+2}}{2p+2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\cdot\frac{y^{2m}}{2m},$$

然后将其改写为

$$2(\arcsin y)^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}(2y)^{2m}.$$

取 $y=\frac{1}{2}$, 就得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}=\frac{\pi^2}{18}.$$

[10]当 $x=0$ 时, 级数的项从 $n=1$ 开始都用极限值 0 来代替.

由例 1.17.15 的结果,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}.$$

例 1.15.18 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\
&=\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

□

例 1.15.19 证明: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\ (|r|<1).$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
&(1-2r\cos x+r^2)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\cos^n x\right)\\
=&1-2r\cos x+r^2+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\cos nx-2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}\cdot2\cos nx\cdot\cos x+2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}\cdot\cos nx\\
=&1-2r\cos x+r^2+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\cos nx-2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}\cdot[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]\\
&+2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}\cdot\cos nx\\
=&1-r^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\cos^n x.$$

【此处得到的等式

$$\frac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos nx.$$

的另一种导出方法: 取级数 $\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ $(|z|<1)$, 并设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. 则右侧变为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

左侧变为

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{(1 - r\cos\theta) - ir\sin\theta} = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} + \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\cdot i.$$

由等式两边实部、虚部分别相等可得

$$\frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos n\theta,$$

$$\frac{\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin n\theta.$$

】

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|r|^n$ $(|r|<1)$ 收敛可知上式右边级数对 x 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛, 逐项积分便得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x = 2\pi.$$

□

定理 1.15.20 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内部可以逐项求导数, 即

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots.$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在收敛区间的端点收敛, 则上述断言在这个端点保持有效.

证明 取原来级数收敛区间内任意一点 x, 于是 $|x|<R$, 在 $|x|$ 与 R 之间插入数 r': $|x|<r'<R$. 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r'^n$ 收敛知其通项有界:

$$|a_n|r'^n \leqslant L \quad (L\text{为常数}, n = 1, 2, \cdots).$$

则有如下估计:

$$n|a_n|\cdot|x|^{n-1} = n|a_n|\cdot r'^n\cdot\left|\frac{x}{r'}\right|\cdot\frac{1}{r'} \leqslant \frac{L}{r'}\cdot n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}.$$

根据 d'Alembert 判别法可知级数

$$\frac{L}{r'}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} = \frac{L}{r'}\left\{1+2\left|\frac{x}{r'}\right|+\cdots+n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}+\cdots\right\}$$

收敛, 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

绝对收敛. 故这个级数的收敛半径 $R' \geqslant R$[11].

现在任取 $r<R$, 则同时有 $r<R'$, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 在 $[-r,r]$ 一致收敛, 在此区间内允许对原来的级数逐项求导数. 因为 $r<R$ 是任意的, 所以定理的基本断言得证.

若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 当 $x=R$ 时收敛, 由定理 1.15.9, 它在 $[0,R]$ 上一致收敛. 再由定理 1.27.25, 当 $x=R$ 时逐项求导数是允许的. □

将定理 1.17.6 应用于幂级数即得:

定理 1.15.21 设已知的幂级数无穷序列为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n \quad (m=0,1,2,\cdots),$$

用它们组成二重级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n.$$

若对于取定的 x 值, 此二重级数绝对收敛, 则它也收敛, 且它的和 $A(x)$ 可以用合并同次幂项的方法展开成幂级数.

例 1.15.22 把函数

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\cdot\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2} \quad (|x|<1, 0<a<1)$$

展开成 x 的幂级数.

---

[11]另一方面, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的项按绝对值不超过级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n = a_1x+2a_2x^2+\cdots+na_nx^n+\cdots$$

的对应项, 而后者与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 有相同的收敛半径 R', 因此 $R \geqslant R'$. 综合后就有 $R'=R$. (这一结论也可借助 Cauchy–Hadamard 定理 (定理 1.15.2) , 并利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 直接得到.)

证明 我们有

$$\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{m(2n+1)}x^{2n},$$

将其代入 $f(x)$ 的表达式并交换求和次序:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{m(2n+1)}x^{2n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{(2n+1)m}}{m!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{a^{2n+1}}x^{2n}.
\end{aligned}$$

因为二重级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}a^{(2n+1)m}x^{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{1}{1-a^{2m}x^2}<\frac{1}{1-x^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}=\frac{e^a}{1-x^2}$$

收敛, 所以交换求和次序是合理的. □

例 1.15.23 由

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\implies\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\implies\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

取对数得到等式

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\ln\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right).$$

再利用对数级数展开得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right)=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)^2+\cdots.$$

把左右两边按 x 的幂次展开, 比较对应项系数, 就得到等式

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6},\quad\frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{180},\cdots,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\cdots.$$

1.15.2 交错级数

定理 1.15.24 (Leibniz 定理) 如果交错级数

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^n c_n + \cdots \quad (c_n > 0)$$

的项的绝对值单调递减并且趋于 0, 则级数收敛.

注 1.15.25 对于

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \cdots,$$

有

$$0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1};$$

对于

$$\gamma_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} - \cdots = -(c_{2m} - c_{2m+1} + \cdots),$$

有

$$\gamma_{2m-1} < 0, \ |\gamma_{2m-1}| < c_{2m}.$$

也就是说, Leibniz 型级数的余式与其第一项符号相同, 且绝对值比这第一项小.

例 1.15.26 对任何 $x \neq 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$ 条件收敛. 这是因为当 n 充分大时, $\sin\dfrac{x}{n}$ 与 x 符号相同, 并且其绝对值随着 n 的增大而减少, 同时由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|$ 发散.

1.15.3 Abel 变换

引理 1.15.27 (Abel 分部求和公式) 设 $B_m = \sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i$, 则

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)B_i.$$

注 1.15.28 Abel 分部求和公式是积分中分部积分的类似公式.

例 1.15.29 有恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n,$$

这里

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \, (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

同时可假定 $|x|$ 不仅小于第一个级数的收敛半径 R, 而且小于 1.

注 1.15.30 这也可以由级数乘法

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n\quad(|x|<1)$$

得到.

引理 1.15.31 (Abel 引理) 记 $B_m=\sum_{i=1}^{m}\beta_i$. 若 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_m$ 或 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_m$, 而

$$|B_i|\leqslant L\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

则

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leqslant L\cdot(|\alpha_1|+2|\alpha_m|).$$

注 1.15.32 若 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_m$ 且 $\alpha_i\geqslant 0$, 则和的估计可简化为

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leqslant L\cdot\alpha_1.$$

定理 1.15.33 (Abel 判别法) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 而 $\{a_n\}$ 是单调有界数列, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

定理 1.15.34 (Dirichlet 判别法) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和总是有界的, 而 $\{a_n\}$ 是单调且趋于 0 的数列, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

注 1.15.35 取 $b_n=(-1)^{n-1}$, 就得到 Leibniz 定理.

例 1.15.36 设 $\{a_n\}$ 是单调且趋于 0 的数列, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sin nx,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx.$$

假定 $x\neq 2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 由恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}\sin ix=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\cos ix=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

就得到两个和的绝对值都以 $\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ 为上界. 根据 Dirichlet 判别法, 两个级数对于异于 $2k\pi$ 的任何 x 值都收敛 (当 $x=2k\pi$ 时第一个级数也收敛) .

【第二个恒等式另证 (利用 Euler 公式简化为几何级数求和)：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos kx &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{kxi}+\sum_{k=1}^{n}e^{-kxi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{xi}-e^{(n+1)xi}}{1-e^{xi}}+\frac{e^{-xi}-e^{-(n+1)xi}}{1-e^{-xi}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}xi}-e^{(n+\frac{1}{2})xi}}{e^{-\frac{1}{2}xi}-e^{\frac{1}{2}xi}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}xi}-e^{-(n+\frac{1}{2})xi}}{e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{(n+\frac{1}{2})xi}-e^{-(n+\frac{1}{2})xi}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

】

引理 1.15.37 若 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在某一值 $x=\overline{x}$ 时收敛, 则这级数对任何的 $x>\overline{x}$ 都收敛.

证明 当 $x>\overline{x}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\overline{x}}}\cdot\frac{1}{n^{x-\overline{x}}},$$

由 Abel 定理即得证. □

定理 1.15.38 (Landau 定理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ 对同样的 x 值收敛.

证明 把 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 得各项分别乘上因式

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

便可得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. 当 n 值充分大时, 这些因式有一定的符号, 且第 $n+1$ 个因式与第 n 个因式的比值为

$$\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}.$$

因为

$$(1+\frac{1}{n})^{x+1}=1+\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

且

$$\frac{1}{1+\frac{x+1}{n}}=1-\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}=1+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故当 $(x+1)x>0$ 时上述比值最终大于 1, 而当 $(x+1)x<0$ 时小于 1. 因为因式当 $n\to\infty$ 时具有有限极限 (且异于 0) , 按照 Abel 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 的收敛性能推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ 的收敛性. 将类似的结论应用到因式的倒数上, 就有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ 的收敛性能推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 的收敛性. □

1.16　收敛级数的性质

1.16.1　可结合性

定理 1.16.1 (收敛级数具有可结合性) 考虑收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 用任意方式把它的项联合成若干组, 但同时不改变它们的分布位置:

$$a_1+\cdots+a_{n_1},a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2},\cdots,a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k},\cdots$$

这里 $\{n_k\}$ 是从某一自然数序列中抽出的关于下标的部分增序列. 那么由这些和组成的级数

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+\left(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}\right)+\cdots$$

恒收敛, 并具有与原级数相同的和.

如果我们试图将这一过程逆转 (即去掉括号) , 结果一般是不正确的. 不过, 如果位于同一个括号内的所有数符号相同, 仍然能保证 “去掉括号” 后级数的收敛性. 下面的例 1.16.2 就用到了这一性质.

例 1.16.2 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$, 可以写成交错级数的形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right].$$

从不等式

$$\frac{2}{k+1} < \overbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots +}^{k\text{项}} \overbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}^{k+1\text{项}} < \frac{2}{k}$$

可见级数的项趋于 0, 且其绝对值单调递减, 由 Leibniz 定理知级数收敛.

1.16.2　可交换性

定理 1.16.3 (绝对收敛级数具有可交换性) 若级数绝对收敛, 则把它的项重新配置后得到的级数也 (绝对) 收敛并且具有与原级数相同的和.

但条件收敛级数并不具有可交换性, 我们有:

定理 1.16.4 (Riemann 重排定理) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则无论预先取怎样的数 B (有限的或者等于 $\pm\infty$) , 都可以重新配置级数中的项, 使得变形后的级数具有和 B.

Riemann 重排定理还可加强为:

定理 1.16.5 (Riemann 重排定理) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则对于 $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$, 存在一个重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$, 使得对其部分和 s_n', 有

$$\liminf_{n\to\infty} s_n' = \alpha, \ \limsup_{n\to\infty} s_n' = \beta.$$

注 1.16.6 上面结果表明: 条件收敛性只是由于正项与负项的互相抵消才能实现, 并且主要由这些项一个跟着一个的次序来决定; 而绝对收敛性则根据这些项减小的速度, 而与它们的次序无关.

1.16.3　级数的乘法

定理 1.16.7 (Cauchy 定理) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 A 和 B, 则把

$$a_i b_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

按任意方式相加所得的级数都绝对收敛, 且其和就等于 AB.

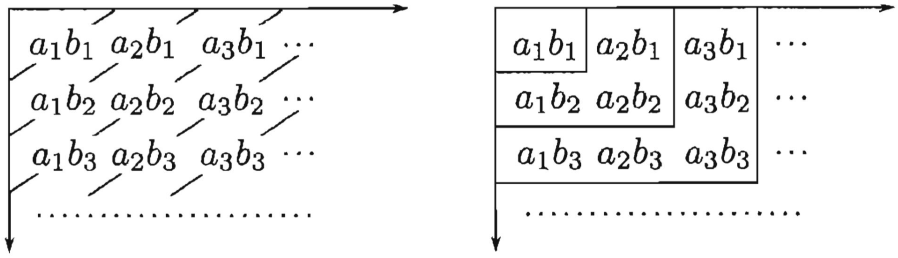

图 1.17: 按对角线或按正方形写出乘积

例 1.16.8 考虑正项级数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$, 这级数对 $x>1$ 收敛并且是 Riemann 函数 ζ. 借助于级数乘法, 注意到对于 $k=n\cdot m$, 有 $\dfrac{1}{n^x}\cdot\dfrac{1}{m^x}=\dfrac{1}{(n\cdot m)^x}$, 所以它的平方为:

$$[\zeta(x)]^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(k)}{k^x}.$$

定理 1.16.9 (Toeplitz 定理) 设无穷三角矩阵的系数

$$\begin{array}{llllll}
t_{11} & & & & & \\
t_{21} & t_{22} & & & & \\
t_{31} & t_{32} & t_{33} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & t_{nn} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

满足如下两个条件:

(1) 位于任意一列中的元素趋于 0:

$$t_{mn}\to 0 \text{ 当 } n\to\infty \quad (m \text{ 固定}).$$

(2) 位于任意一行中元素的绝对值之和被同一个常数界定:

$$|t_{n1}|+|t_{n2}|+\cdots+|t_{nn}|\leqslant K \quad (K \text{ 为常数}).$$

那么, 若序列 $x_n\to 0$, 则对于由 Toeplitz 变换生成的序列

$$x_n'=t_{n1}x_1+t_{n2}x_2+\cdots+t_{nn}x_n\to 0$$

也成立.

证明 对 $\varepsilon>0$ 存在这样的 m, 当 $n>m$ 时有 $|x_n|<\dfrac{\varepsilon}{2K}$; 利用条件 (2) , 对这样的 n 有

$$|x'_n|<|t_{n1}x_1+\cdots+t_{nm}x_m|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为此处 m 已经是常数, 由条件 (1) , 存在这样的 $N\geqslant m$, 使得当 $n>N$ 时, 右边的第一项小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$, 因此 $|x'_n|<\varepsilon$. □

定理 1.16.10 (Toeplitz 定理) 设系数 t_{nm} 除条件 (1) , (2) 外还满足条件

(3) $T_n=t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nn}\to 1$, 当 $n\to\infty$.

那么若数列 $x_n\to a$ (a 是有限数) , 则同样有

$$x'_n=t_{n1}x_1+t_{n2}x_2+\cdots+t_{nn}x_n\to a.$$

证明 x'_n 的表达式可改写为:

$$x'_n=t_{n1}(x_1-a)+t_{n2}(x_2-a)+\cdots+t_{nn}(x_n-a)+T_n\cdot a.$$

把定理 1.16.9 应用于序列 $x_n-a\to 0$, 再结合条件 (3) 即得证. □

推论 1.16.11 (1) 设有两个序列 $x_n\to 0$ 与 $y_n\to 0$, 同时后者满足如下条件:

$$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant K \quad (n=1,2,\cdots;\ K\ 为常数)\ .$$

那么取 $t_{nm}=y_{n-m+1}$, 便有序列

$$z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1\to 0.$$

(Mertens 定理的证明就用到此推论.)

(2) 若序列 $x_n\to a$, 而序列 $y_n\to b$, 则序列

$$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}\to ab.$$

(Abel 定理的证明就用到此推论.)

(3) 若 $x_n\to a$, 则

$$x'_n=\frac{1\cdot x_0+\binom{n}{1}x_1+\binom{n}{2}x_2+\cdots+\binom{n}{n}x_n}{2^n}\to a.$$

(3) 若 $x_n\to a$, $z>0$ 为常数, 则

$$x'_n=\frac{1\cdot x_0+\binom{n}{1}z\cdot x_1+\binom{n}{2}z^2\cdot x_2+\cdots+\binom{n}{n}z^n\cdot x_n}{(1+z)^n}\to a.$$

定理 1.16.12 (Mertens 定理) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, 且其中至少有一个级数绝对收敛, 则它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$.

定理 1.16.13 (Abel 定理) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. 如果它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$ 收敛, 那么必有 $C = A \cdot B$.

1.17　累级数与二重级数

1.17.1　累级数

定义 1.17.1 将具有两个列表值的无穷长方矩阵

$$\begin{matrix}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \cdots & a_i^{(1)} & \cdots \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \cdots & a_i^{(2)} & \cdots \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \cdots & a_i^{(3)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \cdots & a_i^{(k)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{matrix}$$

先按行 (列) 加, 再按列 (行) 加, 便得到累级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \left(\text{或} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \right).$$

定义 1.17.2 累级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 称为收敛的, 是指:

(1) 按行的所有级数都收敛 (其和相应地记为 $A^{(k)}$) ;

(2) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛. 其和是累级数的和.

定理 1.17.3 若级数 $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ 绝对收敛于和 U, 则无论其各项怎样排列为定义 1.17.1 中矩阵的形式, 累级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 收敛, 同时具有相同的和.

注 1.17.4 这是对绝对收敛级数的结合性与交换性的深刻推广.

定理 1.17.5 设给定累级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$, 若将其各项代以各项的绝对值后得到的是收敛级数, 则不仅该累级数收敛, 而且由与它相同、按任意次序放置的项组成的简单级数 $\sum_{r=1}^{\infty}u_r$ 也收敛, 且收敛于同一个和.

定理 1.17.6 设给定定义 1.17.1 中的矩阵. 若将级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$ 的各项代以其各项的绝对值后得到的是收敛级数, 则两个累级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$ 收敛, 并具有同一个和:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}.$$

1.17.2　二重级数

定义 1.17.7 二重级数就是符号

$$\begin{aligned}
&a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+a_3^{(1)}+\cdots+a_i^{(1)}+\cdots\\
&+a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+a_3^{(2)}+\cdots+a_i^{(2)}+\cdots\\
&+a_1^{(3)}+a_2^{(3)}+a_3^{(3)}+\cdots+a_i^{(3)}+\cdots\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&+a_1^{(k)}+a_2^{(k)}+a_3^{(k)}+\cdots+a_i^{(k)}+\cdots\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\equiv\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}.
\end{aligned}$$

定义 1.17.8 考虑二重级数的部分和

$$A_m^{(n)}=\sum_{i,k=1}^{i=m,k=n}a_i^{(k)},$$

同时增大彼此无关的数 m 与 n 使它们趋于无穷, 如果存在极限

$$A=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}A_m^{(n)},$$

则称这极限 (有限的或无穷的) 为二重级数的和. 如果级数具有有限和, 则称它是收敛的; 反之, 则称它是发散的.

定理 1.17.9 二重级数收敛的必要条件是通项趋于 0:

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}}a_i^{(k)}=0.$$

证明 从下面的公式即可看出:

$$a_i^{(k)} = A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)} - A_i^{(k-1)} + A_{i-1}^{(k-1)}.$$

□

定理 1.17.10 若二重级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 收敛且所有的行级数收敛, 则累级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 收敛, 并具有与二重级数相同的和:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

定理 1.17.11 若 $a_i^{(k)} \geqslant 0$, 则级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 收敛的充分必要条件是它的部分和有界.

定理 1.17.12 若由给定级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 的项的绝对值所组成的级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|$ 收敛, 则给定级数也收敛.

定理 1.17.13 设给定由同样的项组成的二重级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 与简单级数 $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$. 那么从它们中一个级数的绝对收敛性可推出另一级数的绝对收敛性, 并且二者的和相等.

推论 1.17.14 设定义 1.17.1 中的矩阵与序列 $\{u_r\}$ 由同样的一些项组成. 那么若二重级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$, 累级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$, 简单级数 $\sum\limits_{r=1}^{\infty} u_r$ 其中之一绝对收敛, 则所有四者都收敛, 并具有同样的和.

例 1.17.15 考虑具有通项

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)\cdots(k+i)}$$

的矩阵. 对第 k 行求和:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} &= (k-1)!\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)} \\
&= \frac{(k-1)!}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)\cdots(i+k)}\right] \\
&= \frac{(k-1)!}{k\cdot k!} = \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

由此, 累级数的和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

现在把矩阵这样变形: 在第 m 行中使前 $m-1$ 项保持原状, 而第 m 项代以第 m 行从第 m 项开始的所有项的和 r_m, 而丢掉其余的项. 对于新矩阵

$$
\begin{array}{cccccccc}
r_1 & & & & & & & \\
a_1^{(2)} & r_2 & & & & & & \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & r_3 & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & a_3^{(m)} & \cdots & a_{m-1}^{(m)} & r_m & & \\
a_1^{(m+1)} & a_2^{(m+1)} & a_3^{(m+1)} & \cdots & a_{m-1}^{(m+1)} & a_m^{(m)} & r_{m+1} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

按列计算诸级数的和:

$$
\begin{aligned}
r_m &= \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+n)\cdots(2m-1+n)} \\
&= \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\cdots(2m-1)},
\end{aligned}
$$

第 m 列其余各项的和

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)\cdots(2m+n)} \\
&= \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots 2m},
\end{aligned}
$$

第 m 列各项的和等于

$$
3 \cdot \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots(2m-1)\cdot 2m} = 3 \cdot \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}.
$$

于是由定理 1.17.6 得到关系式:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}.
$$

例 1.17.16 考虑两个变量的函数

$$
\varphi(x,z) = e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} \quad (z \neq 0).
$$

把绝对收敛级数

$$
e^{\frac{x}{2}\cdot z} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^i \cdot \frac{z^i}{i!},\ e^{-\frac{x}{2}\cdot z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{(-1)^k}{k!} \cdot z^{-k}
$$

相乘, 就得到对这个函数而言也绝对收敛的二重级数:

$$\varphi(x,z)=\sum_{i,k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{i+k}\frac{(-1)^k}{i!k!}z^{i-k}.$$

由推论 1.17.14, 把 z 的同一幂次收集在一起, 可将二重级数变为累级数

$$\varphi(x,z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot z^n,$$

其中

$$\mathcal{J}_n(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & n\geqslant 0,\\ \displaystyle\sum_{k=-n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & n<0.\end{cases}$$

容易看出,

$$\mathcal{J}_{-n}(x)=(-1)^n\mathcal{J}_n(x).$$

函数 $\mathcal{J}_n(x)\,(n=0,1,2,\cdots)$ 叫做带下标 n 的 Bessel 函数, 函数 $\varphi(x,z)$ 叫做 Bessel 函数的母函数.Bessel 函数也可由依赖于 x 的积分表示:

$$\mathcal{J}_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathcal{J}_n(x)=\frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta\quad(n=1,2,\cdots).$$

以 $x\sin\theta$ 的幂次展开被积表达式:

$$\cos(x\sin\theta)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}\sin^{2k}\theta}{(2k)!},$$

并利用公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

就得到带下标 0 的 Bessel 函数:

$$\mathcal{J}_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}.$$

可以验证, 带有任意自然下标的 Bessel 函数 $\mathcal{J}_n(x)$ 满足一般的 Bessel 微分方程

$$x^2u''+xu'+(x^2-n^2)u=0.$$

例 1.17.17 级数
$$\sum_{i,k=0}^{\infty}\frac{(i+k)!}{i!k!}x^iy^k$$
绝对收敛的充分必要条件是级数
$$\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n=\frac{1}{1-(|x|+|y|)}$$
收敛, 这可以由上述二重级数按对角线相加得到. 因此得到条件 $|x|+|y|<1$ (其收敛区域如图 1.18 所示) .

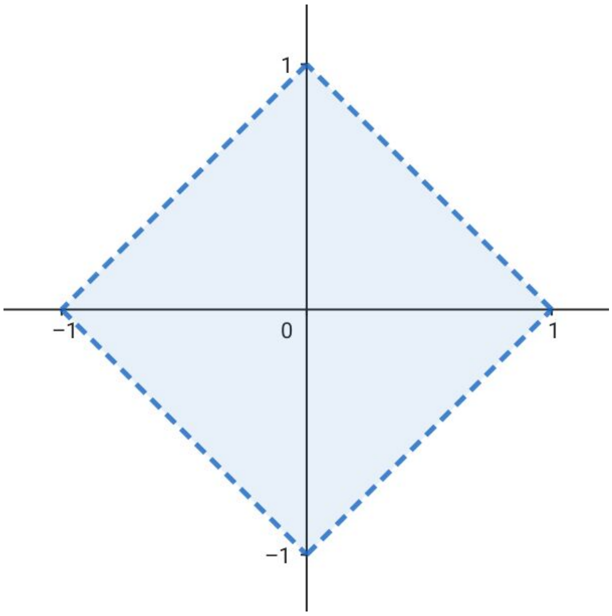

图 1.18: 此二重级数的收敛区域

1.18　无穷乘积

1.18.1　无穷乘积的计算

例 1.18.1 Wallis 公式 (定理 1.6.1) 提供了 $\frac{\pi}{2}$ 的无穷乘积展开式
$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\dots\cdot.$$
这可化成
$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4},\ \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

例 1.18.2 当 $|x|<1$ 时,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

例 1.18.3 (Vieta 公式) 利用

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

令 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, 得到展开式

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cdots.$$

再结合 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 与 $\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos a}$, 就有

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots.$$

1.18.2　无穷乘积与无穷级数的关系

定理 1.18.4 无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的充分必要条件是级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛.

定理 1.18.5 若对于充分大的 n 有 $a_n>0$ (或 $a_n<0$) , 则乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明 因为不论 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 中何者收敛, 都有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 所以总可假定这个条件成立. 于是就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1.$$

又因为级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项从某处开始都保持一定的符号, 根据定理 1.14.3, 二者同敛散. 再从定理 1.18.4 就得证. □

定理 1.18.6 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 同时收敛, 则无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

证明 从 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛首先推出 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2}.$$

根据定理 1.14.3, 可推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]$ 收敛, 进而推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛. 应用定理 1.18.4 即得证. □

定理 1.18.7 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 具有零值的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 具有和 $-\infty$. 特别地, 若 $a_n<0$ 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 或级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散, 也有这样的结果.

定理 1.18.8 绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

定理 1.18.9 绝对收敛乘积具有可交换性.

定理 1.18.10 乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$绝对收敛 $\iff$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

例 1.18.11 考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right].$$

当 $x>1$ 时, 从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛可知乘积绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时, 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ 收敛, 所以乘积条件收敛; 当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ 并不收敛, 所以乘积发散到 0.

从无穷乘积理论可得出 Abel 定理 (见定理 1.14.11) :

定理 1.18.12 (Abel 定理) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是给定的正项级数, A_n 表示其部分和, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{A_n}$ 与给定的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散.

证明 仅需要对发散情形证明. 若 $A_n\to\infty$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{A_n}\right)\equiv\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{A_{n-1}}{A_n}$ 发散到 0, 于是级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{A_n}$ 发散. □

例 1.18.13 当 $0<q<1$ 时,

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots=\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}.$$

例 1.18.14 当 $\alpha>\beta$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}=0.$$

1.18.3　Gauss 超几何级数

考虑 Gauss 超几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n,$$

其中参数 α,β,γ 不为 0 及负整数.

(1) 由

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}|x|\to|x|,$$

应用 d'Alembert 判别法可知, 当 $|x|<1$ 时这个级数绝对收敛, 而当 $|x|>1$ 时发散.

(2) 现设 $x=1$. 取比值

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)},$$

并利用展开式

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},$$

就能把所取比值表示为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\quad(|\theta_n|\leqslant L).$$

这比值对于充分大的 n 是正的, 所以级数的项从某处开始后将有同样的符号. 把 Gauss 判别法应用到这些项 (或它们的绝对值) 上, 就得到: 当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时, 级数发散.

(3) 最后设 $x=-1$. 由上可知, 当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时, 从某处开始将有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1,\ 即|a_n|<|a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于 0, 级数发散; 当 $-1\leqslant\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时, 第 $n+1$ 项系数与第 n 项系数比值等于

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2}\quad(|\lambda_n|\leqslant L),$$

这比值对于充分大的 n 是正的. 设 $\gamma-\alpha-\beta>-1$, 于是比值到后来总是小于 1. 这样级数在弃去若干个开始项后, 就变成每项的绝对值单调递减的交错级数. 我们把求通项的 (绝对值的) 极限转化为求无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$$

的值. 如果 $\gamma-\alpha-\beta>-1$, 则可知这乘积具有零值, 由 Leibniz 判别法知级数收敛. 当 $\gamma-\alpha-\beta=-1$ 时,

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1+\frac{\lambda_n}{n^2}\quad(|\lambda_n|\leqslant L),$$

根据定理 1.18.5, 无穷乘积的值异于 0, 因此级数发散.

$u=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 满足超几何微分方程

$$x(x-1)u''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\cdot u'+\alpha\beta\cdot u=0.$$

1.18.4　Γ 函数

对于 $x\neq 0,-1,-2,\cdots$, 定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

从

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

可知此无穷乘积绝对收敛, 因此 Γ 函数的上述定义是有意义的.

写出上述无穷乘积的部分乘积

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\cdot\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

就得到 Euler–Gauss 公式

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由此就有

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

即

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

从 $\Gamma(1)=1$ 可见对自然数 m 有 $\Gamma(m+1)=m!$. 利用 Euler 常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)\right]$$

得到

$$e^{\gamma x}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}.$$

将它与

$$\Gamma(x+1)=\Gamma(x)\cdot x=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}}$$

结合, 就得到 Γ 函数的 Weierstrass 公式:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

在定义中将 x 换成 $-x$, 得到

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}},$$

再利用正弦函数的无穷乘积公式 (定理 1.19.5) , 并在其中将 x 换为 πx, 就得到 Γ 函数的余元公式:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

1.18.5 Euler 乘积公式

定理 1.18.15 如果依递增的次序把素数排列为

$$2=p_1<p_2<p_3<\cdots,$$

则当 $x>1$ 时就有恒等式

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

于是这一乘积表示 Riemann 函数 $\zeta(x)$.

证明 按几何级数的求和公式, 我们有

$$\frac{1}{1-p_k^{-x}}=\sum_{e=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{ex}},$$

把对应于不超过自然数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘, 所得的部分乘积

$$P_N=\prod_{k\leqslant N}\frac{1}{1-p_k^{-x}}=\sum_{e_1,e_2,\cdots,e_N=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^{e_1x}p_2^{e_2x}\cdots p_N^{e_Nx}}=\sum_{e_1,e_2,\cdots,e_N=0}^{\infty}\frac{1}{(p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_N^{e_N})^x}.$$

所以, 如果令 $\mathbf{N}_N=\{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant1}|n\text{的素因子分解中出现的素数}\leqslant p_N\}$, 我们就有

$$P_N=\prod_{k\leqslant N}\frac{1}{1-p_k^{-x}}=\sum_{n\in\mathbf{N}_N}\frac{1}{n^x}.$$

从而, 我们有

$$0 \leqslant \zeta(x) - P_N = \sum_{n\text{含有大于}p_N\text{的素因子}} \frac{1}{n^x} < \sum_{n>p_N} \frac{1}{n^x}.$$

(注意到如果只有有限个素数, 那么从 N 取某个数开始, 上式右端为 0, 证明结束.) 因为 $x>1$ 时上式右端是收敛的, 当 $N\to\infty$ 时其值趋于 0, 所以 $\lim\limits_{N\to\infty}(\zeta(x)-P_N)=0$, 这就完成了证明. □

注 1.18.16 (1) 沿用上面的记号, 当 $x=1$ 时, 有

$$\prod_{k\leqslant N} \frac{1}{1-p_k^{-1}} = \sum_{e_1,e_2,\cdots,e_N=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_N^{e_N}} = \sum_{n\in\mathbf{N}_N} \frac{1}{n},$$

若素数集合是有限集合, 当 $N\to\infty$ 时, 上式左端乘积具有有限值, 与右端发散矛盾, 由此证明了素数有无穷多个.

(2) 如果把所得到的结果改写成

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0,$$

根据定理 1.18.5, 可以断定级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots$$

的发散性. 注意这一命题在断定调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性时是极有力的.

1.19　初等函数的展开

1.19.1　展开初等函数为级数

定理 1.19.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+H]$ 或 $[x_0-H,x_0]\,(H>0)$ 上具有各阶导数, 则在此区间上某一 x 值时, 展开式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

成立的充分必要条件是, 在这个 x 值时, Taylor 公式的余项 $r_n(x)$ 随着 n 的增大而趋于 0.

定理 1.19.2 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,H]$ 或 $[-H,0]\,(H>0)$ 上具有各阶导数, 且当 x 在所给区间上变化时, 所以这些导数的绝对值被同一个数界定:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant L\,(L\text{不依赖于}n),$$

则在整个区间上展开式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

成立.

证明 取 Lagrange 形式的余项

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

由条件, 我们有

$$|r_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant L\cdot\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

根据 d'Alembert 判别法, 级数

$$1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

收敛, 从而 $r_n(x)$ 具有极限 0, 展开式成立. □

注 1.19.3 即使函数展成的 Taylor 级数对于给定的 x 值收敛, 也不意味着此级数的和等于建立起该级数的函数 (因为这时定理 1.19.1 中的条件并不一定满足) . 例如, 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时, $f(x)$ 有任意阶的导数:

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\quad(n=1,2,\cdots),$$

其中 $P_n(z)$ 是 $3n$ 次整多项式. 而当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0,$$

于是 $f'(0)=0$. 再假设在 $x=0$ 处直至 n 阶导数都为 0, 则当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0,$$

故 $f^{(n+1)}(0)=0$. 由数学归纳法, $f(x)$ 在 $x=0$ 处各阶导数均为 0. 故其在 $x_0=0$ 处展成的 Taylor 级数系数全部为 0, 自然处处收敛, 但除 $x=0$ 外任何一点处都不能产生原来的函数值.[12]

[12]"无论在零点的怎样一个邻域内都不能将此函数按 x 的幂次展开" 这一特性在转换到复变量 $z=x+yi$ 时就变得显而易见了. 例如当 z 沿虚轴趋近 0 时, $e^{-\frac{1}{z^2}}\to\infty$, 因此当 $z\to 0$ 时函数极限不存在.

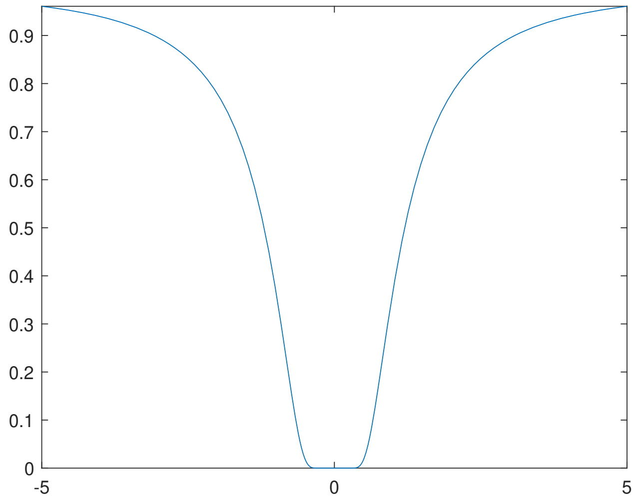

图 1.19: $f(x)$ 的图像

例 1.19.4 函数 $y=\arctan x$ 的第 n 阶导数为

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

不能确保所有的 $y^{(n)}$ 有共同的界. 对应的 Taylor 级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\cdots$$

只在 $[-1,1]$ 上收敛 (由 d'Alembert 判别法, 当 $|x|<1$ 时, 级数绝对收敛, 当 $|x|>1$ 时, 级数发散; 再由 Leibniz 定理可知当 $x=\pm1$ 时级数条件收敛) , 所以在此区间外不能用这级数来表示函数. 对于 $|x|\leqslant 1$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式,

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{\left|\cos^{n+1}y_\theta\cdot\sin\left[(n+1)\left(y_\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|}{n+1}|x|^{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1},$$

其中 $y_\theta=\arctan(\theta x)$. 故 $r_n(x)\to 0$, 对于 $[-1,1]$ 上所有的 x 值展开式都成立. 特别地, 当 $x=1$ 时, 得到 Leibniz 级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+\cdots.$$

1.19.2　Stirling 公式

由对数级数 ($|x|<1$ 时) ,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{x}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

及

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots,$$

有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\cdots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\cdots\right).$$

取 $x=\dfrac{1}{2n+1}$, 其中 n 是任意自然数. 因为这时 $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{n+1}{n}$, 所以得到展开式

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right],$$

也即

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots.$$

注意到

$$1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots<1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

所以有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

即

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

现在引进序列 $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. 这时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

从上面的不等式即可推出

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

于是, $a_n>a_{n+1}$, 且

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

由此可见, 随着 n 的增大, 序列 a_n 递减且趋于有限极限 a; 而序列 $a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}$ 递增, 并与 a_n 趋于同一极限. 因为

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

所以存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$a_n=a\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

结合 a_n 的定义, 我们得到

$$n! = a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\quad (0<\theta<1).$$

用 $2n$ 代替 n, 就有

$$(2n)! = a\sqrt{2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot e^{\frac{\theta'}{24n}}\quad (0<\theta'<1).$$

又由 Wallis 公式,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2,$$

作变形

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!},$$

化简得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}.$$

于是

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\cdot\frac{n}{2}\cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4},$$

由此

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

进而得到 Stirling 公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\quad (0<\theta<1).$$

1.19.3　展开函数成无穷乘积

定理 1.19.5 对所有 x 值成立

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

证明 当 x 为 π 的整数倍时两边均为 0. 以下只需要讨论 x 不是 π 的整数倍的情况.

用 de Moivre 公式

$$(\cos z + i\sin z)^m = \cos mz + i\cdot\sin mz,$$

其中 m 是自然数. 将左边展开并比较两端 i 的系数, 我们得到

$$\sin mz = m\cos^{m-1}z\cdot\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}\cos^{m-3}z\cdot\sin^3 z+\cdots.$$

如果 $m=2n+1$ 是奇数, 则按公式 $\cos^{2k} z=\left(1-\sin^2 z\right)^k$ 替换后可将上述结果表示为

$$\sin(2n+1)z=\sin z\cdot P(\sin^2 z),$$

其中 $P(u)$ 是一个 n 次多项式.

注意到如果 z 使 $\sin(2n+1)z=0$ 但 $\sin z\neq 0$, 则 $\sin^2 z$ 一定是 $P(u)$ 的根. 因此, $P(u)$ 的 n 个根恰为

$$u_1=\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, u_2=\sin^2 2\frac{\pi}{2n+1},\cdots,u_n=\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}.$$

那么可将这个多项式分解为

$$P(u)=A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

系数 $A=P(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin(2n+1)z}{\sin z}=2n+1$. 于是得到公式

$$\sin(2n+1)z=(2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

令 $z=\dfrac{x}{2n+1}$, 就有

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

我们在条件 $(k+1)\pi>|x|$ 下取自然数 k, 并设 $n>k$. 现在把 $\sin x$ 表示成下面的乘积:

$$\sin x=U_k^{(n)}\cdot V_k^{(n)},$$

其中

$$U_k^{(n)}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\frac{\pi}{2n+1}}\right),$$

$$V_k^{(n)}=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(k+1)\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

暂设 k 是固定的. 因为

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}=x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1}}=\frac{x^2}{h^2\pi^2}\quad(h=1,2,\cdots,k).$$

所以

$$U_k := \lim_{n\to\infty} U_k^{(n)} = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

进而

$$V_k := \lim_{n\to\infty} V_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{U_k^{(n)}}$$

存在, 且 $\sin x = U_k \cdot V_k$. 因为对于 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, 有

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi,$$

所以

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2},$$

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \quad (h=k+1,\cdots,n).$$

于是

$$1 > {}^{13}V_k^{(n)} > \left(1-\frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right).$$

选取 $h_0\in\mathbb{N}$, 使得 $4h_0^2>x^2$, 则从级数 $\displaystyle\sum_{h=h_0}^{\infty}\frac{x^2}{4h^2}$ 收敛可推出无穷乘积 $\displaystyle\prod_{h=h_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$ 收敛. 因此余乘积

$$\overline{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

当 $k\to\infty$ 时趋于 1. 那么对不等式

$$1 > V_k^{(n)} > \overline{V}_k$$

令 $n\to\infty$ (k 固定) , 就得到

$$1 > V_k \geqslant \overline{V}_k.$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} V_k = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} U_k = \sin x$. 最后便得到展开式

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

□

[13]注意此处用到了 $(k+1)\pi > |x|$ 这一条件.

注 1.19.6 在展开式中令 $x = \frac{\pi}{2}$, 就得到

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

于是可推出 Wallis 公式.

定理 1.19.7 对所有 x 值成立

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right).$$

定理 1.19.8 对所有 x 值成立

$$\sinh x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

定理 1.19.9 对所有 x 值成立

$$\cosh x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right).$$

1.20　$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑

1.20.1　度量、范数和内积

定义 1.20.1 一个度量空间是指一个集合 M 和它上面的一个满足正定性、对称性和三角不等式的二元函数

$$d : M \times M \to \mathbb{R},$$

这个 d 叫做度量空间 (M, d) 的度量.

定理 1.20.2 设 X 为一个度量空间, $\mathbf{x} \in X, E \subseteq X$, 则 $\mathbf{x} \mapsto d(\mathbf{x}, E)$ 是一致连续函数.

证明 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, 以及任意 $\mathbf{z} \in E$, 都有

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

因此

$$d(\mathbf{x}, E) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

即

$$d(\mathbf{x}, E) - d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in E.$$

这说明 $d(\mathbf{x},E)-d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是集合 $\{d(\mathbf{y},\mathbf{z}) \mid \mathbf{z}\in E\}$ 的一个下界, 从而

$$d(\mathbf{x},E)-d(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant d(\mathbf{y},E) \iff d(\mathbf{x},E)-d(\mathbf{y},E)\leqslant d(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

类似地,

$$d(\mathbf{y},E)-d(\mathbf{x},E)\leqslant d(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

于是

$$|d(\mathbf{x},E)-d(\mathbf{y},E)|\leqslant d(\mathbf{x},\mathbf{y}),\quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in X.$$

□

定义 1.20.3 一个 (实) 赋范空间是指一个 (实) 线性空间 N 和它上面的一个满足正定性、齐次性和三角不等式的一元函数

$$\|\cdot\|:N\to\mathbb{R},$$

这个 $\|\cdot\|$ 叫做赋范空间 $(N,\|\cdot\|)$ 的范数.

度量与范数的关系见引理 1.20.4 与引理 1.20.5:

引理 1.20.4 设 $(N,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, 那么 $d(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 定义了 N 上的一个度量, 它叫做由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量. 它还满足如下性质:

(1) 平移不变性: $d(\mathbf{x}+\mathbf{z},\mathbf{y}+\mathbf{z})=d(\mathbf{x},\mathbf{y})$;

(2) 齐次性: $d(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y})=|\lambda|d(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

引理 1.20.5 设 N 是一个 (实) 线性空间, d 是 N 上的一个度量. 如果 d 具有平移不变性和齐次性, 那么 $\|\mathbf{x}\|:=d(\mathbf{x},\mathbf{0})$ 定义了一个 N 上的范数.

范数与内积的关系见引理 1.20.6 与引理 1.20.7:

引理 1.20.6 设 $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ 是一个 (实) 内积空间, 那么 $\|\mathbf{x}\|:=\sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$ 定义了 V 上的一个范数, 它叫做由内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 诱导的范数. 它还满足如下平行四边形法则:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=2\left(\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2\right).$$

引理 1.20.7 设 $(N,\|\cdot\|)$ 是一个 (实) 赋范空间. 如果 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则, 那么

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle:=\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{y}\|^2\right)$$

定义了 N 上的一个内积.

证明 正定性与对称性易证, 这里只对双线性性作出证明:

① 欲证 $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$, 按定义, 即证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\|^2-\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{z}\|^2\right)\\=&\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|^2-\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{z}\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}+\mathbf{z}\|^2-\|\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{z}\|^2\right),\end{aligned}$$

故只需证

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\|^2+\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{z}\|^2=\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{y}+\mathbf{z}\|^2+\|\mathbf{z}+\mathbf{x}\|^2.$$

由平行四边形法则,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\|^2+\|\mathbf{z}\|^2=2\left(\left\|\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}+\mathbf{z}\right\|^2+\left\|\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right\|^2\right),$$

$$\|\mathbf{y}+\mathbf{z}\|^2+\|\mathbf{z}+\mathbf{x}\|^2=2\left(\left\|\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}+\mathbf{z}\right\|^2+\left\|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\right\|^2\right).$$

于是化简后只需证

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=2\left(\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2\right).$$

这正是平行四边形法则.

② 欲证 $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, 我们固定一对任取的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$, 定义 $f(\lambda) = \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

由 ① 可知, $f(\lambda_1+\lambda_2) = \langle \lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \lambda_1\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \lambda_2\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = f(\lambda_1)+f(\lambda_2)$. 即 f 满足 Cauchy 方程. 下证 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处是连续的:

$$\begin{aligned}|f(\lambda)| &= \left|\frac{1}{2}\left(\|\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\lambda\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{y}\|^2\right)\right|\\&\leqslant \left|\frac{1}{2}\left((\|\lambda\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2-\|\lambda\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{y}\|^2\right)\right|\\&= |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|.\\&\Longrightarrow \lim_{\lambda\to 0} f(\lambda)=0=f(0).\end{aligned}$$

因此由函数方程的结论可知 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $f(\lambda) = f(1)\lambda$, 即 $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$. □

例 1.20.8 $\|\mathbf{x}\| \coloneqq 2|x^1| + \sqrt{3|x^2|^2+\max(|x^3|, 2|x^4|)^2}$ 给出了 $\mathbb{R}^4$ 上的一个范数.

例 1.20.9 (广义矩阵范数) 设 $V = \mathrm{Matrix}(m,n,\mathbb{R})$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵构成的线性空间, 在 V 上可定义如下范数[14]:

$$\|\mathbf{A}\|_1 \coloneqq \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{i,j}|,\quad \|\mathbf{A}\|_\infty \coloneqq \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 \coloneqq \sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})},\quad \|\mathbf{A}\|_F \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 1.20.10 若一个对矩阵定义的范数 $\|\cdot\|$ 还满足“矩阵乘法相容性”:

$$\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|,$$

则称 $\|\cdot\|$ 为一种矩阵范数.

注 1.20.11 在广义矩阵范数意义下, 单位阵的范数可为任意正数. 实际运用中, 只考虑矩阵乘法时选用 Fronbenius 范数, 需要解线性方程组时选用列和范数 (1-范数) 或行和范数 (∞-范数) .

例 1.20.12 (函数空间上的 p-范数) 设 $V = C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上实值连续函数的全体构成的线性空间, 在 V 上可以定义如下范数:

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\quad (p\geqslant 1),\quad \|f\|_\infty \coloneqq \max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

且有 $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p$.

定义 1.20.13 设 V 是一个 (实) 线性空间, V 上的两个范数 $\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|''$ 称为是等价的, 如果存在正实数 C_1、C_2, 使得对于任意的 $\mathbf{x}\in V$, 有

$$C_1\|\mathbf{x}\|' \leqslant \|\mathbf{x}\|'' \leqslant C_2\|\mathbf{x}\|'.$$

例 1.20.14 对于任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty,\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_1.$$

定理 1.20.15 设 V 是一个有限维 (实) 线性空间, 则 V 上任意两个范数都等价.

注 1.20.16 $\mathbb{R}^n$ 情形下的证明见定理 1.21.29.

[14] $\|\mathbf{A}\|_F$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 Fronbenius 范数.Fronbenius 范数是一种矩阵范数, 但当 $n\geqslant 2$ 时不是算子范数 (由算子范数定义可得 $\mathbf{I}_n$ 的算子范数为 1, 而 $\|\mathbf{I}_n\|_F = \sqrt{n}$.) .

1.20.2　$\mathbb{R}^n$ 的拓扑: 基本概念

定义 1.20.17 对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$、$r > 0$, 定义 $\mathbf{x}$ 的 (开) r-邻域为 $\mathbb{B}(\mathbf{x}, r) \coloneqq \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$.

定义 1.20.18 $\mathbb{R}^n$ 的子集 U 叫开集, 如果对于任意的 $\mathbf{x} \in U$, 存在 $r > 0$, 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x}, r) \subseteq U$.

例 1.20.19 (1) $U = \varnothing$ 和 $U = \mathbb{R}^n$ 都是开集;

(2) $\mathbb{B}(\mathbf{x}, r)$ 是开集;

(3) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a^i < x^i < b^i, i = 1, \cdots, n\right\}$ 是开集;

(4) 若 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的每个元素都是开集, 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ 也是开集;

(5) 若 U、V 是开集, 则 $U \cap V$ 也是开集.

定义 1.20.20 设 X 是一个集合, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. 若 $\mathcal{T}$ 满足如下三个条件:

(1) $\varnothing \in \mathcal{T}$、$X \in \mathcal{T}$;

(2) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$;

(3) $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$.

则称 $\mathcal{T}$ 定义了 X 上的一个拓扑.$(X, \mathcal{T})$ 称为拓扑空间, $\mathcal{T}$ 的元素叫做 $(X, \mathcal{T})$ 的开集.

定理 1.20.21 $\mathbb{R}^n$ 上按不同范数诱导的距离所定义的拓扑是一样的.

证明概要 由定理 1.20.15, 设对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\|' \leqslant C\|\mathbf{x}\|''$, 则 $\mathbb{B}''\left(\mathbf{x}, \dfrac{r}{C}\right) \subseteq \mathbb{B}'(\mathbf{x}, r)$. □

定义 1.20.22 (子空间拓扑) 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, X 的子集 U 叫做 X 中的开集, 如果存在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 V, 使得 $U = V \cap X$.

引理 1.20.23 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 记 X 中的开集的全体为 $\mathcal{T}_X$, 则 $(X, \mathcal{T}_X)$ 是一个拓扑空间.

例 1.20.24 考虑 $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, 则 $U = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$ 是 X 中的开集, 因为 $U = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap X$.

例 1.20.25 (环面无理流) 设 $R > r > 0$, 考虑

$$X = \left\{((R + r\cos(\alpha t))\cos t, (R + r\cos(\alpha t))\sin t, r\sin(\alpha t)) \mid t \in \mathbb{R}\right\},$$

当 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 时, 它是一条光滑曲线, 与单位圆具有相同的拓扑; 当 $\alpha \notin \mathbb{Q}$ 时, 它的子空间拓扑会变得非常复杂.

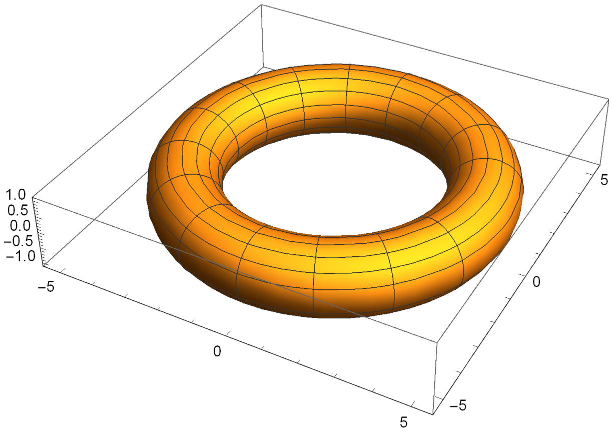

图 1.20: 环面

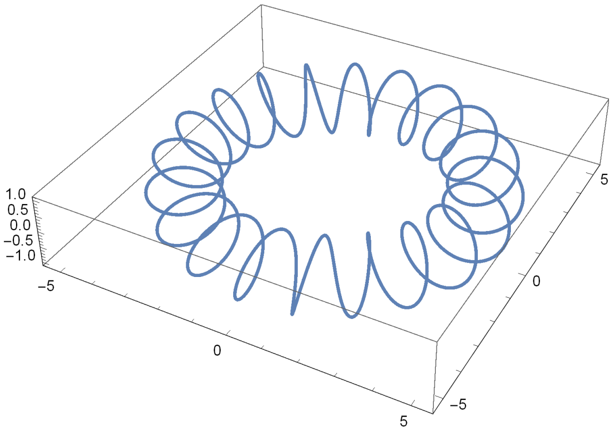

图 1.21: 环面有理流是闭合曲线 (图中 $\alpha = 20, t \in \mathbb{R}$)

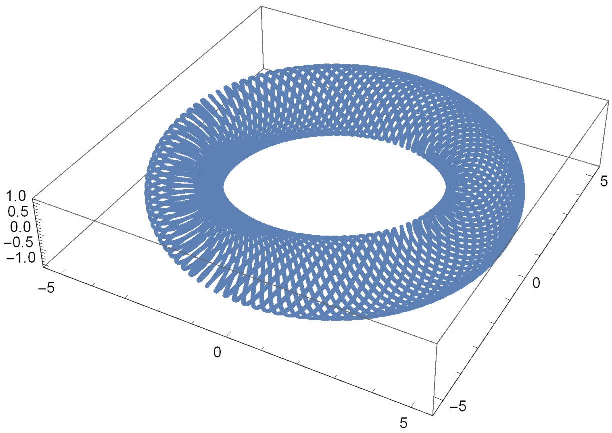

图 1.22: 环面无理流总会断开 (图中 $\alpha = 5\sqrt{2}, t \in [0, 80\pi]$)

定义 1.20.26 $\mathbb{R}^n$ 的子集 D 叫闭集, 如果它的补集 $U = \mathbb{R}^n \backslash D$ 是开集.

例 1.20.27 (1) $D=\varnothing$ 和 $D=\mathbb{R}^n$ 都是闭集;

(2) $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{x},r)\coloneqq\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant r\}$ 是闭集;

(3) $S(\mathbf{x},r)\coloneqq\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x},\mathbf{y})=r\}$ 是闭集;

(4) 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, 则 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid a^i\leqslant x^i\leqslant b^i, i=1,\cdots,n\right\}$ 是闭集;

(5) 若 $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的每个元素都是闭集, 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in A}D_\alpha$ 也是闭集;

(6) 若 D、E 是闭集, 则 $D\cup E$ 也是闭集.

定义 1.20.28 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集.

(1) $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 叫做 E 的内点, 如果存在 $r>0$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\subseteq E$; E 的全体内点构成的集合叫做 E 的内部, 记为 $\operatorname{int}(E)$;

(2) $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 叫做 E 的外点, 如果它是 $\mathbb{R}^n\backslash E$ 的内点; E 的全体外点构成的集合叫做 E 的外部, 记为 $\operatorname{ext}(E)$;

(3) $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 叫做 E 的边界点, 如果它既不是内点也不是外点; 一种等价的定义是, 对任意的 $r>0$, $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap E$ 和 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap(\mathbb{R}^n\backslash E)$ 都非空; E 的全体边界点构成的集合叫做 E 的边界, 记为 ∂E;

(4) $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 叫做 E 的聚点 (或极限点) , 如果对任意的 $r>0$, $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap E$ 都包含无穷多个点; 一种等价的定义是, 对任意的 $r>0$, $\mathbb{B}^\circ(\mathbf{x},r)\cap E$ 都非空, 其中 $\mathbb{B}^\circ(\mathbf{x},r)=\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\backslash\{\mathbf{x}\}$; E 的全体聚点构成的集合叫做 E 的导集, 记为 E';

(5) $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 叫做 E 的孤立点, 如果存在 $r>0$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap E=\{\mathbf{x}\}$; E 的全体孤立点构成的集合叫做 E 的孤立点集, 记为 $\operatorname{iso}(E)$;

(6) E 的闭包 $\overline{E}$ 定义为包含 E 的最小闭集; 或包含 E 的所有闭集之交; 或 $\mathbb{R}^n\backslash\operatorname{ext}(E)$; 或 $E\cup\partial E$; 或 $E\cup E'$.

例 1.20.29 (1) $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)$ 和 $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{x},r)$ 的边界都是 $S(\mathbf{x},r)$;

(2) $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)$ 的闭包是 $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{x},r)$;

(3) $S(\mathbf{x},r)$ 既没有内点也没有外点;

(4) $S(\mathbf{x},r)$ 的边界、导集和闭包都是它自己;

(5) 若 $E=\mathbb{Q}$, 则 $\overline{E}=\mathbb{R}$; 若 $E=\mathbb{Q}\cap[0,1]$, 则 $\overline{E}=[0,1]$;

(6) $\operatorname{int}(E)$ 和 $\operatorname{ext}(E)$ 都是开集;

(7) ∂E 和 E' 都是闭集;

(8) $\partial E\backslash E'=\operatorname{iso}(E)$; $E'\backslash\partial E=\operatorname{int}(E)$;

(9) E 是开集当且仅当 $E=\operatorname{int}(E)$;

(10) E 是闭集当且仅当 $E=\overline{E}$;

(11) 若 $E'=\varnothing$, 则 $E=\operatorname{iso}(E)$, 这样的 E 叫离散集, 如 $E=\mathbb{N}$、$E=\mathbb{Z}$ 等;

(12) 若 E 是闭集且 $\operatorname{iso}(E)=\varnothing$, 则称 E 为完备集.

1.20.3　$\mathbb{R}^n$ 的拓扑: 紧性与连通性

定义 1.20.30 (1) 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 若有 $\mathcal{C}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 使得 $E\subseteq\bigcup\mathcal{C}$, 则称 $\mathcal{C}$ 是 E 的一个覆盖;

(2) 设 $\mathcal{C}$ 是 E 的一个覆盖, 如果 $\mathcal{C}$ 中的元素都是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则称其为开覆盖;

(3) 设 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 是 E 的两个覆盖, 如果 $\mathcal{C}_1\subseteq\mathcal{C}_2$, 则称 $\mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{C}_2$ 的子覆盖;

(4) 设 $\mathcal{C}$ 是 E 的一个覆盖, 若 $\mathcal{C}$ 是有限 (或可数) 的, 则称其为有限 (或可数) 覆盖.

定理 1.20.31 (Lindelöf 引理) 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ 是 E 的一个开覆盖, 则存在 $\mathcal{C}$ 的可数子覆盖.

定义 1.20.32 设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$, 若 K 的任意开覆盖都存在有限子覆盖, 则称 K 是紧致的.

定理 1.20.33 (Heine–Borel 定理) $\mathbb{R}^n$ 中的子集 K 是紧的当且仅当它有界闭.

证明 ① 紧 $\Longrightarrow$ 有界: 因为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{B}(\mathbf{0},n)=\mathbb{R}^n$, 所以 $K\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{B}(\mathbf{0},n)$. 因为 K 紧, 所以存在有限多个 $n_1,\cdots,n_m$, 使得

$$K\subseteq\mathbb{B}(\mathbf{0},n_1)\cup\cdots\cup\mathbb{B}(\mathbf{0},n_m),$$

取 $N=\max\{n_1,\cdots,n_m\}$, 则 $K\subseteq\mathbb{B}(\mathbf{0},N)$, 即 K 有界.

② 紧 $\Longrightarrow$ 闭: 只需证 $\mathbb{R}^n\backslash K$ 开. 设 $\mathbf{x}_0\notin K$, 下证存在 $r>0$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x}_0,r)\subseteq(\mathbb{R}^n\backslash K)$. 考虑

$$\bigcup_{\mathbf{x}\in K}\mathbb{B}\left(\mathbf{x},\frac{1}{2}d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\right),$$

它是 K 的一个开覆盖. 于是由 K 紧可知, 存在 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m$ 使得

$$K\subseteq\mathbb{B}\left(\mathbf{x}_1,\frac{1}{2}d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0)\right)\cup\cdots\cup\mathbb{B}\left(\mathbf{x}_m,\frac{1}{2}d(\mathbf{x}_m,\mathbf{x}_0)\right).$$

取 $r=\min\left\{\frac{1}{3}d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_0)\mid i=1,\cdots,m\right\}$, 则

$$\mathbb{B}(\mathbf{x}_0,r)\cap\mathbb{B}\left(\mathbf{x}_i,\frac{1}{2}d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_0)\right)=\varnothing\quad(i=1,\cdots,m).$$

所以 $\mathbb{B}(\mathbf{x}_0,r)\cap K=\varnothing$, 即 $\mathbb{B}(\mathbf{x}_0,r)\subseteq(\mathbb{R}^n\backslash K)$.

③ 若 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭区间, 则 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 紧.

【③ 的证明: 假设 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 不紧, 即存在 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 的一个开覆盖 $\mathcal{C}$, 它没有有限子覆盖. 将 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 的每条边二分, 它变成 2^n 个小的闭区间, 它们之中必有一个不能被有限覆盖, 记它为 I_1. 再将 I_1 的每条边二分, 重复上述过程. 由此得到区间套

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots,$$

其中

$$I_k=[\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_k],\quad \mathbf{a}_k=\left(a_k^1,\cdots,a_k^n\right),\quad \mathbf{b}_k=\left(b_k^1,\cdots,b_k^n\right).$$

固定第 i 个坐标, 则得到一维的区间套

$$\left[a_0^i,b_0^i\right]\supseteq[a_1^i,b_1^i]\supseteq[a_2^i,b_2^i]\supseteq\cdots,$$

根据一维的区间套原理, 存在唯一 $\xi^i\in\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\left[a_k^i,b_k^i\right]$, 让 i 取遍 $1,\cdots,n$, 得到

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\xi^1,\cdots,\xi^n\right)\in\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k.$$

因为 $\boldsymbol{\xi}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, 所有存在 $U\in\mathcal{C}$ 使得 $\boldsymbol{\xi}\in U$. 又因为 U 是开集, 所以存在 $r>0$ 使得 $\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi},r)\subseteq U$. 根据 I_k 的构造, 一定存在某个 $I_N\subseteq\mathbb{B}(\boldsymbol{\xi},r)\subseteq U$. 这说明 I_N 可被 $\mathcal{C}$ 中的一个开集覆盖, 这和 I_N 不能被有限覆盖矛盾! 故 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 紧.】

④ 设 K 是紧集, $F\subseteq K$, 且 F 是闭集, 则 F 是紧集.

【④ 的证明: 设 $\mathcal{C}$ 是 F 的任一开覆盖, 取 $\mathcal{C}'=\mathcal{C}\cup(\mathbb{R}^n\backslash F)$. 由 F 是闭集可知 $\mathbb{R}^n\backslash F$ 是开集, 则 $\mathcal{C}'$ 是 K 的开覆盖. 因为 K 是紧的, 所以存在有限的子覆盖 $U_1,\cdots,U_m$, 使得

$$K\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_m.$$

于是 $F\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_m$. 若 $U_1,\cdots,U_m$ 中有 $\mathbb{R}^n\backslash F$ (不妨设其为 U_m) , 则因为 $(\mathbb{R}^n\backslash F)\cap F=\varnothing$, 可将其去掉, 也可得证 $F\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_{m-1}$. 所以 F 在 $\mathcal{C}$ 中有有限子覆盖, 于是 F 是紧集.】

⑤ 有界闭 $\implies$ 紧: 由于 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 是有界闭集, 所以存在一个 n 维区间 $I\supseteq K$. 由 174 知 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 再由④知 K 是紧集. □

定义 1.20.34 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 是有界集, E 的直径定义为 $\operatorname{diam}(E):=\sup\{d(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{x},\mathbf{y}\in E\}$.

定理 1.20.35 (紧集套定理) 设 $K_1\supseteq K_2\supseteq\cdots$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空紧集套, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i$ 非空; 若 $\lim\limits_{i\to\infty}\operatorname{diam}(K_i)=0$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i$ 只包含一个点.

证明 假设 $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \varnothing$, 则 $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \backslash K_i)$. 由 K_i 紧可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $K_1 \subseteq (\mathbb{R}^n \backslash K_N)$, 但 $K_N \subseteq K_1$, 于是 K_N 空, 矛盾! 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 则 $\operatorname{diam}(K_i) \geqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$, 此时不可能有 $\lim_{i \to \infty} \operatorname{diam}(K_i) = 0$. □

定义 1.20.36 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 若对于 K 的任意无穷子集 F, $F' \cap K$ 非空, 则称 K 是聚点紧 (Fréchet 紧) 的.

定理 1.20.37 (聚点定理) 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 K 紧当且仅当 K 聚点紧.

证明 1 $\Rightarrow$: 假设 F 是 K 的无穷子集, 使得 K 中的任一点都不是 F 的聚点, 则对于任意的 $\mathbf{x} \in K$, 存在 $\delta_{\mathbf{x}}$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \cap F$ 是有限集. 然后考虑 $K \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in K} \mathbb{B}(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$, 由 K 紧, 存在有限多个 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m \in K$, 使得 $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}(\mathbf{x}_i, \delta_{\mathbf{x}_i})$, 而右边的集合是有限集, 这与 K 是无穷集矛盾!

$\Leftarrow$: 设 $\{U_i\}_{i \in A}$ 是 K 的任一开覆盖, 由 Lindelöf 引理, 不妨设 $A = \mathbb{N}$. 记 $V_m = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. 假设 K 不紧. 取 $m_1 = 1$, 则 $K \backslash V_{m_1}$ 非空, 取 $\mathbf{x}_1 \in K \backslash V_{m_1}$. 设 $\mathbf{x}_1 \in V_{m_2}$. 由 K 不紧可知 $K \backslash V_{m_2}$ 非空, 取 $\mathbf{x}_2 \in K \backslash V_{m_2}$. 如此继续, 则得 K 的无穷子集 $F = \{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. 设 $\mathbf{x}_0 \in F' \cap K$, $\mathbf{x}_0 \in V_{m_0}$, 因为 V_{m_0} 开, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq V_{m_0}$. 因为 $\mathbf{x}_0$ 是聚点, 所以存在无穷多个 $\mathbf{x}_j \in \mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq V_{m_0}$. 但由 F 的构造方法, 当 $j > m_0$ 时必有 $\mathbf{x}_j \notin V_{m_0}$, 矛盾! □

证明 2 只需证聚点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧:

$\Rightarrow$: 设 $\{\mathbf{x}_n\} \subseteq K$ 为任一点列. ① 若 $\{\mathbf{x}_n\}$ 中只有有限项不同, 显然有收敛子列. ② 若 $\{\mathbf{x}_n\}$ 中不同的项有无穷多 (即 $\{\mathbf{x}_n\}$ 为 K 的无穷子集) , 由于 K 聚点紧, $\{\mathbf{x}_n\}$ 在 K 中有聚点 $\mathbf{x}$, 即存在子列收敛于 $\mathbf{x}$. 故 K 列紧.

$\Leftarrow$: 任取 K 的无穷子集F, 将其看作 K 中点列. 由 K 列紧, F 中必有收敛于 $\mathbf{x} \in K$ 的子列 $\{\mathbf{x}_n\}$, 且满足对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}$. 因此对任意 $r > 0$, $F \cap \mathbb{B}^\circ(\mathbf{x}, r) \neq \varnothing$, $\mathbf{x}$ 是 F 的聚点. 故 K 聚点紧. □

定理 1.20.38 (Lebesgue 数引理) 设 X 是一个紧致度量空间, $\mathscr{F}$ 是 X 的一个开覆盖. 则存在 $\delta > 0$ (称为 $\mathscr{F}$ 的 Lebesgue 数) 使得 X 的任一子集只要满足直径小于 δ, 就能被 $\mathscr{F}$ 中某一个开集覆盖.

证明 如果不存在这样的数 δ, 则对每个 $k \in \mathbb{N}^*$, 存在 $A_k \subseteq X$, 满足 $\operatorname{diam} A_k < \dfrac{1}{k}$, 但 A_k 不被 $\mathscr{F}$ 中任何开集覆盖. 对每一个 k, 选取 $x_k \in A_k$.$\{x_k\}$ 要么只有有限个不同点, 其中某些点

重复出现无穷多次; 要么是无穷集, 从而 (由 X 紧可知) $\{x_k\}$ 有极限点. 将这个重复出现无穷多次或为极限点的点记作 p. 设 $U \in \mathscr{F}$ 满足 $p \in U$. 选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \subseteq U$, 并选取充分大的整数 N 使得 $\operatorname{diam} A_N < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $x_N \in \mathbb{B}\left(p, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. 那么对任意 $x \in A_N$, 都有

$$d(x_N, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} \quad d(x, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由三角不等式可得 $d(x, p) < \varepsilon$, 于是 $A_N \subseteq U$. 这与我们对 $\{A_k\}$ 的选取矛盾. □

定义 1.20.39 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 E 不能写成两个 E 中非空开集的不交并, 则称 E 是连通的.

引理 1.20.40 (1) E 不连通 $\iff$ 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的不交非空开集 U 和 V, 使得 $E = (E \cap U) \cup (E \cap V)$;

(2) E 连通 $\iff$ E 中既开又闭的子集只有 $\varnothing$ 和 E;

(3) E 不连通 $\iff$ 存在 E 的不交非空子集 A 和 B, 使得 $E = A \cup B$, 且 $A' \cap B = A \cap B' = \varnothing$;

(4) E 连通 $\iff$ 对于任意 E 的不交非空子集 A 和 B, 如果 $E = A \cup B$, 则 $A' \cap B$ 和 $A \cap B'$ 至少有一个非空.

定义 1.20.41 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 若对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, 存在一条连续曲线 $\phi : [0,1] \to E$ 使得 $\phi(0) = \mathbf{x}, \phi(1) = \mathbf{y}$, 则称 E 是道路连通的.

定理 1.20.42 若 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 道路连通, 则 E 连通.

证明 假设 E 不连通, 则它可写成两个非空开集的不交并: $E = U_1 \cup U_2$. 取 $\mathbf{x} \in U_1$、$\mathbf{y} \in U_2$, 由道路连通性, 存在连续曲线 $\phi : [0,1] \to E$ 使得 $\phi(0) = \mathbf{x}, \phi(1) = \mathbf{y}$. 记 $V_i = \phi^{-1}(U_i)\,(i = 1, 2)$, 则 $[0,1] = V_1 \cup V_2$. 注意 $V_i\,(i = 1, 2)$ 是不交的非空开集这说明 $[0,1]$ 不连通, 矛盾!

【以证 V_1 开为例: 只需证对任意 $\mathbf{t}_0 \in V_1$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{t}_0, \delta) \subseteq V_1$. 这等价于证明 $\phi(\mathbb{B}(\mathbf{t}_0, \delta)) \subseteq U_1$. 设 $\phi(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$. 因为 $\mathbf{x}_0 \in U_1$, U_1 开, 所以存在 $r > 0$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x}_0, r) \subseteq U_1$. 由范数的等价性可知存在 $r_\infty > 0$, 使得 $\mathbb{B}_\infty(\mathbf{x}_0, r_\infty) \subseteq \mathbb{B}(\mathbf{x}_0, r)$. 接下来只需找 $\delta > 0$, 使对于 $t \in \mathbb{B}(\mathbf{t}_0, \delta)$, $\left|\phi^i(\mathbf{t}) - \phi^i(\mathbf{t}_0)\right| < r_\infty$. 因为 ϕ^i 连续, 所以对于 $r_\infty > 0$, 存在 $\delta_i > 0$ 使得只要 $|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| < \delta$, 就有 $\left|\phi^i(\mathbf{t}) - \phi^i(\mathbf{t}_0)\right| < r_\infty$. 于是只要取 $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$, 则对 $\mathbf{t} \in \mathbb{B}(\mathbf{t}_0, \delta)$, $\|\phi(\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{t}_0)\|_\infty < r_\infty$, 也即 $\phi(\mathbb{B}(\mathbf{t}_0, \delta)) \subseteq \mathbb{B}(\mathbf{x}_0, r) \subseteq U_1$.】 □

例 1.20.43 (拓扑学家的正弦曲线) $E = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \cup \left\{\left(t, \sin\dfrac{1}{t}\right) \mid t \in (0, 1)\right\}$ 给出了一个连通但不道路连通的集合的例子.

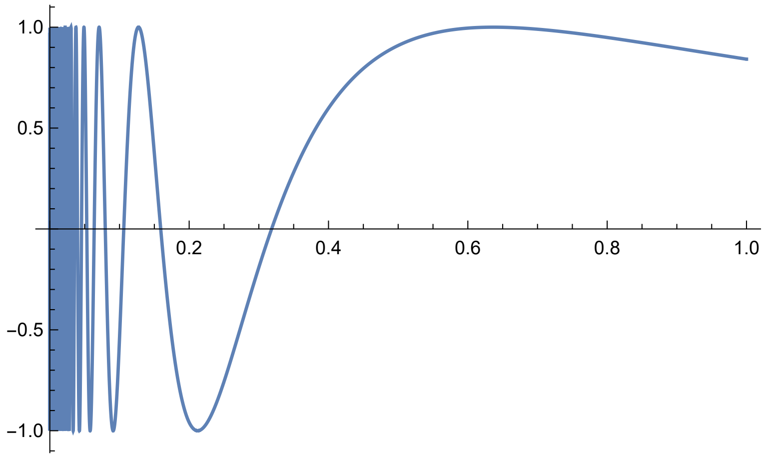

图 1.23: 拓扑学家的正弦曲线

证明 我们需要一个引理:

引理 若 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通集, 则 $\overline{E}$ 也是连通集.

【引理的证明: 假设 $\overline{E}$ 不连通, 则存在 $\overline{E}$ 的一个不交分解 $\overline{E} = A \sqcup B$ 使得 $A' \cap B = \varnothing$ 且 $A \cap B' = \varnothing$. 取 $A_1 := A \cap E$, $B_1 := B \cap E$, 则有 $E = A_1 \sqcup B_1$. 由 $A_1' \cap B_1 \subseteq A' \cap B$ 和 $A_1 \cap B_1' \subseteq A \cap B'$ 知 $A_1' \cap B_1 = \varnothing$ 和 $A_1 \cap B_1' = \varnothing$, 但这与 E 的连通性矛盾.】

记 $F := \left\{\left(t, \sin\dfrac{1}{t}\right) \mid t \in (0,1)\right\}$. 注意到此处 $E = \overline{F}$, 所以由引理知 E 是连通集.

记 $G := \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$, 则 $E = F \sqcup G$. 取 $\mathbf{a} \in F$ 和 $\mathbf{b} \in G$, 设存在连续曲线 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2) : [0,1] \to E$ 使得 $\boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{a}$ 与 $\boldsymbol{\phi}(1) = \mathbf{b}$. 令

$$\tau := \inf\{t \in [0,1] \mid \boldsymbol{\phi}(t) \in G\},$$

则显然 $\tau > 0$, 且存在 $\{t_n\} \subseteq [0,1]$ 使得当 $n \to \infty$ 时 $t_n \to \tau^+$ 且 $\boldsymbol{\phi}(t_n) \in G$. 于是

$$\lim_{t\to\tau} \phi_1(t) = \phi_1(\tau) = \lim_{n\to\infty} \phi_1(t_n) = 0,$$

从而

$$\phi_2(\tau) = \lim_{t\to\tau^-} \phi_2(t) = \lim_{t\to\tau^-} \sin\frac{1}{\phi_1(t)}$$

不存在, 矛盾. 因此 E 不是道路连通的.

【E 不道路连通的另证: 任取 $\mathbf{y} \in G$, 设 $\gamma : [0,1] \to E$ 是以 $\mathbf{y}$ 为起点的一条道路. 因为 G 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 所以它是 E 中的闭集, 从而 $\gamma^{-1}(G)$ 是 $[0,1]$ 中的闭集. 由于 $0 \in \gamma^{-1}(G) \neq \varnothing$, 若能证明 $\gamma^{-1}(G)$ 是 $[0,1]$ 中的开集, 就能得到 $\gamma^{-1}(G) = [0,1]$, 也即 $\gamma([0,1]) \subseteq G$, 从而说明 F 和 G 中两点不可能由全在 E 中的道路相连.

设 $t\in\gamma^{-1}(G)$, 并选取足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $\gamma\left((t-\varepsilon,t+\varepsilon)\right)\subseteq\overline{\mathbb{B}}\left(\gamma(t),\frac{1}{2}\right)$. 于是 $\overline{\mathbb{B}}\left(\gamma(t),\frac{1}{2}\right)\cap E$ 由 y 轴上的一个闭区间和曲线 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的一些片段构成, 其中每一段都与闭区间同胚, 且这些点集在 $\overline{\mathbb{B}}\left(\gamma(t),\frac{1}{2}\right)\cap E$ 中两两不交. 因为 $\gamma(t)\in\overline{\mathbb{B}}\left(\gamma(t),\frac{1}{2}\right)\cap G$, 且 $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)$ 是连通的, 所以一定有 $\gamma\left((t-\varepsilon,t+\varepsilon)\right)\subseteq\overline{\mathbb{B}}\left(\gamma(t),\frac{1}{2}\right)\cap G$. 因此 $\gamma^{-1}(G)$ 是 $[0,1]$ 中的开集, 这就完成了证明. 】 □

定义 1.20.44 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集叫区域.

引理 1.20.45 区域总是道路连通的.

证明 设 D 是连通开集, 对于任意的 $\mathbf{x}_0\in D$, 定义集合

$$U=\{\mathbf{y}\in D\mid \text{存在连续曲线 }\phi:[0,1]\to D,\text{ 使得 }\phi(0)=\mathbf{x}_0,\phi(1)=\mathbf{y}\},$$

以及 $V=D\backslash U$. 对于 $\mathbf{y}\in U$, 取 $r>0$ 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{y},r)\subseteq D$, 则通过连续曲线的拼接可说明 $\mathbb{B}(\mathbf{y},r)\subseteq U$, 因此 U 是开集; 同理可得 V 也是开集. 因为 $\mathbf{x}_0\in U$, 所以 U 不空; 因为 D 连通, 所以必有 $V=\varnothing$, 因此 $D=U$, 这说明 D 道路连通. □

定理 1.20.46 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集是道路连通的.

注 1.20.47 特别地, $\mathbb{R}^n$ 中的开球是道路连通的.$\mathbb{R}^n$ 中的开球 $\mathbb{B}(\mathbf{a},r)$ 是凸集, 是因为对于任意 $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{B}(\mathbf{a},r)$, 以这两点为端点的线段为

$$I_{\mathbf{p},\mathbf{q}}=\{\mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\mid t\in[0,1]\},$$

对于与某个 $t\in[0,1]$ 对应的点 $\mathbf{x}\in I_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|&=\|(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}-(1-t)\mathbf{a}-t\mathbf{a}\|\\&\leqslant\|(1-t)(\mathbf{p}-\mathbf{a})\|+\|t(\mathbf{q}-\mathbf{a})\|\\&<(1-t)r+tr=r.\end{aligned}$$

1.21 函数极限

1.21.1 函数极限

下设 (X,d_X), (Y,d_Y) 是两个度量空间, $E\subseteq X$, $x_0\in E'$, $f:E\to Y$.

例 1.21.1 记 $\mathbb{N}_\infty \coloneqq \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$, 定义 $\mathbb{N}_\infty$ 上的度量为

$$d_\infty(x, y) \coloneqq \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right|, \quad x, y \in \mathbb{N}_\infty,$$

则 $(\mathbb{N}_\infty, d_\infty)$ 构成一个紧致度量空间. 对于 $\mathbb{N}_\infty$ 的任一无穷子集 E (比如 $E = \mathbb{N}$) , $E' = \{\infty\}$. 这对应数列 (或点列) 极限的情形.

例 1.21.2 设 $(X, d_X) = (\mathbb{R}^n, d_X)$, $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}^m, d_Y)$, 其中 d_X, d_Y 是由某些范数诱导的度量, E 是 X 中的区域 (或流形) , $x_0 \in E'$.

定义 1.21.3 (开球版) 设 $A \in Y$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x \in \mathbb{B}_X^\circ(x_0, \delta) \cap E$ (或者等价地, 对于任意满足 $0 < d_X(x, x_0) < \delta$ 的 $x \in E$) , 都有 $f(x) \in \mathbb{B}_Y(A, \varepsilon)$ (或者等价地, $d_Y(f(x), A) < \varepsilon$) , 则称当 x 在 E 中趋向于 x_0 时, $f(x)$ 有极限 A, 记为 $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = A$. 当不需要强调 $x \in E$ 时, 亦可简记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

例 1.21.4 当 $(X, d_x) = (\mathbb{N}_\infty, d_\infty)$ 时, 注意

$$\mathbb{B}_X^\circ(\infty, \delta) \cap E = \{x \in E \mid x > N_\delta\}, \quad N_\delta = \left\lfloor \frac{1}{\delta} - 1 \right\rfloor,$$

所以 "存在 $\delta > 0$ 使得……" 可改为 "存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得……", 这就得到了通常的数列极限的定义.

引理 1.21.5 (1) 若极限 $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x)$ 存在, 则它是唯一的.

(2) 若极限 $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x)$ 存在, 则 f 在 x_0 附近有界.

定义 1.21.6 设 (X, d_X) 是一个度量空间, $x_0 \in X, U \subseteq X$. 若存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathbb{B}(x_0, \delta) \subseteq U$, 则称 U 是 x_0 的一个邻域. 若 $x_0 \notin U$ 且 $U \cup \{x_0\}$ 是 x_0 的邻域, 则称 U 是 x_0 的一个去心邻域.

定义 1.21.7 (邻域版) $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = A \iff$ 对 A 的任意邻域 U, 存在 x_0 的去心邻域 V, 使得 $f(V \cap E) \subseteq U$.

例 1.21.8 函数 $f(\mathbf{p}) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \quad (\mathbf{p} = (x, y) \neq (0, 0))$ 在原点 $(0, 0)$ 处极限不存在.

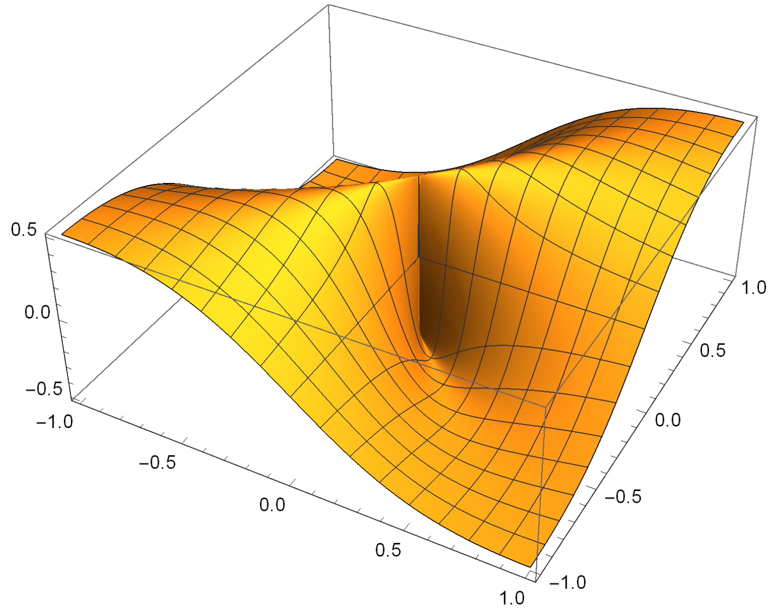

图 1.24: $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2>0)$ 的图像

定理 1.21.9 (复合函数的极限) 设 $(X,d_X),(Y,d_Y),(Z,d_Z)$ 是三个度量空间, $E\subseteq X,D\subseteq Y,g:E\to Y,f:D\to Z$, 且 $g(E)\subseteq D$, 于是可定义 $f\circ g:E\to Z,t\mapsto f(g(t))$. 设 $t_0\in E',x_0\in D',A\in Z$, 且

$$\lim_{E\ni t\to t_0}g(t)=x_0,\quad \lim_{D\ni x\to x_0}f(x)=A.$$

若存在 t_0 的去心邻域 T, 使得 $g(T\cap E)\subseteq D\setminus\{x_0\}$, 则有 $\lim\limits_{E\ni t\to t_0}f(g(t))=A$.

证明 对 A 的任一邻域 U, 存在 x_0 的去心邻域 V 使得 $f(V\cap D)\subseteq U$. 对于 x_0 的邻域 $V\cup\{x_0\}$, 存在 t_0 的去心邻域 W 使得 $g(W\cap E)\subseteq V\cup\{x_0\}$. 取 $S=W\cap T$, 则 S 也是 t_0 的去心邻域, 且有

$$g(S\cap E)=g(W\cap T\cap E)\subseteq g(W\cap E)\cap g(T\cap E)\subseteq(V\cup\{x_0\})\cap(D\setminus\{x_0\})=V\cap D,$$

于是 $f(g(S\cap E))\subseteq f(V\cap D)\cap U$, 所以 $\lim\limits_{E\ni t\to t_0}f(g(t))=A$. □

定理 1.21.10 (Heine 归结原理) $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)$ 存在 $\iff$ 对于任意取值在 $E\setminus\{x_0\}$ 中且极限为 x_0 的点列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty}f(y_k)$ 存在.

证明 $\Rightarrow$: 复合函数的极限.

$\Leftarrow$: 如果对于任意取值在 $E\setminus\{x_0\}$ 中且极限为 x_0 的点列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty}f(y_k)$ 存在, 则这些函数值的极限一定是相等的, 这是因为: 设 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是这样的点列, $\lim\limits_{k\to\infty}f(y_k)=A$,

$\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=B$. 考虑 $\{u_k\}=\{y_0,z_0,y_1,z_1,\cdots\}$, 它也是取值在 $E\backslash\{x_0\}$ 中且极限为 x_0 的点列, 所以极限 $C=\lim\limits_{k\to\infty}\{f(u_k)\}$ 存在. 根据子列定理, $A=C, B=C$, 所以 $A=B$. 回到函数极限, 假设存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对于任意 $\delta>0$, 存在 $y\in\mathbb{B}^\circ(x_0,\delta)\cap E$, 使得 $d_Y(f(y),A)\geqslant\varepsilon_0$. 取 $\delta_k=\dfrac{1}{k}, k=1,2,\cdots$, 则得点列 $y_k\in\mathbb{B}^\circ\left(x_0,\dfrac{1}{k}\right)\cap E$, 显然 $y_k\in E\backslash\{x_0\}$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=x_0$. 但是 $d_Y(f(y_k),A)\geqslant\varepsilon$, 所以不可能有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(y_k)=A$. □

推论 1.21.11 (子列定理) 当 $(X,d_X)=(\mathbb{N}_\infty,d_\infty)$ 时, 上述定理变成: $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=A \iff$ 对于点列 $\{x_k\}$ 的任何子列 $\{x_{k_l}\}$ 有 $\lim\limits_{l\to\infty}x_{k_l}=A$.

定义 1.21.12 设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$, 若任意 K 中的点列都有收敛于 K 中的子列, 则称 K 是列紧的.

定理 1.21.13 列紧 $\iff$ 聚点紧 ($\iff$ 紧 $\iff$ 有界闭) .

证明 $\Rightarrow$: 设 $F\subseteq K$ 是无穷集, 则存在单射 $\mathbb{N}\to F$, 它定义了 K 中的点列 $k\mapsto x_k$. 若 K 列紧, 则有收敛于 K 中的子列 $\{x_{k_l}\}$, 它的极限属于 $F'\cap K$, 所以 K 聚点紧.

$\Leftarrow$: 设 $\{x_k\}$ 是 K 中的点列, 考虑 $F=\{x_k\mid k\in\mathbb{N}\}$. 若 F 有限, 则其中至少有一点被命中无穷多次, 它给出了一个常数收敛子列. 若 F 无限且 K 聚点紧, 则存在 $x_0\in F'\cap K$. 不妨设 $x_0\notin F$, 由聚点定义, 取 $\delta_1=1$, 可得 $x_{k_1}\in\mathbb{B}^\circ(x_0,\delta_1)$; 假设已经取好了 $x_{k_{l-1}}$, 取 $\delta_l=\min\left\{\dfrac{1}{l},d(x_1,x_0),\cdots,d(x_{k_{l-1}},x_0)\right\}$, 于是可得 $x_{k_l}\in\mathbb{B}^\circ(x_0,\delta_l)$; 依此类推, 可得一个子列 $\{x_{k_l}\}$, 它就是 $\{x_k\}$ 的收敛于 $x_0\in K$ 的子列, 所以 K 列紧. □

定义 1.21.14 (1) 设 (X,d_X) 是度量空间, $\{x_k\}$ 是 X 中的点列. 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得只要 $k,l>N$, 就有 $d_X(x_k,x_l)<\varepsilon$, 则称 $\{x_k\}$ 是一个 Cauchy 列.

(2) 若 (X,d_X) 中的每个 Cauchy 列都收敛, 则称 (X,d_X) 是完备的.

定理 1.21.15 (点列版 Cauchy 准则) 设 d 是 $\mathbb{R}^n$ 上由某个范数诱导的度量, 则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 完备.

证明 设 d_∞ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷范数诱导的度量, $C_1,C_2>0$ 满足

$$C_1 d(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant C_2 d(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 是 $(\mathbb{R}^n,d)$ 中的 Cauchy 列, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 使得 $d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 于是对于 $i=1,\cdots,n$, 有

$$\left|x_k^i-x_l^i\right|\leqslant d_\infty(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l)<\varepsilon,$$

因此每个 $\left\{x_k^i\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 都是 Cauchy 列. 由数列版的 Cauchy 准则可知, 存在极限 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k^i=\xi^i$. 由数列极限定义, 对于之前取定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N_i\in\mathbb{N}$, 使得当 $k>N_i$ 时就有 $\left|x_k^i-\xi^i\right|<C_1\varepsilon$.

记 $\boldsymbol{\xi}=\left(\xi^1,\cdots,\xi^n\right)$, 取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_n\}$, 则对任意 $k>N$,

$$d(\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\xi})\leqslant C^{-1}d_\infty(\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\xi})<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\boldsymbol{\xi}$. □

定理 1.21.16 (函数版 Cauchy 准则) 设 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ 是度量空间, (Y,d_Y) 完备, $E\subseteq X,x_0\in E'$, 则 $\lim\limits_{E\ni x\to x_0}f(x)$ 存在当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbb{B}_X^\circ(x_0,\delta)\cap E$, 有 $d_Y(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

定义 1.21.17 设 (X,d_X) 是度量空间, 若函数 $f:X\to X$ 满足存在 $q\in(0,1)$, 使得对于任意 $x_1,x_2\in X$, 都有 $d_X(f(x_1),f(x_2))\leqslant qd_X(x_1,x_2)$, 则称 f 为 X 上的压缩映照.

定理 1.21.18 (压缩映照原理/Banach 不动点原理) 设 f 是完备度量空间 (X,d_X) 上的压缩映照, 则存在唯一的 $x_0\in X$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

证明 ① 存在性: 任取 $x_1\in X$, 定义点列 $x_{k+1}\coloneqq f(x_k)$, 则有

$$d_X(x_k,x_{k+1})=d_X(f(x_{k-1}),f(x_k))\leqslant qd_X(x_{k-1},x_k),$$

所以对任意 $p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}d(x_k,x_{k+p})&\leqslant d(x_k,x_{k+1})+d(x_{k+1},x_{k+2})+\cdots+d(x_{k+p-1},x_{k+p})\\&\leqslant q^{k-1}d(x_1,x_2)+q^kd(x_1,x_2)+\cdots+q^{k+p-2}d(x_1,x_2)\\&\leqslant\frac{q^{k-1}}{1-q}d(x_1,x_2).\end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{\ln\left[\frac{\varepsilon(1-q)}{d(x_1,x_2)}\right]}{\ln q}\right\rfloor+2$, 则当 $k>N$ 时,

$$d(x_k,x_{k+p})\leqslant\frac{q^{k-1}}{1-q}d(x_1,x_2)<\varepsilon.$$

于是对于任意的 $k,l>N$, $d(x_k,x_l)<\varepsilon$, 所以 $\{x_k\}$ 是一个 Cauchy 列. 因为 X 是完备的, 所以存在极限 $x_0=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$.

对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $N'\in\mathbb{N}$ 使得当 $k>N'$ 时有 $d(x_k,x_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则此时

$$d_X(x_0,f(x_0))\leqslant d_X(x_0,x_{k+1})+d_X(x_{k+1},f(x_0))\leqslant(1+q)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以 $d(x_0,f(x_0))=0$, 即 $f(x_0)=x_0$.

② 唯一性: 假设 $f(x_1)=x_1,f(x_2)=x_2$, 则 $d_X(x_1,x_2)\leqslant qd_X(x_1,x_2)$, 由此可得

$$d_X(x_1,x_2)=0,$$

即 $x_1=x_2$. □

1.21.2　连续函数

定义 1.21.19 (开球版) 设 $x_0 \in E$, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x \in \mathbb{B}_X(x_0,\delta) \cap E$ (或等价地, 对于任意满足 $d_X(x,x_0) < \delta$ 的 $x \in E$) , 都有 $f(x) \in \mathbb{B}_Y(f(x_0),\varepsilon)$ (或等价地, $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$) , 则称 f 在 x_0 处连续. 若 f 在 E 的每个点处连续, 则称 f 在 E 上连续. 从 E 到 Y 的连续函数的全体记为 $C(E,Y)$, 若 $Y = \mathbb{R}$, 亦可简记为 $C(E)$.

注 1.21.20 若 x_0 是孤立点, 则 f 在 x_0 处一定连续; 若 x_0 不是孤立点, 则 f 在 x_0 处连续当且仅当 $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义 1.21.21 (邻域版) f 在 $x_0 \in E$ 处连续 $\iff$ 对 $f(x_0)$ 的任意邻域 U, 存在 x_0 的邻域 V, 使得 $f(V \cap E) \subseteq U$.

定义 1.21.22 (开集刻画) f 在 E 上连续 $\iff$ 对于 Y 中的任意开 (或闭) 集 U, $f^{-1}(U)$ 是 E 中的开 (或闭) 集.

推论 1.21.23 设 f 在 E 上连续, $F \subseteq E$, 则 $f|_F$ 在 F 上连续.

定理 1.21.24 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 则下列命题等价:

(1) $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

(2) $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ 开, $f^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^n$ 开.

(3) $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ 闭, $f^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^n$ 闭.

(4) $\forall D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\left(\overline{D}\right) \subseteq \overline{f(D)}$.

证明

引理 设 D, E 为集合, 则

$$f^{-1}(f(D)) \supseteq D, \tag{a}$$

$$f\left(f^{-1}(E)\right) \subseteq E, \tag{b}$$

$$f^{-1}(E^c) = \left(f^{-1}(E)\right)^c. \tag{c}$$

① (1) $\Rightarrow$ (2) : 即用连续函数的 $\varepsilon - \delta$ 语言刻画.

② (2) $\Rightarrow$ (3) : 由 ① 与引理 (c) 可推出.

③ (3) $\Rightarrow$ (4) : 只需证 $\overline{D} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right)$. 而由 (a) 知

$$D \subseteq f^{-1}(f(D)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right),$$

两边取闭包即得

$$\overline{D} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(D)}\right).$$

④ (4) $\Rightarrow$ (1)：用反证法. 若 f 在 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 与点列 $\{\mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a}_n \neq \mathbf{a}$, 使得

$$|f(\mathbf{a}_n) - f(\mathbf{a})| > \varepsilon.$$

取 $D = \{\mathbf{a}_n\}$, 则 $\overline{D} = D \cup \{\mathbf{a}\}$, 从而 $f(\mathbf{a}) \in f(\overline{D})$, 但 $f(\mathbf{a}) \notin \overline{f(D)}$, 与 (4) 矛盾. □

定理 1.21.25 (向量值函数的连续性) 将 f 记为 $x \mapsto \left(f^1(x), \cdots, f^m(x)\right)$ 则

$$f \in C(E, \mathbb{R}^m) \iff f^i \in C(E),\ i = 1, \cdots, m.$$

定理 1.21.26 (连续函数的整体性质) 设 $f: E \to Y$ 连续.

(1) 若 E 紧致, 则 $f(E)$ 也紧致;

(2) 若 E 连通, 则 $f(E)$ 也连通;

(3) 若 E 道路连通, 则 $f(E)$ 也道路连通.

推论 1.21.27 (有界性定理与最值定理) 设 $f: K \to \mathbb{R}$ 连续、K 紧, 则 f 是有界函数, 且能达到最大值和最小值.

推论 1.21.28 (介值定理) 设 $f: D \to \mathbb{R}$ 连续, D 连通. 若 $x_1, x_2 \in D$ 满足 $f(x_1) < f(x_2)$, 则对于任意的 $y \in (f(x_1), f(x_2))$, 存在 $\xi \in D$ 使得 $f(\xi) = y$.

定理 1.21.29 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 任何两个范数都等价.

证明 ① 因为范数等价性具有传递性, 所以只需证明任何范数都和欧氏范数 $\|\cdot\|$ 等价.

② 设 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个范数, 则它可看成 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 上的连续函数.

【② 的证明: 只需证 $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}\| = \|\mathbf{x}_0\|$. 设 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基,

$$M = \sqrt{\|\mathbf{e}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{e}_n\|^2}.$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, 则对于任意满足 $\|\mathbf{h}\|_2 < \delta$ 的 $\mathbf{h}$, 我们有

$$|\|\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leqslant \|\mathbf{h}\| = \left\|\sum_{i=1}^n h^i \mathbf{e}_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |h^i| \|\mathbf{e}_i\| \leqslant M\|\mathbf{h}\|_2 < \varepsilon.$$

所以 $\|\cdot\|$ 是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 上的连续函数.】

③ 由例 1.20.14 可知 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 是等价的, 所以之前基于与 $\|\cdot\|_\infty$ 比较的各结果对于 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 都是成立的, 特别地, $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$ 是紧的.

④ 设 $\|\cdot\|$ 在 S 上的最大、最小值为 $M \geqslant m > 0$, 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (不妨设 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) , 考虑 $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$, 则 $\|\mathbf{y}\|_2 = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|_2}\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, 即 $\mathbf{y} \in S$, 所以

$$m \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant M \iff m\|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant M\|\mathbf{x}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

这就说明 $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. □

定理 1.21.30 (紧压缩映照原理) 设 (X, d_X) 是一个紧致的完备度量空间, $f: X \to X$ 满足对于任意的 $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$, 有

$$d_X(f(x_1), f(x_2)) < d_X(x_1, x_2),$$

则存在唯一的 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明 ① f 连续 (对任意的 $\varepsilon > 0$ 取 $\delta = \varepsilon$) .

② 定义 $g(x) = d_X(x, f(x))$, 则 g 是 X 上的实值连续函数.

【② 的证明: 因为

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= d_X(x, f(x)) - d_X(x_0, f(x_0)) \\ &\leqslant d_X(x, x_0) + d_X(x_0, f(x_0)) + d_X(f(x), f(x_0)) - d_X(x_0, f(x_0)) \\ &= d_X(x, x_0) + d_X(f(x), f(x_0)) \\ &< 2d_X(x, x_0), \end{aligned}$$

且对称地, 有

$$g(x_0) - g(x) < 2d_X(x, x_0),$$

因此 $|g(x) - g(x_0)| < 2d_X(x, x_0)$. 只要取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $d_X(x, x_0) < \delta$ 时, 就有 $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. 故 g 是 X 上的连续函数.】

③ 由 ②, 可设 $m \geqslant 0$ 是 g 的最小值, 且 $g(x_0) = m$, 则必有 $m = 0$, 否则

$$f(x_0) \neq x_0 \implies g(f(x_0)) = d_X(f(f(x_0)), f(x_0)) < d_X(f(x_0), x_0) = g(x_0) = m.$$

这与 m 是最小值矛盾! 因此 $f(x_0) = x_0$.

④ 唯一性与定理 1.21.18 的证明类似. □

定理 1.21.31 若 f 是紧集 K 上的连续函数, 则 f 在 K 上一致连续.

证明 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 f 在 $y \in K$ 上连续, 所以存在 $\delta_y > 0$, 使得

$$f(\mathbb{B}(y, \delta_y) \cap K) \subseteq \mathbb{B}\left(f(y), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由此可得 K 的开覆盖 $\bigcup\limits_{y \in K} \mathbb{B}\left(y, \dfrac{\delta_y}{2}\right)$, 因为 K 是紧的, 所以存在 $y_1, \cdots, y_m \in K$, 使得

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{B}\left(y_i, \frac{\delta_{y_i}}{2}\right).$$

取 $\delta = \min\left\{\dfrac{\delta_{y_i}}{2} \mid i = 1, \cdots, m\right\}$, 对于满足 $d_X(x_1, x_2) < \delta$ 的 $x_1, x_2 \in K$, 若 $x_1 \in \mathbb{B}\left(y_i, \dfrac{\delta_i}{2}\right)$, 则

$$d_X(x_2, y_i) \leqslant d_X(x_2, x_1) + d_X(x_1, y_i) < \delta_{y_i},$$

所以 $x_1, x_2 \in \mathbb{B}(y_i, \delta_{y_i})$, 于是

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d_Y(f(x_1), f(y_i)) + d_Y(f(y_i), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

定义 1.21.32 设 X、Y 是拓扑空间, 若存在双射 $f: X \to Y$ 使得 f 和 f^{-1} 都是连续的, 则称 X 和 Y 同胚.

命题 1.21.33 $f: X \to Y$ 是同胚 $\iff$ f 是连续双射, 并且将开 (或闭) 集映成开 (或闭) 集.

命题 1.21.34 若 X、Y 同胚, 则 X 紧 (或连通, 或道路连通) $\iff$ Y 紧 (或连通, 或道路连通) .

例 1.21.35 $\mathbb{R}$ 与 S^1 不同胚 (考虑紧性) , $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚 (同时挖去一个点及其像点后考虑连通性) , S^1 与 S^2 不同胚 (同时挖去两个点及它们的像点后考虑连通性) .

定理 1.21.36 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$、$Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: X \to Y$ 是连续双射, 若 X 紧, 则 f 是同胚.

证明 根据命题 1.21.33, 只需证明 f 将闭集映成闭集. 设 D 是 X 中的闭集, 因为 X 紧, 紧集的闭子集还是紧的, 所以 D 紧. 因为 f 连续, 连续函数将紧集映成紧集, 所以 $f(D)$ 紧. 因为紧集一定是闭集, 所以 $f(D)$ 闭. □

推论 1.21.37 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 紧, $f: X \to \mathbb{R}^m$ 是连续单射, 则 X 与 $f(X)$ 同胚.

例 1.21.38 环面无理流 (例 1.20.25) 是 $\mathbb{R}$ 到二维环面 T^2 的连续单射, 但 $\mathbb{R}$ 不紧, 它和它的像非常不同胚.

1.22　微分学

1.22.1　微分

设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X), Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范的**有限维**[15] (实) 欧氏空间, D 是 X 中的一个**区域**[16], $f:D\to Y$ 是一个函数. 我们要研究什么叫做 "f 在局部上距离一个线性映射很近" .

定义 1.22.1 设 $\mathbf{x}_0\in D$, 若存在一个线性映射 $A:X\to Y$, 使得

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X}=0,$$

则称 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 线性映射[17] A 叫做 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的导数, 记为 $f'(\mathbf{x}_0)$. 若 f 在 D 的每一点处可微, 则称 f 在 D 上可微.

注 1.22.2 当 $n=m=1$ 时, 上述多维的定义退化为单变量微分学中的定义. 这是因为, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的线性映射恰好是乘以某个实数, 此时即乘以 $f'(x_0)$.

例 1.22.3 ($f'(\mathbf{x}_0)$ 的直观描述) 取 $m=n=2$. 映射 $f:D\to\mathbb{R}^2$ 非线性地扭曲图形, 其导函数描述了这个扭曲的线性部分: f 将圆周映成不规则的卵形线, 而 $f'(\mathbf{x}_0)$ 将圆周映成椭圆; f 将直线映成不规则的卵形线, 而 $f'(\mathbf{x}_0)$ 将直线映成直线.

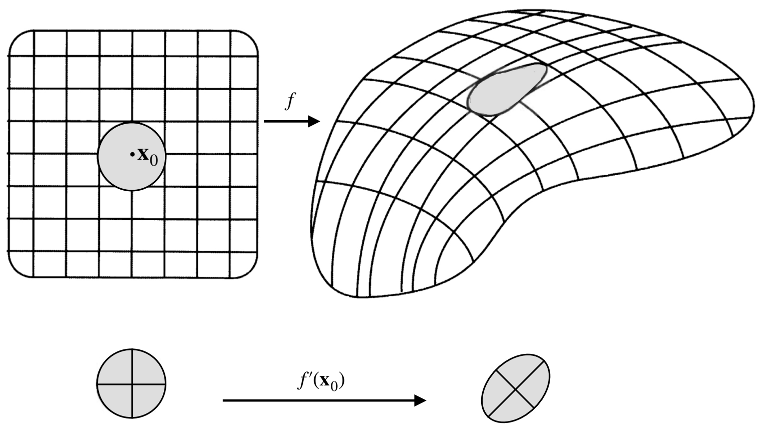

图 1.25: $f'(\mathbf{x}_0)$ 是 f 在 $\mathbf{x}_0$ 点的线性部分

[15] 如引理 1.22.4 (1) 的证明中就用到了基的选取、范数等价性等有限维线性空间具有的性质.

[16] 如果不要求 f 的定义域 D 是区域, 则无法保证 $f'(x_0)$ 的唯一性 (见引理 1.22.4 (4) 的证明) .

[17] $f'(\mathbf{x})$ 是线性映射 $f'(\mathbf{x}):T\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}\to T\mathbb{R}^m_{f(\mathbf{x})}$ (向量空间 $T\mathbb{R}^m_{\mathbf{x}}$ 称为在点 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ 的切空间, 它可以解释为从点 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ 出发的全体向量) .

引理 1.22.4 (1) 若 $A: X \to Y$ 是线性映射, 则存在 $M > 0$, 使得对任意的 $\mathbf{x} \in X$, 有 $\|A(\mathbf{x})\|_Y \leqslant M\|\mathbf{x}\|_X$.

(2) 若 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续.

(3) 函数 f 的可微性与 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 的选取无关.

(4) 导数 $f'(\mathbf{x}_0)$ 是唯一的.

(5) 线性函数 A 在一点处的导数就是它自身.

证明 (1) 设 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 是 X 的一组基. 则

$$\begin{aligned}\|A(\mathbf{x})\|_Y &= \left\|\sum_{i=1}^n x^i A(\mathbf{e}_i)\right\|_Y \leqslant \sum_{i=1}^n |x^i|\|A(\mathbf{e}_i)\|_Y \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|A(\mathbf{e}_i)\|_Y\right)\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant M\|\mathbf{x}\|_X.\end{aligned}$$

(2) 可微 $\iff f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|_X),\ \mathbf{h} \to \mathbf{0}$. 而由 (1) , 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, 则当 $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$ 时, 就有 $\|A(\mathbf{h})\|_Y < \varepsilon$, 也即

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} A(\mathbf{h}) = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

(3) 利用有限维 (实) 线性空间上的范数等价性建立双边不等式.

(4) 设 $A_1, A_2: X \to Y$ 均是线性映射, 且满足

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + A_1(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|_X),\ \mathbf{h} \to \mathbf{0},$$

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + A_2(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|_X),\ \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

设 $B = A_1 - A_2$, 则 $B(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|_X)$, 即

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|B(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X} = \mathbf{0}.$$

对于任意 $\mathbf{h} \in X$, 都有

$$\|B(\mathbf{h})\|_Y = \frac{\|B(t\mathbf{h})\|_Y}{\|t\mathbf{h}\|_X}\|\mathbf{h}\|,$$

令 $t \to 0$, 就得到 $\|B(\mathbf{h})\|_Y = \mathbf{0}$. 由 $\mathbf{h} \in X$ 的任意性, 可知 $A_1 = A_2$[18].

(5) 因为 $A(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = A(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{h})$, 所以

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|A(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - A(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X} = 0,$$

再由 (4) 知 A 在 $\mathbf{x}_0$ 处的导数就是它自身. □

[18]若不要求 D 是区域, 比如取 D 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个平面, 那么 h 只有两个自由度 (被限制在此平面内) , 从而由 $\|B(\mathbf{h})\|_Y = \mathbf{0}$ 不能断定对任意 $\mathbf{x} \in X$, $B(\mathbf{x})$ 在与该平面垂直方向上的分量也为 0, 即 f 的导数可能不唯一.

可微性定义中出现的极限条件还可写成如下比较对称的形式:

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)+o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X)=f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0+o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X)),$$

根据这个观察, 我们可以给出 "微分" 的如下商空间定义:

定义 1.22.5 设 $\mathcal{V}=C(D,Y)$, 对于 $\mathbf{x}_0\in D$, 定义

$$\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}:=\left\{f\in\mathcal{V}\mid\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\right\},\quad\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}:=\left\{f\in\mathcal{V}\mid\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X}=\mathbf{0}\right\},$$

则 $\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}$ 是 $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}$ 的子空间, 于是可定义商空间 $\Omega_{\mathbf{x}_0}:=\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}/\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}$. 微分即如下映射:

$$\mathrm{d}:\mathcal{V}\to\Omega_{\mathbf{x}_0},\quad f\mapsto\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0):=\underbrace{\underbrace{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}_{\text{先将 } f \text{ 映射到 } \mathcal{N}_{\mathbf{x}_0} \text{ 中}}+\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}}_{\text{再自然投影到商空间中的等价类}}.$$

引理 1.22.6 设 Y_1、Y_2 是两个有限维赋范空间, $A:Y_1\to Y_2$ 是一个线性映射, 则如下商空间上的线性映射是良好定义的:

$$\widetilde{A}:\Omega_{\mathbf{x}_0}(D,Y_1)\to\Omega_{\mathbf{x}_0}(D,Y_2),\quad f+\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_1)\mapsto A\circ f+\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_2).$$

证明 ① 若 $f\in\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_1)$, 则 $A\circ f\in\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_2)$.

【① 的证明: 因为 A 是连续函数, 所以 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})=\mathbf{0}_{Y_1}\implies\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}A(f(\mathbf{x}))=\mathbf{0}_{Y_2}$】

② 不依赖于代表元的选取: 若 $f_2-f_1\in\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_1)$, 则 $A(f_2)-A(f_1)\in\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_2)$.

【② 的证明: 记 $h=f_2-f_1\in\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0}(D,Y_1)$. 由引理 1.22.4 (1),

$$\frac{\|A(h(\mathbf{x}))\|_{Y_2}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X}\leqslant M\frac{\|h(\mathbf{x})\|_{Y_1}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X}\to0\quad(\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0).$$

即 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\dfrac{h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X}=\mathbf{0}$.】 □

定理 1.22.7 设 $\mathbf{x}:D\to X$ 为 X 到自身的恒等映射在 D 上的限制, 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微 $\iff$ 存在线性映射 $f'(\mathbf{x}_0):X\to Y$, 使得在 $\Omega_{\mathbf{x}_0}(D,Y)$ 中有

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)=f'(\mathbf{x}_0)(\mathrm{d}\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)).$$

定理 1.22.8 (复合函数的可微性) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$、$Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_Y)$、$Z=(\mathbb{R}^p,\|\cdot\|)$ 是三个有限维实赋范空间, $E\subseteq X$、$D\subseteq Y$ 是两个区域, $g:E\to Y$、$f:D\to Z$ 是两个函数, 且满足 $g(E)\subseteq D$, 于是可定义 $h=f\circ g:E\to Z$. 若 g 在 $\mathbf{x}_0\in E$ 处可微, f 在 $\mathbf{y}_0=g(\mathbf{x}_0)$ 处可微, 则 h 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 且有 $h'(\mathbf{x}_0)=f'(\mathbf{y}_0)\circ g'(\mathbf{x}_0)$.

证明 记 $A = g'(\mathbf{x}_0)$, $B = f'(\mathbf{y}_0)$, 则

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x}), \quad \text{其中} r(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X),$$
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}_0) + B(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + s(\mathbf{y}), \quad \text{其中} s(\mathbf{y}) = o(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_Y).$$

于是有

$$\begin{aligned} f(g(\mathbf{x})) &= f(g(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x})) \\ &= f(g(\mathbf{x}_0)) + (B \circ A)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + B(r(\mathbf{x})) + s(g(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

而由引理 1.22.4 (1),

$$\frac{\|B(r(\mathbf{x}))\|_Z}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \leqslant M_B \frac{\|r(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \to 0 \quad (\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0),$$

$$\begin{aligned} \frac{\|s(g(\mathbf{x}))\|_Z}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} &= \frac{\|s(g(\mathbf{x}))\|_Z}{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|_Y} \cdot \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \\ &= \frac{\|s(g(\mathbf{x}))\|_Z}{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|_Y} \cdot \frac{\|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \\ &\leqslant \frac{\|s(g(\mathbf{x}))\|_Z}{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|_Y} \cdot \left(\frac{\|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} + \frac{\|r(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \right) \\ &\leqslant \frac{\|s(g(\mathbf{x}))\|_Z}{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|_Y} \cdot \left(M_A + \frac{\|r(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \right) \to 0 \quad (\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - B \circ A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_Z}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} = 0.$$

□

引理 1.22.9 设 f、g 是可微函数, 则 $\lambda f + \mu g$ 也可微, 且有 $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

定理 1.22.10 (向量值函数的可微性) 设 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m$ 是 Y 的一组基, 将 $f(\mathbf{x})$ 展开为 $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} f^i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i$, 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 可微 $\iff$ 每个 $f^i: D \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 可微.

证明 记 $p^i : Y \to \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{m} y^k \mathbf{u}_k \mapsto y^i$ 与 $j_i : \mathbb{R} \to Y, y \mapsto y\mathbf{u}_i, i = 1, \cdots, m$, 则它们都是线性映射, 因此可微. 注意到

$$f^i = p^i \circ f, \quad f = \sum_{i=1}^{m} j_i \circ f^i,$$

所以根据复合函数的可微性, f 可微 $\iff$ 每个 f^i 可微. □

根据之前的定义, 如果 f 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 可微, 那么导数 $f'(\mathbf{x}_0)$ 是一个从 X 到 Y 的线性映射, 所以如果用 $\mathcal{L}(X;Y)$ 表示从 X 到 Y 的所有线性映射构成的线性空间, 并且假设 f 在 D 的每个点处可微, 那么导数 f' 就给出了一个从 D 到 $\mathcal{L}(X;Y)$ 的映射.

定义 1.22.11 对于 $A \in \mathcal{L}(X;Y)$, 定义 $\|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} := \sup\{\|A(\mathbf{x})\|_Y \mid \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x}\|_X = 1\}$, 称为 A 的算子范数.

注 1.22.12 线性算子的范数在 $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 的情形下的几何意义: $\mathbb{R}^m$ 中的单位球面在变换 A 的作用下变为某个椭球面, 其中心位于 $\mathbb{R}^n$ 中的零点, 这时 A 的范数就是这个椭球的最大半轴.

当 X、Y 都是有限维 (实) 赋范空间时, $\big(\mathcal{L}(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\big)$ 也是一个有限维 (实) 赋范空间, 于是可以谈论其上的距离、极限和连续性等概念.

定义 1.22.13 设 f 在 D 上可微. 若导数函数 $f' : D \to \mathcal{L}(X;Y)$ 是连续的, 则称 f 在 D 上连续可微.D 上连续可微函数的全体构成的线性空间记为 $C^1(D,Y)$.

1.22.2 偏导数

定义 1.22.14 设 $f : D \to Y$ 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 处可微, 于是 $f'(\mathbf{x}_0)$ 是从 X 到 Y 的线性映射. 对于 $\mathbf{v} \in X$, 向量 $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \in Y$ 叫做 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处沿方向 $\mathbf{v}$ 的方向导数, 记为 $\mathbf{D}_\mathbf{v} f(\mathbf{x}_0)$.

引理 1.22.15

$$\mathbf{D}_\mathbf{v} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

注 1.22.16 考虑 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的情形. 由引理 1.22.15, f 的图像在 $\mathbf{x}_0$ 处的切平面包含了该点在被与 xy 平面垂直的平面截得曲线上的切线全体. 由此从图 1.26 可见该函数在 $\mathbf{0}$ 处不可微, 因为该处不同垂直截面上的切线并不共面.

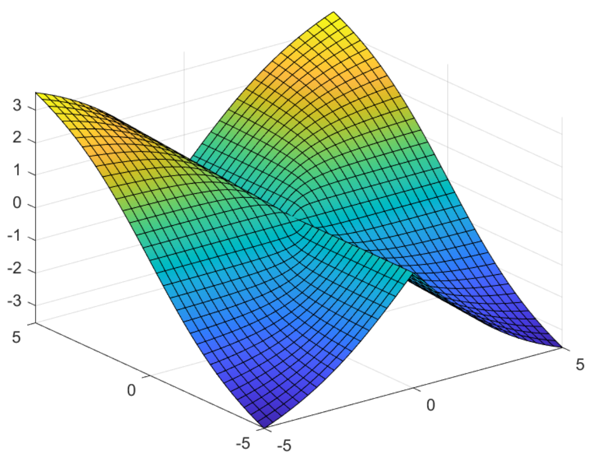

图 1.26: $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的图像

定义 1.22.17 (1) 设 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 是 X 的标准基, 方向导数 $\mathbf{D}_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}_0)$ 叫做 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的第 i 个偏导数, 记为 $\mathbf{D}_i f(\mathbf{x}_0)$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$.

(2) 设 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m$ 是 Y 的标准基, 将 f 写为 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} f^j \mathbf{u}_j$, 则矩阵 $\big(\mathbf{D}_i f^j(\mathbf{x}_0)\big)_{i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m}$ 叫做 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵, 记为 $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$. 将 X、Y 中的向量写为列向量, 则有

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}} f = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{v}} f^1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{\mathbf{v}} f^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 f^1 & \cdots & \mathbf{D}_n f^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_1 f^m & \cdots & \mathbf{D}_n f^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}.$$

定理 1.22.18 (链式法则) 设 X、Y、Z、D、E、f、g 同定理 1.22.8, X、Y、Z 上的坐标为 $x^i(i=1,\cdots,n)$、$y^i(j=1,\cdots,m)$、$z^k(k=1,\cdots,p)$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z^p}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^p}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial z^p}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^p}{\partial y^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

或者写为如下等价形式:

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z^k}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^i}, \quad i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,p.$$

定理 1.22.19 (连续可微判据) $f \in C^1(D,Y) \iff \forall_{i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m} \big(\mathbf{D}_i f^j \in C(D,Y)\big)$.

证明 $\Rightarrow$: 定义线性映射

$$\alpha_j : Y \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}_k \mapsto \delta_{jk}.$$

那么 $\mathbf{D}_i f^j(\mathbf{x}_0) = \alpha_j\left(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i)\right)$. 因此 $f'(\mathbf{x}_0) \in C(D,Y) \implies \mathbf{D}_i f^j \in C(D,Y)$.

$\Leftarrow$: 只需证 $\mathbf{D}_i f^j \in C(D,Y) \implies f$ 可微, 然后由向量值函数的连续性即知 f 连续可微. 由定理 1.22.10, 不妨设 $m=1$ (即 f 是标量函数) . 由引理 1.22.4 (3) , 不妨设 X、Y 上的范数都是欧氏范数. 由 $\mathbf{D}_i f$ 的连续性, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_i > 0$ 使得当 $\|\mathbf{h}\|_2 < \delta_i$ 时, 有

$$|\mathbf{D}_i f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{D}_i f(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad i=1,\cdots,n.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$. 取 X 的一组基 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$, 设

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} h^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k} h^i \mathbf{e}_i,\ k=0,\cdots,n \ \text{(特别地, } \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{v}_n = \mathbf{h}\text{)}\ .$$

则由一元函数的 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0) &= f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_n)-f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_k)-f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_{k-1})\right) \\ &\xlongequal{\exists\theta_k\in(0,1)} \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_{k-1}+\theta_k h^k\mathbf{e}_k)h^k. \end{aligned}$$

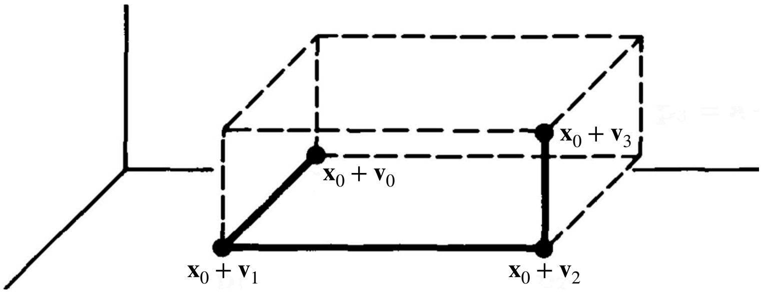

图 1.27: 沿折线路线 ($n=3$ 的情形)

于是

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{D}_k f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_{k-1}+\theta_k h^k\mathbf{e}_k)-\mathbf{D}_k f(\mathbf{x}_0)\right]h^k\right| \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{D}_k f(\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_{k-1}+\theta_k h^k\mathbf{e}_k)-\mathbf{D}_k f(\mathbf{x}_0)\right]^2}\cdot\|\mathbf{h}\|_2. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{v}_{k-1}+\theta_k h^k\mathbf{e}_k\right\|_2 &= \left\|h^1\mathbf{e}_1+\cdots+h^{k-1}\mathbf{e}_{k-1}+\theta_k h^k\mathbf{e}_k\right\|_2 \\ &= \sqrt{(h^1)^2+\cdots+(h^{k-1})^2+\theta_k^2\,(h^k)^2} \\ &\leqslant \sqrt{(h^1)^2+\cdots+(h^k)^2} \\ &= \|\mathbf{h}\|_2<\delta, \end{aligned}$$

所以

$$|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})| < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}\cdot\|\mathbf{h}\|_2=\varepsilon\|\mathbf{h}\|_2.$$

故

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_2}=0,$$

即 f 可微. 进而 f 连续可微. □

1.22.3　齐次函数与 Euler 定理

定义 1.22.20 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集 S 上定义. 若对任意 $\lambda\in\mathbb{R}^n$ 和 S 内的每一个使 $\lambda\mathbf{x}\in S$ 的 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\lambda\mathbf{x})=\lambda^p f(\mathbf{x})$, 则称 f 在 S 上是 p 次齐次的.

定理 1.22.21 (Euler 定理) 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集 S 上的 p 次齐次函数, 且在 $\mathbf{x}\in S$ 处可微, 则

$$\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x})=pf(\mathbf{x}).$$

证明 固定 $\mathbf{x}$, 对等式

$$f(\lambda\mathbf{x})=\lambda^p f(\mathbf{x})$$

关于 λ 求微分, 得到

$$\mathbf{x}\cdot\nabla f(\lambda\mathbf{x})=p\lambda^{p-1}f(\mathbf{x}),$$

令 $\lambda=1$ 即得证. □

注 1.22.22 特别地, 当 f 为零次齐次函数 $(p=0)$ 时, $\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x})=0$.

1.22.4　高阶导数

若 $f\in C^1(D,Y)$, 则 $f'\in C(D,\mathcal{L}(X;Y))$, 于是我们可以进一步问 f' 是否可微或者连续可微的问题. 如果 $f'\in C^1(D,\mathcal{L}(X;Y))$, 那么 $f''\in C(D,\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y)))$, 于是又可进一步问 f'' 的类似问题. 如此继续, 就得到 f 的各高阶导数.

定义 1.22.23 设 $X_1,\cdots,X_m$ 和 Y 都是有限维 (实) 赋范空间, 若一个映射 $A:X_1\times\cdots\times X_m\to Y$ 关于每个自变量都是线性的, 即

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+\beta_i,\cdots,\alpha_m)=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_m)+A(\alpha_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\alpha_m),$$

$$A(\alpha_1,\cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_m)=kA(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_m),$$

则称它为多重线性映射, 所有多重线性映射的全体构成一个线性空间, 记为 $\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)$. 对于一个多重线性映射 $A\in\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)$, 定义它的范数为:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)}:=\sup\left\{\|A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m)\|_Y\mid \mathbf{x}_i\in X_i,\|\mathbf{x}_i\|_{X_i}=1,i=1,\cdots,m\right\},$$

于是 $\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)$ 成为一个赋范空间.

例 1.22.24 线性空间的直积 $X=X_1\times\cdots\times X_m$ 到另一组线性空间的直积 $Y=Y_1\times\cdots\times Y_n$ 的任何线性映射

$$A: X_1\times\cdots\times X_m=X\to Y=Y_1\times\cdots\times Y_n$$

都具有以下形式:

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}=Ax,$$

其中 $A_{ij}: X_j\to Y_i$ 是线性映射. 特别地, 如果 $X_1=X_2=\cdots=X_m=\mathbb{R}$, $Y_1=Y_2=\cdots=Y_n=\mathbb{R}$, 则 $A_{ij}: X_j\to Y_i$ 是线性映射 $\mathbb{R}\ni x\mapsto a_{ij}x\in\mathbb{R}$, 其中每一个映射由一个数 a_{ij} 给出.

引理 1.22.25 (有限维空间上算子范数的存在性) 对于 $A\in\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)$, 存在一个 $M>0$, 使得对于任意的 $\mathbf{x}_i\in X_i(i=1,\cdots,m)$, 有

$$\|A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m)\|_Y\leqslant M\|\mathbf{x}_1\|_{X_1}\cdots\|\mathbf{x}_m\|_{X_m}.$$

证明 设 $\dim X_i=n_i$、$\dim Y=n_0$, $\mathbf{x}_i\in X_i$ 的坐标是 $\left(x_i^1,\cdots,x_i^{n_i}\right)$, $\mathbf{e}_{i,1},\cdots,\mathbf{e}_{i,n_i}$ 是 X_i 的一组基, $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_{n_0}$ 是 Y 的一组基, 则有

$$\begin{aligned}A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m)&=A\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}x_1^{j_1}\mathbf{e}_{1,j_1},\sum_{j_2=1}^{n_2}x_2^{j_2}\mathbf{e}_{2,j_2},\cdots,\sum_{j_m=1}^{n_m}x_m^{j_m}\mathbf{e}_{m,j_m}\right)\\&=\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_m=1}^{n_m}A\left(\mathbf{e}_{1,j_1},\cdots,\mathbf{e}_{m,j_m}\right)x_1^{j_1}\cdots x_m^{j_m}.\end{aligned}$$

再设

$$A\left(\mathbf{e}_{1,j_1},\cdots,\mathbf{e}_{m,j_m}\right)=\sum_{j_0=1}^{n_0}A_{j_1\cdots j_m}^{j_0}\mathbf{u}_{j_0},$$

那么

$$A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m)=\sum_{j_0=1}^{n_0}\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_m=1}^{n_m}A_{j_1\cdots j_m}^{j_0}x_1^{j_1}\cdots x_m^{j_m}\mathbf{u}_{j_0}.$$

所以有

$$\begin{aligned}\|A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m)\|_Y&\leqslant\sum_{j_0=1}^{n_0}\cdots\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A_{j_1\cdots j_m}^{j_0}\right|\cdot\left|x_1^{j_1}\right|\cdots\left|x_m^{j_m}\right|\cdot\|\mathbf{u}_{j_0}\|_Y\\&\leqslant\left(\sum_{j_0=1}^{n_0}\left|A_{j_1\cdots j_m}^{j_0}\right|\|\mathbf{u}_{j_0}\|_Y\right)\|\mathbf{x}_1\|_\infty\cdots\|\mathbf{x}_m\|_\infty\\&\leqslant M\|\mathbf{x}_1\|_{X_1}\cdots\|\mathbf{x}_m\|_{X_m}.\end{aligned}$$

□

对于多重线性映射与迭代线性映射的联系, 我们有

引理 1.22.26 赋范空间[19] $\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)$ 和 $\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2;\cdots;\mathcal{L}(X_m;Y)\cdots))$ 是同构的.

证明 $m=1$ 时结论是平凡的. 对 m 归纳, 设结论对 $m-1$ 成立, 则

$$\mathcal{L}(X_2;\mathcal{L}(X_3;\cdots;\mathcal{L}(X_m;Y)\cdots))\cong\mathcal{L}(X_2,\cdots,X_m;Y),$$

故只需证

$$\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)\cong\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2,\cdots,X_m;Y)).$$

构造映射

$$\begin{aligned}\phi:&\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)\to\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2,\cdots,X_m;Y)),\\ &A\mapsto\phi(A)(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m):=A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m).\end{aligned}$$

容易验证这样的 ϕ 是良好定义的, 且是线性的. 下面只需验证 ϕ 保持范数:

$$\begin{aligned}&\|\phi(A)\|_{\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,\cdots,X_m;Y))}\\ =&\sup\left\{\|\phi(A)(\mathbf{x}_1)\|_{\mathcal{L}(X_2,\cdots,X_m;Y)}\mid \mathbf{x}_1\in X_1,\|\mathbf{x}_1\|_{X_1}=1\right\}\\ =&\sup\left\{\sup\left\{\|\phi(A)(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m)\|_Y\mid \mathbf{x}_i\in X_i,\|\mathbf{x}_i\|_{X_i}=1,i=2,\cdots,m\right\}\mid \mathbf{x}_1\in X_1,\|\mathbf{x}_1\|_{X_1}=1\right\}\\ =&\sup\left\{\|A(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m)\|_Y\mid \mathbf{x}_i\in X_i,\|\mathbf{x}_i\|_{X_i}=1,i=1,\cdots,m\right\}\\ =&\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)}.\end{aligned}$$

这样就证明了

$$\mathcal{L}(X_1,\cdots,X_m;Y)\cong\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2;\cdots;\mathcal{L}(X_m;Y)\cdots)).$$

□

我们记 $\mathcal{L}(X^{\otimes k};Y):=\mathcal{L}(\overbrace{X,\cdots,X}^{k\text{ 个}};Y)$.

定义 1.22.27 (1) 对于 $k=1,2,\cdots$, 若 $f\in C^k(D,Y)$, 则 $f^{(k)}\in C(D,\mathcal{L}(X^{\otimes k};Y))$. 若 $f^{(k)}\in C^1(D,\mathcal{L}(X^{\otimes k};Y))$, 则称 f 在 D 上 $k+1$ 阶连续可导. 若对任意 $k\in\mathbb{N}^*$, 都有 $f\in C^k(D,Y)$, 则称 f 为光滑函数, 记为 $f\in C^\infty(D,Y)$. 所有 D 上 $k+1$ 阶连续可导函数的全体构成的线性空间记为 $C^{k+1}(D,Y)$.

(2) 设 $f\in C^k(D,Y)$, $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 是 X 的基, 则可定义 f 在点 $\mathbf{x}_0\in D$ 处的 k 阶混合偏导数为

$$D_{j_1}\cdots D_{j_k}f(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_k}}(\mathbf{x}_0):=f^{(k)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_{j_1},\cdots,\mathbf{e}_{j_k}),$$

它们都属于 $C(D,Y)$.

[19] 赋范空间的同构要求在保持线性空间结构的同时保持范数.

注 1.22.28 根据引理 1.22.26, 可以把映射 f 在点 $\mathbf{x}$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(\mathbf{x})$ 解释为连续 n 重线性算子空间 $\mathcal{L}(X^{\otimes n};Y)$ 的元素.

定理 1.22.29 (高阶导数的对称性) 设 $f \in C^k(D,Y)$、$\mathbf{x}_0 \in D$, 则 $f^{(k)}(\mathbf{x}_0)$ 是对称的, 即对任意的 $\mathbf{h}_1,\cdots,\mathbf{h}_k \in X$、$\sigma \in S_k$ 有

$$f^{(k)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1,\cdots,\mathbf{h}_k) = f^{(k)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_{\sigma(1)},\cdots,\mathbf{h}_{\sigma(k)}).$$

证明 欲证等式两边是作为 Y 中的向量相等, 而向量相等当且仅当每个分量都相等, 所以不妨取 $Y=\mathbb{R}$. 因为

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1,\cdots,\mathbf{h}_k) &= \left(f^{(k-1)}(\mathbf{x}_0)\right)'(\mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_2,\cdots,\mathbf{h}_k)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f^{(k-1)}(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_2,\cdots,\mathbf{h}_k) - f^{(k-1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_2,\cdots,\mathbf{h}_k)}{t},
\end{aligned}$$

若对 k 归纳, $k=1$ 时结论显然成立. 设 $k-1$ 时结论成立, 则上面等式中靠后的 $k-1$ 个向量是对称的, 只需再证

$$f^{(k)}(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\cdots,\mathbf{h}_k) = f^{(k)}(\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_1,\cdots,\mathbf{h}_k).$$

设 $g=f^{(k-2)}$, 则 $f^{(k)}=g''$, 因此不妨设 $k=2$. 对 $s,t>0$, 设

$$F(s,t) = f(\mathbf{x}_0+s\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2) - f(\mathbf{x}_0+s\mathbf{h}_1) - f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h}_2) + f(\mathbf{x}_0),$$

$$g(s) = f(\mathbf{x}_0+s\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2) - f(\mathbf{x}_0+s\mathbf{h}_1).$$

注意到此时 g 是一元标量函数, 所以

$$F(s,t) = g(s)-g(0) \xlongequal[\exists\xi\in(0,s)]{\text{一元函数的 Lagrange 中值定理}} g'(\xi)s,$$

而根据导数的定义,

$$\begin{aligned}
g'(\xi) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{g(\xi+\varepsilon)-g(\xi)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{f(\mathbf{x}_0+(\xi+\varepsilon)\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)-f(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)}{\varepsilon} - \frac{f(\mathbf{x}_0+(\xi+\varepsilon)\mathbf{h}_1)-f(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{f(\mathbf{x}_0+(\xi+\varepsilon)\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)-f(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)-f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)(\varepsilon\mathbf{h}_1)}{\|\varepsilon\mathbf{h}_1\|}\cdot\|\mathbf{h}_1\|\right.\\
&\quad + \frac{f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)(\varepsilon\mathbf{h}_1)}{\varepsilon} - \frac{f(\mathbf{x}_0+(\xi+\varepsilon)\mathbf{h}_1)-f(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1)-f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1)(\varepsilon\mathbf{h}_1)}{\|\varepsilon\mathbf{h}_1\|}\cdot\|\mathbf{h}_1\|\\
&\quad \left.-\frac{f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1)(\varepsilon\mathbf{h}_1)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{\varepsilon\cdot f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_1)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon\cdot f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_1)}{\varepsilon} + o\left(\|\varepsilon\mathbf{h}_1\|\right)\right]\\
&= f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1+t\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_1) - f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_1).
\end{aligned}$$

再将 $g'(\xi)$ 视为 t 的一元可微函数, 应用 Lagrange 中值定理可得

$$g'(\xi) = f'(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_1) - f'(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1)(\mathbf{h}_1) \xlongequal{\exists \eta\in(0,t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f'(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2)\right)\Big|_{t=\eta} \cdot t(\mathbf{h}_1).$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f'(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2)\right)\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{f'(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + (t+\varepsilon)\mathbf{h}_2) - f'(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2) - f''(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2)(\varepsilon\mathbf{h}_2)}{\|\varepsilon\mathbf{h}_2\|}\cdot\|\mathbf{h}_2\|\right.\\
&\left.+\frac{f''(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2)(\varepsilon\mathbf{h}_2)}{\varepsilon}\right]\\
=&f''(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_2).
\end{aligned}$$

因此

$$F(s,t) = g'(\xi)s = f''(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + \eta\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1)st.$$

重复上述推导过程, 但是先对 t 应用 Lagrange 中值定理, 再对 s 应用 Lagrange 中值定理, 可得

$$F(s,t) = f''(\mathbf{x}_0 + \tilde{\xi}\mathbf{h}_1 + \tilde{\eta}\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)st.$$

从而

$$f''(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{h}_1 + \eta\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = f''(\mathbf{x}_0 + \tilde{\xi}\mathbf{h}_1 + \tilde{\eta}\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2),$$

其中 $\xi \in (0,s), \eta \in (0,t), \tilde{\xi} \in (0,s), \tilde{\eta} \in (0,t)$. 最后令 $s,t \to 0$, 并利用 f'' 在 $\mathbf{x}_0$ 处的连续性可得

$$f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2).$$

□

注 1.22.30 特别地, 若 $f \in C^2(D,Y)$、$\mathbf{x}_0 \in D$, 那么二阶混合导数 $f''(\mathbf{x}_0)$ 是一个对称二次型.

1.22.5　中值定理

¶ Lagrange 中值定理 (标量版)

定义 1.22.31 对于 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, 定义 $I_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \coloneqq \{\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid t \in [0,1]\}$, 称为以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为端点的线段.

定理 1.22.32 设 $f \in C(D,\mathbb{R})$ 可微, $I_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \subseteq D$, 则存在 $\mathbf{c} \in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 使得 $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

证明 设 $g(t)=f(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))$, 则 g 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 并且在 $(0,1)$ 上可导, 于是可对其应用一元标量函数的 Lagrange 中值定理, 得到

$$\begin{aligned}
&g(1)-g(0)\overset{\exists\xi\in(0,1)}{=\!=\!=}g'(\xi)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{g(\xi+\varepsilon)-g(\xi)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{f(\mathbf{a}+(\xi+\varepsilon)(\mathbf{b}-\mathbf{a}))-f(\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a}))-f'(\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(\varepsilon(\mathbf{b}-\mathbf{a}))}{\|\varepsilon(\mathbf{b}-\mathbf{a})\|}\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\right.\\
&\quad\left.+\frac{\varepsilon\cdot f'(\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{\varepsilon}\right]\\
&=f'(\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(\mathbf{b}-\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

设 $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\xi(\mathbf{b}-\mathbf{a})\in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 则有 $f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=f'(\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. □

注 1.22.33 由证明过程可知定理条件可减弱为 f 在 $I^{\circ}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 上可微.

例 1.22.34 (不存在向量版的 Lagrange 中值定理) 考虑 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(t^2,t^3)$, 取 $a=0, b=1$, 则 $f(b)-f(a)=(1,1)$, 但 $f'(c)=(2c,3c^2)$, 所以不可能找到 $c\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

注 1.22.35 可以用一个直观的例子说明不存在向量版的 Lagrange 中值定理. 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的螺线

$$\begin{cases}x=\sin\theta\\ y=\cos\theta\\ z=\theta\end{cases},$$

参数 $t=0$ 与 $t=6\pi$ 对应的点所在直线与 z 轴平行, 但螺线上显然不存在以 $(0,0,1)$ 为切向的点.

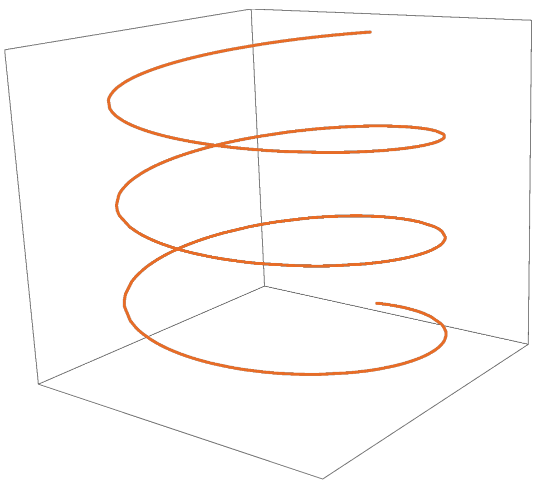

图 1.28: $\mathbb{R}^3$ 中的螺线

在研究多元函数中值问题时，定理 1.22.32 中构造的函数 $g(t)$ 可以被推广. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $f : D \to \mathbb{R}$ 可微. 我们可以取 $r : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 为 D 中联结 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 两点的路径 (即 $r(0) = \mathbf{a}$, $r(1) = \mathbf{b}$) , 并要求 r 是可导的 (区域中任意两点之间存在着光滑道路, 问题 54) . 设 $\varphi = f \circ r$, 则 φ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $\varphi(0) = f(\mathbf{a})$, $\varphi(1) = f(\mathbf{b})$. 于是

$$\varphi(1) - \varphi(0) \xlongequal{\exists \xi \in (0,1)} \varphi'(\xi) \implies f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{J}f\left(r(\xi)\right)\mathbf{J}r(\xi).$$

定理 1.22.32 证明中用到的即 $r(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, 此时 $\mathbf{J}r(t) \equiv \mathbf{b} - \mathbf{a}$. 下面的例 1.22.36 就是考虑联结 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的一般路径.

例 1.22.36 设函数 $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, 我们把形如

$$\left\{\left(x^1, \cdots, x^n\right) \mid f\left(x^1, \cdots, x^n\right) = c\right\} \ (c \text{ 为常数})$$

的集合称为 f 的一个水平集. 图 1.29 就画出了函数 $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$ 的等值线.

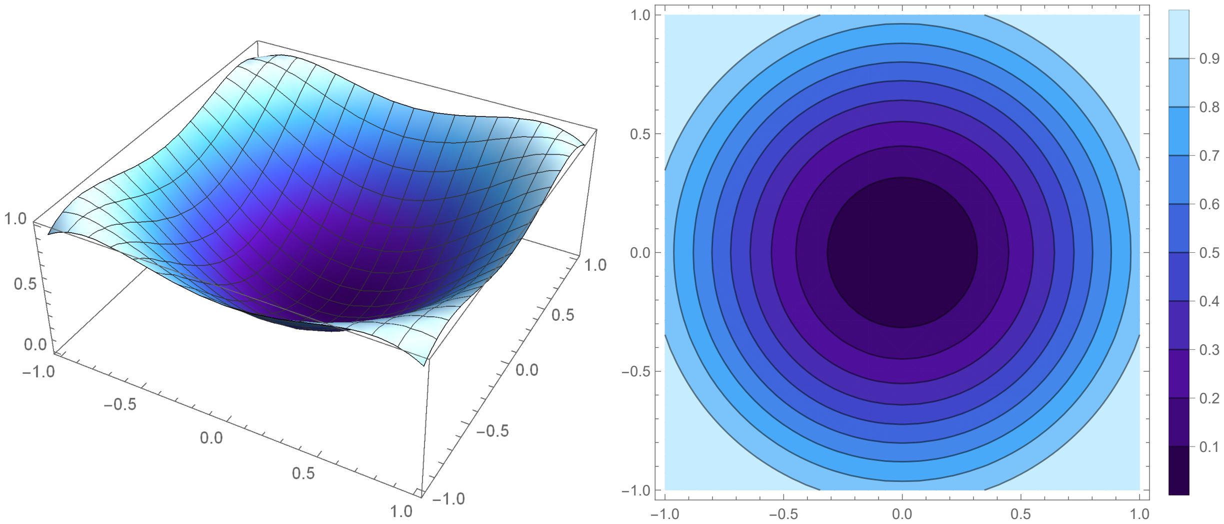

图 1.29: 函数 $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$ 的等值线

现设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 落在 f 的同一水平集上 (即 $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$) . 取 $r : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 为任意一条联结 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 两点的路径, 且要求 r 可导. 则由上面的说明可得存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $\mathbf{J}f(r(\xi))\mathbf{J}r(\xi) = 0$. 也即 f 在点 $\eta := r(\xi)$ 处的梯度与曲线 $r(t)$ 在 $t = \xi$ 处的切向量正交:

$$(\nabla f)_\eta \perp r'(\xi).$$

用几何语言描述即: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $r(\xi)$ 所在等高线与曲线 $r(t)$ 相切于点 $r(\xi)$.

我们可用把例 1.22.36 总结为如下定理:

定理 1.22.37 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 可微, 则 f 在一点处的梯度要么是 $\mathbf{0}$, 要么与 f 在该点的水平集正交.

可以通过打比方理解定理 1.22.37: 如果有两位登山者位于山的同一位置, 其中一位想要沿着坡度最陡的方向前进, 另一位想要沿着等高线前进, 那么这两人出发的方向彼此垂直.

定理 1.22.38 设函数 f 在区域 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 可微. 如果

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x})=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x^n}(\mathbf{x})=0,\quad \forall\mathbf{x}\in D,$$

那么 f 在 D 上恒等于一个常数.

证明 ① 若 D 是凸区域, 任取 $\mathbf{c}\in D$, 由定理 1.22.32, 对任意 $\mathbf{x}\in D$,

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{c})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\mathbf{c}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{c})\right)\left(x^i-c^i\right)=f(\mathbf{c}).$$

② 再考虑 D 是一般区域的情形. 对任意 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in D$, 用一条连续曲线 γ 联结 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 两点:

$$\gamma:[0,1]\to D,\quad \gamma(0)=\mathbf{a},\gamma(1)=\mathbf{b}.$$

记

$$\sigma\coloneqq\sup\left\{t\mid t\in[0,1],f(\gamma(t))=f(\mathbf{a})\right\}.$$

由函数 $f\circ\gamma$ 的连续性, 应有 $f(\gamma(\sigma))=f(\mathbf{a})$. 因为 $\gamma(\sigma)\in D$, D 是开集, 所以存在 $\eta>0$, 使得 $\mathbb{B}\left(\gamma(\sigma),\eta\right)\subseteq D$. 对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{B}\left(\gamma(\sigma),\eta\right)$, 因为开球是凸区域, 所以由 ① 得

$$f(\mathbf{x})=f(\gamma(\sigma))=f(\mathbf{a}).$$

假如 $\sigma\neq1$, 则存在充分小的 $\tau>0$, 使得

$$\sigma+\tau\in[0,1],\quad \gamma(\sigma+\tau)\in\mathbb{B}\left(\gamma(\sigma),\eta\right).$$

因此应有 $f\left(\gamma(\sigma+\tau)\right)=f(\mathbf{a})$. 但这与 σ 的定义矛盾. 故只能有 $\sigma=1$, 也即 $f(\mathbf{b})=f(\mathbf{a})$.

【② 也可由反证法完成. 若 f 在 D 上不是常数, 则存在 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in D$, $f(\mathbf{a})\neq f(\mathbf{b})$. 记

$$A\coloneqq\left\{\mathbf{x}\in D\mid f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})\right\},\quad B\coloneqq\left\{\mathbf{x}\in D\mid f(\mathbf{x})\neq f(\mathbf{a})\right\}.$$

则 $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $D=A\sqcup B$. 对任意 $\mathbf{x}\in A\subseteq D$, 由 D 是开集, 存在 $r>0$, 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\subseteq D$. 而 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)$ 是凸区域, 由 ① 知 f 在其上为常数, 从而 $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})$. 这说明 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\subseteq A$, A 是开集. 类似地, 可证 B 是开集. 于是 D 可表示成两个非空不交开集的并, 由引理 1.20.40 (1) 知这等价于 D 不连通, 但这与 D 是区域矛盾.】 □

例 1.22.39 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $f: D \to \mathbb{R}$. 如果

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D,$$

那么 $f(\mathbf{x}) = F\left(x^1 + \cdots + x^n\right)$.

证明 作换元

$$\begin{cases} u^1 = x^1 + & x^2 + & \cdots + & x^n, \\ u^2 = & x^2, & & \\ \vdots & & \ddots & \\ u^n = & & & x^n, \end{cases}$$

注意此换元对应的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ (空白部分元素均为 0) 是可逆矩阵, 于是 $x^1, \cdots, x^n$ 可用 $u^1, \cdots, u^n$ 唯一表出. 设 $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^1} = \frac{\partial g}{\partial u^1}, \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial u^1} + \frac{\partial g}{\partial u^2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^n} = \frac{\partial g}{\partial u^1} + \frac{\partial g}{\partial u^n}. \end{aligned}$$

由已知可得 $\dfrac{\partial g}{\partial u^2} = \cdots = \dfrac{\partial g}{\partial u^n} = 0$. 故 g 为只与 u^1 有关的函数, $g(\mathbf{u}) = F(u^1) = F\left(x^1 + \cdots + x^n\right)$.

$\square$

¶ 有限增量定理 (欧氏空间版)

设 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ 是 (实) 赋范空间, $Y = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ 是欧氏空间, D 是 X 中的区域.

定理 1.22.40 设 $f \in C(D, Y)$ 可微, $I_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \subseteq D$, 则存在 $\mathbf{c} \in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 使得

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|_2 \leqslant \|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_X.$$

证明 记 $\mathbf{u} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$, 不妨设 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. 考虑标量函数 $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x}) \rangle$. 由于取内积是对 $f(\mathbf{x})$ 各分量做线性组合, 所以 $g(\mathbf{x})$ 是可微函数. 根据标量版 Lagrange 中值定理, 存在 $\mathbf{c} \in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 使

得 $g(\mathbf{b})-g(\mathbf{a})=g'(\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. 而

$$g(\mathbf{b})-g(\mathbf{a})=\langle\mathbf{u},f(\mathbf{b})\rangle-\langle\mathbf{u},f(\mathbf{a})\rangle=\langle\mathbf{u},f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\|\mathbf{u}\|_2^2,$$

于是有

$$\|\mathbf{u}\|_2^2=|g'(\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a})|=|\langle\mathbf{u},f'(\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a})\rangle|\leqslant\|\mathbf{u}\|_2\cdot\|f'(\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a})\|_2\leqslant\|\mathbf{u}\|_2\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X,$$

两边约去 $\|\mathbf{u}\|_2$ 即得所求. □

¶ 有限增量定理 (赋范空间版)

设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$、$Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_Y)$ 是 (实) 赋范空间, D 是 X 中的区域.

定理 1.22.41 设 $f\in C(D,Y)$ 可微, $I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\subseteq D$, 记 $I^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}}=I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\setminus\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, 则

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\|_Y\leqslant\sup_{\mathbf{c}\in I^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\}\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X.$$

证明 事实上, 若能证明

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\|_Y\leqslant\sup_{\mathbf{c}\in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\}\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X,$$

那么任取 $\mathbf{a}',\mathbf{b}'\in I^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 成立

$$\|f(\mathbf{b}')-f(\mathbf{a}')\|_Y\leqslant\sup_{\mathbf{c}\in I_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\}\cdot\|\mathbf{b}'-\mathbf{a}'\|_X,$$

因为 $I_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}\subseteq I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 所以

$$\sup_{\mathbf{c}\in I_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\}\leqslant\sup_{\mathbf{c}\in I^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\},$$

$$\|f(\mathbf{b}')-f(\mathbf{a}')\|_Y\leqslant\sup_{\mathbf{c}\in I^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\}\cdot\|\mathbf{b}'-\mathbf{a}'\|_X.$$

再令 $\mathbf{a}'\to\mathbf{a},\mathbf{b}'\to\mathbf{b}$, 由 f 及范数的连续性可得

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\|_Y\leqslant\sup_{\mathbf{c}\in I^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\}\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X.$$

设

$$M=\sup_{\mathbf{c}\in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}\left\{\|f'(\mathbf{c})\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\right\},$$

只需证对任意 $\varepsilon>0$,

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\|_Y\leqslant(M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X.\qquad(*)$$

引理 对任意 $\mathbf{x} \in I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 如果不等式 $(*)$ 对 $I_{\mathbf{a},\mathbf{x}}$ 和 $I_{\mathbf{x},\mathbf{b}}$ 成立, 则它对 $I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 也成立.

【引理的证明:

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\|_Y &\leqslant \|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{x})\|_Y+\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})\|_Y\\ &\leqslant (M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{x}\|_X+(M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_X\\ &=(M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X.\end{aligned}$$

其中最后的等式用到了 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}$ 共线.】

现假设不等式 $(*)$ 不成立, 即存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\|_Y>(M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|_X.$$

将 $I_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 二分, 那么不等式 $(*)$ 对至少一个子区间不成立, 设它为 I_1. 继续二分, 可得紧集套 $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$, 于是存在唯一的 $\mathbf{c}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}I_k$. 因为 f 在 $\mathbf{c}$ 处可微, 所以存在 $\delta>0$, 使得对于任意的 $\mathbf{h}\in\mathbb{B}_X(\mathbf{0},\delta)$, 都有

$$\|f(\mathbf{c}+\mathbf{h})-f(\mathbf{c})-f'(\mathbf{c})(\mathbf{h})\|_Y\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{h}\|_X.$$

根据区间套的取法, 存在 $I_k\subseteq\mathbb{B}_X(\mathbf{c},\delta)$. 由假设, 不等式 $(*)$ 对 I_k 不成立. 再利用引理, 若设 I_k 的端点为 $\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_k$, 则不等式 $(*)$ 至少对 $I_{\mathbf{a}_k,\mathbf{c}}$ 与 $I_{\mathbf{c},\mathbf{b}_k}$ 中的一个不成立. 不妨设不等式 $(*)$ 在 $I_{\mathbf{a}_k,\mathbf{c}}$ 上不成立, 记 $\mathbf{a}_k=\mathbf{c}+\mathbf{h}$, 则

$$\|f(\mathbf{c}+\mathbf{h})-f(\mathbf{c})\|_Y>(M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{h}\|_X.$$

于是

$$\begin{aligned}(M+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{h}\|_X &<\|f(\mathbf{c}+\mathbf{h})-f(\mathbf{c})\|_Y\\ &\leqslant\|f(\mathbf{c}+\mathbf{h})-f(\mathbf{c})-f'(\mathbf{c})(\mathbf{h})\|_Y+\|f'(\mathbf{c})(\mathbf{h})\|_Y\\ &\leqslant\left(M+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\|\mathbf{h}\|_X,\end{aligned}$$

矛盾! 因此假设错误, 定理得证. □

例 1.22.42 (立方体的形变) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$, D 是 X 中的区域, $f\in C^1(D,X)$, $\mathbf{x}_0\in D$. 若 $f'(\mathbf{x}_0)=\mathrm{Id}$, 则根据 f' 的连续性, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$, 都有

$$\|f'(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{L}(X;X)}=\|f'(\mathbf{x})-\mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}(X;X)}<\varepsilon,$$

于是

$$\|f'(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(X;X)} \leqslant \|f'(\mathbf{x}) - \mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}(X;X)} + \|\mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}(X;X)} < 1 + \varepsilon.$$

根据定理 1.22.41, 对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$, 我们有

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_\infty \leqslant (1+\varepsilon)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty,$$

由此可得立方体 $\mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$ 和它的形变 $f\left(\mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta)\right)$ 的体积之间的比较关系:

$$\mathrm{Vol}(f\left(\mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta)\right)) \leqslant (1+\varepsilon)^n \cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{B}(\mathbf{x}_0, \delta)).$$

注 1.22.43 在后面重积分换元法的证明中, 上述估计是关键的一步.

1.22.6 Taylor 公式

引理 1.22.44 设 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$、$Y = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ 是两个赋范空间, D 是 X 中的区域, $f \in C(D, Y)$ 具有 k 阶导数, $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{h} \in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0+\mathbf{h}} \subseteq D$. 定义函数 $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$, 则 g 也 k 阶可导, 且有

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})(\overbrace{\mathbf{h}, \cdots, \mathbf{h}}^{k\text{个}}) =: f^{(k)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes k}.$$

证明 对 k 用归纳法, $k=0$ 的情形平凡地成立, 假设 $f \in C^l(D, Y)$ $(l < k)$ 时结论成立, 考虑 $l+1$ 的情形. 因为 $f^{(l)}$ 可导, 所以根据引理 1.22.15 有如下方向导数:

$$f^{(l+1)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})(\mathbf{h}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(l+1)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + \varepsilon\mathbf{h}) - f^{(l)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})}{\varepsilon},$$

将上式左右两边作用在 $\mathbf{h}^{\otimes l}$ 上, 并利用多重线性映射的连续性可得

$$f^{(l+1)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})(\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes l} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(l+1)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + \varepsilon\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes l} - f^{(l)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes l}}{\varepsilon},$$

此即

$$f^{(l+1)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes l} = g^{(l+1)}(t).$$

□

¶ Taylor 公式 (标量版)

定理 1.22.45 (Lagrange 余项) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$ 是赋范空间, D 是 X 中的区域, $f\in C(D,\mathbb{R})$ 具有 $k+1$ 阶导数, $\mathbf{x}_0\in D$, $\mathbf{h}\in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0+\mathbf{h}}\subseteq D$, 则存在一个 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}f^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l}+R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0),$$

$$R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0)=\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes(k+1)}.$$

定理 1.22.46 (积分余项) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$ 是赋范空间, D 是 X 中的区域, $f\in C^{k+1}(D,\mathbb{R})$, $\mathbf{x}_0\in D$, $\mathbf{h}\in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0+\mathbf{h}}\subseteq D$, 则定理 1.22.45 中的余项又可写为

$$R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0)=\frac{1}{k!}\int_0^1 f^{(k+1)}(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes(k+1)}(1-t)^k\,\mathrm{d}t.$$

¶ Taylor 公式 (向量版)

定理 1.22.47 (Peano 余项) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$、$Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间, D 是 X 中的区域, $\mathbf{x}_0\in D$, $\mathbf{h}\in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0+\mathbf{h}}\subseteq D$. 若 $f\in C(D,Y)$ 具有 k 阶导数且 $f^{(k)}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续, 则当 $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ 时, 有

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}f^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l}+o\left(\|\mathbf{h}\|_X^k\right).$$

证明 对 f 的每个分量 f^i, 利用 $k-1$ 阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$\begin{aligned}f^i(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})&\xlongequal{\theta\in(0,1)}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{l!}\left(f^i\right)^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l}+\frac{1}{k!}\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes k}\\&=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\left(f^i\right)^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l}+\frac{1}{k!}\left[\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h})-\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}_0)\right]\mathbf{h}^{\otimes k}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{k!}\left[\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h})-\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}_0)\right]\mathbf{h}^{\otimes k}\right\|&\leqslant\frac{1}{k!}\left\|\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h})-\left(f^i\right)^{(k)}(\mathbf{x}_0)\right\|_{\mathcal{L}(X^{\otimes k};Y)}\cdot\|\mathbf{h}\|_X^k\\&=o\left(\|\mathbf{h}\|_X^k\right).\end{aligned}$$

由此推出 Peano 余项. □

定理 1.22.48 (欧氏空间情形) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$ 是赋范空间, D 是 X 中的区域, $\mathbf{x}_0\in D$, $\mathbf{h}\in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0+\mathbf{h}}\subseteq D$, $Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_2)$ 是一个有限维欧氏空间. 若 $f\in C(D,Y)$ 具有 $k+1$ 阶导数, 则存在一个 $\theta\in(0,1)$, 使得 Taylor 公式的余项满足

$$\|R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0)\|_Y\leqslant\frac{1}{(k+1)!}\left\|f^{(k+1)}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h})\right\|_{\mathcal{L}(X^{\otimes(k+1)};Y)}\|\mathbf{h}\|_X^{k+1}.$$

定理 1.22.49 (赋范空间情形) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$、$Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间, D 是 X 中的区域, $\mathbf{x}_0\in D$, $\mathbf{h}\in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0+\mathbf{h}}\subseteq D$. 若 $f\in C^k(D,Y)$ 且 f 在 $I^\circ_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}+\mathbf{h}}$ 上存在 $k+1$ 阶导数, 记

$$M=\sup\left\{\left\|f^{(k+1)}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h})\right\|_{\mathcal{L}(X^{\otimes(k+1)};Y)}\mid\theta\in(0,1)\right\},$$

则 Taylor 公式的余项满足

$$\|R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0)\|_Y\leqslant\frac{1}{(k+1)!}M\cdot\|\mathbf{h}\|_X^{k+1}.$$

证明 对 k 归纳, 当 $k=0$ 时, 这就是定理 1.22.41. 假设 $k=l-1$ 时结论成立, 考虑 $k=l$ 的情形. 引入辅助函数 $g:[0,1]\to Y$,

$$g(t)=f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h})-\left(f(\mathbf{x}_0)+f'(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{h})+\cdots+\frac{1}{l!}f^{(l)}(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{h})^{\otimes l}\right),$$

它的导数为 (利用导数是线性映射可将 t 提至前面) :

$$\begin{aligned}g'(t)&=f'(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h})(\mathbf{h})-\left(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})+tf''(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes 2}+\cdots+\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}f^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l}\right)\\&=f'(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h})(\mathbf{h})-\left(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})+f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})(t\mathbf{h})+\cdots+\frac{1}{(l-1)!}f^{(l)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})(t\mathbf{h})^{\otimes(l-1)}\right).\end{aligned}$$

对函数 $g_1(t)=f'(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h})(\mathbf{h})$ 应用 $l-1$ 阶的 Taylor 公式, 得到

$$g_1(t)=g_1(0)+g_1'(0)t+\cdots+\frac{1}{(l-1)!}g_1^{(l-1)}(0)t^{l-1}+R_{l-1}(t;g_1,0),$$

此即

$$f'(\mathbf{x}_0+t\mathbf{h})(\mathbf{h})=f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})+f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})(\mathbf{h})t+\cdots+\frac{1}{(l-1)!}f^{(l)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})(\mathbf{h}^{\otimes(l-1)})t^{l-1}+R_{l-1}(t;g_1,0).$$

因此由归纳假设,

$$\left\|g'(t)\right\|_Y=\|R_{l-1}(t;g_1,0)\|_Y\leqslant\frac{1}{l!}M'\cdot t^l,$$

其中

$$M'=\sup\left\{\left\|f^{(l+1)}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h})\mathbf{h}^{\otimes(l+1)}\right\|_Y\mid\theta\in(0,1)\right\}\leqslant M\cdot\|\mathbf{h}\|_X^{l+1}.$$

所以

$$\left\|g'(t)\right\|_Y\leqslant\frac{t^l}{l!}M\cdot\|\mathbf{h}\|_X^{l+1}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\|g(1)\|_Y = \|g(1)-g(0)\|_Y &= \left\| \sum_{i=1}^N g\left(\frac{i}{N}\right) - g\left(\frac{i-1}{N}\right) \right\|_Y \leqslant \sum_{k=1}^N \left\| g\left(\frac{i}{N}\right) - g\left(\frac{i-1}{N}\right) \right\|_Y \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \sup_{\theta_i\in(0,1)} \left\{ \left\| g'\left(\frac{i-1+\theta_i}{N}\right) \right\|_Y \right\} \cdot \frac{1}{N} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \frac{1}{l!} M \cdot \|\mathbf{h}\|_X^{l+1} \left(\frac{i}{N}\right)^l \cdot \frac{1}{N} \\
&= \frac{M\cdot \|\mathbf{h}\|_X^{l+1}}{l!} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i}{N}\right)^l \cdot \frac{1}{N} \\
&\to \frac{M\cdot \|\mathbf{h}\|_X^{l+1}}{l!} \cdot \frac{1}{l+1} \quad (N\to\infty).
\end{aligned}$$

于是

$$\|R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0)\|_Y = \|g(1)\|_Y \leqslant \frac{1}{(l+1)!} M \cdot \|\mathbf{h}\|_X^{l+1}.$$

□

例 1.22.50 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$、$Y=(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间, D 是 X 中的区域, $\mathbf{x}_0\in D$, $\mathbf{h}\in X$ 满足 $I_{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0+\mathbf{h}}\subseteq D$. 若 $f\in C^\infty(D,Y)$, 且 $\left\|f^{(k)}(\mathbf{x})\right\|_{\mathcal{L}(X^{\otimes k};Y)}$ 有一个与 k 和 $\mathbf{x}$ 都无关的上界, 那么当 $k\to\infty$ 时显然有 $\|R_k(\mathbf{x};f,\mathbf{x}_0)\|_Y\to 0$, 于是可得多元 Taylor 级数:

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{l!} f^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l}.$$

设 $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 为 X 的一组基. 注意到

$$\begin{aligned}
f^{(l)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes l} &= f^{(l)}(\mathbf{x}_0)\left(\sum_{i_1=1}^n h^{i_1}\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\sum_{i_l=1}^n h^{i_l}\mathbf{e}_{i_l}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_l=1}^n h^{i_1}\cdots h^{i_l} f^{(l)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_{i_1},\cdots,\mathbf{e}_{i_l}) \\
&= \sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_l=1}^n h^{i_1}\cdots h^{i_l}\mathbf{D}_{i_1}\cdots\mathbf{D}_{i_l} f(\mathbf{x}_0) \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^n h^{i_1}\mathbf{D}_{i_1}\right)\cdots\left(\sum_{i_l=1}^n h^{i_l}\mathbf{D}_{i_l}\right) f(\mathbf{x}_0) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n h^i\mathbf{D}_i\right)^l f(\mathbf{x}_0) \\
&= \mathbf{D}_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}_0).
\end{aligned}$$

所以上式又可写为

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{i=1}^{n}h^i\mathbf{D}_i\right)^l f(\mathbf{x}_0)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}h^i\mathbf{D}_i\right\}f(\mathbf{x}_0).$$

1.22.7　极值问题

引理 1.22.51 (Fermat 引理) 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$ 是有限维赋范空间, D 是 X 中的区域, $f:D\to\mathbb{R}$ 可微. 若 $\mathbf{x}_0\in D$ 是 f 的局部极值点, 则 $f'(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$.

定义 1.22.52 使 $f'(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$ 的点叫做 f 的临界点 (或驻点) . 若二次型 $f''(\mathbf{x}_0)$ 是非退化的, 则称 $\mathbf{x}_0$ 为非退化的.

定理 1.22.53 设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的非退化临界点, 则它是 f 的极小值 (或极大值) 点 $\iff$ 二次型 $f''(\mathbf{x}_0)$ 是正定 (或负定) 的. (不定 $\Longrightarrow$ 不是极值点, 半正定 (或半负定) $\Longrightarrow$ 退化临界点) .

定理 1.22.54 设 $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_X)$ 是有限维赋范空间, D 是 X 中的区域, $\mathbf{x}_0\in D$, $f\in C^{k-1}(D,\mathbb{R})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处 k 阶可微, 并且满足 $f^{(i)}(\mathbf{x}_0)=0\ (i=1,\cdots,k-1)$, $f^{(k)}(\mathbf{x}_0)\neq 0$.

(1) 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的极值点, 则 k 是偶数, 且 k 次型 $f^{(k)}(\mathbf{x}_0)$ 是半定的;

(2) 设 $S=\left\{f^{(k)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^{\otimes k}\mid\|\mathbf{h}\|_X=1\right\}$、$M=\max(S)$、$m=\min(S)$. 若 $m>0$, 则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的极小值点; 若 $M<0$, 则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的极大值点; 若 $Mm<0$, 则 $\mathbf{x}_0$ 不是 f 的极值点; 若 k 次型 $f^{(k)}(\mathbf{x}_0)$ 半定, 则需要用其他方法判断.

¶ 运用 Lagrange 乘数法求解条件极值

定理 1.22.55 考察目标函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_{m+p})$, 它的变元满足约束条件

$$g_i(x)=g_i(x_1,\cdots,x_{m+p})=0,\quad (i=1,\cdots,p).$$

以上各函数均连续可微足够多次, 且函数 $g_i(x)\ (i=1,\cdots,p)$ 满足正则条件:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m+p}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_{m+p}}\end{bmatrix}=p.$$

【由正则条件, 以上矩阵存在 p 阶可逆子矩阵, 因此可在必要时适当改变编号, 从而假定在涉及的点邻近满足 $\dfrac{\partial(g_1,\cdots,g_p)}{\partial(x_{m+1},\cdots,x_{m+p})}\neq 0$.】若 $f(x)$ 在上述约束条件下在点 $a=(a_1,\cdots,a_{m+p})$ 达到极值, 那么存在 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$, 使得 (a,λ) 是辅助函数

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r g_r(x)$$

的临界点, 也即 a 和 λ 满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\displaystyle\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\dfrac{\partial g_r}{\partial x_k}(a)=0, & k=1,\cdots,m+p;\\ g_r(a)=0, & r=1,\cdots,p.\end{cases}$$

注 1.22.56 如果不要求正则条件, 即使 $f(x)$ 在约束条件下能取得极值, 也可能不存在满足定理 1.22.55 中方程组的 a 和 λ, 这时就应该在使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m+p}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_{m+p}}\end{bmatrix}<p$$

的点中求极值点 (在确定有极值点的前提下) , 如下面的例 1.22.57.

例 1.22.57 求坐标原点 $(0,0)$ 到曲线 $(x-1)^3-y^2=0$ 的最短距离.

证明 记 $g(x)=(x-1)^3-y^2$, 点 $P(x,y)$ 为曲线 $g(x,y)=0$ 上的点. 原点到点 P 的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}$. 要使 d 最小, 只要 x^2+y^2 最小. 引入 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left[(x-1)^3-y^2\right].$$

方程组

$$\begin{cases}L_x=2x+3\lambda(x-1)^2=0,\\ L_y=2y-2\lambda y=0,\\ L_\lambda=(x-1)^3-y^2=0\end{cases}$$

无解. 这是因为由第二个方程得 $y=0$ 或 $\lambda=1$. 若 $y=0$, 由第三个方程得 $x=1$, 但这不满足第一个方程; 若 $\lambda=1$, 则第一个方程无解. 但坐标原点 $(0,0)$ 到曲线 $(x-1)^3-y^2=0$ 的最短距离必然存在, 所以根据注 1.22.56 可知在极值点处有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}<1 \iff \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}=0.$$

于是可列出方程组

$$\begin{cases}g_x(x,y)=3(x-1)^2=0,\\ g_y(x,y)=-2y=0,\\ g(x,y)=(x-1)^3-y^2=0.\end{cases}$$

解得唯一极值点 $(x,y)=(1,0)$. 故所求最短距离 $d_{\min}=d(1,0)=1$. □

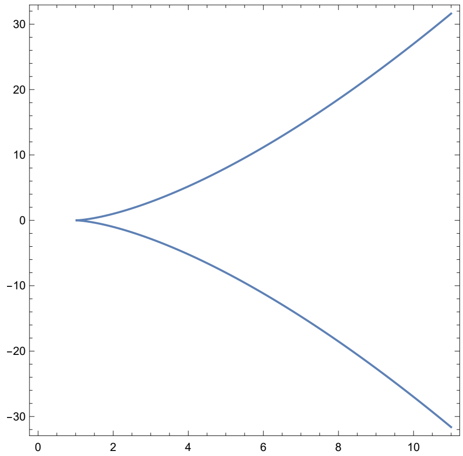

图 1.30: 例 1.22.57 中曲线 $(x-1)^3-y^2=0$ 以 $(0,0)$ 为奇点

定理 1.22.58 设目标函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_{m+p})$ 及其满足的约束条件

$$g_i(x)=g_i(x_1,\cdots,x_{m+p})=0,\quad (i=1,\cdots,p)$$

中的各函数至少是二阶连续可微的, 设 $a=(a_1,\cdots,a_{m+p})$ 和 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ 满足必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\displaystyle\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\dfrac{\partial g_r}{\partial x_k}(a)=0, & k=1,\cdots,m+p;\\ g_r(a)=0, & r=1,\cdots,p.\end{cases}$$

并记

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r g_r(x).$$

如果 F 在 (a,λ) 处的 Hesse 方阵 $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(a,\lambda)\right]_{k,l=1}^{m+p}$ 是正定的 (负定的), 那么目标函数在条件约束下于 a 点取得严格的极小值 (严格的极大值).

注 1.22.59 与无条件极值不同, 当 (a,λ) 是辅助函数 $F(x,\lambda)$ 的临界点, 但在这点方阵 $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(a,\lambda)\right]_{k,l=1}^{m+p}$ 是不定的时, 并不能得出 “f 不取得条件极值” 的结论, 因为当考虑

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m+p}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(a,\lambda)h_kh_l+o\left(\|h\|^2\right)$$

一式时, 我们要求 a 与 $a+h$ 均位于满足所给约束条件的点集中, 所以不定方阵仍可能在该点集上表现出 “正 (负) 定性” (如例 1.22.60).

例 1.22.60 考察目标函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$$

和约束条件

$$g(x,y,z)=z=0.$$

我们作出辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+\lambda z.$$

显然 $(x,y,z,\lambda)=(0,0,0,0)$ 是 F 的临界点, 在这点处 F 的 Hesse 方阵 $\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -2\end{bmatrix}$ 是不定的. 但目标函数 f 显然在 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 处取得约束极小值. 这是因为对任意 $(x,y)\neq(0,0)$, 有

$$\begin{bmatrix}x & y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 0\end{bmatrix}=2x^2+2y^2>0,$$

即此 Hesse 方阵对满足 $z=0$ 的向量 (x,y,z) 仍表现出“正定性”.

在尝试用 Lagrange 乘数法求解条件极值时, 通常容易确定定理 1.22.58 中必要条件的方程组, 但一般而言实际解这个方程组并不简单. 我们经常使用一些特殊手段直接从方程组得出 f 的极值, 而非先求出使 f 取到这些极值的特定点, 如下面的例 1.22.61.

例 1.22.61 一个以原点为中心的二次曲面的方程为

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=1.$$

求其各个半轴的长.

解 用 (x_1,x_2,x_3) 代替 (x,y,z), 并引入二次型

$$q(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}A & D & E\\ D & B & F\\ E & F & C\end{bmatrix}}_{\text{记为 }(a_{ij})}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. 原问题等价于求 $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 的极值, 使之服从约束 $g(\mathbf{x}) = 0$, 其中 $g(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - 1$. 引入 Lagrange 乘数并考虑向量方程

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{因为 } \nabla g = \nabla q)\ .$$

因为 f 与 q 都是二次齐次函数, 由齐次函数的 Euler 定理 (定理 1.22.21) 可得

$$0 = \mathbf{x} \cdot (\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla q(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{x} \cdot \nabla q(\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x}) + 2\lambda q(\mathbf{x}).$$

因为在曲面 $q(\mathbf{x}) = 1$ 上, 我们得到 $\lambda = -f(\mathbf{x})$. 因为本问题中 $f(\mathbf{x}) \neq 0$, 所以就得到

$$\frac{1}{f(\mathbf{x})} \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

记 $t = \dfrac{1}{f(\mathbf{x})}$, 便可由向量方程导出下面三个方程:

$$\begin{cases} (a_{11} - t)x_1 + a12x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - t)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - t)x_3 = 0. \end{cases}$$

因为 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 不可能是此方程的解, 欲使此齐次线性方程组有非零解, 就要求系数矩阵行列式为零:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{vmatrix} = 0.$$

因为 $q(\mathbf{x})$ 是对称且正定的二次型, 所以二次型的一般理论保证该方程的三个根 t_1, t_2, t_3 都是实的且正的. 这个二次曲面的三个半轴长分别为 $\dfrac{1}{\sqrt{t_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{t_2}}, \dfrac{1}{\sqrt{t_3}}$. □

1.22.8 隐函数定理

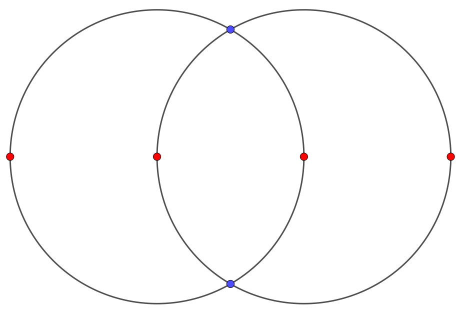

图 1.31: 隐式曲线的图形

隐式曲线可以是非常复杂的. 就如图 1.31 中的曲线, 将它置于通常的 xOy 坐标系下, 问在这条隐式曲线 (记为 $F(x,y)=0$, 其中 F 是连续可微的) 上, 哪些点满足 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$. 这也就是求满足 $(\nabla F)_{(x,y)}=0$ 即法向与 y 轴垂直的点. 我们首先会想到图 1.31 中的 4 个红点, 但实际上 2 个蓝点也满足. 这可以解释为在这两个点处切线不存在, 从而法向也不存在, 因此对应的梯度只能是零向量, 而零向量自然满足要求. 我们可以通过计算验证: 不妨设该隐式曲线由

$$F(x,y)=\left[(x+1)^2+y^2-4\right]\left[(x-1)^2+y^2-4\right]=0$$

给出. 于是

$$(\nabla F)_{(x,y)}=\left(4x^3-20x+4xy^2,4y^3-12y+4x^2y\right),$$

代入蓝点坐标 $\left(0,\pm\sqrt{3}\right)$ 可得它们的梯度均为零向量. 然而, 上述分析只是确定了**一定满足** $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$ 的点, 并不能判断曲线上其余点是否满足. 事实上, 图 1.31 所表示的隐式曲线可以使每点的梯度都是零向量, 若已知它的一种隐函数表示为 $F(x,y)=\widetilde{F}(x,y)=0$, 那么改用 $F(x,y)=\left(\widetilde{F}(x,y)\right)^2=0$ 表示仍对应同一条曲线, 但这时对曲线上的任意点 (x,y), 都有

$$(\nabla F)_{(x,y)}=\left(2\widetilde{F}(x,y)\cdot\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x},2\widetilde{F}(x,y)\cdot\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial y}\right)=(0,0).$$

定理 1.22.62 设函数 $F(x,y)$ 在包含 (x_0,y_0) 的一个开集 Ω 上连续可微, 并且满足条件

$$F(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0,$$

则存在以 (x_0,y_0) 为中心的开方块

$$D\times E\subseteq\Omega$$

$$\left(D=(x_0-\delta,x_0+\delta),\ E=(y_0-\eta,y_0+\eta)\right),$$

使得:

(1) 对任何一个 $x\in D$, 恰好存在唯一一个 $y\in E$, 满足方程 $F(x,y)=0$. 也即方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个从 D 到 E 的函数 $y=f(x)$.

(2) $f\in C^1(D)$, 其导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}.$$

推论 1.22.63 在定理 1.22.62 中, 如果函数 $F(x,y)$ 在开集 Ω 上是 r 阶连续可微的, 那么由

$$F(x,y)=0,\quad x\in D,\ y\in E$$

确定的函数 $y=f(x)$ 在开区间 D 上也是 r 阶连续可微的.

注 1.22.64 定理 1.22.62 条件中的 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 并非能表成函数 $y = f(x)$ 的必要条件，如图 1.32 中红点附近也可以确定函数 $y = f(x)$.

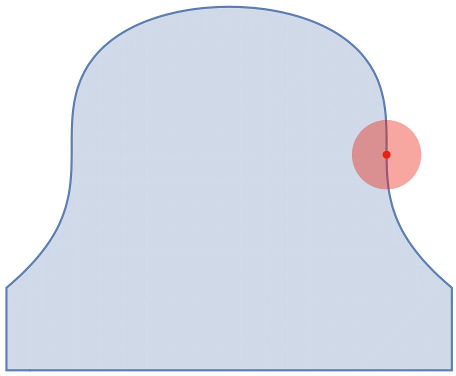

图 1.32: 这条隐式曲线在 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ 的点附近也可以确定函数 $y = f(x)$

定理 1.22.65 设 $m+1$ 元函数 $F\left(x^1, \cdots, x^m, y\right)$ 在包含 $\left(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0\right)$ 的一个开集 Ω 上连续可微，并且满足条件

$$F\left(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0\right) \neq 0,$$

则存在以 $\left(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0\right)$ 为中心的一个开方块

$$D \times E \subseteq \Omega$$

$$\left(D = \left(x_0^1 - \delta, x_0^1 + \delta\right) \times \cdots \times \left(x_0^m - \delta, x_0^m + \delta\right), E = \left(y_0 - \eta, y_0 + \eta\right)\right),$$

使得:

(1) 对任何一点 $\left(x^1, \cdots, x^m\right) \in D$, 恰好存在唯一一个 $y \in E$, 满足方程 $F\left(x^1, \cdots, x^m, y\right) = 0$. 也即方程 $F\left(x^1, \cdots, x^m, y\right) = 0$ 确定了一个从 D 到 E 的函数 $y = f\left(x^1, \cdots, x^m\right)$.

(2) $f \in C^1(D)$, 其各阶偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}\left(x^1, \cdots, x^m, y\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x^1, \cdots, x^m, y\right)}.$$

推论 1.22.66 在定理 1.22.65 中，如果函数 F 在开集 Ω 上 r 阶连续可微，那么由

$$F\left(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0\right) = 0, \quad \left(x^1, \cdots, x^m\right) \in D, \ y \in E$$

确定的函数 $y = f\left(x^1, \cdots, x^m\right)$ 在开方块 D 上也是 r 阶连续可微的.

定理 1.22.67 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ 中的一个开集, $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ 是一个连续可微的向量值函数, $(x_0, y_0) \in \Omega$. 如果

$$F(x_0, y_0) = \mathbf{0}, \quad \det\left(\mathbf{D}_y F(x_0, y_0)\right) \neq 0,$$

那么存在以 (x_0, y_0) 为中心的开方块

$$D \times E \subseteq \Omega$$
$$\left(D = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| < \delta\}, E = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|y - y_0\| < \eta\}\right),$$

使得:

(1) 对任何一个 $x \in D$, 恰好存在唯一一个 $y \in E$, 满足方程 $F(x, y) = 0$. 也即方程 $F(x, y) = 0$ 定义了一个从 D 到 E 的隐函数 $y = f(x)$.

(2) $f \in C^1(D)$, 其微分可以表示为

$$\mathbf{D} f(x) = -\left(\mathbf{D}_y F(x, f(x))\right)^{-1} \mathbf{D}_x F(x, f(x)).$$

证明 定义线性映射

$$\varPhi : \Omega \to \mathbb{R}^p, \quad \varPhi(x, y) = y - \left(\mathbf{D}_y F(x_0, y_0)\right)^{-1} F(x, y).$$

则

$$\mathbf{D}_y \varPhi(x, y) = I_p - \left(\mathbf{D}_y F(x_0, y_0)\right)^{-1} \mathbf{D}_y F(x, y).$$

因为 (x_0, y_0) 是开集 Ω 中的点, 且在这点有

$$\mathbf{D}_y \varPhi(x_0, y_0) = I_p - I_p = O \ \text{(零线性映射)},$$
$$\det\left(\mathbf{D}_y F(x_0, y_0)\right) \neq 0,$$

所以对于任意取定的 $\alpha \in (0, 1)$, 存在 $\eta > 0$, 使得只要

$$\|x - x_0\| \leqslant \eta, \quad \|y - y_0\| \leqslant \eta,$$

就有

$$\begin{cases} (x, y) \in \Omega, \\ \|\mathbf{D}_y \varPhi(x, y)\| < \alpha < 1, \\ \det\left(\mathbf{D}_y F(x, y)\right) \neq 0. \end{cases}$$

记

$$E \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|y - y_0\| < \eta\}, \quad \overline{E} \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|y - y_0\| \leqslant \eta\}.$$

因为 $\varPhi(x_0, y_0) = y_0$, 所以存在 $\delta \in (0, \eta)$, 使得只要

$$x \in D \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| < \delta\},$$

就有

$$\|\varPhi(x, y_0) - y_0\| < (1 - \alpha)\eta.$$

对于任意 (暂时取定) 的 $x \in D$, 考虑线性映射

$$\varPhi(x, \cdot\,) : \overline{E} \to \mathbb{R}^p.$$

对任意 $z \in \overline{E}$, 有

$$\begin{aligned}
\|\varPhi(x, z) - y_0\| &\leqslant \|\varPhi(x, z) - \varPhi(x, y_0)\| + \|\varPhi(x, y_0) - y_0\| \\
&\leqslant \|\mathbf{D}_y \varPhi(x, \xi)\| \cdot \|z - y_0\| + \|\varPhi(x, y_0) - y_0\| \\
&< \alpha\eta + (1 - \alpha)\eta = \eta.
\end{aligned}$$

由此可见, 对任意 $z \in \overline{E}$ 都有 $\varPhi(x, z) \in E$. 于是 $\varPhi(x, \cdot\,)$ 实际上是从 $\overline{E}$ 到 E 的一个映射:

$$\varPhi(x, \cdot\,) : \overline{E} \to E \subseteq \overline{E}.$$

我们通过赋予集合 $\overline{E}$ 由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量使其成为一个完备度量空间. 在这空间中, 我们有

$$\|\varPhi(x, z') - \varPhi(x, z'')\| \leqslant \|\mathbf{D}_y \varPhi(x, \xi')\| \cdot \|z' - z''\| \leqslant \alpha \|z' - z'\|, \quad \forall z', z'' \in \overline{E}.$$

由 $\alpha \in (0, 1)$ 知 $\varPhi(x, \cdot\,)$ 是 $\overline{E}$ 上的压缩映照. 根据压缩映照原理 (定理 1.21.18) , 存在唯一的 $y \in \overline{E}$, 使得 $y = \varPhi(x, y)$. 由前述可知, 实际上有 $y \in E$. 这样就证明了对任意 $x \in D$, 存在唯一一个 $y \in E$, 使得 $y = \varPhi(x, y)$, 也即 $F(x, y) = \mathbf{0}$.

把由此确定的从 D 到 E 的函数记为 $y = f(x)$. 因为

$$f(x) \equiv \varPhi(x, f(x)), \quad \forall x \in D,$$

所以只要 $x, x + h \in D$, 就有

$$\begin{aligned}
\|f(x + h) - f(x)\| &= \|\varPhi(x + h, f(x + h)) - \varPhi(x, f(x))\| \\
&\leqslant \|\varPhi(x + h), f(x + h) - \varPhi(x + h, f(x))\| + \|\varPhi(x + h, f(x)) - \varPhi(x, f(x))\| \\
&\leqslant \alpha \|f(x + h) - f(x)\| + \|\mathbf{D}_x \varPhi(x + \theta h, f(x))\| \cdot \|h\| \\
&\leqslant \alpha \|f(x + h) - f(x)\| + \beta \|h\|.
\end{aligned}$$

其中

$$\theta \in (0,1), \quad \beta = \sup_{(x,y)\in\overline{D}\times\overline{E}} \{\mathbf{D}_x \varPhi(x,y)\}$$

$$\left(\overline{D} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| \leqslant \delta\}\right).$$

我们得到

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}\|h\|, \quad \forall x, x+h \in D.$$

这就证明了函数 f 的连续性. 我们取

$$\gamma \coloneqq \max\left\{\frac{\beta}{1-\alpha}, 1\right\} \geqslant 1,$$

于是

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \gamma\|h\|, \quad \forall x, x+h \in D.$$

因为 $F(x,y)$ 在 Ω 中可微, 所以对取定的 $(x,y) \in \Omega$ 和任意给定的 $\varepsilon > 0$, 只要增量 (h,k) 的范数 $\|(h,k)\|$ 充分小, 就有

$$\|F(x+h, y+k) - F(x,y) - \mathbf{D}_x F(x,y)h - \mathbf{D}_y F(x,y)k\| < \varepsilon\|(h,k)\|.$$

取 $x \in D, y = f(x) \in E$, 并令 $k \coloneqq f(x+h) - f(x)$. 则对足够小的 h 有

$$\|k\| = \|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \gamma\|h\|,$$

$$\|(h,k)\|_\infty \coloneqq \max\{\|h\|, \|k\|\} \leqslant \gamma\|h\|.$$

于是, 只要 $\|h\|$ 足够小, 就有

$$\|F(x+h, y+k) - F(x,y) - \mathbf{D}_x F(x,y)h - \mathbf{D}_y F(x,y)k\| < \varepsilon\|(h,k)\| \leqslant \varepsilon\gamma\|h\|.$$

又因为

$$F(x+h, f(x)+k) = \mathbf{0}, \quad F(x, f(x)) = \mathbf{0},$$

所以上面的不等式可化简为

$$\|\mathbf{D}_x F(x, f(x))h + \mathbf{D}_y F(x, f(x))h\| < \varepsilon\gamma\|h\|.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h) - f(x) + (\mathbf{D}_y F(x, f(x)))^{-1}\,\mathbf{D}_x F(x, f(x))h\| \\
=&\|k + (\mathbf{D}_y F(x, f(x)))^{-1}\,\mathbf{D}_x F(x, f(x))h\| \\
=&\|\,(\mathbf{D}_y F(x, f(x)))^{-1} \cdot (\mathbf{D}_y F(x, f(x))k + \mathbf{D}_x F(x, f(x))h)\,\| \\
\leqslant&\|\,(\mathbf{D}_y F(x, f(x)))^{-1}\,\| \cdot \|\mathbf{D}_y F(x, f(x))k + \mathbf{D}_x F(x, f(x))h\| \\
<&\rho\varepsilon\gamma\|h\|,
\end{aligned}$$

其中

$$\rho := \| (\mathbf{D}_y F(x, f(x)))^{-1} \|.$$

这就证明了 f 在任意 $x \in D$ 的可微性, 且得到

$$\mathbf{D}f(x) = -(\mathbf{D}_y F(x, f(x)))^{-1} \mathbf{D}_x F(x, f(x)).$$

而从这个表示式也可看出 $\mathbf{D}f(x)$ 的连续性. □

推论 1.22.68 在定理 1.22.67 中, 如果 F 是 r 阶连续可微的 $(r \geqslant 1)$, 那么由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $f: D \to E \subseteq \mathbb{R}^p$ 也是 r 阶连续可微的.

1.22.9　逆映射定理

定义 1.22.69 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是一个 C^r 映射, $a \in \Omega$. 如果存在包含点 a 的开集 U 和包含点 $b = f(a)$ 的开集 V 使得 f 限制在 U 上是从 U 到 V 的一个 C^r 同胚, 那么就说 f 在 a 点是局部 C^r 同胚.[20]

定理 1.22.70 (局部逆映射定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是一个连续可微映射, $a \in \Omega$. 如果 $\det(\mathbf{D}f(a)) \neq 0$, 那么 f 在 a 点是局部微分同胚.

推论 1.22.71 在定理 1.22.70 中, 如果 f 是 r 阶连续可微的 $(r \geqslant 1)$, 那么局部逆映射 $g = (f|_U)^{-1}$ 也是 r 阶连续可微的, 即 f 在 a 点是一个局部 C^r 同胚.

引理 1.22.72 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是一个连续可微映射. 如果

$$\det(\mathbf{D}f(x)) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

那么 f 把 Ω 的任何开子集 G 仍映成 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.[21]

定理 1.22.73 (全局逆映射定理) 设 G 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 而 $f: G \to \mathbb{R}^m$ 是一个 r 阶连续可微的映射 $(r \geqslant 1)$. 如果

(1) f 是单射;

(2) $\det(\mathbf{D}f(x)) \neq 0, \forall x \in G$,

那么 f 是从开集 G 到开集 $f(G)$ 的一个 C^r 微分同胚.

---

[20]我们把 (局部) C^0 同胚简单地叫作 (局部) 同胚, 把 (局部) C^1 同胚叫作 (局部) 微分同胚, 有时也把 $r > 1$ 的情形的 (局部) C^r 同胚叫作 (局部) C^r 微分同胚.

[21]若映射 f 把开集仍映成开集, 则称 f 是一个开映射.

注 1.22.74 定理 1.22.73 中的条件 (1) 并不能从条件 (2) 推得, 我们有以下两个反例.

例 1.22.75 (反例 1) 对于映射

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}\begin{bmatrix}\cos\left(ye^{-x}\right)\\\sin\left(ye^{-x}\right)\end{bmatrix},$$

我们有

$$\mathbf{D}f(x,y)=\begin{bmatrix}\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos\left(ye^{-x}\right)+e^{-x}y\sin\left(ye^{-x}\right)\right] & -\sqrt{2}e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(ye^{-x}\right)\\ \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}\sin\left(ye^{-x}\right)-e^{-x}y\cos\left(ye^{-x}\right)\right] & \sqrt{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(ye^{-x}\right)\end{bmatrix}.$$

计算可得 $\det(\mathbf{D}f(x,y))\equiv 1\neq 0$, 满足定理 1.22.73 中的条件 (2) . 但 f 不是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的双射, 因为当 x 固定时, f 的取值随 y 周期性变化.

例 1.22.76 (反例 2) 对于映射

$$f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\quad (x,y)\mapsto\left(x^2-y^2,2xy\right),$$

我们有

$$\mathbf{D}f(x,y)=\begin{bmatrix}2x & -2y\\2y & 2x\end{bmatrix}.$$

计算可得 $\det(\mathbf{D}f(x,y))=4\left(x^2+y^2\right)>0$, 满足定理 1.22.73 中的条件 (2) . 但 f 不是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的双射, 因为对于 $(x,y)\neq(0,0)$, 我们有

$$(-x,-y)\neq(x,y)\quad 但\quad f(-x,-y)=f(x,y).$$

【构造此反例的背景: 考虑映射

$$\varphi:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}\backslash\{0\},\quad z\mapsto z^2,$$

把 $\mathbb{C}$ 中的点 $z=x+iy$ 等同于 $\mathbb{R}^2$ 中的点 (x,y).】

1.23　$\mathbb{R}^3$ 中的微分几何

1.23.1　曲线的切线

下面考虑的都是正则 (光滑) 曲线 (定义见定义 1.10.9) .

¶ 参数曲线

定理 1.23.1 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的一条正则曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in J \ \ (J \text{ 为区间}), \\ z = z(t), \end{cases}$$

设 P_0 是曲线上一点, 其向径为 $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, 则曲线在点 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

¶ 显式曲线

显式表示的曲线

$$y = y(x),\ z = z(x), \quad x \in I,$$

可看作以 x 为参数的参数曲线. 于是曲线在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\begin{cases} y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0), \\ z = z(x_0) + z'(x_0)(x - x_0). \end{cases}$$

¶ 隐式曲线

考虑隐式曲线

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

其中 F 和 G 都是连续可微函数, 并且

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix} = 2.$$

那么在该曲线的每点附近, 总可以解出某两个变元作为第三个变元的函数, 把曲线方程写成显式形式, 进而写出曲线方程. 当然, 也可以考察所给的曲线隐式方程组在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 邻近的一个参数解

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta), \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0).$$

这样的参数解一定存在, 因为显式解就提供了一种参数解. 于是

$$\begin{cases} F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \\ G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

在 $t = t_0$ 处微分上述恒等式, 就得到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} x'(t_0) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} y'(t_0) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} z'(t_0) = 0, \\ \\ \left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_{P_0} x'(t_0) + \left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)_{P_0} y'(t_0) + \left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right)_{P_0} z'(t_0) = 0. \end{cases}$$

引入 Nabla 算子[22]

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

可以将上式改写为

$$\begin{cases} (\nabla F)_{P_0} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0, \\ (\nabla G)_{P_0} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \end{cases}$$

同时也可知曲线在点 P_0 处的切向量平行于 $(\nabla F)_{P_0} \times (\nabla G)_{P_0}$.

1.23.2　曲面的切平面

下面考虑的都是正则曲面.

¶ 参数曲面

定理 1.23.2 设 $\mathbb{R}^3$ 中一块参数曲面

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \Delta,$$

---

[22]Nabla 算子 ∇ 作用于一个可微的数值函数 $F(x, y, z)$ 会产生一个向量

$$(\nabla F)_{P_0} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}.$$

其中 Δ 是参数曲面上的一个开区域. 设 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 都是 Δ 中的连续可微函数, 且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2.$$

设 P_0 是该曲面上一点, 其坐标为

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)).$$

则该曲面在点 P_0 的切平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

¶ 显式曲面

显式表示的连续可微曲面

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

可看作以 (x, y) 为参数的参数曲面. 于是曲面在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

¶ 隐式曲面

考虑隐式曲面 $F(x, y, z) = 0$, F 是连续可微函数, 且

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \neq 0.$$

在曲面上任取点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 考察曲面上经过这点的任意一条连续可微的参数曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in J, \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0).$$

我们有恒等式

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

将其对 t 微分, 就得到

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0.$$

因此任何一条这样的曲线在点 P_0 的切线都正交于向量 $(\nabla F)_{P_0}$. 故曲面在点 P_0 的切平面方程为

$$\text{向量形式: } (\nabla F)_{P_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

或

$$\text{坐标形式: } (F_x)_{P_0}(x - x_0) + (F_y)_{P_0}(y - y_0) + (F_z)_{P_0}(z - z_0) = 0.$$

1.23.3　曲线的曲率

引理 1.23.3 对于可导的向量值函数 $\mathbf{r}_1(t)$ 和 $\mathbf{r}_2(t)$, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1(t)}{\mathrm{d}t}, \mathbf{r}_2(t)\right\rangle + \left\langle \mathbf{r}_1(t), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2(t)}{\mathrm{d}t}\right\rangle.$$

引理 1.23.4 向量值函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in J$ 保持定长 $\iff$ $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$, $\forall t \in J$.

引理 1.23.5 设 $\mathbf{r}(t)$ 是单位长向量, 则 $\mathbf{r}'(t)$ 在与 $\mathbf{r}(t)$ 正交的方向上, 它的模 $\|\mathbf{r}'(t)\|$ 表示向量 $\mathbf{r}(t)$ 转动的角度相对于参数 t 的变化率.

定义 1.23.6 把切向量 $\mathbf{T}(s)$ 相对于弧长 s 的转动速率 $\|\dot{\mathbf{T}}(s)\| = \|\ddot{\mathbf{r}}(s)\|$ 称为曲线在给定点的曲率, 记作 $k(s)$. 曲率 $k(s)$ 的倒数 $\rho(s) = \dfrac{1}{k(s)}$ 称为曲率半径.

1.23.4　Frenet 标架与曲线的挠率

定义 1.23.7 曲线上曲率等于 0 的点被称为平直点. 在一段不含平直点的曲线上可以定义

$$\mathbf{N}(s) \coloneqq \frac{\dot{\mathbf{T}}(s)}{\|\dot{\mathbf{T}}(s)\|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{\|\ddot{\mathbf{r}}(s)\|}.$$

这是正交于 $\mathbf{T}(s)$ 的一个单位向量, 称为曲线在给定点的主法线向量. 再做出第三个向量

$$\mathbf{B}(s) \coloneqq \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

这称为曲线在给定点的副法线向量. 在曲线上的给定点, 由 $\mathbf{T}(s)$ 与 $\mathbf{N}(s)$ 决定的平面称为曲线在这点的密切平面; 由 $\mathbf{T}(s)$ 与 $\mathbf{B}(s)$ 决定的平面称为曲线在这点的从切平面; 由 $\mathbf{N}(s)$ 与 $\mathbf{B}(s)$ 决定的平面称为曲线在这点的法平面. 这样, 在曲线的每一个非平直点, 我们建立了一个规范正交标架 $\{\mathbf{T}(s),\mathbf{N}(s),\mathbf{B}(s)\}$[23], 它被称为 Frenet 标架[24]. 由 Frenet 标架决定的三面形被称为基本三面形.

引理 1.23.8 设 $\mathbf{e}_1(t),\mathbf{e}_2(t),\mathbf{e}_3(t)$ 是向量值函数, 对每一参数值 t 它们都组成一个规范正交标架 $\{\mathbf{e}_1(t),\mathbf{e}_2(t),\mathbf{e}_3(t)\}$. 如果将

$$\mathbf{e}_i'(t)\quad(i=1,2,3)$$

按这个标架展开

$$\mathbf{e}_i'(t)=\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\mathbf{e}_j(t),$$

那么展开的系数应该是反对称的, 即

$$\omega_{ji}=-\omega_{ij},\quad i,j=1,2,3.$$

由此可知

$$\omega_{ii}=0,\quad i=1,2,3.$$

证明 我们有

$$\langle\mathbf{e}_i(t),\mathbf{e}_j(t)\rangle=\delta_{ij},$$

对 t 求导得到

$$\langle\mathbf{e}_i'(t),\mathbf{e}_j(t)\rangle+\left\langle\mathbf{e}_i(t),\mathbf{e}_j'(t)\right\rangle=0.$$

这就是

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0,\quad i,j=1,2,3.$$

□

定理 1.23.9 对于曲线的 Frenet 标架 $\{\mathbf{T}(s),\mathbf{N}(s),\mathbf{B}(s)\}$, 我们有

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{T}}= & & k\mathbf{N}, & \\ \dot{\mathbf{N}}= & -k\mathbf{T} & & +\tau\mathbf{B},\\ \dot{\mathbf{B}}= & & -\tau\mathbf{N}, & \end{cases}$$

这里 $k=k(s)$ 是曲线在给定点的曲率.

[23] $\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}$ 分别表示 tangent, normal, binormal.

[24] 当点沿着曲线运动时, Frenet 标架也随之运动, 这样的标架被称为活动标架.

证明 对于标架 $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$, 用引理 1.23.8 就得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = & \omega_{12}\mathbf{N} & +\omega_{13}\mathbf{B}, \\ \dot{\mathbf{N}} = -\omega_{12}\mathbf{T} & & +\omega_{23}\mathbf{B}, \\ \dot{\mathbf{B}} = -\omega_{13}\mathbf{T} & -\omega_{23}\mathbf{N}. & \end{cases}$$

而由 $\mathbf{N}$ 的定义,

$$\dot{\mathbf{T}} = \|\dot{\mathbf{T}}\|\mathbf{N} = k(s)\mathbf{N},$$

所以有

$$\omega_{12} = k, \quad \omega_{13} = 0.$$

记 $\omega_{23} = \tau$ 就得到定理 1.23.9 中的公式. □

定义 1.23.10 定理 1.23.9 中所给出的公式被称为 Frenet 公式. 该公式中的系数 τ 被称为曲线在给定点的挠率.

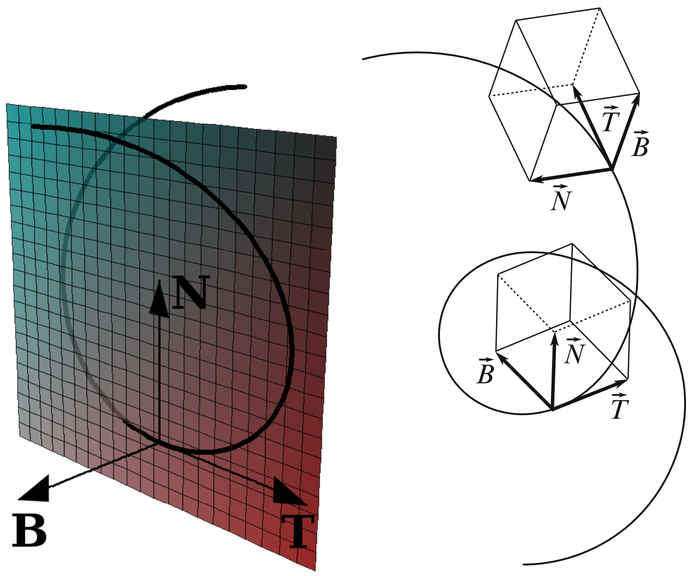

图 1.33: Frenet 标架

对于用弧长参数表示的曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 由定理 1.22.47 可得

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0) + (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{\mathbf{r}}(s_0) + o\left(|s - s_0|^2\right).$$

按照定义, 切向量 $\mathbf{T}(s_0)$ 与主法线向量 $\mathbf{N}(s_0)$ 张成曲线在给定点的密切平面 Π_0. 因为

$$\dot{\mathbf{r}}(s_0) = \mathbf{T}(s_0), \quad \ddot{\mathbf{r}}(s_0) = k\mathbf{N}(s_0),$$

所以

$$\mathbf{r}(s_0)+(s-s_0)\dot{\mathbf{r}}(s_0)+\frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{\mathbf{r}}(s_0)$$

是密切平面 Π_0 上的点. 这说明在给定点邻近, 曲线离密切平面 Π_0 的距离是高于二阶的无穷小量. 因此我们说密切平面 Π_0 是在给定点与曲线贴合得最紧密的一张平面. 副法线向量 $\mathbf{B}(s)$ 是密切平面的法线, 而 $|\tau|=\|\dot{\mathbf{B}}\|$, 所以 $|\tau|$ 表示 $\mathbf{B}$ 相对于弧长的转动速率, 也即密切平面相对于弧长的转动速率. 因此挠率 τ 的几何意义是曲线挠曲的程度 (偏离平面曲线的程度).

推论 1.23.11 对于平面曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, Frenet 公式可以写成

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{T}}= & k\mathbf{N},\\ \dot{\mathbf{N}}=-k\mathbf{T}.\end{cases}$$

1.23.5　曲率与挠率的计算公式

¶ 弧长参数

由 Frenet 公式,

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{T}, & & \\ \ddot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{T}} & = & & k\mathbf{N}, & \\ \dddot{\mathbf{r}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(k\mathbf{N})=\dot{k}\mathbf{N}+k\dot{\mathbf{N}} & = & -k^2\mathbf{T} & +\dot{k}\mathbf{N} & +k\tau\mathbf{B}.\end{cases}$$

故

$$k=\|\ddot{\mathbf{r}}\|,\quad \tau=\frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}},\dddot{\mathbf{r}})}{\|\ddot{\mathbf{r}}\|^2}.$$

这里记号 $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}):=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 表示混合积.

¶ 一般参数

对于更一般的参数, 我们有

$$\begin{cases}\mathbf{r}'=\dot{\mathbf{r}}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\\ \mathbf{r}''=\dot{\mathbf{r}}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\ddot{\mathbf{r}}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,\\ \mathbf{r}'''=\dot{\mathbf{r}}\dfrac{\mathrm{d}^3s}{\mathrm{d}t^3}+3\ddot{\mathbf{r}}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\dddot{\mathbf{r}}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3.\end{cases}$$

由

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{T},\ \ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{N} \implies \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{B} \implies \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\| = k$$

可得[25]

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{r}'\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \\
\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\| \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3 = k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3, \\
(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}},\ \dddot{\mathbf{r}})\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6.
\end{gathered}$$

于是

$$k = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

1.23.6　曲面的第一与第二基本形式

设曲面的参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

并假设 $\mathbf{r}(u,v)$ 连续可微足够多次且满足正则条件:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0, \quad \forall (u, v) \in \Delta.$$

在这条件下, 曲面在每一点有确定的法线 (因而有确定的切平面) . 我们约定用记号 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u,v)$ 表示曲面在给定点的单位法向量.

¶ 曲面上曲线的弧长与曲面的第一基本形式

考虑曲面上的一条连续可微曲线

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in J,$$

这里假设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 都在区间 J 上连续可微. 对 t 求导得

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \implies \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \mathrm{d}u + \mathbf{r}_v \mathrm{d}v.$$

曲线的弧长微元

$$\mathrm{d}s = \|\mathbf{r}'\|\mathrm{d}t = \pm\|\mathbf{r}'\mathrm{d}t\| = \pm\|\mathrm{d}\mathbf{r}\|.$$

---

[25]这里用到了向量外积运算分配律.

因而

$$\mathrm{d}s^2 = \langle \mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2,$$

这里

$$E := \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, \quad F := \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, \quad G := \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle.$$

我们约定记

$$\mathrm{I}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) := E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2.$$

于是曲面上的曲线弧长可按下式计算:

$$\begin{aligned} S &= s_0 + \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= s_0 + \int_{t_0}^{t} \sqrt{I\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

我们把微分 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 的二次型

$$\mathrm{I} = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$$

叫作曲面的第一基本形式.

¶ 曲面上曲线的曲率与曲面的第二基本形式

考虑曲面上曲线的弧长参数方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(s), v(s)), \quad s \in J.$$

这里假设 $u(s)$ 和 $v(s)$ 至少是二阶连续可微的. 求导得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \mathbf{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + \mathbf{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \mathbf{r}_u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2} + \mathbf{r}_v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}. \end{aligned}$$

因为

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_u = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_v = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 2\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\ &= \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s^2}, \end{aligned}$$

这里

$$L \coloneqq \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{uu}, \quad M \coloneqq \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{uv}, \quad N \coloneqq \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{vv}.$$

我们把关于 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 的二次型

$$\mathrm{II} = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2$$

叫作曲面的第二基本形式. 于是上面的式子可记作

$$\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

如果把 $\mathbf{n}$ 与 $\ddot{\mathbf{r}}$ 之间的夹角记为 θ, 那么上式即

$$k\cos\theta = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

我们把

$$k_n = k_n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v) = \frac{\mathrm{II}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)}{\mathrm{I}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)}$$

叫作曲面在给定点沿方向 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ (或者说沿方向 $\mathbf{r}_u\,\mathrm{d}u+\mathbf{r}_v\,\mathrm{d}v$) 的法曲率. 上式也可以写作

$$k\cos\theta = k_n.$$

在曲面的给定点, 通过曲面法线的任何一张平面都被称为法面. 法面截曲面所得到的曲线被称为法截线. 每一个切方向 $\mathbf{r}_u\,\mathrm{d}u+\mathbf{r}_v\,\mathrm{d}v$ 与曲面的法线共同决定一张法面, 从而也共同决定一条法截线. 因为法截线的主法线向量在曲面过该点的法线上, 所以 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$, 法截线在给定点的曲率为 $\pm k_n$. 也就是说, 在曲面的给定点, 沿任意给定的切方向, 法曲率的绝对值 $|k_n|$ 就是法截线的曲率. 有了第一与第二基本形式, 就能计算沿任意方向的法曲率, 从而了解曲面在给定点沿任意方向的弯曲程度.

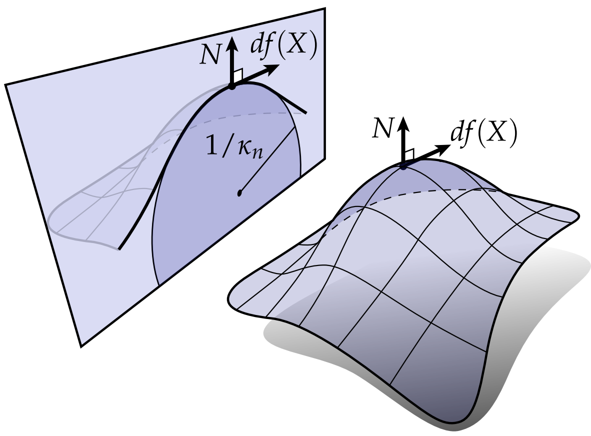

图 1.34: 法面、法截线与法曲率半径

法曲率的倒数 $\rho_n=\dfrac{1}{k_n}$ 被称为法曲率半径, 它满足 $\rho=\rho_n\cos\theta$. 为了给这个式子一个直观的几何解释, 在曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的非平直点, 我们约定把向量

$$\rho\mathbf{N}=\frac{1}{k}\mathbf{N}=\frac{1}{k^2}\ddot{\mathbf{r}}$$

看作曲线在这点的曲率半径[26]. 类似地, 在曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 的给定点, 我们约定把向量 $\rho_n\mathbf{n}$ 看作曲面在这点沿给定切方向的法曲率半径. 这样, 看作向量的法曲率半径与相应的看作向量的法截线的曲率半径相等. 于是我们可以把 $\rho=\rho_n\cos\theta$ 一式解释为下面的 Meusnier 定理:

定理 1.23.12 (Meusnier) 在曲面上过给定点且具有共同切方向的所有曲线当中, 法截线的曲率半径最长, 其他曲线的曲率半径等于法曲率半径在该曲线的密切平面上的投影.

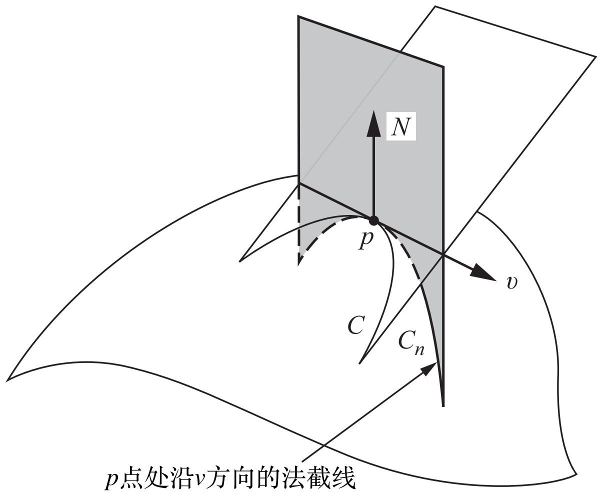

图 1.35: C 与 C_n 在 p 点处沿 v 方向有相同的法曲率

1.24 曲线积分

1.24.1 第一型曲线积分

定理 1.24.1 设曲线 K 由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

给出, 其中函数 φ 及 ψ 与它们的导数 φ' 及 ψ' 都连续; 此外, 假定曲线上无重点. 那么曲线就是可求长的, 曲线上点 M 的位置可由从一点 A 量起的弧长 $s=\widehat{AM}$ 来确定. 且若弧

[26]这样, 曲率半径越短意味着曲线在这点弯曲得越厉害.

$s = \widehat{AM} = s(t)$ 的增加对应于参数 t 的增加, 则

$$\int_K f(M)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

推论 1.24.2 若曲线 K 以显式方程 $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 给出, 在函数 $y(x)$ 与其导数 $y'(x)$ 连续的假定下, 以 α 表示曲线 K 在每一点处的切线与 x 轴的夹角, 则

$$\int_K f(M)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos\alpha|}\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 整个曲线 AB 长

$$S = \int_a^b \frac{1}{|\cos\alpha|}\,\mathrm{d}x.$$

如果我们把曲线弧长定义为外切折线周长的极限, 则这一式子是显然的.

推论 1.24.3 当曲线 K 用极坐标方程 $r = r(\theta)$ $(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$ 给出时,

$$\int_K f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

1.24.2　第二型曲线积分

定理 1.24.4 已知曲线 AB 的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

且函数 φ 及 ψ 连续, 又当参数自 α 变到 β 时曲线以自 A 到 B 的方向描动. 设 P 及 Q 为连续函数, 在曲线 AB 上有连续或至少分段连续的导数, 则

$$\int_{AB} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

推论 1.24.5 若曲线是由显式方程 $y = y(x)$ 给出的, 且当 x 自 a 变到 b 时点自 A 位移到 B. 则

$$\int_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x, y(x))\,\mathrm{d}x.$$

同样地, 若曲线是由显式方程 $x = x(y)$ 给出的, 且当 y 自 c 变到 d 时点自 A 位移到 B. 则

$$\int_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x(y), y)\,\mathrm{d}y.$$

定理 1.24.6 设 D 是由分段光滑曲线围成的图形, 则 D 的面积

$$\sigma(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

注 1.24.7 若曲线上有有限个奇点, 用这些点的邻域将它们分开, 则对图形的其余部分上述公式可以应用, 再令这些邻域的直径趋于 0 就可知上述公式仍成立.

例 1.24.8 求 Descartes 叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 一圈的面积 (如图 1.36) .

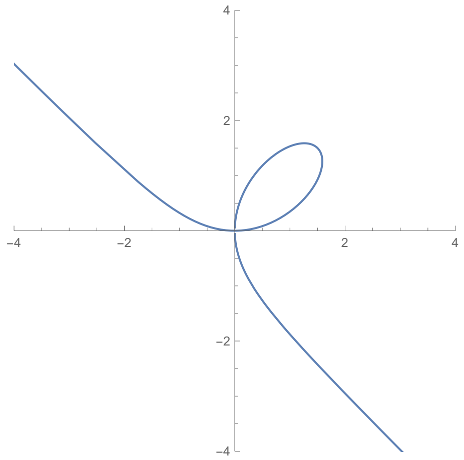

图 1.36: Descartes 叶形线

解 对于有两类齐次项且次数相差 1 的代数曲线方程, 通常可以通过令 $y=tx$ 求得参数方程. 则

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由几何意义可知 $t=\dfrac{y}{x}$ 从 0 变到 $+\infty$. 因为

$$\mathrm{d}x=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t,$$

所以所求面积为

$$\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}a^2.$$

□

1.24.3 两类曲线积分的联系

定理 1.24.9 考虑无重点及奇点的分段光滑曲线 K, 以 α 表示向着弧的增加方向的切线与 x 轴间的夹角, 则

$$\int_K P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_K(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,\mathrm{d}s.$$

推论 1.24.10 定理 1.24.6 中的面积公式可以改写成第一型曲线积分:

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\cos\alpha-y\sin\alpha)\,\mathrm{d}s.$$

若变成极坐标则为

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}r(\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_{\partial D}r\sin(\alpha-\theta)\,\mathrm{d}s.$$

注意到 $\alpha-\theta$ 是点的位置向量与该点处切线间的夹角 (r,t), 故上式可记为

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}r\sin(r,t)\,\mathrm{d}s.$$

注 1.24.11 对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线积分也可得到类似结果:

$$\int_K P\,\mathrm{d}x+Q,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_K(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是切线的方向余弦, 其方向对应于积分道路的方向.

1.24.4　曲线积分与道路无关的条件

定理 1.24.12 设在连通区域 D 内已知连续函数 P,Q, K 是连接 D 中 A,B 两点的分段光滑曲线. 则第二型曲线积分 $\displaystyle\int_K P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与积分道路的形状无关 $\Longleftrightarrow$ 微分式 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 中为某一个两变量单值函数的 (全) 微分[27].

推论 1.24.13 若微分式 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是某一单值函数 $\Phi(x,y)$ 的全微分, 则

$$\int_K P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\Phi(M)\Big|_A^B.$$

定理 1.24.14 设 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在区域 D 中存在且连续. 若微分式 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是恰当微分, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 当 D 是单连通区域时, 逆命题也成立.

证明 ① 若微分式 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是恰当微分, 设它是函数 $\Phi(x,y)$ 的微分, 即

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

则由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 连续可知

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

---

[27]此时称这个微分式为恰当微分.

② 当 D 是单连通区域时, 先考虑 D 是有界闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 的情形. 我们要在 $[a,b]\times[c,d]$ 上确定函数 $\Phi(x,y)$, 使得 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是其全微分. 在 $[a,b]$ 中任取两值 x_0 及 x, 当 y 固定于 $[c,d]$ 中任意一值时,

$$\Phi(x,y)-\Phi(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

对于 $[c,d]$ 中任意两值 y_0 及 y, 有

$$\Phi(x_0,y)-\Phi(x_0,y_0)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y.$$

将以上两式相加即得

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\Phi(x_0,y_0).$$

对于以上构造的函数 $\Phi(x,y)$, 有 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=P(x,y)$, 以及

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x+Q(x_0,y)\xlongequal{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x+Q(x_0,y)=Q(x,y).$$

再由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 连续可知微分式 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 就是 $\Phi(x,y)$ 的全微分.

③ 再考虑 D 是一般单连通区域的情形. 先假定 D 有界, 从而它是由一个分段光滑曲线 K 围成的. 对于给定小数 $\varepsilon>0$, 可以用一个边长小于 ε 的正方形包围 K 的每一点, 使得 K 在每一个正方形内的线路可用两种显式方程之一表示, 而仅在拐角的地方有两个这样的曲线接头. 由 Heine–Borel 定理, 仅用有限个这样的正方形就可以覆盖整个 K. 这一系列正方形围成了闭区域 $\widetilde{D}\subseteq D$, 且 $\widetilde{D}$ 显然可拆成许多矩形. 同时 $\widetilde{D}$ 还是连通的, 这是因为对于 $\widetilde{D}$ 中任意两点 M,N, 它们首先可由 D 中的一条折线 L 相连, 如果 L 存在超出 $\widetilde{D}$ 而落入上述某些正方形中, 则将正方形内部的折线部分用该正方形与 $\widetilde{D}$ 的交界上的折线来代替, 这样就能得到连接 M,N 且完全在 $\widetilde{D}$ 中的一条折线. 由 $\widetilde{D}$ 连通及 D 单连通可得 $\widetilde{D}$ 单连通. 并注意到 D 中与边界距离 $\geqslant\varepsilon$ 的所有点都在 $\widetilde{D}$ 中. 下面将对 D 作原函数. 我们在 $\widetilde{D}$ 中任意一点 M_0 固定原函数的值. 由于定义于两个相重叠的区域上的两原函数在它们的公共部分上只能差一个常数, 因此只要两个原函数在某一点取值相同, 它们便在整个公共部分上恒等. 我们总可以将 $\widetilde{D}$ 分成若干沿垂直边互相挨靠的矩形 (如图 1.38) , 对于两个相邻矩形 d_1,d_2 上的原函数 Φ_1,Φ_2 (由 ② 知这是存在的) , 因为它们沿公共线段 $\alpha\beta$ 仅相差一个常数, 所以将其一适当调整常数项后就可使 d_1,d_2 上的原函数为同一个. 这样, 从 M_0 出发, 可依次在相邻的矩形上作原函数并保持公共边界上的连续性.

④ 若 D 是无界单连通区域, 同样可从有限部分区域出发, 将原函数逐步延伸到整个区域 D 上. □

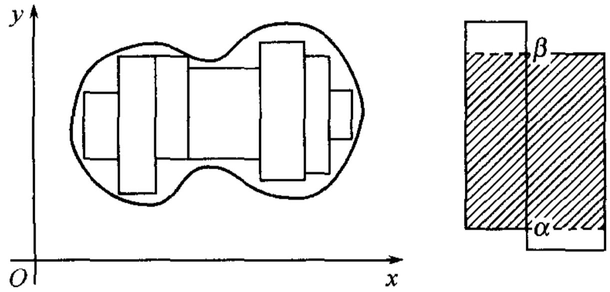

图 1.37

注 1.24.15 我们用图 1.38 说明单连通性在定理 1.24.14 中的作用. 若 D 是单连通的, 即使边界 K 较复杂 (如发生分叉) , 也不影响上述证明中原函数沿彼此分开的叉支继续延伸; 但当 D 是多连通区域 (有 "洞") 时, 当两个分支重新汇合时, 无法确保在汇合后的第一个矩形上存在同时保持 $\alpha\beta$ 与 $\gamma\delta$ 上连续性的原函数.

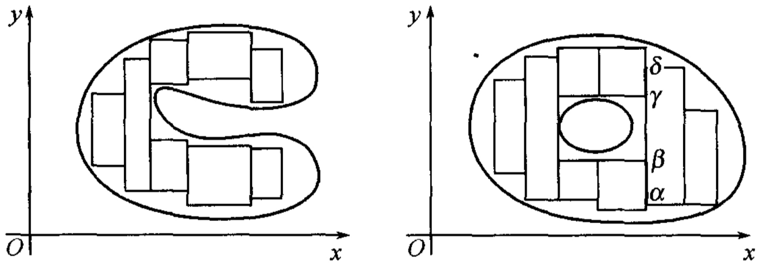

图 1.38

定理 1.24.16 设区域 D 含有一个奇点 M 而没有其他的 "洞" [28]. 则沿各种围绕点 M 的简单闭路 L 并取正向的积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 彼此相等. 用 σ 表示所有类似积分的公共值, 称作对应于点 M 的循环常数.

注 1.24.17 在多连通区域上, 曲线积分和路径无关 $\iff$ 其中所有奇点的循环常数都是 0. 例如以 $(0,0)$ 为奇点的式子 $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

定理 1.24.18 若 L 是区域 D 中任一不通过奇点 M (允许自交) 的闭路, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = n\sigma, \quad \text{其中} n \in \mathbb{Z}.$$

[28] 我们把奇点也解释为一种 "洞" .

1.24.5 Green 公式

定理 1.24.19 设区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 由有限条分段光滑的曲线围成. 若函数 P, Q 及其导函数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 都连续, 则

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果将 P 换作 $-Q$, 而将 Q 换作 P, 并参考定理 1.24.9, 就变成[29]

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} [P\cos(x, \mathbf{n}) + Q\sin(x, \mathbf{n})]\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示朝外的法线方向.

定理 1.24.20

$$\iint_D \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x, \mathbf{n}) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(x, \mathbf{n}).$$

定理 1.24.21

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s.$$

证明 令 $\mathbf{F} = v\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, 注意到

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = v\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{n} = v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

由定理 1.24.19 即得. □

注 1.24.22 取 $v = 1$ 就得到定理 1.24.20.

---

[29]利用记号 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y}$, 也可以等价地记为

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s, \quad \text{其中 } \mathbf{n} \text{ 表示单位外法向量.}$$

定理 1.24.23 (第二 Green 公式)

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right) \mathrm{d}s.$$

证明 在定理 1.24.21 中交换 u, v 的地位得到

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s.$$

将这两式相减即得. □

定理 1.24.24 (二重积分的分部积分公式)

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} uv\,\mathrm{d}y - \iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} uv\,\mathrm{d}x - \iint_D v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.24.6　调和函数

定义 1.24.25 若函数 u 及其导函数皆连续, 且在区域 D 上满足方程 $\Delta u = 0$, 则称 u 为 D 上的调和函数.

定理 1.24.26 设函数 u 在区域 D 上有连续导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 则 u 是调和函数 $\iff$ 对 D 中任意简单闭路 L, 都有

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s = 0.$$

定理 1.24.27 若函数 u 在闭区域 D 上是调和的, 则它在 D 内部的值可由在 ∂D 上的值唯一确定. 也就是说, 若两个调和函数 u_1, u_2 在 ∂D 上有相同的值, 则它们在整个区域上恒等.

证明 考虑差 $u = u_1 - u_2$, 则问题转化为证明: 在区域 D 上的调和函数, 若在 ∂D 上为 0, 则在整个区域上恒等于 0.

在定理 1.24.21 中令 $v = u$. 由 $\Delta u = 0$ 与 $u|_{\partial D} = 0$ 得

$$\iint_D \|\nabla u\|_2^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}s = 0.$$

因此 $\nabla u = \mathbf{0}$, 即 u 在 D 上为常值. 而 $u|_{\partial D} = 0$, 所以 $u = 0$. □

定理 1.24.28 (调和函数平均值定理) 设 u 是区域 D 上的调和函数, (x_0, y_0) 是 D 中任一内点, K_R 是以 (x_0, y_0) 为圆心、以 R 为半径且包含在 D 中的圆周. 则

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{K_R} u(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

证明 令 $v=\ln r$, 其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 不难验证, v 是 $\mathbb{R}^2\backslash\{(x_0,y_0)\}$ 中的调和函数. 取 $0<\rho<R$, 用 $\widetilde{D}$ 表示夹在 K_R 与 K_ρ 间的区域, 在其上运用第二 Green 公式 (定理 1.24.23) 得到

$$\begin{aligned}
0&=\int_{\partial\widetilde{D}}\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}s\\
&=\int_{K_R}\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}s-\int_{K_\rho}\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\mathrm{d}s\\
&=\left[\ln R\underbrace{\int_{K_R}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s}_{0}-\ln\rho\underbrace{\int_{K_\rho}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s}_{0}\right]+\left[\int_{K_\rho}u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s-\int_{K_R}u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

而

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right|_{K_R}=\nabla v\cdot\frac{\mathbf{r}}{R}=\frac{\mathbf{r}}{R^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{R}=\frac{1}{R},$$

同理,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right|_{K_\rho}=\frac{1}{\rho}.$$

于是

$$\frac{1}{\rho}\int_{K_\rho}u\,\mathrm{d}s=\frac{1}{R}\int_{K_R}u\,\mathrm{d}s.$$

当 $\rho\to 0$ 时, 左端有极限 $2\pi\cdot u(x_0,y_0)$, 这就证明了所要的等式. □

推论 1.24.29 若函数 $u(x,y)$ 在由闭区域 D 上连续且在 D 的内部是调和函数, 则除掉 u 是常值函数的情形外, u 在 D 的内部不能达到其最大值或最小值.

注 1.24.30 (对定理 1.24.27 的加强) 设函数 u 在闭区域 D 上连续, 但仅在 D 内部调和. 若 u 在 ∂D 上为 0, 则 u 在 D 上为 0. 若不然, u 会在 D 的内部达到其最大值或最小值, 与推论 1.24.29 矛盾.

1.25　曲面积分

1.25.1　曲面面积

定义 1.25.1 设正则曲面 Σ 有参数方程 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ $((u,v)\in\Delta)$. 称

$$\sigma(\Sigma)=\iint_\Delta\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

为曲面 Σ 的面积. 利用曲面的 Gauss 系数 (参见 1.23.6 小节)

$$E \coloneqq \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, \quad F \coloneqq \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, \quad G \coloneqq \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$$

可写为

$$\sigma(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

推论 1.25.2 设曲面 Σ 以显式方程 $z = z(x, y)$ 给出, 其中 (x, y) 在 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 内变动. 若用 $\mathbf{n}$ 表示曲面的法线与 z 轴所成的夹角, 则

$$\sigma(\Sigma) = \iint_{D} \frac{1}{|\cos \mathbf{n}|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.25.2 第一型曲面积分

定理 1.25.3 设 Σ 是正则曲面, 其参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ $((u, v) \in \Delta)$, 函数 f 在 Σ 上连续, 则

$$\int_{\Sigma} f\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\Delta} f \circ \mathbf{r} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

推论 1.25.4 设曲面 Σ 以显式方程 $z = z(x, y)$ 给出, 其中 (x, y) 在 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 内变动. 若用 $\mathbf{n}$ 表示曲面的法线与 z 轴所成的夹角, 则

$$\int_{\Sigma} f\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D} \frac{f(x, y, z(x, y))}{|\cos \mathbf{n}|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.25.3 第二型曲面积分

定理 1.25.5 考虑正则曲面 $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ $((u, v) \in \Delta)$, 并设 $\mathbf{r}$ 实现了 Σ 与 Δ 之间的一一对应. 这时曲面 Σ 的单位法向量是 $\mathbf{n} = \pm \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$, 其中正负号的选择应与指定的 Σ 的定向一致. 则第二型曲面积分

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} &= \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \pm \iint_{\Delta} \mathbf{F} \circ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

若记 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 则上式也可记为

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.25.4 调和函数

定理 1.25.6 设 Σ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 Σ 上的单位外法向量, $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 在 $\mathbf{n}$ 上的方向导数.

注 1.25.7 令 $v=1$, 则有

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \Delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

定理 1.25.8 (第二 Green 公式) 设 Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上二次连续可微, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 Σ 的单位外法向量.

定理 1.25.9 设 u 是区域 Ω 上的调和函数, Σ 为 Ω 的边界曲面, 则

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

定理 1.25.10 (调和函数平均值定理) 设 u 是区域 Ω 上的调和函数, (x_0,y_0,z_0) 是 Ω 中任一内点, S_R 是以 (x_0,y_0,z_0) 为球心、以 R 为半径且包含在 Ω 中的球. 则

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_R} u(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

证明 令 $v=\dfrac{1}{r}$, 其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. 不难验证, v 是 $\mathbb{R}^3\backslash\{(x_0,y_0,z_0)\}$ 中的调和函数. 取 $0<\rho<R$, 用 $\widetilde{\Omega}$ 表示夹在 S_R 与 S_ρ 间的区域, 在其上运用第二 Green 公式 (定理 1.25.8) 得到

$$\begin{aligned}
0 &= \oint\!\!\!\!\oint\limits_{\partial\widetilde{\Omega}} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}\sigma \\
&= \oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_R} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}\sigma - \oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_\rho} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}\sigma \\
&= \left[\frac{1}{R}\underbrace{\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma}_{0} - \frac{1}{\rho}\underbrace{\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma}_{0}\right] + \left[\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_\rho} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma - \oint\!\!\!\!\oint\limits_{S_R} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}\sigma\right].
\end{aligned}$$

而

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_R} = -\frac{1}{R^2}\nabla r \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} = -\frac{1}{R^2},$$

同理,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_\rho} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

于是

$$\frac{1}{\rho^2}\oiint\limits_{S_\rho} u\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{R^2}\oiint\limits_{S_R} u\,\mathrm{d}\sigma.$$

当 $\rho \to 0$ 时, 左端有极限 $4\pi \cdot u(x_0, y_0, z_0)$, 这就证明了所要的等式. □

推论 1.25.11 若函数 $u(x, y, z)$ 在由闭区域 Ω 上连续且在 Ω 的内部是调和函数, 则除掉 u 是常值函数的情形外, u 在 Ω 的内部不能达到其最大值或最小值.

1.26 场论初步

1.26.1 场论公式备忘录

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

$$\nabla(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f\nabla f, \quad \text{其中 } \varphi \text{ 是单变量函数.}$$

$$\nabla \cdot \varphi\mathbf{F} = \varphi\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla\varphi, \quad \text{其中 } \varphi \text{ 是数量场.}$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = \varphi\nabla \times \mathbf{F} + \nabla\varphi \times \mathbf{F}, \quad \text{其中 } \varphi \text{ 是数量场.}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\text{旋度场无源}).$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (\text{梯度场无旋}).$$

1.27 函数序列与函数项级数

1.27.1 一致收敛性

定义 1.27.1 设在变化区域 $\mathcal{X} = \{x\}$[30]中序列 $\{f_n(x)\}$ 有极限函数 $f(x)$, 且对于任意 $\varepsilon > 0$ 都存在与 x 无关的数 N, 当 $n > N$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对 $\mathcal{X}$ 中所有的 x 都成立, 则称序

[30] $\mathcal{X}$ 是一个无穷集合.

列 $\{f_n(x)\}$ 关于区域 $\mathcal{X}$ 中的 x 一致收敛于 $f(x)$.

例 1.27.2 (一致收敛) 设

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

因为

$$0\leqslant f_n(x)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

所以只需取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{2\varepsilon}\right\rfloor$, 当 $n>N$ 时就有 $|f_n(x)|<\varepsilon$.

例 1.27.3 (非一致收敛) 设

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

对于任意固定的 $x>0$, 取 $n>\left\lfloor\dfrac{1}{x\varepsilon}\right\rfloor$, 就有 $f_n(x)<\dfrac{1}{nx}<\varepsilon$. 但是 $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$, 对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 已经不存在同时适用于所有 x 的数 N 了.

例 1.27.4 对于 $\mathcal{X}=(-\infty,+\infty)$ 中的任意 x 值, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 收敛, 因为它适合 Leibniz 定理的条件. 同时, 级数余式的绝对值小于其第一项:

$$|\varphi_n(x)|<\frac{1}{x^2+n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

故级数在整个区间内一致收敛.

定理 1.27.5 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛 $\iff$ 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在与 x 无关的数 N, 使得对于 $n>N$ 与任意 $m=1,2,3,\cdots$, 不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

对于 $\mathcal{X}$ 中所有的 x 同时成立.

推论 1.27.6 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛, 则它的所有项都乘上同一个在 $\mathcal{X}$ 中有界的函数 $v(x)$ 后一致收敛性不变.

定理 1.27.7 (Weierstrass 判别法) 若函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中适合不等式

$$|u_n(x)|\leqslant c_n\quad (n=1,2,3,\cdots)^{31},$$

这里 c_n 为一个收敛项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的项, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛.

---

[31]这时称级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 是对于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的优级数.

例 1.27.8 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则在任何区间中, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

一致收敛.

命题 1.27.9 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛的任一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 都可以用“加括号”的方法使其成为一个可应用 Weierstrass 判别法的级数.

证明 取任何一个正项收敛级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, 对数 c_1 存在数 m_1, 使得在 $\mathcal{X}$ 中对 $n > m_1$ 有 $|u_{m_1+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < c_1$. 然后对数 c_2 存在数 $m_2 > m_1$, 使得在 $\mathcal{X}$ 中对 $n > m_2$ 有 $|u_{m_2+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < c_2$, 如此等等. 于是对所给级数按如下方式添加括号:

$$[u_1(x) + \cdots + u_{m_1}(x)] + [u_{m_1+1}(x) + \cdots + u_{m_2}(x)] + [u_{m_2+1}(x) + \cdots + u_{m_3}(x)] + \cdots .$$

所得级数从第二项开始可应用 Weierstrass 判别法. □

定理 1.27.10 (Abel 判别法) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛, 函数 $a_n(x)$ (对于每一个 x) 是单调序列, 且对于任意 x 与 n 都有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛.

定理 1.27.11 (Dirichlet 判别法) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和对于任意的 x 与 n 都有界, 且 $a_n(x)$ (对于每一个 x) 是 $\mathcal{X}$ 中一致趋向于 0 的单调序列, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛.

例 1.27.12 设 $\{a_n\}$ 是单调趋向于 0 的正数数列, 由 Dirichlet 判别法, 在任何不包含 $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 形式的点的闭区间内, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

一致收敛, 因为

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}x\right|},$$

所以可以得到关于和的与 x 无关的界.

1.27.2　级数和的函数性质

定理 1.27.13 设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 定义在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上, 且在这区间的一点 $x=x_0$ 上都连续. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $\mathcal{X}$ 上一致收敛, 则级数的和 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点上同样是连续的.

例 1.27.14 (一致收敛性的要求不可去掉) 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, 它的和在 $x\neq 0$ 时等于 1, 在 $x=0$ 时等于 0.

定理 1.27.15 (Dini 定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的项在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上连续且是正的. 若级数有在 $\mathcal{X}$ 上也连续的和 $f(x)$, 则它在 $\mathcal{X}$ 上一致收敛.

证明 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的余式

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=f(x)-f_n(x).$$

因为 $\varphi_n(x)$ 是两个连续函数的差, 所以它连续. 由于级数的项是正的, 对于固定的 x, 序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 是不递增的. 又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上收敛, 对任意固定的 x,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

欲证级数一致收敛, 只需证对任意 $\varepsilon>0$, 存在一个 n, 使得对于所有的 x 都有 $\varphi_n(x)<\varepsilon$ (因为对于更大的值 n 这不等式就更对) .

用反证法. 假设存在 $\varepsilon>0$, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 在 $\mathcal{X}$ 上都可以找到使得 $\varphi_n(x_n)\geqslant\varepsilon$ 的 x_n. 根据 Bolzano–Weierstrass 定理, 可以从 $\{x_n\}$ 中分出一个收敛于极限 x_0 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 由 $\varphi_m(x)$ 的连续性, 对任意的 m, 都有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0).$$

对于任意的 m 与足够大的 k,

$$n_k\geqslant m\implies \varphi_m(x_{n_k})\geqslant\varphi_{n_k}(x_{n_k})\geqslant\varepsilon.$$

令 $k\to\infty$, 得到

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon.$$

但这与

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)=0$$

矛盾. □

定义 1.27.16 关于在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 内收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 若对于每一个 $\varepsilon>0$ 及每一个数码 N, 区间 $\mathcal{X}$ 可以被有限个开区间

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_i,b_i),\cdots,(a_k,b_k)$$

覆盖, 且这些区间可相应地提供 k 个数码

$$n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots,n_k \quad (>N),$$

使得对于 $\mathcal{X}$ 中所有含于 (a_i,b_i) $(i=1,2,\cdots,k)$ 中的 x 一致地成立不等式

$$|f(x)-f_{n_i}(x)|=|\varphi_{n_i}(x)|<\varepsilon,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中拟一致收敛于和 $f(x)$.

定理 1.27.17 (Arzelá) 设函数 $u_n(x)$ 在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 有定义且连续, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 内收敛. 则级数的和 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 级数在 $\mathcal{X}$ 拟一致收敛于 $f(x)$.

证明 $\Rightarrow$: 由 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 连续可知所有的余式 $\varphi_n(x)$ 也连续. 在 $\mathcal{X}$ 中任取点 x'. 按照给定的数 ε 和 N, 对点 x' 可找到这样的数码 $n'>N$, 使得

$$|\varphi_{n'}(x')|<\varepsilon.$$

根据 $\varphi_{n'}(x)$ 的连续性, 在 x' 的某个邻域 $\sigma'=(x'-\delta',x'+\delta')$ 内也有类似不等式:

$$|\varphi_{n'}(x)|<\varepsilon.$$

由于 $\bigcup\limits_{x'\in\mathcal{X}}\sigma'$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个开覆盖, 从中可分出有限的子覆盖 $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k\}$, 它同样覆盖 $\mathcal{X}$. 这些区间即是拟一致收敛定义中的那些开区间.

$\Leftarrow$: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 拟一致收敛于自己的和 $f(x)$, 在指定 ε 与 N 后, 我们按定义构造区间 (a_i,b_i) 并选择数码 n_i $(i=1,2,\cdots,k)$. 在 $\mathcal{X}$ 中任取点 x_0, 设 $x_0\in(a_{i_0},b_{i_0})$, 则

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f_{n_i}(x)-f_{n_i}(x_0)|+|\varphi_{n_i}(x)|+|\varphi_{n_i}(x_0)|.$$

因为 $x_0 \in (a_{i_0}, b_{i_0})$, 所以

$$|\varphi_{n_i}(x_0)| < \varepsilon,$$

若 $x \in (a_{i_0}, b_{i_0})$, 则

$$|\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon.$$

可以找到这样的数 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 不仅 $x \in (a_{i_0}, b_{i_0})$, 而且 $|f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_0)| < \varepsilon$, 于是

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

$f(x)$ 在点 x_0 的连续性得证. □

注 1.27.18 从这个定理容易推出 Dini 定理.

定理 1.27.19 设 $\mathcal{X} = \{x\}$ 是有凝聚点 a 的任意无穷集合. 若定义在 $\mathcal{X}$ 上的每一个函数 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都有有限的极限:

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n,$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛, 则这些极限所组成的级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C,$$

且对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和 $f(x)$, 有

$$\lim_{x \to a} f(x) = C, \text{ 即 } \lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}.$$

定理 1.27.20 若函数 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 在区间 $\mathcal{X} = [a, b]$ 上连续, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上一致收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和 $f(x)$ 的积分可写成:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 1.27.21 (一致收敛性的要求不可去掉) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2x \left[\dfrac{n^2}{e^{n^2 x^2}} - \dfrac{(n-1)^2}{e^{(n-1)^2 x^2}} \right]$ 非一致地收敛于函数 $f(x) = 0$. 这时

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{2n^2 x}{e^{n^2 x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{e^{n^2}} \right) = 1, \text{ 但 } \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 1.27.22 (一致收敛性的要求不必要) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$ 非一致地收敛于函数 $f(x)=0$. 这时

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.27.23 若函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上是可积的, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛, 则级数的和 $f(x)$ 同样是可积的, 并有展开式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 1.27.24 (一致收敛性的要求不可去掉) 在 $[0,1]$ 上定义函数

$$u_n(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{m}{n}\ (m \text{ 与 } n \text{ 互素}),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

可见每个 $u_n(x)$ 均只有有限个不连续点, 在 $[0,1]$ 上可积; 但级数的和是不可积的 Dirichlet 函数.

定理 1.27.25 设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上有连续的导数 $u_n'(x)$. 若在 $\mathcal{X}$ 上级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上有导数, 且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

定理 1.27.26 设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上有有限的导数 $u_n'(x)$. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 至少在一点上收敛 (比如点 $x=a$) , 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上一致收敛, 且它的的和 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上有导数

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

证明 先证明如下引理:

引理 任取 $x_0\in[a,b]$, 对所有 $[a,b]\ni x\neq x_0$ 作级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0},$$

则它都一致收敛.

【引理的证明: 对任意的 $\varepsilon>0$, 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 一致收敛, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 与 $m=1,2,\cdots$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k'(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

取定 n 与 m, 考虑函数

$$U(x)=\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k(x),$$

它的导数 $U'(x)$ 满足

$$|U'(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k'(x)\right|<\varepsilon.$$

由 Lagrange 中值定理,

$$\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{u_k(x)-u_k(x_0)}{x-x_0}=\frac{U(x)-U(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\exists c\text{位于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}}U'(c),$$

因此对于所有 $x\neq x_0$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{u_k(x)-u_k(x_0)}{x-x_0}\right|<\varepsilon.$$

这就证明了引理.】

取 $x_0=a$, 从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(a)}{x-a}\quad 与\quad \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]$$

一致收敛[32]及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 收敛可推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛, 记它的和为 $f(x)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

这里 $x_0\in[a,b]$. 因为在一致收敛的级数中可以逐项取极限, 所以

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0),$$

这就是所要证明的. □

[32]后者的一致收敛性可由推论 1.27.6 得到.

1.27.3 处处不可微的连续函数——van der Waerden 函数

我们用 $u_0(x)$ 来表示数 x 与最接近它的正数之间的差值. 这个函数在每一个形如 $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$ $(s \in \mathbb{Z})$ 的区间上是线性的, 且它是连续的并有周期 1. 它的图形就是图 1.39 (a) 中的折线.

对于 $k \in \mathbb{N}$, 我们取

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

这个函数在 $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$ 上是线性的, 且它是连续的并有周期 $\frac{1}{4^k}$. 它的图形就是图 1.39 (b) 中齿形更细的折线.

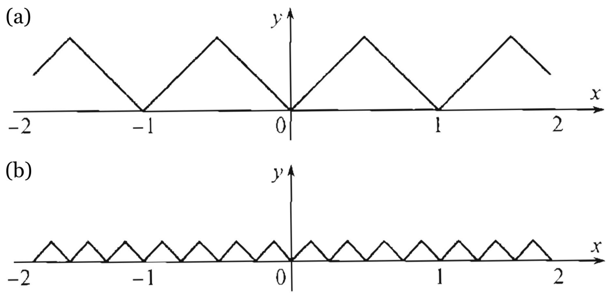

图 1.39

现在定义函数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

因为 $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ $(k \in \mathbb{N})$, 所以收敛级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ 是这级数的优级数, 因此这级数一致收敛, $f(x)$ 处处连续.

取定任意值 $x = x_0$. 我们把它放在相差不到 $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 的如下数之间:

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leqslant x_0 < \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n} \quad (s_n \in \mathbb{Z}).$$

显然这些闭区间

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}\right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

是一个套一个的. 在每一个这种区间内可以找到一点 x_n, 使得它与 x_0 点的距离等于区间长的一半:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}},$$

当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to x_0$.

现在作变化量的比

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.$$

注意到当 $k>n$ 时, 数 $\dfrac{1}{4^{n+1}}$ 是 $u_k(x)$ 的周期 $\dfrac{1}{4^k}$ 的整数倍, 所以 $u_k(x_n)=u_k(x_0)$, 级数的对应项等于 0. 若 $k\leqslant n$, 则 $u_k(x)$ 在 Δ_k 上是线性的在 Δ_k 所包含的区间 Δ_n 上也是线性的, 且

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1\quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

这样就有

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1),$$

即当 n 为奇数时这比值为偶数, 当 n 为偶数时这比值为奇数. 因此当 $n\to\infty$ 时变化量的比不可能趋向有限的极限, 所以函数在 $x=x_0$ 处没有有限的导数.

1.27.4　Legendre 多项式

Legendre 多项式由如下等式定义:

$$X_n(x)=c_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\quad (n\in\mathbb{N}).$$

引理 1.27.27 (n 次) 多项式 $X_n(x)$ 有 n 个不同的实根, 这些根都在 -1 与 $+1$ 之间.

证明 不妨暂设 $c_n=1$. 因为多项式 $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$ 和它的 $n-1$ 个相继各阶导数在 $x=\pm 1$ 时为 0, 所以根据 Rolle 定理, 它的一阶导数在 $[-1,1]$ 内有根, 二阶导数在 $[-1,1]$ 内有 2 个根……$n-1$ 阶导数在 $[-1,1]$ 内除了 ± 1 还有 $n-1$ 个根. 再对这导数应用一次 Rolle 定理, 便得证. □

把 $(x^2-1)^n$ 看成 $(x+1)^n$ 与 $(x-1)^n$ 的乘积, 由 Leibniz 公式可得

$$X_n(x)=c_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x+1)^n.$$

因为当 $k\geqslant 1$ 时各项都含因式 $x-1$, 所以

$$X_n(1)=c_n\cdot n!\cdot(1+1)^n=c_n\cdot 2^n\cdot n!.$$

类似地, 我们有

$$X_n(-1)=c_n\cdot(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!.$$

若取 $c_n=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}=\dfrac{1}{(2n)!!}$, 我们把得到的多项式记为 $P_n(x)$, 则 $P_n(1)=1, P_n(-1)=(-1)^n$.

定理 1.27.28 Legendre 多项式 $X_n(x)$ 满足方程

$$(x^2-1)X_n''+2x\cdot X_n'-n(n+1)X_n=0.$$

证明 令 $y=(x^2-1)^n$, 就有

$$y'=2nx\cdot(x^2-1)^{n-1}\implies(x^2-1)\cdot y'=2nx\cdot y.$$

对这个等式两端各取 $n+1$ 阶导数, 由 Leibniz 公式可得

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+(n+1)\cdot 2x\cdot y^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2\cdot y^{(n)}=2nx\cdot y^{(n+1)}+(n+1)\cdot 2n\cdot y^{(n)}.$$

整理即得

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0,$$

再乘上 c_n, 就得到所要证明的关系式.[33] □

下面要找一个 n 次多项式 $X_n(x)$, 使得对任意次数低于 n 的多项式 $Q(x)$, 都有

$$\int_a^b X_n(x)Q(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

其中 a 与 b 是任意给定的数.[34]

每一个 n 次多项式 $X_n(x)$ 可以看作某一个 $2n$ 次多项式 $R(x)$ 的第 n 阶导数, 而 $R(x)$ 可由 $X_n(x)$ 作 n 次积分得到. 如果在每个积分下选择常数, 使得当 $x=a$ 时积分变为 0, 则多项式 $R(x)$ 还满足条件

$$R(a)=0,R'(a)=0,\cdots,R^{(n-1)}(a)=0.$$

所以问题就归结为求一个 $2n$ 次多项式 $R(x)$, 使得对于任意次数低于 n 的多项式 $Q(x)$, 都有

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

---

[33]此处利用恒等式求函数高阶导数是常用技巧. 另见问题 31.

[34]假设这样的多项式的确存在, 如果不计常数因子带来的差异, 求得的多项式是唯一的. 事实上, 设 φ 和 ψ 是满足问题条件的多项式, 取常数因子 c, 使得 $\varphi(x)-c\psi(x)$ 为次数不超过 $n-1$ 的多项式, 设 $Q(x)=\varphi(x)-c\psi(x)$, 根据假设,

$$\int_a^b\varphi(x)Q(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad\int_a^b\psi(x)Q(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$\int_a^b(\varphi(x)-c\psi(x))\,Q(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad 即\int_a^b Q^2(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

故 $Q(x)=0,\varphi(x)=c\psi(x)$.

由高阶分部积分公式 (定理 1.3.1) ,

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = \big[Q(x)R^{(n-1)}(x) - Q'(x)R^{(n-2)}(x) + \cdots$$
$$+(-1)^{n-1}Q^{(n-1)}(x)R(x)\big]\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b Q^{(n)}(x)R(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到前面的条件及 $Q^{(n)}(x) \equiv 0$, 则可得

$$Q(b)R^{(n-1)}(b) - Q'(b)R^{(n-2)}(b) + \cdots + (-1)^{n-1}Q^{(n-1)}(b)R(b) = 0.$$

由此, 需要求下列条件成立:

$$R(b) = 0, R'(b) = 0, \cdots, R^{(n-1)}(b) = 0.$$

因此 $R(x)$ 以 a 与 b 为 n 重根, 它与 $(x-a)^n(x-b)^n$ 只差一个常数因子. 于是

$$X_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\right].$$

特别地, 若取 $a=-1$ 与 $b=1$, 就得到 Legendre 多项式.

回顾前面关于 Legendre 多项式 $P_n(x)$ 的约定, 并令 $P_0(x)=1$. 多项式 $P_n(x)$ 作为函数的奇偶性与 n 相同.$P_n(x)$ 最高次项系数为

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

定理 1.27.29 若 n 与 m 是两个不相等的非负整数, 则

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 按 Legendre 多项式的定义即得. □

定理 1.27.30

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) = \frac{2}{2n+1}.$$

证明 运用高阶分部积分公式 (定理 1.3.1) , 以 $n-1$ 代替 n, 并令

$$u = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad v = (x^2-1)^n,$$

且注意到 v 与它的前 $n-1$ 阶导数当 $x=\pm 1$ 时为 0, 则有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\right] \cdot (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x \\
&= 2\cdot(2n)! \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=\sin t} 2\cdot(2n)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t \\
&= 2\cdot(2n)! \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
&= \frac{2}{2n+1}\left[(2n)!!\right]^2.
\end{aligned}$$

于是

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = c_n^2 \cdot \frac{2}{2n+1}\left[(2n)!!\right]^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

□

定理 1.27.31

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

证明 由于 $P_n(x)$ 与 $P_{n+1}(x)$ 最高次项系数分别为

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} \quad 和 \quad \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!},$$

所以由 $P_n(x)$ 的奇偶性与 n 相同可知

$$P_{n+1} - \frac{2n+1}{n+1}xP_n$$

是次数不超过 $n-1$ 的多项式. 因此, 设

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n = \alpha P_{n-1} + Q.$$

可以通过适当确定系数 α 使得 Q 是次数不超过 $n-3$ 的多项式. 此时, 把上面等式两边乘以 Q 并积分, 得 $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q^2\,\mathrm{d}x = 0$, 从而得 $Q=0$. 为了确定系数 α, 令 $x=1$, 得到

$$n+1-(2n+1) = \alpha \implies \alpha = -n.$$

这就证明了递推关系式. □

注 1.27.32 借助定理 1.27.31 的递推关系式, 我们能够从 $P_0 = 1$ 与 $P_1 = x$ 出发依次求出 Legendre 多项式:

$$P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, P_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, P_4 = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}, \cdots.$$

利用与定理 1.27.31 相同的证明方法 (并适当使用分部积分公式) 可得以下两个等式:

定理 1.27.33

$$(1-x^2)P_n' + nxP_n - nP_{n-1} = 0.$$

定理 1.27.34

$$P_{n+1}' - P_{n-1}' = (2n+1)P_n.$$

在位势论中, 有时需要把

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

展开成 r 的幂级数. 令 $x=\cos\theta$, 我们考察对于任意取定的 x, 函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \left[1+\left(r^2-2rx\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

依照 r 展开的幂级数. 只要 $|r|^2+2|x|\cdot|r|<1$, 就可以保证这展开式的合理性[35]. 容易看出, r^n $(n\geqslant 1)$ 的系数是某个 n 次多项式 $P_n=P_n(x)$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = 1+P_1r+P_2r^2+\cdots+P_nr^n+\cdots.$$

为了确定这些系数, 我们将上式两端对 r 求导:

$$\frac{x-r}{\left(\sqrt{1-2rx+r^2}\right)^3} = P_1+2P_2r+\cdots+nP_nr^{n-1}+\cdots.$$

于是

$$\begin{aligned}&(1-2rx+r^2)\left(P_1+2P_2r+\cdots+nP_nr^{n-1}+\cdots\right)\\=&(x-r)\left(1+P_1r+P_2r^2+\cdots+P_nr^n+\cdots\right).\end{aligned}$$

比较两边 r 的对应幂次, 可得

$$P_1=x, 2P_2-2xP_1=-1+xP_1 \implies P_2=\frac{3x^2-1}{2},$$

然后, 一般地,

$$(n+1)P_{n+1}-2nx\cdot P_n+(n-1)P_{n-1}=xP_n-P_{n-1},$$

也即

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0.$$

[35] 二项式级数 $(1+x)^m$ 当 $|x|<1$ 时绝对收敛 (d'Alembert 判别法) , 其中 m 是任意异于所有自然数 (包括 0) 的实数.

由此可知 $P_n(x)$ 恰为 Legendre 多项式. 二元函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}$ 称为 Legendre 多项式的母函数.

对展开式

$$\begin{aligned}\left(1-2a\cos\theta+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left[1-a\left(e^{\theta i}+e^{-\theta i}\right)+a^2\right]^{-\frac{1}{2}}\\ &= \left(1-ae^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-ae^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \left(1+\frac{1}{2}ae^{i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^2e^{2i\theta}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}ae^{-i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^2e^{-2i\theta}+\cdots\right),\end{aligned}$$

与

$$\left(1-2a\cos\theta+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos\theta)\cdot a^n,$$

比较 a^n 系数可得

$$\begin{aligned}P_n(\cos\theta)=&\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}\right)+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{(n-1)i\theta}+e^{-(n-1)i\theta}\right)\\ &+\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(e^{(n-2)i\theta}+e^{-(n-2)i\theta}\right)+\cdots\\ =&\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 2\cos n\theta+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cos(n-1)\theta\\ &+\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2\cos(n-2)\theta+\cdots.\end{aligned}$$

因为这里所有的系数都是正的, 所以当 $\theta=0$ 时, 这个表达式达到最大值. 因此当 x 在 $[-1,1]$ 中变化时, 所有的 Legendre 多项式皆在端点 $x=1$ 处达到最大值.

1.27.5 Bernoulli 数

由幂级数除法的结论, 商式

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots}$$

至少对于足够小的 x 值, 可展开成幂级数

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$

由此对 $n\in\mathbb{N}$ 定义了 Bernoulli 数 B_n. 显然 $B_0=1$.

根据关系式

$$\left(1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}x^n+\cdots\right)=1,$$

令左侧各个方幂 x^n $(n=1,2,3,\cdots)$ 的系数等于 0, 便可得如下方程组:

$$\frac{1}{n!1!}B_n+\frac{1}{(n-1)!2!}B_{n-1}+\cdots+\frac{1}{(n-k+1)!k!}B_{n-k+1}+\cdots+\frac{1}{1!n!}B_1+\frac{1}{(n+1)!}=0.$$

两端乘以 $(n+1)!$, 就有

$$\binom{n+1}{1}B_n+\binom{n+1}{2}B_{n-1}+\cdots+\binom{n+1}{k}B_{n+1-k}+\cdots+\binom{n+1}{n}B_1+1=0.$$

利用其与 Newton 二项式的相似性, 这些方程在形式上可以写为

$$(B+1)^{n+1}-B^{n+1}=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

只不过在将二项式升幂展开并减去最高次项后应将得到的 B^k 换成 B_k. 于是得到方程组

$$\begin{cases}2B_1+1=0,\\ 3B_2+3B_1+1=0,\\ 4B_3+6B_2+4B_1+1=0,\\ 5B_4+10B_3+10B_2+5B_1+1=0,\\ \vdots\end{cases}.$$

由此解得

$$\begin{array}{ccccc}
B_1=-\dfrac{1}{2}, & B_2=\dfrac{1}{6}, & B_3=0, & B_4=-\dfrac{1}{30}, & B_5=0,\\
B_6=\dfrac{1}{42}, & B_7=0, & B_8=-\dfrac{1}{30}, & B_9=0, & B_{10}=\dfrac{5}{66},\\
B_{11}=0, & B_{12}=-\dfrac{691}{2730}, & B_{13}=0, & B_{14}=\dfrac{7}{6}, & B_{15}=0,\\
B_{16}=-\dfrac{3617}{510}, & B_{17}=0, & B_{18}=\dfrac{43867}{798}, & B_{19}=0, & B_{20}=-\dfrac{174611}{330},\quad\cdots
\end{array}$$

因为 B_n 是从整系数线性方程组中解出来的, 所以它们全是有理数. 因为

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{x}{2}\cdot\coth\frac{x}{2}$$

是偶函数, 其展开式

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

不能含有 x 的奇次幂, 所以 $B_{2k+1}=0$ $(k\geqslant 1)$.

最后就有展开式

$$x\cdot\coth x=x\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},\tag{$*$}$$

它对足够小的 x 值均成立.

从 $\sinh x$ 的无穷乘积表达式 (定理 1.19.8)

$$\sinh x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

出发, 取绝对值, 得到

$$|\sinh x| = |x| \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|,$$

对 $x \neq 0$, 取对数, 得到无穷级数

$$\ln|\sinh x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

逐项微分就得到展开式

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}.$$

于是从 $\pi x \cdot \coth \pi x$ 的部分分式展开式

$$\pi x \cdot \coth \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2+n^2}$$

出发, 因为当 $|x|<1$ 时,

$$\frac{2x^2}{x^2+n^2} = \frac{\frac{2x^2}{n^2}}{\frac{x^2}{n^2}+1} = -2\cdot\frac{-\frac{x^2}{n^2}}{1-\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)} = -2\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^m,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2+n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m}}{n^{2m}} = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}x^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}},$$

我们得到幂级数展开式

$$\pi x \cdot \coth \pi x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}s_{2n}x^{2n} \quad (|x|<1),$$

其中 s_{2n} 表示级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}$ 的和.

将等式 $(*)$ 中的 x 换成 πx, 就有

$$\pi x \cdot \coth \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

于是我们得到了 $\pi x \cdot \coth \pi x$ 的两个展开式, 从而

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\cdot s_{2n}.$$

另外, 由

$$s_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}=\frac{(2\pi)^{2n}}{(-1)^{n-1}\cdot 2(2n)!}\cdot B_{2n}$$

可得

$$s_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}, s_4=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90},\cdots.$$

借助 Cauchy–Hadamard 定理, 对级数

$$x\cdot\coth x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

我们有

$$\rho_{2n-1}=0,\rho_{2n}=\sqrt[2n]{\left|\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\right|}=\sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\cdot s_{2n}}=\frac{1}{\pi}\sqrt[2n]{2s_{2n}},$$

$$\Longrightarrow\ \rho=\limsup_{m\to\infty}\rho_m=\frac{1}{\pi}\ \Longrightarrow\ R=\frac{1}{\rho}=\pi.$$

故最初的级数

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\coth\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

有收敛半径 2π.[36]

定理 1.27.35

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\in\mathbb{N}^*.\end{cases}$$

定义 1.27.36 对任意 $x\in\mathbb{C}$, 函数

$$F_x:\rho\mathbb{B}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{ze^{xz}}{e^z-1}$$

是解析函数. 我们通过母函数

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}z^k\quad(z\in\rho\mathbb{B},x\in\mathbb{C})$$

来定义 Bernoulli 多项式 $B_k(x)$.

由幂级数恒等定理可知每个 $B_k(x)$ 是唯一确定的, 而由下面的命题可知它们的确是多项式.

[36]若从复数域的观点看, 因为 $e^{\pm 2\pi i}=1$, 即 $\pm 2\pi i$ 都是函数 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 的间断点, 所以它展开成幂级数时的收敛半径不能超过 2π (参见注 1.28.4) .

命题 1.27.37 (1) $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$[37].

(2) $B_n(0)=B_n$.

(3) $B'_{n+1}(x)=(n+1)B_n(x)$.

(4) $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$[38].

(5) $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$.

证明 设 $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$. 我们有

$$\begin{aligned}F_x(z)=e^{xz}f(z)&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k z^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}z^j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{B_k}{k!}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

与 Bernoulli 多项式的定义比较即得 (1) . (2) 由 (1) 可立即推出. 而

$$\begin{aligned}B'_{n+1}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k x^{n-k}(n+1-k)\\&=(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}=(n+1)B_n(x),\end{aligned}$$

(3) 得证. 从

$$F_{x+1}(z)-F_x(z)=\frac{z\left[e^{(x+1)z}-e^{xz}\right]}{e^{z-1}}=ze^{xz}$$

可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(x+1)-B_k(x)}{k!}z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}z^k,$$

于是得证 (4) . 再从

$$F_{1-x}(z)=\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z-1}=\frac{-ze^{-xz}}{e^{-z}-1}=F_x(-z)$$

可得 (5) . □

[37]利用其与 Newton 二项式的相似性, 可将其在形式上写为

$$B_n(x)=(x+B)^n,$$

只不过在展开该二项式后应将得到的 B^k 换成 Bernoulli 数 B_k.

[38]综合 (3) (4) 可得对 $n\geqslant 1$, $\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x=0$. 这一性质与 Riemann 定理结合可得到 Euler–Maclaurin 求和公式的一类常用形式.

推论 1.27.38 前 4 个 Bernoulli 多项式如下:

$$\begin{aligned}
B_0(x)&=1,\\
B_1(x)&=x-\frac{1}{2},\\
B_2(x)&=x^2-x+\frac{1}{6},\\
B_3(x)&=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

1.28 复变函数

1.28.1 幂级数

例 1.28.1 由 d'Alembert 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 具有收敛半径 $R=1$. 而由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以此级数在收敛圆 $|z|=1$ 上也收敛.

例 1.28.2 由 d'Alembert 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 具有收敛半径 $R=1$. 当 $|z|=1$ 时, 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n},$$

由例 1.15.36 可知它也是收敛的 (除去 $\theta=0$ 即 $z=1$ 的情形) , 但不是绝对收敛的, 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

定理 1.28.3 幂级数在其收敛圆内部可以逐项微分, 也即, 若对 $|z|<R$, 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 则 $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}$.

证明 由 Cauchy–Hadamard 定理可见后一个级数的收敛半径也是 R. 对固定的点 z_0 以及 $|z|<R$, 我们有

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1}\right).$$

若取 $\rho\in(|z_0|,R)$, 则也可视 $|z|<\rho$, 于是

$$\left|c_n\left(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1}\right)\right|<n\cdot|c_n|\cdot\rho^{n-1}.$$

因为 R 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ 的收敛半径, 而 $\rho < R$, 所以由 Weierstrass 判别法, 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|\rho^{n-1}$ 收敛可推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1}\right)$ 收敛. 因此当 $z \to z_0$ 时逐项取极限就导出结果. □

注 1.28.4 因为在收敛圆以内, 幂级数之和及其各阶导数皆连续, 所以如果将函数按照 z 的幂次展开成级数, 则函数离原点最近的间断点与原点的距离就是这个展开式收敛半径的自然界限. 借助这一认识, 我们可以通过将实变函数置于复数域中研究来理解展开式具有某些特性的真正原因. 例如, 级数

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+z^2}$$

在 $z = \pm i$ 处有和函数的间断点, 这可以帮助我们理解实变函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开式收敛半径为 1 这一事实.

1.28.2　指数函数

定义 1.28.5

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

定理 1.28.6

$$e^{x+yi} = e^x \left(\cos y + i \sin y\right).$$

1.28.3　对数函数

定义 1.28.7 对 $w \neq 0$, w 的对数主值:

$$\ln w = \ln |w| + i \cdot \arg w.$$

注 1.28.8 对数主值的虚部含于 $(-\pi, \pi]$ 内:

$$-\pi < \mathrm{Im}(\ln w) \leqslant \pi.$$

定理 1.28.9 函数 $\ln w$ 在除去原点及负实轴以外的复平面上连续.

定理 1.28.10 在整个圆 $|w| < 1$ 内部, 成立展开式

$$\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{w^n}{n} + \cdots.$$

定理 1.28.11 在整个圆 $|w| < 1$ 内部, 成立展开式

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+w}{1-w} = w + \frac{w^3}{3} + \cdots + \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \cdots .$$

1.28.4　三角函数及反三角函数

定义 1.28.12

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

定理 1.28.13

$$\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}.$$

注 1.28.14 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的正整数次方以及它们的正整数次方的乘积都可以用倍角的正弦与余弦的线性组合表示. 例如,

$$\begin{aligned}\cos^4\sin^3 x &= \left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3\\ &= -\frac{1}{128i}\left(e^{2xi}-e^{-2xi}\right)^3\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)\\ &= -\frac{1}{128i}\left(e^{6xi}-3e^{2xi}+3e^{-2xi}-e^{-6xi}\right)\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)\\ &= -\frac{1}{128i}\left(e^{7xi}+e^{5xi}-3e^{3xi}-3e^{xi}+3e^{-xi}+3e^{-3xi}-e^{-5xi}-e^{-7xi}\right)\\ &= -\frac{1}{64}\left(\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x\right).\end{aligned}$$

定理 1.28.15

$$\cos yi = \frac{e^y+e^{-y}}{2} = \cosh y, \quad \sin yi = \frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot i = i\sinh y \quad (y\in\mathbb{R}).$$

定理 1.28.16

$$\cos(x+yi) = \cos x\cdot\cos yi - \sin x\cdot\sin yi = \cos x\cdot\cosh y - i\cdot\sin x\cdot\sinh y,$$

$$\sin(x+yi) = \sin x\cdot\cos yi + \cos x\cdot\sin yi = \sin x\cdot\cosh y + i\cdot\cos x\cdot\sinh y.$$

定义 1.28.17

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} \quad \left(z \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right),$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\cdot\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}} \quad (z\neq k\pi).$$

定理 1.28.18

$$\tan yi = i \cdot \tanh y, \quad \cot yi = -i \cdot \coth y.$$

定义 1.28.19 对 $w \neq \pm i$, w 的反正切的主值:

$$\arctan w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + wi}{1 - wi}.$$

注 1.28.20 反正切主值的实部含于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内:

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(\arctan w) < \frac{\pi}{2}.$$

定理 1.28.21 在整个圆 $|w| < 1$ 内部, 成立展开式

$$\arctan w = w - \frac{w^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \cdots .$$

定义 1.28.22 定义反正弦函数的主值如下:

(1) 当 $w = +1$ 时, $\arcsin w = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = -1$ 时, $\arcsin w = -\frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $w \neq \pm 1$ 时, $\arcsin w = \frac{1}{i} \ln \left(wi \pm \sqrt{1 - w^2} \right)$, 其中正负号由条件

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Re}(\arcsin w) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

确定 (若能唯一确定) ; 若以上两个实部皆等于 $\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$, 则将具有正虚部的值取作主值.

定理 1.28.23 在整个圆 $|w| < 1$ 内部, 成立展开式

$$\arcsin w = w + \frac{1}{2} \cdot \frac{w^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{w^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{w^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

注 1.28.24 对数函数与反三角函数之间的关系, 使得积分学中许多看似不同的公式可以合并到一起. 例如

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C \quad 与 \quad \int \frac{1}{x^2 + a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \,\mathrm{d}x = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C \quad 与 \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

将 x 替换为 xi, 就可将其中的一个归入另一个中.

1.28.5　乘方函数

定理 1.28.25 设 $a, b \in \mathbb{C}$, 其中 $a \neq 0$, 乘方 a^b:

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

定理 1.28.26 若 $|z| < 1$, 则对任意 $m \in \mathbb{C}$, 二项式级数

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} z^n + \cdots$$

收敛, 且这级数恰好表达二项式乘方的主值.

1.29　渐近分析基础

1.29.1　发散级数的广义求和

定义 1.29.1 (1) 线性求和法: 若级数 $\sum a_n$ 取广义和 A, 级数 $\sum b_n$ 取广义和 B, 则级数 $\sum(pa_n + qb_n)$ (其中 p 与 q 是两个任意常数) 必须取 $pA + qB$ 作为广义和.

(2) 正则求和法: 在通常意义下收敛于和 A 的级数必须具有广义和, 并且广义和同样等于 A.

¶ Poisson–Abel 法

定义 1.29.2 按照已给的数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, 作出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 若这级数关于 $0 < x < 1$ 收敛, 并且 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = A$, 则称 A 为已给级数 (在 Poisson 意义下) 的广义和.

例 1.29.3 考察三角级数 $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \ (\theta \in (-\pi, \pi])$.

若 $\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, 则对于 q 的倍数 n, 就有 $|\cos n\theta| = 1$, 违反了级数收敛的必要条件.

若 $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, 则将它展开成无穷连分数, 并作出其渐近分数 $\dfrac{m}{n}$, 那么应有

$$\left| \frac{\theta}{\pi} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2},$$

从而

$$|n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}.$$

即对于无穷多个 n,

$$|\cos\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n},$$

因此

$$|\cos n\theta| > 1 - \frac{\pi}{n},$$

此时收敛的必要条件也不成立. 故这级数对一切 θ 值都发散.

如果作出幂级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta x^n \quad (0 < x < 1),$$

由例 1.15.36 知, 对于 $\theta \neq 0$, 它的和是

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

因为当 $x \to 1^-$ 时上式趋近于 0, 所以对于 $\theta \neq 0$, 级数的广义和是 0. 如果 $\theta = 0$, 则级数显然有和 $+\infty$.

注 1.29.4 Poisson–Abel 法显然是线性的, 而其正则性可由 Abel 定理 (定理 1.15.10) 确定.

定理 1.29.5 (Tauber 定理) 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $0 < x < 1$ 时收敛, 且 $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 的各项满足

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

证明 ① 我们先从更为特殊的条件入手. 先假设

$$\lim_{n \to \infty} na_n = 0.$$

(由 Cauchy 定理 (Stolz 定理的特例) 可知此条件能推出定理条件.) 若设

$$\delta_n = \max_{k \geqslant n} |ka_k|,$$

则当 $n \to \infty$ 时, δ_n 单调递减趋近于 0. 对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $x \in (0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right]\right| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n|(1 - x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|na_n| x^n}{n} + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right|.\end{aligned}$$

当 $x \in (0,1)$ 时, 有不等式

$$1-x^n=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})<n(1-x),$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n=\frac{x^{N+1}}{1-x}<\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{N}|a_n|(1-x^n)\leqslant\sum_{n=0}^{N}|na_n|(1-x)\leqslant(1-x)(N+1)\delta_0.$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|na_n|x^n}{n}\leqslant\frac{\delta_{N+1}}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n\leqslant\frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)}.$$

取任意小的数 $\varepsilon>0$, 令

$$(1-x)(N+1)=\varepsilon,\quad 即\quad x=1-\frac{\varepsilon}{N+1},$$

则当 $N\to\infty$ 时, $x\to 1$. 现在取充分大的 N, 使得

$$\delta_{N+1}<\varepsilon^2,$$

且对应的 x 充分接近 1 以至于

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-A\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n-A\right|<(2+\delta_0)\cdot\varepsilon.$$

② 定理的一般情形也可化为 ① 中的特殊情形. 令

$$v_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n\quad(n\geqslant 1),$$

$$v_0=0,$$

则

$$a_n=\frac{v_n-v_{n-1}}{n}\quad(n\geqslant 1).$$

然后

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{n-1}}{n}x^n\\&=a_0+(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+1)}x^{n+1}.\end{aligned}$$

由定理条件, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{n}=0$. 因此

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{n}x^n+(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n,$$

对任意 $\varepsilon>0$, 选择 N 使得第二个和式每项中 $\left|\dfrac{v_n}{n}\right|<\varepsilon$, 从而

$$(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n\leqslant(1-x)\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n=(1-x)\varepsilon\frac{x^{N+1}}{1-x^{N+1}},$$

由此可得

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n=0.$$

这样就有

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+1)}x^{n+1}=A-a_0.$$

而对它已经可以使用 ① 所得结论, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+1)}=A-a_0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n}{n+1}=\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n}{n}-\sum_{n=1}^{m+1}\frac{v_{n-1}}{n}\\&=-\frac{v_m}{m+1}+\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n-v_{n-1}}{n}=-\frac{v_m}{m+1}+\sum_{n=1}^{m}a_n,\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A-a_0\implies\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A.$$

□

¶ **Cesàro 法**

定义 1.29.6 根据已给的数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的部分和 A_n, 逐步作出它们的算术平均

$$\alpha_0=A_0,\alpha_1=\frac{A_0+A_1}{2},\cdots,\alpha_n=\frac{A_0+A_1+\cdots+A_n}{n+1},\cdots.$$

如果 α_n 当 $n\to\infty$ 时有极限 A, 则称 A 为已给级数 (在 Cesàro 意义下) 的广义和.

例 1.29.7 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, 我们有

$$\alpha_{2k}=\frac{k+1}{2k+1},\ \alpha_{2k-1}=\frac{1}{2},$$

于是 $\alpha_n\to\frac{1}{2}$.

例 1.29.8 对级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta\quad(-\pi<\theta\leqslant\pi),$$

当 $\theta\neq 0$ 时, 我们有

$$A_n=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

然后

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{A_1+A_2+\cdots+A_{n+1}}{n+1}\\&=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{k=1}^{n+1}2\sin\frac{1}{2}\theta\cdot\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\\&=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin(n+2)\theta-\sin\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\\&\to\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

注 1.29.9 Cesàro 法显然是线性的, 而其正则性可由 Cauchy 定理确定.

定理 1.29.10 (Frobenius 定理) 如果用 Cesàro 法可求得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的有限“和” A, 则同时用 Poisson–Abel 法也可求得相同的和.

证明 先证明一个引理:

引理 如果用 Cesàro 法可求得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的有限“和” A, 则必有 $a_n=o(n)$.

【引理的证明: 由 $\alpha_{n-1}\to A$ 及 $\frac{n+1}{n}\alpha_n\to A$ 可知

$$\frac{(n+1)\alpha_n-n\alpha_{n-1}}{n}=\frac{A_n}{n}\to 0.$$

而这时也有

$$\frac{a_n}{n}=\frac{A_n}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{A_{n-1}}{n-1}\to 0.$$

这就证明了引理.】

设 $\alpha_n \to A$. 由引理及 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 对 $x \in (0,1)$ 收敛可知幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

关于 $0 < x < 1$ 收敛. 运用两次 Abel 变换可得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_n x^n.$$

又因为对 $x \in (0,1)$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \implies 1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

用 A 乘这个恒等式的两端, 再逐项减去前一恒等式, 就有

$$A - f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(A-\alpha_n)x^n.$$

而

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(A-\alpha_n)x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)(A-\alpha_n)x^n + (1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)(A-\alpha_n)x^n,$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 选取 N, 使得当 $n > N$ 时, $|A-\alpha_n| < \varepsilon$. 这时

$$\begin{aligned}(1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} (n+1)(A-\alpha_n)x^n &< \varepsilon(1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \left(x^{n+1}\right)' = \varepsilon(1-x)^2 \left(\sum_{n=N}^{\infty} x^{n+1}\right)' \\ &= \varepsilon x^N \left[1 + N(1-x)\right] \to \varepsilon \quad (x \to 1^-),\end{aligned}$$

从而

$$A - f(x) \to 0 \quad (x \to 1^-) \iff \lim_{x \to 1^-} f(x) = A.$$

$\square$

定理 1.29.11 (Hardy–Landau 定理) 若可用 Cesàro 法求得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的广义和 A, 且

$$ma_m > -C \quad (C \text{ 为常数}; m = 1,2,3,\cdots),$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

1.29.2 包络级数与渐近级数

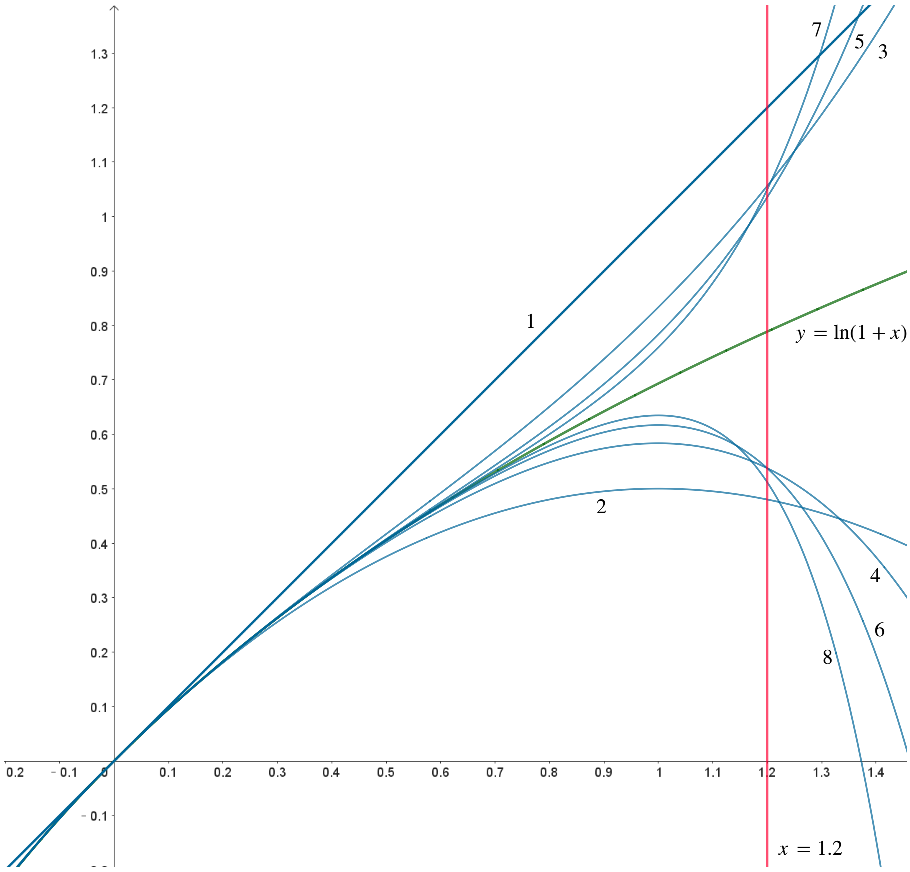

图 1.40: $\ln(1+x)$Taylor 展开式的前 8 阶

考虑函数 $\ln(1+x)$ 带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

其中余项

$$r_n(x) = \frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0 < \theta, \theta_1 < 1).$$

可以发现, 余项的绝对值小于对数级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ 被丢掉的第一项, 且与这一项符号相同. 现在对任意固定的 $x \in (0, +\infty)$, 我们对 $\ln(1+x)$ 的值进行估计:

① 若 $x \in (0, 1]$: 因为此时对数级收敛, 所以令 $n \to \infty$, 误差便趋于 0.

② 若 $x \in (1, +\infty)$: 这时所估计的项随 n 的增加增长到无穷大, 不能依靠 n 来使误差任意小, 但可以找到比较适合截断的 n. 例如, 当 x 接近 1 时, 只要

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1}x < 1, \quad 即 \quad n < \frac{1}{x-1},$$

对数级数的各项的绝对值减小. 因此选取 $n=\left\lfloor\dfrac{1}{x-1}\right\rfloor$ 截断级数能得到对 $\ln(1+x)$ 值较好的估计. 如图 1.40, 对固定的 $x=1.2$, 用 $n=4$(或6) 估计的误差约为 0.2509, 而用 $n=5$ 估计的误差约为 0.2468, 且用其他 n 值进行截断估计的误差都要更大.

定义 1.29.12 设给定数值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, 若其部分和依次地时而小于时而大于某个数 A, 即, 若由公式

$$A=a_0+a_1+\cdots+a_n+r_n$$

定义的余式是交错的, 则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 包络数 A.

注 1.29.13 由等式

$$r_n=a_{n+1}+r_{n+1}$$

可给出等价的定义:

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 包络数 A $\iff$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 是交错级数, 且余式 r_n 的绝对值小于 a_{n+1} 的绝对值, 并与其同号.

定义 1.29.14 设在同一个区域 $\mathcal{X}$ 上给定函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)$ 及某个函数 $A(x)$, x 的变化范围以有限的或无穷的数 ω 为聚点. 我们用等式

$$A(x)=a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x)+r_n(x)$$

来定义余式 $r_n(x)$. 若对任意固定的 n 有

$$\lim_{x\to\omega}\frac{r_n(x)}{a_n(x)}=0\quad\text{(假设至少对充分接近 }\omega\text{ 的 }x\text{ 而言 }a_n(x)\neq 0\text{)}\ ,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x)$ 为函数 $A(x)$ 在 $x=\omega$ 附近的渐近展开, 记为

$$A(x)\sim a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x)+\cdots\ .$$

定理 1.29.15 若

$$A(x)\sim a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x)+\cdots\ ,$$

则

$$\lim_{x\to\omega}\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}=0.$$

证明 因为

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}=\frac{r_n(x)-r_{n+1}(x)}{a_n(x)}=\frac{r_n(x)}{a_n(x)}-\frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)}\cdot\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)},$$

所以

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}=\frac{\frac{r_n(x)}{a_n(x)}}{1+\frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)}}\to 0\quad(x\to\omega).$$

□

定理 1.29.16 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)$ 包络函数 $A(x)$, 且 $\lim_{x\to\omega}\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}=0$, 则这个级数就是 $A(x)$ 在 $x=\omega$ 附近的渐近展开.

注 1.29.17

$$\text{在 } x=\infty \text{ 附近, } A(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n\text{固定}, r_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[A(x)-a_0-\frac{a_1}{x}-\frac{a_2}{x^2}-\cdots-\frac{a_n}{x^n}\right]\cdot x^n=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[A(x)-a_0-\frac{a_1}{x}-\frac{a_2}{x^2}-\cdots-\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right]\cdot x^n=a_n$$

(这表明这种类型的渐近展开的唯一性)

定理 1.29.18 乘积 $A(x)\cdot B(x)$ 的渐近展开可以通过把各自的渐近展开式按 Cauchy 乘积的规则得到.

定理 1.29.19 设函数 $F(y)$ 在 $y=0$ 处解析, 即在这个点的邻域中可展开为幂级数:

$$F(y)=\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m y^m=\beta_0+\beta_1 y+\beta_2 y^2+\cdots+\beta_m y^m+\cdots,$$

函数 $A(x)$ 具有无自由项的渐近展开:

$$A(x)\sim\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots.$$

若 $A(x)$ 的每一个幂 $[A(x)]^m$ 可用 $A(x)$ 的渐近展开式代入且形式上合并同类项, 则函数 $F(A(x))$ 也有渐近展开, 这个展开可由上述展开式得到.

定理 1.29.20 设函数 $A(x)$ 在区间 $\mathcal{X}=[a,+\infty)$ 连续并有渐近展开式

$$A(x)\sim\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots.$$

则对于这个函数存在由任意 $x\geqslant a$ 到 $+\infty$ 的有限积分, 并且这个积分作为 x 的函数也有渐近展开式

$$\int_x^{\infty}A(x)\,\mathrm{d}x\sim\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots.$$

1.29.3 Euler–Maclaurin 求和公式

引理 1.29.21 设 $m\in\mathbb{N}^*$, $f\in C^{2m+1}[0,1]$. 则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(x)\bigg|_0^1-\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 在高阶分部积分公式 (定理 1.3.1, 对称形式) 中, 令 $u:=f'(x)$, $v:=B_{2m+1}(x)$, 并取 $a=0$, $b=1$, $n=2m-1$. 利用 $B'_{n+1}(x)=(n+1)B_n(x)$, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)(2m+1)!B_1(1-x)\,\mathrm{d}x=&\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(2m+1)!}{(k+2)!}\left[f^{(k+1)}(0)B_{k+2}(1)-f^{(k+1)}(1)B_{k+2}(0)\right]\\&+\int_0^1 f^{(2m+1)}(x)B_{2m+1}(1-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

两边除以 $(2m+1)!$, 就得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_1(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x=&\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{B_{k+2}(1)f^{(k+1)}(0)-B_{k+2}(0)f^{(k+1)}(1)}{(k+2)!}\\&+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(1-x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$, 并变换求和哑标, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=&\sum_{j=2}^{2m+1}\frac{f^{(j-1)}(1)B_j(0)-f^{(j-1)}(0)B_j(1)}{j!}\\&+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $B_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$, 所以由分部积分,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 B'_1(x)f(x)\,\mathrm{d}x=B_1(x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 B_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]-\int_0^1 B_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而由 $B_j(0)=B_j$, $B_j(1)=(-1)^jB_j$ 及 $B_{2j+1}=0$ $(j\geqslant 1)$ 可得

$$\sum_{j=2}^{2m+1}\frac{f^{(j-1)}(1)B_j(0)-f^{(j-1)}(0)B_j(1)}{j!}=\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}f^{(2j-1)}(x)\bigg|_0^1,$$

故

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(x)\bigg|_0^1-\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

下面我们记 $\widetilde{B}_n$ 为函数 $B_n(x)|_{[0,1)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的延拓, 即

$$\widetilde{B}_n(x)\coloneqq B_n(x-\lfloor x\rfloor),\quad x\in\mathbb{R}.$$

由命题 1.27.37 (4) 可知, 对 $n\geqslant 2$, $B_n(0)=B_n(1)$, 再结合 (3) 可得 $\widetilde{B}_n\in C^{n-2}(\mathbb{R})$ $(n\geqslant 2)$.

定理 1.29.22 (Euler–Maclaurin 求和公式) 设 $a,b\in\mathbb{Z}$, $a<b$, $f\in C^{2m+1}[a,b]$ ($m\in\mathbb{N}^*$[39]). 则

$$\sum_{k=a}^{b}f(k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(x)\bigg|_a^b$$
$$+\frac{1}{(2m+1)!}\int_a^b \widetilde{B}_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 $f_k(x)\coloneqq f(a+k+x)$ $(x\in[0,1])$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{b-a-1}\int_{a+k}^{a+k+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{b-a-1}\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

由引理 1.29.21,

$$\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[f_k(0)+f_k(1)\right]-\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}f_k^{(2j-1)}(x)\bigg|_0^1-\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(x)f_k^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

而

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{b-a-1}\left[f_k(0)+f_k(1)\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{b-a-1}\left[f(a+k)+f(a+k+1)\right]$$
$$=\sum_{k=a}^{b}f(k)-\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right],$$

---

[39] 当 $m=0$ 时只需将求和项视作 0, 公式仍成立 (这种形式更常用) .

且

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_{2m+1}(x)f_k^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \widetilde{B}_{2m+1}(a+k+x)f^{(2m+1)}(a+k+x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{a+k}^{a+k+1} \widetilde{B}_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{b-a-1}[f_k(0)+f_k(1)] - \sum_{k=0}^{b-a-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}f_k^{(2j-1)}(x)\Big|_0^1 \\ & - \frac{1}{(2m+1)!}\sum_{k=0}^{b-a-1}\int_{a+k}^{a+k+1}\widetilde{B}_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ =& \sum_{k=a}^{b} f(k) - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\sum_{k=0}^{b-a-1} f_k^{(2j-1)}(x)\Big|_0^1 \\ & - \frac{1}{(2m+1)!}\int_a^b \widetilde{B}_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ =& \sum_{k=a}^{b} f(k) - \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}f^{(2j-1)}(x)\Big|_a^b \\ & - \frac{1}{(2m+1)!}\int_a^b \widetilde{B}_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} f(k) =& \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(x)\Big|_a^b \\ & + \frac{1}{(2m+1)!}\int_a^b \widetilde{B}_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例 1.29.23 (Faulhaber 公式) 对 $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \sum_{2j<m+1}\binom{m}{2j-1}\frac{B_{2j}}{2j}n^{m-2j+1}.$$

证明 对 $f \coloneqq x^m$, 我们有

$$f^{(l)} = \begin{cases}\dbinom{m}{l} l!x^{m-l}, & l \leqslant m, \\ 0, & l > m.\end{cases}$$

当 $2j-1<m$ 时,

$$\frac{B_{2j}}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n) = \frac{B_{2j}}{(2j)!}\binom{m}{2j-1}(2j-1)!n^{m-2j+1} = \frac{B_{2j}}{2j}\binom{m}{2j-1}n^{m-2j+1}.$$

因为 $f^{(m)}(x)\Big|_0^n = 0$, 代入 $a=0$ 和 $b=n$ 就得到所要的公式. □

1.30 含参变量积分

1.30.1 基本理论

定理 1.30.1 若对于 $\mathcal{Y}$ 中的任意 y 值, 就区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上的 x 来说, 函数 $f(x,y)$ 是连续的 (可积的) , 并当 $y\to y_0$ 时一致趋于极限函数 $\varphi(x)$, 则 $\varphi(x)$ 也是连续的 (可积的) .

将函数项级数理论中的 Dini 定理 (定理 1.27.15) 推广, 我们有

定理 1.30.2 (广义 Dini 定理) 假设对于 $\mathcal{Y}$ 中的任意 y 值, 就区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上的 x 来说, 函数 $f(x,y)$ 是连续的, 并且当 y 值增加时, $f(x,y)$ 也单调递增趋于连续的极限函数 $\varphi(x)$, 则对于 $\mathcal{X}$ 上的 x 值, 这个逼近一定是一致的.

定理 1.30.3 设对于 $\mathcal{X}$ 中每一个 x 值对应一个简单极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x),$$

且对于 $\mathcal{Y}$ 中每一个 y 值对应一个简单极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y),$$

若当 $y\to y_0$ 时函数 $f(x,y)$ 对于 $\mathcal{X}$ 中的 x 值一致趋向于极限函数 $\varphi(x)$, 则下式中的两个累次极限存在且相等:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

定理 1.30.4 若函数 $f(x,y)$ 当 y 为常量时对于 $[a,b]$ 上的 x 值可积, 并且当 $y\to y_0$ 时对于 x 一致趋于极限函数 $\varphi(x)$, 则

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 1.30.5 若函数 $f(x,y)$ 在 y 不变时对于 $[a,b]$ 上的 x 值连续, 且在 y 增加时单调递增趋于连续的极限函数, 则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.30.6 若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上是连续的, 则 $I(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上是参数 y 的连续函数.

定理 1.30.7 设函数 $f(x,y)$ 定义在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上, 当 y 为 $[c,d]$ 上的任意常量时, $f(x,y)$ 对于 x 是连续的. 若在矩形区域上偏导数 $f_y'(x,y)$ 存在, 同时 $f_y'(x,y)$ 作为二元函数是连续的, 则当 y 为 $[c,d]$ 上任意值时, 有

$$D_y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b D_y f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.30.8 若函数 $f(x,y)$ (对于两个变量) 在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

例 1.30.9

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_a^b\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

例 1.30.10 (连续性条件不能省略) 考虑函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在矩形 $[0,1]\times[0,1]$ 上的情形: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点间断, 而

$$\int_0^1\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1-\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

定理 1.30.11 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上是连续的, 曲线

$$x=\alpha(y),\quad x=\beta(y)\quad (y\in[c,d])$$

是连续的, 且它没有落在矩形之外, 则 $I(y)=\displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上是 y 的连续函数. 更进一步地, 若 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上有连续偏导数 $f_y'(x,y)$, 且导数 $\alpha'(y)$ 与 $\beta'(y)$ 都存在, 则

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y'(x,y)\,\mathrm{d}x+\beta'(y)\cdot f\left(\beta(y),y\right)-\alpha'(y)\cdot f\left(\alpha(y),y\right).$$

定理 1.30.12 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的各项在 $[a,b]$ 上是 (常义) 可积函数, 且级数一致收敛, 而 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对可积函数[40], 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)g(x)$ 可以逐项积分.

[40]可以是在广义积分的意义下.

第二章　数学分析中的反例

反例 1 在任何区间上都没有原函数的可积函数.

设 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 为区间 $[0,1]$ 中的全体有理点, 令

$$f(x) = \sum_{r_k < x} \frac{1}{2^k}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

则函数 f 在 $[0,1]$ 上严格递增, 且 f 在 $[0,1]$ 中的任一有理点间断而在任一无理点连续. 又 f 在点 r_n 处的跳跃度恰好等于 $\dfrac{1}{2^n}$. 因为 f 在 $[0,1]$ 上单调, 所以它在 $[0,1]$ 上可积. 但是, 由于 f 的跳跃间断点的集合在 $[0,1]$ 中稠密, 因而 f 在 $[0,1]$ 的任何子区间上都不可能有原函数.

反例 2 在闭区间上有原函数但不可积的函数.

设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 f 在闭区间 $[-1,1]$ 的每一点 x 处都有 (有限) 导数

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因此, 函数 g 有原函数 f. 但是, 由于 g 在区间 $[-1,1]$ 上无界, 因而它在 $[-1,1]$ 上并不可积.

反例 3 闭区间上具有原函数的有界函数而不可积.

Volterra 有例如下:

我们从 $[0,1]$ 中去掉其中间的长度为 $\dfrac{1}{4}$ 的开区间. 然后从剩下来的两个闭区间中各去掉其中间的长度为 $\dfrac{1}{4^2}$ 的开区间. 在第 n 步, 从第 $n-1$ 步剩下来的 2^{n-1} 个闭区间中各去掉其中间的长度为 $\dfrac{1}{4^n}$ 的开区间. 无限地继续这个过程, 我们从 $[0,1]$ 内去掉了一系列总长度为

$$\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{1}{2}$$

的开区间, 剩下来的点形成闭集 E, 显然, E 不是零测集. 设 d_n 表示第 n 步后剩下的各个闭区间的长度. 从这个构造方法, 显然, $d_{n+1} < \dfrac{d_n}{2}$; 因此 $n \to \infty$ 时 $d_n \to 0$. 这说明 $[0,1]$ 的子区间, 无论多么小, 都不能整个地含于 E.

现在我们定义函数 f. 对 $x \in E$, 令 $f(x) = 0$. 若 (α, β) 是去掉的开区间之一, 则紧接着 α 的右边定义

$$f(x) = (x-\alpha)^2 \sin \frac{1}{x-\alpha},$$

紧接着 β 的右边定义

$$f(x) = (x-\beta)^2 \sin \frac{1}{\beta - x},$$

直至最靠近 (α, β) 中间的极大值点 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$; 在 $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ 内, 规定 $f(x)$ 等于这个极大值.

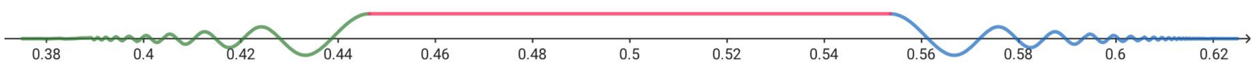

图 2.1: Volterra 函数在 $\left[\dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}\right]$ 上的图像

这样, 我们在整个区间 $[0,1]$ 上定义了函数 f, 它是连续函数.

显然, f 在去掉的各个区间 (α, β) 内可微, 即使在 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 处也是如此, 在这两个点的导数是 0. 对充分接近 α 的 $x\,(x > \alpha)$,

$$f'(x) = 2(x-\alpha) \sin \frac{1}{x-\alpha} - \cos \frac{1}{x-\alpha};$$

若 $x \to \alpha$, 右端的第一项趋于 0, 而第二项在 $+1$ 与 -1 之间振动. 在 β 的左邻域内情况类似.

在点 α, β 处, 甚至在每个点 $x_0 \in E$ 处, $f'(x_0)$ 都存在, 并且 $f'(x_0) = 0$. 这是因为:

先设 $x > x_0$. 若 $x \in E$, 则

$$f(x) - f(x_0) = 0 - 0 = 0;$$

若 x 存在于某个被去掉的区间 (α, β) 内, 则

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| \leqslant (x-\alpha)^2 \leqslant (x-x_0)^2;$$

因此, 无论什么时候都有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant |x - x_0|.$$

$x < x_0$ 时仍然如此. 令 $x \to x_0$, 便得 $f'(x_0) = 0$.

这样, $f'(x)$ 处处存在, 但它在 E 上不连续. 事实上, 若 $x_0 \in E$, 则在 x_0 的每个邻域内存在被去掉的区间的点, 因而也存在被去掉的区间之一的端点; 但我们知道, 在这样的端点处, f' 的振幅等于 2. 由于 E 不是零测集, 因此 f' 不可积.

反例 4 一个可积函数, 在某个可数集上改变它的值后, 就影响了它的可积性.

设 $f(x) \equiv 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$, A 是 $[0,1]$ 中的一切有理数所组成之集. 我们在 A 上改变 f 的值处处为 1, 就得到了 Dirichlet 函数, 从而就不再可积了.

反例 5 一个可积函数, 在某个可数集上任意改变它的值 (但这些数值全体要组成有界集合) , 而不影响它的可积性.

设 A 是由点 0 和点 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}\,(n = 1, 2, \cdots)$ 组成的 $[0,1]$ 的一个可数子集, 在 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right), & x \notin A, \\ 0, & x \in A. \end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 上可积. 如果在 A 上改变 f 以任何数值, 但这些数值全体要组成有界集合, 那么得到的函数在 $[0,1]$ 上仍然有界且几乎处处连续, 因而它在 $[0,1]$ 上仍可积.

反例 6 存在函数 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) $f \in \mathcal{R}[0,1]$;

(2) $f \notin C[0,1]$;

(3) f 在 $[0,1]$ 上有原函数.

设

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $F(x)$ 的导函数

$$f(x) \coloneqq F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界且仅在 $x = 0$ 处不连续, 所以 $f \in \mathcal{R}[0,1]$, $f \notin C[0,1]$, 同时 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

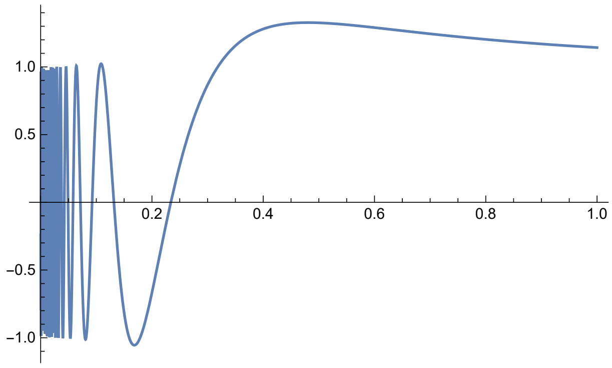

图 2.2: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的图像

第三章　数学分析中的经典问题

问题 1 假设 $a_n>0,\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<+\infty$. 设 $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{\sqrt{r_k}}<+\infty$.

证明 由 r_n 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{r_k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k-r_{k+1}}{\sqrt{r_k}}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{r_{k+1}}^{r_k}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{r_k}-\sqrt{r_{k+1}})<+\infty.$$

□

注 3.0.1 这说明任给一个收敛的正项级数, 总能构造出收敛速度更慢的正项级数.

问题 2 假设 $a_n>0,\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$. 设 $s_1\coloneqq 0$, $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k$, 则 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{a_k}{s_k}<+\infty$.

证明 由 s_n 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{s_k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_k}\geqslant\sum_{k=2}^{\infty}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}(\ln s_{k+1}-\ln s_k)=+\infty.$$

□

注 3.0.2 这说明任给一个发散的正项级数, 总能构造出发散速度更慢的正项级数.

问题 3 假设 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b|f(x)|\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b|f(x)|\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\left(\int_a^b\sqrt{|f(x)|}\cdot\sqrt{|f(x)|}\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b\sqrt{|f(x)|}\cdot\sqrt{|f(x)|}\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_a^b|f(x)|\cos^2x\,\mathrm{d}x+\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_a^b|f(x)|\sin^2x\,\mathrm{d}x\\&=\text{RHS}.\end{aligned}$$

□

问题 4 若 $f\in C[0,1]$, 且对任意 $x\in[0,1]$, 都有

$$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1-x^2}{2},$$

则

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{3}.$$

证明 设

$$F(t):=\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1-t^2}{2}.$$

由 Hölder 不等式,

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\geqslant\left(\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(tF(t)\Big|_0^1-\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\int_0^1\frac{1-t^2}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{9},$$

故

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{3}.$$

□

问题 5 若 $f\in C^1[a,b]$, $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b\left|f'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 由 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$f^2(x)\xlongequal{f(a)=0}\left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^x\left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t\cdot\int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t\leqslant(x-a)\int_a^b\left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t.$$

两端同时积分即得

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b\left|f'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 6 (参考 Opial 不等式 (定理 1.12.3)) 若 $g\in C^1[0,a]$, $g(0)=0$, 证明:

$$\int_0^a\left|g(x)g'(x)\right|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a\left|g'(x)\right|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立 $\iff$ $g(x)=cx$ (c 为常数) .

证明 记 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\left|g'(t)\right|\,\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant a)$, 则 $f'(x)=|g'(x)|$, 由 $g(0)=0$ 知

$$|g(x)|=|g(x)-g(0)|=\left|\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x\left|g'(t)\right|\,\mathrm{d}t=f(x),$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^a |g(x)g'(x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^a f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}f(x)\\ &= \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\left(\int_0^a |g'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^a 1\cdot|g'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^a 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^a |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\int_0^a |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $g(x)=cx$ 时, 不等式显然成立. 只需证明必要性. 如上已证

$$\int_0^a |g(x)g'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^a |g'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

若不等式等号成立, 则

$$\left(\int_0^a |g'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 = a\int_0^a |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

记 $A=\int_0^a |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t$, $B=\int_0^a |g'(t)|\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int_0^a (1+\lambda|g'(x)|)^2\,\mathrm{d}x = A\lambda^2+2B\lambda+a=0$$

的判别式 $\Delta=0$. 因而该二次方程有唯一根:

$$\lambda_0=-\frac{B}{A}\quad(A\neq 0).$$

但 $g'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 由 $\int_0^a\left(1-\frac{B}{A}|g'(x)|\right)^2\mathrm{d}x=0$ 可得 $B|g'(x)|=A$.

当 $A\neq 0$ 时, B 也不为零, 故 $g'(x)=\pm\frac{A}{B}$, $g(x)=\pm\frac{A}{B}x+c_1$. 又由于 $g(0)=0$, $c_1=0$, 所以 $g(x)=cx$ $\left(c=\pm\frac{A}{B}\text{ 为常数}\right)$.

最后, 假若 $A=0$, 即 $\int_0^a |g'(x)|^2\,\mathrm{d}x=0$, 由 $g'(x)$ 连续知 $g'(x)\equiv 0$ (在 $[0,a]$ 上) . 从而 $g(x)=c_2$, 但 $g(0)=0$, 所以 $g(x)\equiv 0$, 属于 $g(x)=cx$ 中 $c=0$ 的特殊情况. 总之, 不论 A 是否为 0, 当不等式等号成立时, $g(x)=cx$ (c 为常数) . 必要性获证. □

注 3.0.3 对任意区间 $[a,b]$, 若 $g\in C^1[a,b]$, $g(a)=0$, 则

$$\int_a^b |g(x)g'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b |g'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $g(x)=c(x-a)$ (c 为常数) .

问题 7 设正值函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 1 由条件知 $f(x), \ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 将 $[0,1]\, n$ 等分, 作积分和,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

所以

$$\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left[\lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

由均值不等式,

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right),$$

故

$$\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

证明 2 取对数, 原式等价于 $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 记 $S = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 即要证

$$\int_0^1 \left(\ln f(x) - \ln S\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

事实上,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\ln f(x) - \ln S\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln\frac{f(x)}{S}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{S}-1\right)\right]\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{S}-1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{S}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 1 = 0.\end{aligned}$$

□

问题 8 设 $a>0$, 证明: $\displaystyle\int_0^{\pi} x a^{\sin x}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^3}{4}.$

证明 令 $x=t+\dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} xa^{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ta^{\cos t}\,\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t}\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xa^{\sin x}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\,\mathrm{d}x&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2=\pi\cdot\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^3}{4}.\end{aligned}$$

□

问题 9 设 $f\in C[a,b]$, 且 $\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^n}\right]^{\frac{1}{n}}=1.$$

证明 因连续性, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=1$. 暂设 x_0 为内点, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当

$$x\in U=U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

时, 有 $1\leqslant f(x)\leqslant 1+\varepsilon$, 从而

$$(b-a)^{\frac{1}{n}}\geqslant\left[\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^n}\right]^{\frac{1}{n}}\geqslant\left[\int_U\frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^n}\right]^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot(2\delta)^{\frac{1}{n}}.$$

令 $n\to\infty$, 得

$$1\geqslant\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^n}\right]^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 欲证的等式成立. (若 $x_0=a$ 或 $x_0=b$, 只需将双侧邻域改为单侧邻域, $(2\delta)^{\frac{1}{n}}$ 改为 $\delta^{\frac{1}{n}}$ 即可.) □

问题 10 设 $f\in C^1[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明:

$$\int_a^b x^2\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}.$$

证明 由分部积分,

$$1=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=xf^2(x)\Big|_a^b-2\int_a^b f(x)f'(x)x\,\mathrm{d}x=-2\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

再由 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$1=4\left(\int_a^b f(x)f'(x)x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b x^2\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=4\int_a^b x^2\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_a^b x^2\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}.$$

□

问题 11 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 则

$$\max_{x\in[0,1]}|f'(x)| \leqslant |f(1)-f(0)| + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 由微分中值定理, 存在 $\zeta \in (0,1)$, 使得 $f(1)-f(0)=f'(\zeta)$. 再由介值定理, 存在 $\eta\in[0,1]$, 使得 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(\eta)|$. 根据 Newton–Leibniz 公式,

$$f'(\eta)=f'(\zeta)+\int_\zeta^\eta f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

故

$$|f'(\eta)|=\left|f'(\zeta)+\int_\zeta^\eta f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |f'(\zeta)|+\left|\int_\zeta^\eta f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |f'(\zeta)|+\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 12 若 $f\in C[a,b]$, 且对任意 $g\in C[a,b], g(a)=g(b)=0$, 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

则 $f=0$.

证明 取 $g(x)=f(x)\sin\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right)$, 则对任意 $x\in[a,b]$, $f(x)g(x)\geqslant 0$. 而

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

所以 $f \xlongequal{\text{a.e.}} 0$, 而 $f\in C[a,b]$, 故 $f=0$. □

注 3.0.4 此题中取的 g 是一个在端点退化的非负光滑函数. 若不要求端点处退化, 只要取 $g=f(x)$ 即能推出结论.

问题 13 若 $f\in C[a,b]$, 且对任意 $g\in C^1[a,b], g(a)=g(b)=0$, 都有

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

则 $f=C$ (C 为常数) .

证明 取

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

欲证 f 为一常数, 只需证

$$\int_a^b (f(x)-c)^2\ \mathrm{d}x=0.$$

而

$$\int_a^b (f(x)-c)\ \mathrm{d}x=0,$$

故只需证

$$\int_a^b f(x)\left(f(x)-c\right)\ \mathrm{d}x=0.$$

取

$$g(x)=\int_a^x (f(t)-c)\ \mathrm{d}t,$$

则满足 $g(a)=g(b)=0$, 且 $g'(x)=f(x)-c$. 再由

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

即得证. □

问题 14 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a_n} x^n\,\mathrm{d}x=2$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

证明 由题, $2=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a_n}x^n\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{n+1}}{n+1}$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{n+1}}{2(n+1)}=1$. 令 $b_{n+1}=\dfrac{a_n^{n+1}}{2(n+1)}$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln b_{n+1}=0$. 进一步得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln b_{n+1}}{n+1}=0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}=0,\ \lim_{n\to\infty}b_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}=1.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(2(n+1))^{\frac{1}{n+1}}}=1.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2(n+1))^{\frac{1}{n+1}}=1.$$

□

问题 15 设函数 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, $n\in\mathbb{N}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| \,\mathrm{d}x \xlongequal{u=nx} \frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| \,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin u \,\mathrm{d}u = \frac{2}{n}.$$

因为 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 由积分第一中值定理得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{\pi}{n}.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{\pi}{n} \xlongequal{\text{积分定义}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

□

注 3.0.5 本题函数 f 的条件可减弱为在 $f \in \mathcal{R}[0,\pi]$. 证法如下:

证明 同上有 $\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}$.$n$ 等分 $[0,\pi]$, 记 $m_k = \inf\left\{f(x) \mid x \in \left[\frac{k-1}{n}\pi, \frac{k}{n}\pi\right]\right\}$, $M_k = \sup\left\{f(x) \mid x \in \left[\frac{k-1}{n}\pi, \frac{k}{n}\pi\right]\right\}$, 则

$$m_k \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x \leqslant M_k \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| \,\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{2}{n} m_k \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{n} M_k.$$

于是

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\pi}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{\pi}{n}.$$

由 f 在 $[0,\pi]$ 上可积, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\pi}{n} = \int_0^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{\pi}{n},$$

由夹逼定理, 立即有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

□

问题 16 设 f 与 g 皆为 $[a,b]$ 上的正值连续函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.$$

证明 1 设 $a_n=\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x$. 由 Cauchy–Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}
a_n^2&=\left[\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\
&=\left[\int_a^b g^{\frac12}(x)f^{\frac{n-1}{2}}(x)\cdot g^{\frac12}(x)f^{\frac{n+1}{2}}(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\
&\leqslant\int_a^b\left[g^{\frac12}(x)f^{\frac{n-1}{2}}(x)\right]^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\left[g^{\frac12}(x)f^{\frac{n+1}{2}}(x)\right]^2\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x=a_{n-1}a_{n+1}.
\end{aligned}$$

因为 f 与 g 皆为 $[a,b]$ 上的正值连续函数, 所以 $a_n>0$. 从而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

数列 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 为单调增数列. 令 $M=\displaystyle\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}>0$, 则

$$b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{M\displaystyle\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x}=M.$$

故 $\{b_n\}$ 收敛. 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}&=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\\
&=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.
\end{aligned}$$

$\square$

证明 2 设 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$, 对于给定的 $0<\varepsilon<M$, 令

$$A=\{x\mid f(x)>M-\varepsilon,\ x\in(a,b)\}\neq\varnothing,$$
$$B=\left\{x\mid f(x)>M-\frac{\varepsilon}{2},\ x\in(a,b)\right\}\neq\varnothing.$$

因为 f 连续, 所以 A,B 皆为开集, 且 $B\subset A\subset[a,b]$. 因此

$$\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_A g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\geqslant(M-\varepsilon)\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_B g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant(M-\frac{\varepsilon}{2})^n\int_B g(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}M&=\frac{M\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\displaystyle\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\\&\geqslant\frac{\displaystyle\int_A g(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant(M-\varepsilon)\frac{\displaystyle\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[a,b]-A}g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\\&=(M-\varepsilon)\frac{1}{1+\dfrac{\displaystyle\int_{[a,b]-A}g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}},\end{aligned}$$

又

$$0<\frac{\displaystyle\int_{[a,b]-A}g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\displaystyle\int_{[a,b]-A}g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_B g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{(M-\varepsilon)^n\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}{\left(M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^n\displaystyle\int_B g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(M-\varepsilon)^n}{\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{M-\varepsilon}{M-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^n=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{[a,b]-A}g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}=0.$$

因此, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$(M-\varepsilon)\frac{1}{1+\dfrac{\displaystyle\int_{[a,b]-A}g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_A g(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}}>M-2\varepsilon.$$

所以

$$M \geqslant \frac{\displaystyle\int_a^b g(x) f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x) f^n(x)\,\mathrm{d}x} > M - 2\varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_a^b g(x) f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x) f^n(x)\,\mathrm{d}x} = M = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.$$

□

问题 17 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

证明 1 记 $a_n = \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$, $b_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2$. 因为

$$0 < a_n = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left[\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right]\left[\frac{2n-1}{(2n)^2}\right] < \frac{2n-1}{(2n)^2},$$

$$0 < b_n = 2\cdot\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\right)\cdots\left[\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)(2n-1)}\right]\left[\frac{2n}{(2n+1)^2}\right] < \frac{4n}{(2n+1)^2},$$

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 进而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0$. 结合

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\ \text{为奇数} \end{cases}$$

可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$. □

证明 2 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < \pi$, 则

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $0 < \sin\dfrac{\pi-\varepsilon}{2} < 1$ 知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} = 0$. 从而对上述 ε, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$0 < \frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $n > N$ 时, 就有 $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.

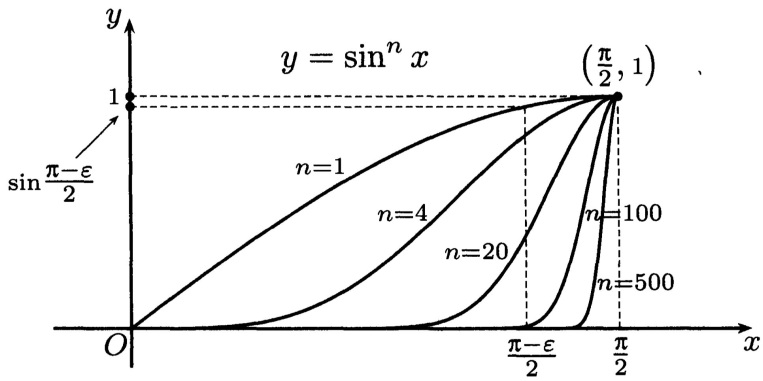

图 3.1: 证明 2 源于几何上的观察

□

注 3.0.6 由本题结论还能得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\cos t} \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,\mathrm{d}t=0.$$

问题 18 设 $f\in C[-1,1]$, 证明: $\lim\limits_{h\to0^+}\displaystyle\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\pi f(0)$.

证明 1 由 $f\in C[-1,1]$ 可知存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M\,(x\in[-1,1])$. 设 $0<a<1$, 则

$$\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{h^a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{h^a}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=I_1(h)+I_2(h),$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1(h)&=\int_0^{h^a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{\exists\xi\in[0,h^a]}f(\xi)\int_0^{h^a}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=f(\xi)\arctan\frac{x}{h}\Big|_0^{h^a}=f(\xi)\arctan\frac{1}{h^{1-a}}\to\frac{\pi}{2}f(0)\quad(h\to0^+),\\
|I_2(h)|&=\left|\int_{h^a}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_{h^a}^1\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=M\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{h^{1-a}}\right)\to0\quad(h\to0^+).
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

同理可得

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^0\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

故

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

□

证明 2 只需证

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

因为

$$\frac{\pi}{2}f(0)=\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(0)\,\mathrm{d}x,$$

所以问题归结为证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x=0.$$

而

$$\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x=\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x+\int_\delta^1 \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 当 $\delta>0$ 充分小时, 在 $[0,\delta]$ 上, $|f(x)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{\pi}$. 从而

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}\left|f(x)-f(0)\right|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{h}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

再将 δ 固定, 这时第二个积分

$$\left|\int_\delta^1 \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x\right|\leqslant h\int_\delta^1 \frac{1}{x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x\triangleq h\cdot M_0.$$

故当 $0<h<\dfrac{\varepsilon}{2M_0}$ 时,

$$\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\left[f(x)-f(0)\right]\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

注 3.0.7 证明 2 中含有 δ 和 h 对应的两个极限过程, 故可以分先后控制.

问题 19 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界连续函数, 求 $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 设 $M \in \mathbb{R}$ 是 $|f(x)|$ 的一个上界, 则

$$\left|\int_{1}^{+\infty} \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M \int_{1}^{+\infty} \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = M\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{h}\right) \to 0 \quad \left(h \to 0^+\right).$$

再由问题 18 结论,

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0).$$

对负半轴有类似结果. 于是

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

□

问题 20 设 $f \in C[0,1]$, 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.

证明 注意到 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1$, 于是只需证 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]\,\mathrm{d}x = 0$. 因为 $f \in C[0,1]$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0,1)$, 使得当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时, $|f(x)-f(1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\begin{aligned}\left|n\int_{1-\delta}^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}\cdot n\int_{1-\delta}^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\cdot n\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon\cdot n}{2(n+1)} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

再将 δ 固定, 设 $|f(x)| \leqslant M\,(x\in[0,1])$. 这时

$$\left|n\int_0^{1-\delta} x^n\left[f(x)-f(1)\right]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x < 2Mn\int_0^{1-\delta} x^n\,\mathrm{d}x,$$

故当 $n > \left\lfloor \dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)}{\ln(1-\delta)} \right\rfloor$ 时,

$$\left|n\int_0^{1-\delta} x^n\left[f(x)-f(1)\right]\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

问题 21 设 $n \in \mathbb{N}_+$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

解 由 Stolz 定理得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}-I_n}{\ln(n+1)-\ln n}\\
&\xlongequal{\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)t-\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\sin(n+1)t-\sin nt]\,[\sin(n+1)t+\sin nt]}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left[2\sin\frac{t}{2}\cos(nt+\frac{t}{2})\right]\left[2\sin(nt+\frac{t}{2})\cos\frac{t}{2}\right]}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

问题 22 设 $f\in C[a,b]$, 且满足条件

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k=0,1,\cdots,n),$$

证明: 函数 f 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点.

证明 1 用反证法. 设有一个 f 满足所有题设条件, 但其零点个数不超过 n. 则 f 在 $[a,b]$ 内的任何闭子区间上不恒等于 0, 因此从条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 可见 f 在 $[a,b]$ 上一定变号. 利用 f 在 (a,b) 内的所有变号零点, 可以作出区间 $[a,b]$ 的一个分划

$$\pi=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\},$$

其中 $x_0=a$, $x_k=b$, 中间的 $k-1$ 个分点都是 f 的零点, f 在每个子区间上不变号, 而在相邻的子区间上 f 的符号相反. 由反证法前提可见 $k-1\leqslant n$. 对于分划 π 可以构造辅助多项式

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1}).$$

g 也在每个子区间上不变号, 而在相邻的子区间上符号相反. 因此 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 从而

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

另一方面, 由于 g 是次数不超过 n 的多项式, 从题设条件可见上述积分应等于 0, 矛盾. □

证明 2 用数学归纳法. 对于 $k=0$, 从 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 和 $f\in C[a,b]$ 可见 f 在 (a,b) 上要么变号, 要么恒等于 0, 即至少有一个零点. 设结论对于 n 成立, 下面考虑 $n+1$ 的情况. 引入辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $F(a)=0$. 从 f 满足的条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 得到 $F(b)=0$. 对 $k\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=x^kF(x)\Big|_a^b-k\int_a^b x^{k-1}F(x)\,\mathrm{d}x=-k\int_a^b x^{k-1}F(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0 \implies \int_a^b x^{k-1}F(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad k=1,\cdots,n+1.$$

可见 F 满足归纳假设, 从而 F 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点. 将它们记为 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$, 并记 $a=x_0$, $b=x_{n+2}$. 对 $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,n+1$, 用 $n+2$ 次 Rolle 定理, 就得到所要求的 $n+2$ 个零点. □

问题 23 设函数 $f\in C[0,\pi]$, 且有 $\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0$, 证明: f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

证明 若 f 在 $(0,\pi)$ 内无变号零点, 由 $f\in C[0,\pi]$ 知 f 与 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内保持同号. 不妨设 $f(x)>0$, 则

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x>0,$$

与题设矛盾. 故 f 在 $(0,\pi)$ 内必有变号零点 x_0. 若 f 在 $(0,\pi)$ 内只有 x_0 一个零点, 则 f 在 $(0,x_0)$ 与 (x_0,π) 内符号相异, 则 $f(x)\sin(x-x_0)$ 在 $(0,\pi)$ 内恒正或恒负, 从而

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

但

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x=\cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

矛盾. 故 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点. □

问题 24 设 $f\in C(\mathbb{R})$, $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 且单调减少, 证明: $f\equiv 0$.

证明 注意到

$$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right]'$$

单调递减, 且 $g(0)=0$, 故函数 $F(x) := \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$ 的导函数 $F'(x)$ 满足

$$\begin{cases} F'(x) \geqslant 0, & x<0, \\ F'(x)=0, & x=0, \\ F'(x) \leqslant 0, & x>0. \end{cases}$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值, 即

$$0 \leqslant F(x) \leqslant F(0)=0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

也即 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \equiv 0$. 又 $f \in C(\mathbb{R})$, 所以 $f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=0, \forall x \in \mathbb{R}$. □

问题 25 证明: 若 f 是导函数, 则当 $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ 时, 就一定有 $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

提示 f 的间断点一定是 $|f|$ 的间断点.

问题 26 (参考注 1.29.17) 计算以下渐近等式

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)$$

中的待定常数 a,b.

解 因为

$$n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x^n=\frac{1}{2}+\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\left|n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\right|=\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

故

$$a=\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

类似地,

$$n\left(n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\right)=n\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{4}+2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x\right],$$

所以

$$\begin{aligned}\left|n\left(n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{n}{4(n+1)}\right| &= \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x \\ &< 2\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n+2} \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

故
$$b=\lim_{n\to\infty} n\left(n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+1)}=\frac{1}{4}.$$

□

问题 27 设 $f\in C[0,+\infty)$, $a>0$, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$, 证明: $f(+\infty)=0$.

证明 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 记题设中极限为 C. 由条件,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{ax}F(x))'}{e^{ax}}=C.$$
反向运用 L'Hospital 法则, 得到
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ae^{ax}F(x)}{e^{ax}}=C,$$
此即
$$\lim_{x\to+\infty} a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=C.$$
结合已知条件, 有
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

□

问题 28 求出同时满足以下三个条件:
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1,\ \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a,\ \int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=a^2$$
的非负连续函数, 其中 a 为给定实数.

解 1 从 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 知 $f(x)\not\equiv 0$, $x\in[a,b]$. 因为 $F(x)\geqslant 0$, 故对 $\forall a\in\mathbb{R}$, $(x-a)^2f(x)\geqslant 0$, 但不恒为 0, $x\in[0,1]$, 因此
$$\begin{aligned}0&<\int_0^1 (x-a)^2f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x-2a\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x+a^2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=a^2-2aa+a^2=0.\end{aligned}$$
矛盾. 故不存在同时满足题中三个条件的函数. □

解 2 由 Cauchy–Schwarz 不等式得

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_0^1 \left[x\sqrt{f(x)}\right]^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a^2.
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.
$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, s.t.$x\sqrt{f(x)} = \lambda\sqrt{f(x)}$. 于是当 $x \in [0,1]\setminus\{\lambda\}$ 时, $f(x) = 0$. 由 f 的连续性知 $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. 这与 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ 矛盾. 故不存在同时满足题中三个条件的函数. □

问题 29 设 f 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t) \leqslant 1 + 2\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$, 证明: $f(t) \leqslant 1 + t$.

证明 在

$$
\frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s}} \leqslant 1
$$

两边积分, 得到

$$
\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s}}\,\mathrm{d}t \leqslant x.
$$

而

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + 2\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s}}\,\mathrm{d}\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&\xlongequal{u=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s} \int_0^{\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} \frac{1}{\sqrt{1+2u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{1 + 2\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s} - 1.
\end{aligned}
$$

故

$$
\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s} - 1 \leqslant t,
$$

从而

$$
f(t) \leqslant \sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s} \leqslant 1 + t.
$$

□

问题 30 设 f 是一个 n 次多项式, 且满足 $\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2 \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明 1 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$. 由此得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + \cdots + a_n x^{k+n}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n+1} \\ &= \frac{p(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)},\end{aligned}$$

其中 $p(k)$ 是 k 的 n 次多项式. 因为 $\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 所以有表达式

$$p(k) = c(k-1)(k-2)\cdots(k-n).$$

而

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = \frac{p(0)}{(n+1)!} = \frac{c(-1)^n n!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n c}{n+1}.$$

从而

$$c = (-1)^n (n+1) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 在等式

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n+1} &= \frac{p(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} \\ &= \frac{c(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}\end{aligned}$$

两边同乘 $k+1$ 后令 $k=-1$ 就有

$$a_0 = \frac{c(-1)^n (n+1)!}{n!} = c(-1)^n (n+1) = (n+1)^2 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a_0 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2 \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

□

证明 2 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $a_n\neq 0$. 我们有

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^n a_k\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x=a_0\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

故只需要证明

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{(n+1)^2}.$$

由已知,

$$\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}=0,\ k=1,2,\cdots,n.$$

我们只需要证明由这些条件线性组合后可得到 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{(n+1)^2}$, 即行列式

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{1}{(n+1)^2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \cdots & \dfrac{1}{n+1}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \cdots & \dfrac{1}{n+2}\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \cdots & \dfrac{1}{n+3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{1}{n+2} & \dfrac{1}{n+3} & \cdots & \dfrac{1}{2n+1} \end{vmatrix}.$$

根据 Cauchy 行列式的结果, 我们知道

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \cdots & \dfrac{1}{n+1}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \cdots & \dfrac{1}{n+2}\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \cdots & \dfrac{1}{n+3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{1}{n+2} & \dfrac{1}{n+3} & \cdots & \dfrac{1}{2n+1} \end{vmatrix}=\frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)^2}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}(i+j-1)}.$$

同时,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{(n+1)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \cdots & \dfrac{1}{n+2}\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \cdots & \dfrac{1}{n+3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{1}{n+2} & \dfrac{1}{n+3} & \cdots & \dfrac{1}{2n+1} \end{vmatrix}=\frac{1}{(n+1)^2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \cdots & \dfrac{1}{n+2}\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \cdots & \dfrac{1}{n+3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{n+2} & \dfrac{1}{n+3} & \cdots & \dfrac{1}{2n+1} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)^2}{\displaystyle(n+1)^2\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(i+j-1)}.$$

需要证明上面这两个行列式相等. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)^2}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}\prod\limits_{j=1}^{n+1}(i+j-1)}&=\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)\right)^2\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n+1}k\right)^2\prod\limits_{i=2}^{n+1}\prod\limits_{j=2}^{n+1}(i+j-1)}\\&=\frac{(n!)^2\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2}{[(n+1)!]^2\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(i+j-1)}\\&=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)^2}{(n+1)^2\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(i+j-1)}.\end{aligned}$$

□

问题 31 设 $y=\cos(\beta\arcsin x)$, 其中 β 为非零常数, 求 $y^{(n)}(0)$ $(n\in\mathbb{N})$.

解 因为

$$y'=-\sin(\beta\arcsin x)\cdot\frac{\beta}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y''=-\cos(\beta\arcsin x)\cdot\frac{\beta^2}{1-x^2}-\sin(\beta\arcsin x)\cdot\frac{\beta x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

所以

$$(1-x^2)y''+\beta^2y=xy'.$$

对这个等式两端各取 n 阶导数, 由 Leibniz 公式可得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}+\beta^2y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}.$$

因此

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-\beta^2)y^{(n)}(0),$$

又 $y(0)=1,y'(0)=0$, 所以

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}\prod\limits_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(k^2-\beta^2), & 2\mid n,\\ 0, & 2\nmid n.\end{cases}$$

□

问题 32 设 $f\in C^1[0,1]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

证明 1

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{x-\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal[\xi_n\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]]{\text{积分第一中值定理}}\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\frac{f(\xi_n)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{\xi_n-\frac{k}{n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{微分中值定理}}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f'(\eta_n)\frac{1}{n}\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=\text{RHS}.\end{aligned}$$

□

证明 2 设 $g(x)\coloneqq f\left(\dfrac{x}{n}\right)$, 则 $g'(x)=\dfrac{1}{n}f'\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $g(0)=f(0)$, $g(n)=f(1)$. 由 Euler–Maclaurin 求和公式 (定理 1.29.22) ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)&=-g(0)+\sum_{k=0}^n g(k)=-g(0)+\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}[g(0)+g(n)]+\int_0^n\widetilde{B}_1(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\\&=n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f(1)-f(0)}{2}+\int_0^n\widetilde{B}_1(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

可见只需证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\widetilde{B}_1(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{x}{n}}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\widetilde{B}_1(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

而 $f'\in\mathcal{R}[0,1]$, $\widetilde{B}_1$ 以 1 为周期且在 $[0,1]$ 上可积, 且 $\displaystyle\int_0^1\widetilde{B}_1(x)\,\mathrm{d}x=0$. 由 Riemann 定理 (定理 1.13.4) 知上式成立. □

问题 33 设 A 为常数, 若 $B=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\arctan\frac{k}{n}-An\right)$ 存在, 求 A,B.

解 设 $f(x)=\arctan\dfrac{x}{n}$. 由 Euler–Maclaurin 求和公式 (定理 1.29.22) ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\arctan\frac{k}{n}=\sum_{k=0}^n f(k)&=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\int_0^n\widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)n+\frac{\pi}{8}+\int_0^n\widetilde{B}_1(x)\frac{n}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\widetilde{B}_1(x)\frac{n}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{x}{n}}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\widetilde{B}_1(nt)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{Riemann 定理}}0,$$

因此 $A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2, B=\frac{\pi}{8}$. □

问题 34 设 $A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

证明 设 $f(x)=\frac{n}{n^2+x^2}$. 由 Euler–Maclaurin 求和公式 (定理 1.29.22) ,

$$\begin{aligned}
A_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=-\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{n}f(k)\\
&=-\frac{1}{n}+\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[f(0)+f(n)\right]+\int_0^n \widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4n}+\int_0^n \widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

而 $f'(x)=-\frac{2nx}{(n^2+x^2)^2}$, 从而

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)&=\frac{1}{4}-\lim_{n\to\infty} n\int_0^n \widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}+\lim_{n\to\infty} 2n^2\int_0^n \widetilde{B}_1(x)\frac{x}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{t=\frac{x}{n}}\frac{1}{4}+\lim_{n\to\infty} 2\int_0^1 \widetilde{B}_1(nt)\frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{\text{Riemann 定理}}\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

问题 35 设 $\alpha>1$. 求证: 不存在 $[0,+\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x)\geqslant f^{\alpha}(x),\quad x\in[0,+\infty).$$

证明 假设存在这样的函数 $f(x)$, 则 $f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数, 由条件可得

$$\left(\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}(x)+x\right)'\leqslant 0.$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}(x)+x$ 是单调递减函数, 从而

$$\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}(x+1)+(x+1)\leqslant\frac{1}{\alpha-1}f^{1-\alpha}(x)+x,$$

即

$$\alpha-1\leqslant f^{1-\alpha}(x)-f^{1-\alpha}(x+1)<f^{1-\alpha}(x).$$

因此 $f^{\alpha-1}(x) < \dfrac{1}{\alpha-1}$, $f(x)$ 是有界函数. 结合 $f(x)$ 的严格递增性可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 收敛. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$, 使得

$$f(x+1)-f(x) = f'(\xi) \geqslant f^{\alpha}(\xi) > f^{\alpha}(x) \geqslant f^{\alpha}(0),$$

令 $x \to +\infty$, 上式左端趋于 0, 但这与 $f^{\alpha}(0) > 0$ 矛盾. □

问题 36 设 $f(x), g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的单调递增函数, 满足

$$0 \leqslant f(x), g(x) \leqslant 1, \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

求证: $\displaystyle\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$.

证明 由于 f, g 可用单调阶梯函数[1]逼近, 故可不妨设它们都是单调递增的阶梯函数. 设 $h(x) := f(x)-g(x)$, 则对任意 $x, y \in [0,1]$, 有 $|h(x)-h(y)| \leqslant 1$. 这是因为, 对 $x \geqslant y$, 我们有

$$-1 \leqslant -[g(x)-g(y)] \leqslant f(x)-f(y)-[g(x)-g(y)] \leqslant f(x)-f(y) \leqslant 1;$$

对 $x < y$, 我们有

$$-1 \leqslant f(x)-f(y) \leqslant f(x)-f(y)-[g(x)-g(y)] \leqslant -[g(x)-g(y)] \leqslant 1.$$

现记

$$C_1 = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant g(x)\}, \quad C_2 = \{x \in [0,1] \mid f(x) < g(x)\},$$

则 C_1 与 C_2 分别为有限个互不相交区间的并, 且

$$\int_{C_1} h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{C_2} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

用 $|C_i|$ $(i=1,2)$ 表示 C_i 所含的那些区间的长度之和, 则 $|C_1|+|C_2|=1$. 于是

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x &= 2\left(\int_{C_1} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{C_2} h(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant \left(\frac{|C_2|}{|C_1|}\int_{C_1} h(x)\,\mathrm{d}x + \frac{|C_1|}{|C_2|}\int_{C_2} (-h(x))\,\mathrm{d}x\right) + \int_{C_1} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{C_2} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|C_1|}\int_{C_1} h(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{|C_2|}\int_{C_2} (-h(x))\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_{C_1} h(x) + \sup_{C_2}(-h(x)) \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

注意, 上式最后一个不等式来自 $|h(x)-h(y)| \leqslant 1$. 另外, 若有某个 $|C_i|$ 等于 0, 则结论显然成立. □

[1]阶梯函数是有限分 (区间) 段函数, 在每一小段区间上为常数.

问题 37 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x)+a\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

为常数. 求证: $f(x)$ 必为常数.

证明 不妨设 $f(x)$ 有下界. 设 $m=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $g(x)=f(x)-m$, 则 $g(x)$ 为非负连续函数, 且

$$A=g(x)+a\int_{x-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

为非负常数. 因此 $g(x)$ 是可微函数, 且

$$g'(x)+a\left[g(x)-g(x-1)\right]=0.$$

于是

$$\left[e^{ax}g(x)\right]'=e^{ax}\left[ag(x)+g'(x)\right]=ae^{ax}g(x-1)\geqslant 0.$$

这说明 $e^{ax}g(x)$ 是递增函数, 从而

$$\begin{aligned}
A&=g(x)+a\int_{x-1}^{x} e^{at}g(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant g(x)+ae^{ax}g(x)\int_{x-1}^{x} e^{-at}\,\mathrm{d}t\\
&=g(x)+e^{ax}g(x)\left[e^{-a(x-1)}-e^{-ax}\right]\\
&=e^{a}g(x).
\end{aligned}$$

所以

$$g(x)\geqslant Ae^{-a}.$$

又因为 $g(x)$ 的下确界为 0, $Ae^{-a}\geqslant 0$, 所以 $A=0$. 再根据

$$g(x)+a\int_{x-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t=0$$

可知 $g(x)\equiv 0$, 即 $f(x)$ 为常数. □

问题 38 设 $f\in C^1[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$, 其中 A 是常数.

证明 分部积分可得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2f(x)\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此,

$$6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 3x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-3x^2\right)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

再由 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$36\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(1-3x^2\right)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

由此即得

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

等号成立当且仅当 $f'(x)=A(1-3x^2)$. 结合 $f(0)=f(1)=0$ 即得 $f(x)=A(x-x^3)$. □

问题 39 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^\alpha,\quad \text{其中 } \alpha\in(0,1] \text{ 是常数}.$$

求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\dfrac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$.

证明 1 对固定的 $x\in\mathbb{R}$:

① 若 $f'(x)=0$, 则结论成立.

② 若 $f'(x)<0$, 则

$$h:=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}>0.$$

于是

$$\begin{aligned}0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h}f'(t)\,\mathrm{d}t\\&=f(x)+\int_x^{x+h}\left[f'(t)-f'(x)\right]\,\mathrm{d}t+f'(x)h\\&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^\alpha\,\mathrm{d}t+f'(x)h\\&=f(x)+\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h.\end{aligned}$$

代入 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 即

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}=(-f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

③ 若 $f'(x) > 0$, 则

$$h \coloneqq (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} > 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
0 < f(x-h) &= -\int_{x-h}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t + f(x) \\
&= \int_{x-h}^{x} [f'(x) - f'(t)]\,\mathrm{d}t - f'(x)h + f(x) \\
&\geqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t - f'(x)h + f(x) \\
&= \frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1} - f'(x)h + f(x).
\end{aligned}$$

代入 $h = (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 即

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = (f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

综上, 总有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

□

证明 2 注意到对 $\alpha \in (0,1]$, α-Hölder 连续 $\Longrightarrow$ Lipschitz 连续, 因此 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 于是, 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= \int_{x}^{y} f'(u)\,\mathrm{d}u \xlongequal{t=\frac{u-x}{y-x}} \int_{0}^{1} (y-x) f'(ty + (1-t)x)\,\mathrm{d}t \\
&= f'(x)(y-x) + \int_{0}^{1} \left[f'(ty+(1-t)x) - f'(x)\right](y-x)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由条件可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{0}^{1} \left[f'(ty+(1-t)x) - f'(x)\right](y-x)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant |x-y| \int_{0}^{1} |f'(ty+(1-t)x) - f'(x)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant |x-y| \int_{0}^{1} |t(x-y)|^{\alpha}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha+1}|x-y|^{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

因此

$$f(y) \leqslant f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{\alpha+1}|x-y|^{1+\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

令 $y = x - |f'(x)|^{\frac{1}{\alpha}-1} f'(x)$, 就得到

$$0 < f(y) \leqslant f(x) - |f'(x)|^{\frac{1}{\alpha}+1} + \frac{1}{\alpha+1}|f'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} = f(x) - \frac{\alpha}{1+\alpha}|f'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}.$$

故

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

□

问题 40 设 $f \in C[0,1]$, 且 $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. 求证: 存在不同的两点 $x_1, x_2 \in (0,1)$, 使得

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}.$$

证明 设 $F(x) \coloneqq \frac{1}{I}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0, F(1)=1$. 由介值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi) = \frac{1}{2}$. 由 Lagrange 中值定理,

$$F'(X_1) = \frac{f(x_1)}{I} = \frac{F(\xi)-F(0)}{\xi - 0} = \frac{1}{2\xi}, \quad x_1 \in (0,\xi),$$

$$F'(x_2) = \frac{f(x_2)}{I} = \frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi} = \frac{1}{2(1-\xi)}, \quad x_2 \in (\xi,1),$$

$$\frac{I}{f(x_1)} + \frac{I}{f(x_2)} = \frac{1}{F'(x_1)} + \frac{1}{F'(x_2)} = 2\xi + 2(1-\xi) = 2.$$

□

问题 41 设 $f \in C^1[0,1]$, 且 $f(0) = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 满足

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

证明 由例 1.12.12 结论可知

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

其中等号成立当且仅当

$$f(x) = \frac{Cx(1-x)}{2}, \quad (C \geqslant 0).$$

再代入限制条件 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 即得 $C = 0$. 于是 $f(x) \equiv 0$. □

问题 42 设函数 f 在 $[-1,1]$ 上可导, $M \coloneqq \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$. 如果存在 $a \in (0,1)$, 使得 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证:

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M(1-a^2).$$

证明 构造 $[0,1]$ 上的函数 $F(x) \coloneqq f(x)+f(-x)$, 则 $F'(x)=f'(x)-f'(-x)$, 从而 $|F'(x)| \leqslant 2M$. 再由

$$\int_0^a F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

根据积分第一中值定理, 存在 $\xi\in[0,a]$, 使得

$$aF(\xi)=\int_0^a F(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

而 $a\neq 0$, 故 $F(\xi)=0$. 于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{-1}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^1 F(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^1 \left[F(x)-F(\xi)\right]\,\mathrm{d}x\right| \\
&\xlongequal{\text{Lagrange 中值定理}} \left|\int_a^1 F'(\eta)(x-\xi)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^1 |F'(\eta)|\,(x-\xi)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2M\int_a^1 (x-\xi)\,\mathrm{d}x = M(x-\xi)^2\Big|_a^1 \\
&= M(1-a^2)+2M\xi(a-1)\leqslant M(1-a^2).
\end{aligned}$$

□

问题 43 设 $f\in\mathcal{R}[0,1]$, 且有正数 m 与 M, 使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, $\forall x\in[0,1]$. 求证:

$$1\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证明 左边的不等式由 Cauchy–Schwarz 不等式可得.

对于右边的不等式, 由于

$$0\leqslant\int_0^1 [f(x)-m]\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{M}\right]\,\mathrm{d}x=1+\frac{m}{M}-m\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}-\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$1+\frac{m}{M}\geqslant m\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}+\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{\frac{m}{M}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}},$$

由此即得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}{4\cdot\frac{m}{M}}=\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

□

问题 44 设 $x(t)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且满足

$$|x(t)| \leqslant M + k\int_0^t |x(\tau)| \, \mathrm{d}\tau,$$

这里 M 与 k 为正常数. 求证:

$$|x(t)| \leqslant Me^{kt}, \quad t \in [0,a].$$

证明 令 $y(t) \coloneqq M + k\int_0^t |x(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$, 则

$$y'(t) = k\,|x(t)| \leqslant ky(t), \quad y(t) \geqslant |x(t)|\,.$$

而

$$\left(\frac{y(t)}{e^{kt}}\right)' = \frac{y'(t) - ky(t)}{e^{kt}} \leqslant 0,$$

这说明函数 $e^{-kt}y(t)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减, 因而

$$M = y(0) = e^{-k\cdot 0}y(0) \geqslant e^{-kt}y(t), \quad t \in [0,a],$$

即

$$Me^{kt} \geqslant y(t) \geqslant |x(t)|\,, \quad t \in [0,a].$$

□

问题 45 求证: 多项式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(2x - x^2\right)^k - 2x^k}{k}$ 能被 x^{n+1} 整除.

证明 由带 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$-\ln(1-x)^2 = -2\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2x^k}{k} + o\left(x^n\right),$$

$$-\ln(1-x)^2 = -\ln\left(1 - 2x + x^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(2x - x^2\right)^k}{k} + o\left(x^n\right).$$

两式相减得

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(2x - x^2\right)^k - 2x^k}{k} + o\left(x^n\right),$$

这意味着

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(2x - x^2\right)^k - 2x^k}{k} = o\left(x^n\right) \quad (x \to 0).$$

因此右边是 x 的多项式, 又不含 $1, x, \cdots, x^n$ 各项, 从而能被 x^{n+1} 整除. □

问题 46 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. 将 $f(x)$ 在 x_0 处按 Taylor 公式展开:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta(h)h),\quad \theta(h)\in(0,1).$$

求证: $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{n+1}$.

证明 写出 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+o\left(h^{n+1}\right),$$

再将题设展开中的 $f^{(n)}(x_0+\theta(h)h)$ 进一步展开, 得到

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)+f^{(n+1)}(x_0)\theta(h)h+o(h)\right],$$

两式相减得

$$\theta(h)=\frac{1}{n+1}+o(1)\quad (h\to 0).$$

□

问题 47 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)=0$, 并且在 $[0,1]$ 上 $f(x)$ 的最小值为 -1. 求证: 存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi_1)\geqslant 8, f''(\xi_2)\leqslant 8$.

证明 设 f 在 x_0 处取到最小值 $-1<0=f(0)=f(1)$, 所以 $x_0\in(0,1)$, x_0 也是 f 的极小值点. 由 Fermat 定理, $f'(x_0)=0$. 写出 $f(x)$ 在 x_0 处带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(0-x_0)^2,\quad \xi_1\in(0,x_0),$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,\quad \xi_2\in(x_0,1).$$

代入 $f(0)=f(1)=0, f(x_0)=-1, f'(x_0)=0$ 得

$$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2}f''(\xi_1)=1,\\[2ex] \dfrac{(1-x_0)^2}{2}f''(\xi_2)=1.\end{cases}$$

① 若 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, 则

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}\geqslant\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8,$$

$$f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2} \leqslant \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8.$$

② 若 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 则

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2} < \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8,$$

$$f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2} > \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8.$$

□

问题 48 (Landau 不等式) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导. 记 $M_k := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$ $(k=0,1,2)$. 若 $M_0, M_2 < +\infty$, 求证:

$$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

证明 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 与 $y > 0$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 有

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{f''(x+\alpha y)}{2}y^2, \quad \alpha \in (0,1),$$

$$f(x-y) = f(x) - f'(x)y + \frac{f''(x-\beta y)}{2}y^2, \quad \beta \in (0,1),$$

两式相减得

$$2yf'(x) = f(x+y) - f(x-y) + \frac{f''(x-\beta y) - f''(x+\alpha y)}{2}y^2.$$

从而

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{y} + \frac{M_2 y}{2}, \quad \forall y > 0.$$

上式两边关于 $y > 0$ 取最小值即得

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

注 3.0.8 若条件改为 f 在 $(a, +\infty)$ 上二阶可导, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 则结论修改为 $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$. (这时只能用上面两个 Taylor 展开式其一.)

问题 49 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)$ 有界. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

证明 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 记

$$M_k(t) \coloneqq \sup_{x\in(t,+\infty)} \left|f^{(k)}(x)\right|.$$

由问题 48 及注 3.0.8 可得

$$M_1^2(t) \leqslant 4M_0(t)M_2(t),$$

令 $t\to+\infty$ 即得证. □

问题 50 设函数 f 在 $(-1,1)$ 上二阶可导, 且满足以下初值条件:

$$\begin{cases} |f''(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|, \\ f(0)=f'(0)=0. \end{cases}$$

求证: $f\equiv 0$.

证明 先写出 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=\frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

$$f'(x)=f'(0)+f''(\eta)x=f''(\eta)x,$$

其中 ξ,η 位于 0 和 x 之间. 记

$$M \coloneqq \max_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} |f''(x)|,$$

则由条件得

$$M \leqslant M\left(\frac{\delta^2}{2}+\delta\right), \quad \text{其中}\delta=\frac{1}{2}.$$

由此得 $M=0$. 故 $f\big|_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}=0$.

再利用新的初值条件:

$$\begin{cases} |f''(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|, \\ f\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)=0, \end{cases}$$

将 $f(x)$ 在 $x=\pm\dfrac{1}{2}$ 处分别展开, 同理可得 $f\equiv 0$. □

问题 51 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$. 求证: $\partial\overline{E}\subseteq E$.

证明 任取 $\mathbf{x}\in\partial\overline{E}$, 则对任意 $r>0$, $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap\overline{E}\neq\varnothing$, $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap\left(\overline{E}\right)^c\neq\varnothing$. 而 $\left(\overline{E}\right)^c\subseteq E^c$, 因此 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap E^c\neq\varnothing$, 只需再证 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap E\neq\varnothing$.

任取 $\mathbf{y}\in\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap\overline{E}$, 若 $\mathbf{y}\in E$, 则已得到所要证的. 若 $\mathbf{y}\in\left(\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap\overline{E}\right)\backslash E$, 则 $\mathbf{y}\in E'$. 而由 $\mathbf{y}\in\mathbb{B}(\mathbf{x},r)$ 可知存在 $r'>0$, 使得 $\mathbb{B}(\mathbf{y},r')\subseteq\mathbb{B}(\mathbf{x},r)$, 同时 $\mathbb{B}(\mathbf{y},r')\cap E\neq\varnothing$, 故 $\mathbb{B}(\mathbf{x},r)\cap E\neq\varnothing$. □

问题 52 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 $\mathcal{O}$ 一定可以表示为至多可数个开区间的无交并.

证明 对任意 $x \in \mathcal{O}$, 用 I_x 表示包含 x 且被 $\mathcal{O}$ 包含的最大开区间. 更确切来说, 由于 $\mathcal{O}$ 是开集, x 一定位于某个含于 $\mathcal{O}$ 的开区间中, 若设

$$a_x \coloneqq \inf\{a < x \mid (a, x) \subseteq \mathcal{O}\}, \quad b_x \coloneqq \sup\{b > x \mid (x, b) \subseteq \mathcal{O}\},$$

则 $a_x < x < b_x$ (a_x 和 b_x 可以为 $\pm\infty$) . 记 $I_x = (a_x, b_x)$, 于是

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} I_x.$$

假设有两个区间 I_x 和 I_y 相交, 则它们的并也是开区间且含于 $\mathcal{O}$ 并包含 x. 但 I_x 是包含 x 且被 $\mathcal{O}$ 包含的最大开区间, 因此 $(I_x \cup I_y) \subseteq I_x$, 同理有 $(I_x \cup I_y) \subseteq I_y$. 于是 $I_x = I_y$. 故 $\mathcal{I} = \{I_x\}_{x \in \mathcal{O}}$ 中任意两个不同的区间不相交. 因为在每个开区间 I_x 都能找到一个有理数作为代表元, 所以 $\mathcal{I}$ 是至多可数的. $\square$

问题 53 设 S_1, S_2 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. 求证: 存在两个开集 O_1 和 O_2, 使得 $S_i \subseteq O_i$, $i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

证明 1 ① 先证 $d \coloneqq d(S_1, S_2) > 0$. 用反证法. 若 $d(S_1, S_2) = 0$, 则由 $d(S_1, S_2)$ 定义, 存在 $\mathbf{x}_1 \in S_1, \mathbf{x}_2 \in S_2$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| = 0$. 由 S_1, S_2 有界及 Bolzano–Weierstrass 定理知, $\{\mathbf{x}_n\}, \{\mathbf{y}_n\}$ 都有收敛子列, 不妨设 $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$. 由 S_1, S_2 闭知 $\mathbf{x} \in S_1, \mathbf{y} \in S_2$, 而 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 与 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 矛盾.

② 定义

$$O_i = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, S_i) < \frac{d}{3}\right\}, \quad i = 1, 2,$$

则 O_i 为开集, $S_i \subseteq O_i$, $i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. $\square$

事实上, 若去掉对 S_1, S_2 有界性的要求, 命题仍然正确:

证明 2 定义

$$O_1 \coloneqq \bigcup_{\mathbf{x} \in S_1} \mathbb{B}\left(\mathbf{x}, \frac{d(\mathbf{x}, S_2)}{3}\right), \quad O_2 \coloneqq \bigcup_{\mathbf{y} \in S_2} \mathbb{B}\left(\mathbf{y}, \frac{d(\mathbf{y}, S_1)}{3}\right).$$

下证 O_1 和 O_2 都是开集.

任取 $\mathbf{x} \in O_1$, 若 $\mathbf{x} \in S_1$, 则由 O_1 的构造知 $\mathbf{x}$ 是 O_1 的内点; 若 $\mathbf{x} \in O_1 \backslash S_1$, 设 $\mathbf{x} \in \mathbb{B}\left(\mathbf{y}, \dfrac{d(\mathbf{y}, S_2)}{3}\right)$, $\mathbf{y} \in S_1$, 记 $d \coloneqq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 则 $\mathbb{B}\left(\mathbf{x}, \dfrac{d(\mathbf{y}, S_2)}{3} - d\right) \subseteq \mathbb{B}\left(\mathbf{y}, \dfrac{d(\mathbf{y}, S_2)}{3}\right) \subseteq O_1$, $\mathbf{x}$ 也是 O_1 的内点. 故 O_1 为开集. 同理 O_2 也是开集. 由三角不等式易知 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. $\square$

下面的证明 3 可用于证明度量空间是正规空间:

证明 3 定义函数

$$\rho : \mathbb{R}^n \to [0,1], \quad \mathbf{x} \mapsto \frac{d(\mathbf{x}, S_1)}{d(\mathbf{x}, S_1) + d(\mathbf{x}, S_2)}.$$

则 $\rho(S_1) = \{0\}$, $\rho(S_2) = \{1\}$, $\rho(\mathbb{R}^n) = [0,1]$. 由定理 1.20.2 及 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 可知 $\rho(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 取

$$O_1 = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad O_2 = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

则 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, 且 $S_1 \subseteq O_1$, $S_2 \subseteq O_2$. 由 ρ 的连续性可知 O_1, O_2 都是开集. □

问题 54 求证: 区域中任意两点之间存在着光滑道路.

证明 由引理 1.20.45, 对 $\mathbb{R}^n$ 中区域 D 中任意两点 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$, 存在连续映射 (即这两点之间的道路)

$$\gamma : [0,1] \to D, \quad \gamma(0) = \mathbf{p} \text{ 且 } \gamma(1) = \mathbf{q}.$$

对于任意固定的 $r > 0$, $\bigcup\limits_{\mathbf{x} \in \gamma([0,1])} \mathbb{B}(\mathbf{x}, r)$ 是 D 中闭集 $\gamma([0,1])$ 的一个开覆盖, 由 Heine–Borel 定理可知存在 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n \in \gamma([0,1])$, 使得 $\gamma([0,1]) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\mathbf{x}_i, r)$. 此处可以假定这 n 个开集对于覆盖 $\gamma([0,1])$ 是缺一不可的, 也即

$$\gamma([0,1]) \subsetneq \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{B}(\mathbf{x}_i, r)\right) \Big\backslash \mathbb{B}(\mathbf{x}_k, r), \quad k = 1, \cdots, n.$$

下面用 $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_n$ 表示这 n 个开集, 并不妨设 $\mathbf{p} \in \mathcal{O}_1$, $\mathbf{q} \in \mathcal{O}_n$ (若有多个任取其一即可) . 我们以 $\mathbf{p}$ 为起点, 在 $\mathcal{O}_1$ 与某个 $\mathcal{O}_{k_1}$ 的交集中任取一点 $\mathbf{y}_1$, 连接 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{y}_1$, 接着在 $\mathcal{O}_{k_1}$ 与某个 $\mathcal{O}_{k_2}$ 的交集中任取一点 $\mathbf{y}_2$, 连接 $\mathbf{y}_1$ 与 $\mathbf{y}_2$, 继续重复此操作直至折线段最终 $\mathcal{O}_{k_{m-1}} \cap \mathcal{O}_{k_m}$ 中的点 $\mathbf{y}_m$ 与 $\mathcal{O}_n$ 中的点 $\mathbf{q}$ 相连.

【这一过程在到达 $\mathbf{q}$ 之前不会间断. 否则, 存在 D 中的非空不交开集 U 和 V, 使得

$$\gamma([0,1]) = (\gamma([0,1]) \cap U) \cup (\gamma([0,1]) \cap V),$$

由引理 1.20.40 (1) 知这等价于 $\gamma([0,1])$ 不连通, 与已知矛盾.】

上面构造出的折线段包含于区域 D, 因为线段 $I_{\mathbf{p},\mathbf{y}_1} \subseteq \mathcal{O}_1$, $I_{\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_{i+1}} \subseteq \mathcal{O}_{k_i}$ $(i = 1, \cdots, m-1)$, $I_{\mathbf{y}_m,\mathbf{q}} \subseteq \mathcal{O}_{k_m}$ (这是由于 $\mathbb{R}^n$ 中的开球是凸集 (见注 1.20.47)) . 由于线段自然是光滑道路, 下面只需对这条折线段上有限个顶点做磨光处理使得在这些点处也光滑.

不失一般性地, 设一条折线段由 I_1, I_2 两条线段 (自然是光滑的) 连接而成, 且线段 I_i 由映射 $\gamma_i : [0,1] \to D$ 给出 $(i = 1,2)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. 我们将基于这两条线段重新进行参数化.

定义函数

$$\rho : [0,1] \to [0,1], \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \dfrac{(t-1)^2}{(t-1)^2 - 1}, & t \in (0,1]. \end{cases}$$

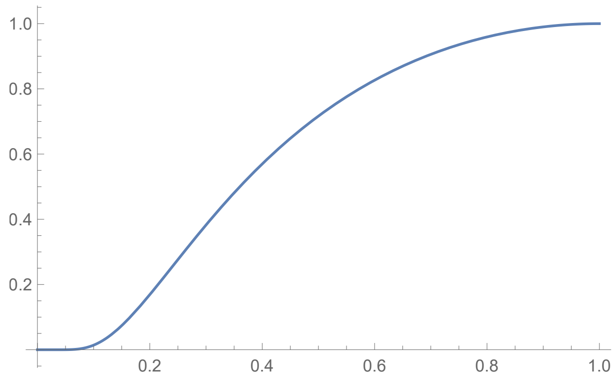

图 3.2: 函数 $\rho(t)$ 在 $t \in [0,1]$ 上的图像

易知 $\rho \in C^1[0,1]$, 且 $\rho(0) = 0, \rho(1) = 1, \rho'(0) = \rho'(1) = 0$. 现设 $\widetilde{\gamma}_i \coloneqq \gamma_i \circ \rho \ (i = 1,2)$, 并定义映射

$$\widetilde{\gamma} : [0,1] \to D, \quad t \mapsto \begin{cases} \widetilde{\gamma}_1(2t), & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ \widetilde{\gamma}_2(2t-1), & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

根据复合函数求导链式法则及 $\rho'(t)$ 在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 处 “消失” 的特性可知 $\widetilde{\gamma} \in C^1[0,1]$. 这就完成了对折线段一个顶点的磨光处理. 于是在经过有限次磨光之后, 我们就得到区域 D 中连接 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 的一条光滑道路. □

问题 55 设函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 连续可微, 水平集 $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = c\right\}$ 呈 “8” 字形, 其中 c 为常数. 求 $\min \sharp \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\right\}$.

解 由于 “8” 字形水平集的两个 “圈” 围成的图形均是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭集, 所以 f 在其上均能取到最值. 因为 f 在 “8” 字上取值为 c, 所以 f 在两个 “圈” 内各存在一个极值点, 在这两个点处 f 的梯度为 $\mathbf{0}$. 记这两个 “圈” 的交点为 $\mathbf{p}$, 我们断言 $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

用反证法. 假设 $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, 则由隐函数定理, 对点 $\mathbf{p}$ 的某个邻域内的点 $\mathbf{x} = \left(x^1, x^2\right)$, 要么 x^2 可表成 x^1 的函数, 要么 x^1 可表成 x^2 的函数. 这就在点 $\mathbf{p}$ 的邻域内建立了该 “8” 字形曲线以 x^1 或 x^2 为单参数的映照, 但这与曲线在点 $\mathbf{p}$ 处分为两支矛盾. 故 $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

容易说明存在只有 3 个梯度为 $\mathbf{0}$ 的点的情形. 取

$$f(x,y)=\left[(x+1)^2+y^2-1\right]\left[(x-1)^2+y^2-1\right]+c,$$

则

$$\nabla f(x,y)=\left(4x^3+4xy^2-8x,4x^2y+4y^3\right).$$

计算可得 $\mathbb{R}^2$ 上仅有 $(0,0),\left(\sqrt{2},0\right),\left(-\sqrt{2},0\right)$ 三点处 f 的梯度为 $\mathbf{0}$. 故

$$\min\sharp\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\mid\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\right\}=3.$$

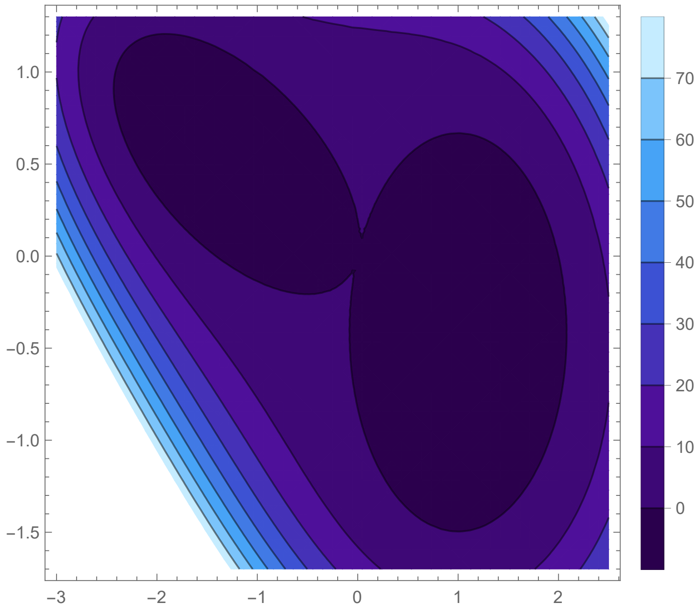

图 3.3: “8” 字形水平集

□

问题 56 (Hadamard 不等式) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 求证: $|\det(A)|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$.

解 设 $H_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\ (i=1,\cdots,n)$. 我们考虑在约束条件

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-H_i=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

下 $\det(A)$ 的最值. 不妨设 $H_i>0\ (i=1,\cdots,n)$, 否则 $\det(A)=0$, 不等式显然成立. 设

$$L(a_{11},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{n1},\cdots a_{nn})=\det(A)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-H_i\right).$$

则要求

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}}=\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}+2\lambda_i a_{ij}=A_{ij}+2\lambda_i a_{ij}=0.$$

这说明 A 的每一个行向量与其对应代数余子式组成的向量共线. 由当 $p\neq q$ 时, $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{pj}A_{qj}=0$ 可得 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{pj}\left(-\lambda_q a_{qj}\right)=0$. 若存在某个 $\lambda_i=0$, 则 $A_{ij}=0$ $(j=1,\cdots,n)$, 从而 $\det(A)=0$, 此时不等式也显然成立. 故不妨设 $\lambda_i\neq 0$ $(i=1,\cdots,n)$. 于是对任意 $p\neq q$, $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{pj}a_{qj}=0$, 即 A 的行向量组是正交向量组. 因此

$$|\det(A)|^2=\det\left(AA^T\right).$$

而

$$AA^T=\operatorname{diag}\left(H_1,\cdots,H_n\right).$$

故

$$|\det(A)|^2=\prod_{i=1}^{n}H_i=\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

因为 $\det(A)$ 关于 a_{ij} 是有界闭集上的连续函数, 所以必达到最大值和最小值. 故

$$|\det(A)|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

□

问题 57 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 求证:

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,\quad\forall r>0$$

$$\Longleftrightarrow\ u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\oint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s,\quad\forall r>0.$$

证明 $\Rightarrow$: 利用极坐标换元 $\begin{cases}\xi=x+\rho\cos\theta,\\ \eta=y+\rho\sin\theta\end{cases}$ 得到

$$\pi r^2u(x,y)=\iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho u(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho,$$

两边对 r 求导得到

$$2\pi r u(x,y)=\int_0^{2\pi} r u(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

而

$$\oint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} r u(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

故

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\oint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s.$$

$\Leftarrow$: 将第一型曲线积分化为定积分得到

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} \rho u(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

也即

$$2\pi\rho u(x,y)=\int_0^{2\pi} \rho u(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

对 ρ 从 0 到 r 积分得

$$\pi r^2 u(x,y)=\int_0^{r}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi} \rho u(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant r^2} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

□

问题 58 设 $f(x,y)$ 在 G 上一阶连续可微, 在 ∂G 上 $f(x,y)=0$, $G=\left\{x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$. 求证:

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}a^2\max_G\left\{\sqrt{f_x^2+f_y^2}\right\}.$$

证明 在二重积分的分部积分公式 (定理 1.24.24) 两式中分别令 $g(x,y)=x$ 和 $g(x,y)=y$ 并利用 $f\big|_{\partial G}=0$ 可得

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_G xf_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_G yf_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

于是由 Cauchy–Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| &= \frac{1}{2}\left|\iint\limits_G (xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_G \sqrt{f_x^2+f_y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{\max\limits_G\left\{\sqrt{f_x^2+f_y^2}\right\}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{3}a^2\max_G\left\{\sqrt{f_x^2+f_y^2}\right\}.\end{aligned}$$

□