泛函分析 (H)

林晓烁 2024 秋

https://xiaoshuo-lin.github.io

目 录

第一部分

课后作业

习题 1.1.3 设 (X,ρ) 是度量空间, 映射 $T:X\to X$ 满足

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)\quad(\forall x\neq y),$$

并已知 T 有不动点, 求证：此不动点是唯一的.

证明 任取 T 的不动点 x 和 y, 若 $x\neq y$, 则 $0<\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$, 矛盾. 故 $x=y$, 即不动点唯一. □

习题 1.1.5 设 T 是压缩映射, 求证：T^n $(n\in\mathbb{N})$ 也是压缩映射, 并说明逆命题不一定成立.

证明 (1) 设 $\alpha\in(0,1)$ 使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y),$$

则 $\alpha^n\in(0,1)$ 使得

$$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y),$$

即 T^n 也是压缩映射.

(2) 反例：考虑

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0&-1\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

则 T 限制在 y 轴上是等距映射 (从而 T 不是压缩映射), 但 $T^2=-\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ 是压缩映射. □

习题 1.1.7 对于积分方程

$$x(t)-\lambda\int_0^1\mathrm{e}^{t-s}x(s)\,\mathrm{d}s=y(t),$$

其中 $y(t)\in\mathcal{C}([0,1])$ 为一给定函数, λ 为常数, $|\lambda|<1$, 求证：存在唯一解 $x(t)\in\mathcal{C}([0,1])$.

证明 令 $z(t)=\mathrm{e}^{-t}x(t)$, 则问题转化为证明积分方程

$$z(t)-\lambda\int_0^1 z(s)\,\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-t}y(t)$$

存在唯一解 $z(t)\in\mathcal{C}([0,1])$. 考虑映射

$$T:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1]),\quad z(t)\mapsto\lambda\int_0^1 z(s)\,\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-t}y(t),$$

则对任意 $z_1(t),z_2(t)\in\mathcal{C}([0,1])$, 有

$$\rho(Tz_1(t),Tz_2(t))=\max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1[z_1(s)-z_2(s)]\,\mathrm{d}s\right|\leqslant|\lambda|\rho(z_1(t),z_2(t)).$$

因此 T 是压缩映射, 由 Banach 不动点定理, T 有唯一不动点 $z_0(t)\in\mathcal{C}([0,1])$, 从而 $x_0(t)=\mathrm{e}^tz_0(t)\in\mathcal{C}([0,1])$ 为原方程的唯一解. □

习题 1.2.1 令 S 为一切实 (或复) 数列

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

组成的集合, 在 S 中定义距离为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$. 求证: S 为一个完备的度量空间.

证明 (1) 先证明 ρ 为度量. 正定性与对称性平凡, 下证三角不等式成立. 设 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)$, 则

$$|\xi_k-\zeta_k|\leqslant|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|.$$

由函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增可得

$$\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}\leqslant\frac{|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|},$$

进而

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

(2) 记 $x^{(k)}=\left(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)},\cdots\right)$, 设 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots$ 是 S 中的 Cauchy 列, 即对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 与 $p\in\mathbb{N}$, 存在 $N_k\in\mathbb{N}$, 使得只要 $n>N_k$, 就有

$$\rho\left(x^{(n+p)},x^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\left|\xi_i^{(n+p)}-\xi_i^{(n)}\right|}{1+\left|\xi_i^{(n+p)}-\xi_i^{(n)}\right|}<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

进而

$$\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|}{1+\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|}\leqslant\rho\left(x^{(n+p)},x^{(n)}\right)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

即

$$\frac{\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|}{1+\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|}<\frac{\varepsilon}{2}\implies\left|\xi_k^{(n+p)}-\xi_k^{(n)}\right|<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon.$$

因此 $\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)},\cdots$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列, 从而收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$. 令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$. 取定 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{1}{2^m}<\frac{\varepsilon}{2},$$

并取 $N\in\mathbb{N}$ 使得只要 $n>N$, 就有

$$\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad k=1,2,\cdots,m.$$

当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\rho\Big(x^{(n)},x\Big)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^m}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=x\in S$, 即 S 是完备的. □

习题 1.2.3 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体, 在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in F$, $y=\{\eta_k\}\in F$, 求证: (F,ρ) 不完备, 并指出它的完备化空间.

证明 (1) 令 $x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right)\in F$, 则对任意 $p\in\mathbb{N}$, $\rho\Big(x^{(n)},x^{(n+p)}\Big)=\frac{1}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$, 即 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots$ 为 Cauchy 列, 但 $\Big\{x^{(n)}\Big\}$ 不收敛于 F 中 (若收敛于 $x^*\in F$, 设 x^* 自第 m 项起均为 0, 则 $\rho\Big(x^{(k)},x^*\Big)\geqslant\frac{1}{m}$, $\forall k\geqslant m$, 矛盾), 故 F 不完备.

(2) 记

$$E=\Big\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}:\lim_{n\to\infty}a_n=0\Big\}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

则 $F\subset E$. 任取 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in E$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得只要 $n>N$, 就有 $|\xi_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $x'=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N,0,0,\cdots)\in F$, 则

$$\rho(x',x)=\sup_{k\geqslant N+1}|\xi_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由此可知 F 在 E 中稠密. 下证 F 完备. 设 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots$ 是 E 中的 Cauchy 列, 即对任意 $\varepsilon>0$ 与 $p\in\mathbb{N}$, 存在 $N_k\in\mathbb{N}$, 使得只要 $n>N_k$, 就有

$$\rho\Big(x^{(n)},x^{(n+p)}\Big)=\sup_{k\geqslant 1}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(n+p)}\right|<\varepsilon.$$

由此可见 $\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)},\cdots$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列, 从而收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$. 令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, 则

$\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k = 0$ (用下图三角不等式), 从而 $x \in E$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. 故 E 完备, 为 F 的完备化空间.

$$\begin{tikzcd} \xi_k^{(N)} \arrow[r, dash, dashed, "<\frac{\varepsilon}{3}"] \arrow[d, dash, dashed, "<\frac{\varepsilon}{3}"'] & \xi_j^{(N)} \arrow[d, dash, dashed, "<\frac{\varepsilon}{3}"] \\ \xi_k \arrow[r, dash, "<\varepsilon"'] & 0 \end{tikzcd}$$

□

习题 1.2.5 在完备的度量空间 (X,ρ) 中给定点列 $\{x_n\}$, 如果 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 Cauchy 列 $\{y_n\}$, 使得

$$\rho(x_n, y_n) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}),$$

求证：$\{x_n\}$ 收敛.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得只要 $n, m > N$, 就有 $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon$, 此时

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m) + \rho(y_m, x_m) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 由完备性知 $\{x_n\}$ 收敛. □

习题 1.3.3 在度量空间中求证：完全有界的集合是有界的, 并通过考虑 ℓ^2 的子集 $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$e_k = \{\underbrace{0, 0, \cdots, 0, 1}_{k}, 0, \cdots\},$$

来说明一个集合可以是有界但不完全有界的.

证明 (1) 设 A 是度量空间中完全有界的集合, 则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$, 使得 $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathbb{B}(x_k, 1)$. 对任意 $a \in A$, $\rho(a, 0) \leqslant 1 + \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \rho(x_k, 0)$, 即 A 有界.

(2) 集合 $E \subset \ell^2$ 是有界的, 下证其非完全有界. 用反证法, 假设 E 是完全有界的, 则存在 $e_{k_1}, \cdots, e_{k_m} \in E$, 使得 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathbb{B}\left(e_{k_i}, \frac{1}{2}\right)$. 记 $j = \max\{k_1, \cdots, k_m\}$, 则 $e_{j+1} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathbb{B}\left(e_{k_i}, \frac{1}{2}\right)$, 矛盾. □

习题 1.3.4 设 (X,ρ) 是度量空间, F_1, F_2 是它的两个紧子集, 求证：存在 $x_i \in F_i$ $(i = 1, 2)$, 使得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$, 其中

$$\rho(F_1, F_2) \coloneqq \inf\{\rho(x, y) : x \in F_1, y \in F_2\}.$$

证明 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in F_1$ 与 $y_n \in F_2$, 使得

$$\rho(F_1, F_2) \leqslant \rho(x_n, y_n) < \rho(F_1, F_2) + \frac{1}{n}.$$

由 F_1 紧 (在度量空间中等价于列紧), $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, $\{y_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\left\{y_{n_{k_j}}\right\}$, 记 $x_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, $x_2 = \lim\limits_{j\to\infty} y_{n_{k_j}}$, 则

$$\rho(F_1, F_2) \leqslant \rho\left(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}\right) < \rho(F_1, F_2) + \frac{1}{n_{k_j}}.$$

令 $j \to \infty$ 即得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$. □

习题 1.3.6 设 $E=\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$, 求证：$E$ 在 $\mathcal{C}([0,\pi])$ 中不是列紧的.

证明 由 Arzelà-Ascoli 定理, 只需证 E 非等度连续. 对 $\varepsilon=1$, 对任意 $\delta>0$, 当 $n>\dfrac{\pi}{\delta}$ 时, 对于 $x_1=\dfrac{\pi}{2n}$ 与 $x_2=0$, 有 $|x_1-x_2|<\delta$, 但

$$|\sin(nx_1)-\sin(nx_2)|=1\geqslant\varepsilon.$$

故 E 非等度连续, 从而 E 在 $\mathcal{C}([0,\pi])$ 中不是列紧的. $\square$

习题 1.3.9 设 (M,ρ) 是一个紧度量空间, 又 $E\subset\mathcal{C}(M)$, E 中的函数一致有界并满足下列 Hölder 条件：

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^{\alpha}\quad(\forall x\in E,\forall t_1,t_2\in M),$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1, C>0$. 求证：E 在 $\mathcal{C}(M)$ 中是列紧集.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 只要 $t_1,t_2\in M$ 满足 $\rho(t_1,t_2)<\left(\dfrac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, 就有

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^{\alpha}<\varepsilon.$$

故 E 等度连续, 再由 Arzelà-Ascoli 定理知 E 在 $\mathcal{C}(M)$ 中列紧. $\square$

习题 1.4.2 设 $C((0,1])$ 表示 $(0,1]$ 上的连续且有界函数 $x(t)$ 全体. 对 $\forall x\in C((0,1])$, 令 $\|x\|=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|$. 求证：

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C((0,1])$ 上的范数.

(2) ℓ^{∞} 与 $C((0,1])$ 的一个子空间是等距同构的.

证明 (1) ① $\|x\|\geqslant 0$, 且 $\|x\|=0\iff\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|=0\iff x=0$.

② $\|x+y\|=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)+y(t)|\leqslant\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|+\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|y(t)|=\|x\|+\|y\|$.

③ $\|\alpha x\|=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|\alpha x(t)|=|\alpha|\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|=|\alpha|\cdot\|x\|$.

(2) 定义映射

$$f:\ell^{\infty}\to C((0,1]),\quad\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\mapsto\text{ 以 }\left\{\left(\tfrac{1}{n},a_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\text{ 为顶点的折线函数}.$$

显然 $f(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ 在 $(0,1]$ 的每点处均连续, 因此 f 是良定的. 由于折线函数在每一个折线段上的最大值由端点值决定, 结合 f 的定义即知 f 是等距映射, 从而 $f:\ell^{\infty}\to f(\ell^{\infty})$ 为等距同构. $\square$

习题 1.4.3 在 $\mathcal{C}^1([a,b])$ 中, 令

$$\|f\|_1=\left(\int_a^b\left(|f|^2+|f'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $\mathcal{C}^1([a,b])$ 上的范数.

(2) 问 $\left(\mathcal{C}^1([a,b]),\|\cdot\|_1\right)$ 是否完备?

证明 (1) ① $\|f\|\geqslant 0$, 且 $\|f\|=0\iff|f|^2+|f'|^2=0\iff f=0$.

② 由于

$$\left(\|f\|_1+\|g\|_1\right)^2-\|f+g\|_1^2$$

$$=2\left(\int_a^b \left(|f|^2+|f'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \left(|g|^2+|g'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} - 2\int_a^b |f||g|\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b |f'||g'|\,\mathrm{d}x,$$

为验证三角不等式, 只需证

$$\left(\int_a^b \left(|f|^2+|f'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \left(|g|^2+|g'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \int_a^b \left(|f||g|+|f'||g'|\right)\mathrm{d}x.$$

由 Schwarz 不等式, 上式左边

$$\text{LHS} \geqslant \int_a^b \sqrt{|f|^2+|f'|^2}\sqrt{|g|^2+|g'|^2}\,\mathrm{d}x,$$

而对右边的被积函数使用 Cauchy 不等式, 可得

$$\text{RHS} \leqslant \int_a^b \sqrt{|f|^2+|f'|^2}\sqrt{|g|^2+|g'|^2}\,\mathrm{d}x,$$

故三角不等式得证.

③ $\|\alpha f\| = \left(\int_a^b \left(|\alpha f|^2+|\alpha f'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\left(\int_a^b \left(|f|^2+|f'|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\cdot\|f\|.$

(2) 考虑 $\mathcal{C}^1([-1,1])$ 中的函数列

$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

由于

$$f_n'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}},$$

对 $m>n$ 有

$$\begin{aligned}\|f_m-f_n\|_1^2 &= \int_{-1}^1 \left(|f_m-f_n|^2+|f_m'-f_n'|^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{2\int_0^1\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)^2\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{2\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}\right)^2\mathrm{d}x}_{I_2}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)^2 &= 2x^2-2\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \\ &\leqslant \frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}<\frac{2}{n^2},\end{aligned}$$

因此

$$I_1\leqslant\frac{2}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

又

$$x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}\right)^2=x^2\cdot\frac{2x^2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}-2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}}{\left(x^2+\frac{1}{m^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$\leqslant\frac{x^2}{x^2+\frac{1}{m^2}}\cdot\frac{2x^2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}-2\left(x^2+\frac{1}{m^2}\right)}{x^2+\frac{1}{n^2}}$$
$$\leqslant 1\cdot\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{x^2+\frac{1}{n^2}}\leqslant\frac{1}{n^2x^2+1},$$

因此

$$I_2\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{n^2x^2+1}=\frac{1}{n}\arctan(nx)\Big|_0^1=\frac{\arctan(n)}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

于是 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathcal{C}^1([-1,1])$ 中的 Cauchy 列. 记 $f(x)=|x|$, 则

$$\|f_n-f\|_1^2=\int_{-1}^1\left(|f_n-f|^2+|f_n'-f'|^2\right)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-x\right)^2\mathrm{d}x+2\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}-1\right)^2\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1\left(2x^2+\frac{1}{n^2}-2x\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n^2x^2+1}+2-\frac{2x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=2\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x}{n^2}-\frac{2}{3}\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}+2x-2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)\Bigg|_0^1-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{n^2x^2+1}$$
$$=2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}+2-2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\arctan(n)\right)$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

即 $f_n\to f$, 但 $f\notin\mathcal{C}^1([-1,1])$, 故 $\left(\mathcal{C}^1([-1,1]),\|\cdot\|_1\right)$ 不完备. □

习题 1.4.5 设 $\mathrm{BC}([0,+\infty))$ 表示 $[0,+\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体, 对于每个 $f\in\mathrm{BC}([0,+\infty))$ 及 $a>0$, 定义

$$\|f\|_a=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_a$ 是 $\mathrm{BC}([0,+\infty))$ 上的范数.

(2) 若 $a,b>0$, $a\neq b$, 求证 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$ 作为 $\mathrm{BC}([0,+\infty))$ 上的范数是不等价的.

证明 (1) ① $\|f\|_a=0$, 且由连续性知 $\|f\|_a=0\iff\mathrm{e}^{-ax}|f(x)|=0,\forall x\geqslant 0\iff f=0.$

② 由 Minkowski 不等式,

$$\|f+g\|_a=\left\|\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}|f(x)+g(x)|\right\|_{\mathcal{L}^2([0,+\infty))}$$
$$\leqslant\left\|\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}(|f(x)|+|g(x)|)\right\|_{\mathcal{L}^2([0,+\infty))}$$
$$=\left\|\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}|f(x)|\right\|_{\mathcal{L}^2([0,+\infty))}+\left\|\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}|g(x)|\right\|_{\mathcal{L}^2([0,+\infty))}$$
$$=\|f\|_a+\|g\|_a.$$

③ $\|\alpha f\|_a = \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|\alpha f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\cdot\|f\|_a$.

(2) 设 $b>a>0$, 则 $\|f\|_b \leqslant \|f\|_a$, 从而只需证不存在 $C>0$ 使得 $\|f\|_a \leqslant C\|f\|_b$, $\forall f\in \mathrm{BC}([0,+\infty))$. 考虑 $f_n \in \mathrm{BC}([0,+\infty))$, 满足

$$f_n^2(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ax}, & 0\leqslant x\leqslant n, \\ \mathrm{e}^{an}(n+1-x), & n\leqslant x\leqslant n+1, \\ 0, & x\geqslant n+1. \end{cases}$$

则

$$\|f_n\|_a^2 \geqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-ax}\cdot\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = n,$$
$$\|f_n\|_b^2 \leqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-bx}\cdot\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}.$$

于是

$$\frac{\|f_n\|_a^2}{\|f_n\|_b^2} \geqslant (b-a)n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

说明不存在 $C>0$ 使得 $\|f\|_a \leqslant C\|f\|_b$, $\forall f\in\mathrm{BC}([0,+\infty))$. 故 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$ 作为 $\mathrm{BC}([0,+\infty))$ 上的范数是不等价的. □

习题 1.4.6 设 X_1, X_2 是两个 B^* 空间, $x_1\in X_1$ 和 $x_2\in X_2$ 的序对 (x_1,x_2) 全体构成空间 $X = X_1\times X_2$, 并赋以范数

$$\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2),$$

其中 $x=(x_1,x_2)$, $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别是 X_1 和 X_2 的范数. 求证：如果 X_1, X_2 是 B 空间, 那么 X 也是 B 空间.

证明 先验证 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数:

- ◇ $\|x\|\geqslant 0$, 且 $\|x\|=0 \iff \|x_1\|_1 = 0$ 且 $\|x_2\|_2=0 \iff x_1=0$ 且 $x_2=0 \iff x=0$.
- ◇ $\|x+y\| = \max(\|x_1+y_1\|_1, \|x_2+y_2\|_2) \leqslant \max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2) + \max(\|y_1\|_1,\|y_2\|_2) = \|x\|+\|y\|$.
- ◇ $\|\alpha x\| = \max(\|\alpha x_1\|_1, \|\alpha x_2\|_2) = |\alpha|\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2) = |\alpha|\cdot\|x\|$.

设 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中的 Cauchy 列, 其中 $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得只要 $m,n>N$ 就有

$$\left\|x^{(n)}-x^{(m)}\right\| < \varepsilon,$$

也即

$$\left\|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}\right\|_1 < \varepsilon, \quad \left\|x_2^{(n)}-x_2^{(m)}\right\|_2 < \varepsilon.$$

由此可知 $\left\{x_1^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty$ 与 $\left\{x_2^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty$ 分别是 X_1 与 X_2 中的 Cauchy 列, 由 X_1 与 X_2 完备知存在 $x_1\in X_1$ 与 $x_2\in X_2$, 使得

$$\left\|x_1^{(n)}-x_1\right\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \left\|x_2^{(n)}-x_2\right\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

令 $x=(x_1,x_2)\in X$, 则

$$\left\|x^{(n)}-x\right\| = \max\left\{\left\|x_1^{(n)}-x_1\right\|_1, \left\|x_2^{(n)}-x_2\right\|_2\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x \in X$, 即 X 完备, 从而是 B 空间. □

习题 1.4.8 记 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体为 $\mathbb{P}_n$. 求证: $\forall f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$, $\exists\, P_0(x) \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - P_0(x)| = \min_{P\in\mathbb{P}_n} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - P(x)|.$$

也就是说, 如果用所有次数不超过 n 的多项式去对 $f(x)$ 一致逼近, 那么 $P_0(x)$ 是最佳的.

证明 由于 $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间, $\mathbb{P}_n$ 是 $\mathcal{C}([a,b])$ 的线性子空间, $\dim \mathbb{P}_n = n+1 < \infty$, 因此 $f \in \mathcal{C}([a,b])$ 在 $\mathbb{P}_n$ 上的最佳逼近元 P_0 存在. □

习题 1.4.9 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 对 $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 定义范数

$$\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|),$$

并设 $e_1 = (1,0), x_0 = (0,1)$. 求 $a \in \mathbb{R}$ 适合

$$\|x_0 - ae_1\| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x_0 - \lambda e_1\|,$$

并问这样的 a 是否唯一? 请对结果做出几何解释.

解答 由于

$$\|x_0 - \lambda e_1\| = \|(-\lambda, 1)\| = \max(|\lambda|, 1) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| > 1, \\ 1, & |\lambda| \leqslant 1, \end{cases}$$

因此最佳逼近元为 $\{ae_1\}_{-1\leqslant a\leqslant 1}$, 可取的 a 不唯一. 几何解释: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ 非严格凸, 如令 $x = (1,1), y = (1,-1)$, 则 $\|x\| = \|y\| = 1$, 但 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \|(1,0)\| = 1$. 因此最佳逼近元可以不唯一. □

习题 1.4.12 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一赋范线性空间, M 是 X 的有限维子空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 M 的一组基, 给定 $g \in X$, 引进函数 $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, 对 $\forall c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ 规定

$$F(c) = F(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \left\|\sum_{i=1}^n c_i e_i - g\right\|.$$

(1) 求证: F 是一个凸函数.

(2) 若 $F(c)$ 的最小值点是 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$, 求证:

$$f \coloneqq \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

给出 g 在 M 中的最佳逼近元.

证明 (1) 对于 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 与 $\lambda \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} F(\lambda a + (1-\lambda)b) &= F(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1, \cdots, \lambda a_n + (1-\lambda)b_n) \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n [\lambda a_i + (1-\lambda)b_i]e_i - [\lambda g + (1-\lambda)g]\right\| \\ &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n \lambda a_i e_i - \lambda g\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n (1-\lambda) b_i e_i - (1-\lambda)g\right\| \end{aligned}$$

$$= \lambda F(a) + (1-\lambda)F(b).$$

故 F 是凸函数.

(2) 由于 $M = \text{span}(e_1, \cdots, e_n)$, 因此

$$\|f-g\| = \min_{a\in\mathbb{K}^n} F(a) = \min_{a\in\mathbb{K}^n} \left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i - g\right\| = \min_{x\in M} \|x-g\|.$$

□

习题 1.4.14 设 C_0 表示以 0 为极限的实数全体, 并在 C_0 中赋以范数

$$\|x\| = \max_{n\geqslant 1} |\xi_n| \quad (\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in C_0).$$

又设 $M \coloneqq \left\{x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in C_0 : \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_n}{2^n} = 0\right\}$.

(1) 求证: M 是 C_0 的闭线性子空间.

(2) 设 $x_0 = (2, 0, \cdots, 0, \cdots)$, 求证:

$$\inf_{z\in M} \|x_0 - z\| = 1,$$

但 $\forall y \in M$ 有 $\|x_0 - y\| > 1$.

习题 1.4.17 设有商空间 X/X_0.

(1) 设 $[x] \in X/X_0$, 求证: 对 $\forall x \in [x]$, 有

$$\inf_{z\in X_0} \|x-z\| = \|[x]\|_0.$$

(2) 定义映射 $\varphi : X \to X/X_0$ 为

$$\varphi(x) = [x] \coloneqq x + X_0 \quad (\forall x \in X),$$

求证: φ 是连续线性映射.

(3) $\forall [x] \in X/X_0$, 求证: $\exists x \in X$, 使得

$$\varphi(x) = [x], \quad \text{且} \quad \|x\| \leqslant 2\|[x]\|_0.$$

(4) 设 $X = \mathcal{C}([0,1])$, $X_0 = \{f \in X : f(0) = 0\}$, 求证:

$$X/X_0 \simeq \mathbb{K},$$

其中记号 "$\simeq$" 表示等距同构.

证明 (1) 由于 $y \in [x] \iff$ 存在 $z \in X_0$ 使得 $y = x - z$. 因此

$$\|[x]\|_0 = \inf_{y\in[x]} \|y\| = \inf_{z\in X_0} \|x-z\|.$$

(2) (线性) $\varphi(x+y) = [x+y] = x+y+X_0 = (x+X_0)+(y+X_0) = [x]+[y] = \varphi(x)+\varphi(y)$, $\forall x, y \in X$, 且 $\varphi(\alpha x) = [\alpha x] = \alpha x + X_0 = \alpha(x+X_0) = \alpha\varphi(x)$, $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

(连续) 由 $\|\varphi(x)\| = \|[x]\|_0 = \inf\limits_{y\in[x]} \|y\| \leqslant \|x\|$ 知 φ 为 Lipschitz 连续的.

(3) 不妨设 $[x] \neq [0]$, 则 $2\|[x]\|_0 > \|[x]\|_0$, 由下确界定义, 存在 $x \in [x]$ 使得 $\varphi(x) = [x]$ 且 $\|x\| \leqslant 2\|[x]\|_0$.

(4) 考虑映射

$$T : X/X_0 \to \mathbb{K}, \quad [f] \mapsto f(0),$$

则 T 是良定的且为满射. 为证 T 是等距同构映射, 只需再证 $\|[f]\|_0 = |f(0)|, \forall f \in X$. 令 $g_f \in \mathcal{C}([0,1])$ 为恒取 $f(0)$ 的常值函数, 则 $\|[f]\|_0 = \|g_f\| = |f(0)|$. 故 T 为等距同构. □

习题 1.5.4 设 C 是 B 空间 X 中的一个有界闭凸集, 映射 $T_i : C \to X$ $(i = 1, 2)$ 适合

(1) $\forall x, y \in C \implies T_1x + T_2y \in C$;

(2) T_1 是一个压缩映射, T_2 是一个紧映射.

求证: $T_1 + T_2$ 在 C 上至少有一个不动点.

证明 由于 T_1 是压缩映射, 存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得

$$\|T_1x_1 - T_1x_2\| \leqslant \alpha\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in C.$$

对任意取定的 $y \in T_2(C)$, 由条件 (1) 有 $T_1x + y \in C$, 且由 T_1 是压缩映射知 $T_1x + y : C \to C$ 亦为压缩映射. 因此由 Banach 不动点定理, 存在唯一的 $x_0 \in C$, 使得

$$T_1x_0 + y = x_0.$$

这就建立了 $T_2(C)$ 上的点 y 到 C 上的点 x_0 的对应关系, 即确定了映射 $(\mathrm{Id} - T_1)^{-1} : T_2(C) \to C$. 对任意 $y_1, y_2 \in T_2(C)$, 令 $x_i = (1 - T_1)^{-1}y_i$ $(i = 1, 2)$, 则有

$$\begin{aligned}\|y_2 - y_1\| &= \|(1 - T_1)x_2 - (1 - T_1)x_1\| = \|x_2 - x_1 - (T_1x_2 - T_1x_1)\| \\ &\geqslant \|x_2 - x_1\| - \|T_1x_2 - T_1x_1\| \geqslant (1 - \alpha)\|x_2 - x_1\|,\end{aligned}$$

即

$$\left\|(1 - T_1)^{-1}y_2 - (1 - T_1)^{-1}y_1\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \alpha}\|y_2 - y_1\|. \tag{1.5.4–1}$$

因此 $(1 - T_1)^{-1}$ 是 Lipschitz 连续的. 令 $T = (1 - T_1)^{-1}T_2$, 下证 $T : C \to C$ 为紧映射. 设 A 是 C 中的有界集, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(A)$, 则存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, 使得 $T(x_n) = (1 - T_1)^{-1}T_2(x_n) = z_n$. 令 $y_n = T_2(x_n)$, 由 T_2 是紧映射, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列, 设为 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 且令 $y_0 \coloneqq \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$. 由 $(1 - T_1)^{-1}$ 连续可得 $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} (1 - T_1)^{-1}(y_{n_k}) = (1 - T_1)^{-1}(y_0)$ (这里可将 $(1 - T_1)^{-1}$ 连续延拓至 $\overline{T_2(C)}$ 上, 是因为根据 (1.5.4–1), $y_{n_k} \to y_0$ 蕴含了 $\left\{(1 - T_1)^{-1}(y_{n_k})\right\}_{k=1}^{\infty}$ 是闭集 C 中的 Cauchy 列). 因此 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 亦有收敛子列, 从而 T 是紧映射. 由于 C 是 B 空间 X 的一个有界闭凸集, $T : C \to C$ 是紧映射, 由推论 1.5.17, $T = (1 - T_1)^{-1}T_2$ 在 C 上必有不动点, 即存在 $x \in C$, 使得

$$(1 - T_1)^{-1}T_2x = x \implies (T_1 + T_2)x = x.$$

故 $T_1 + T_2$ 在 C 上至少有一个不动点. □

习题 1.5.6 设 $K(x,y)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的正值连续函数，定义映射

$$(Tu)(x)=\int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y \quad (\forall u\in\mathcal{C}([0,1])).$$

求证：存在 $\lambda>0$ 及非负但不恒为零的连续函数 u，满足

$$Tu=\lambda u.$$

证明 令

$$m:=\min_{(x,y)\in[0,1]^2} K(x,y),\quad M:=\max_{(x,y)\in[0,1]^2} K(x,y),$$

则 $0<m\leqslant M$. 设

$$C=\left\{u\in\mathcal{C}([0,1]):\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x=1,\ u(x)\geqslant 0\right\},$$

由数学分析中关于一致收敛的结果可知 C 是闭集. 对任意 $u,v\in C$ 与 $t\in[0,1]$，有

$$tu(x)+(1-t)v(x)\geqslant 0,$$
$$\int_0^1[tu(x)+(1-t)v(x)]\,\mathrm{d}x=t\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x+(1-t)\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

因此 C 是闭凸集. 令

$$\lambda:=\int_0^1\int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\int_0^1 mu(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=m>0,$$

并考虑连续映射

$$S:C\to C,\quad u(x)\mapsto\frac{1}{\lambda}\int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

下证 $S(C)$ 列紧.

- 对任意 $u\in C$，有

$$|(Su)(x)|=\frac{1}{\lambda}\left|\int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^1 Mu(y)\,\mathrm{d}y=\frac{M}{m},$$

  即 $S(C)$ 一致有界.

- 对任意 $u\in C$ 与 $x_1,x_2\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}|(Su)(x_1)-(Su)(x_2)|&=\frac{1}{\lambda}\left|\int_0^1[K(x_1,y)-K(x_2,y)]u(y)\,\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant\frac{1}{m}\int_0^1|K(x_1,y)-K(x_2,y)|u(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

  由于 $K(x,y)\in\mathcal{C}\big([0,1]^2\big)$，$K(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上一致连续，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|K(x_1,y)-K(x_2,y)|<m\varepsilon,\quad\forall y\in[0,1].$$

  进而

$$|(Su)(x_1)-(Su)(x_2)|\leqslant\frac{1}{m}\cdot m\varepsilon=\varepsilon.$$

故 $f(C)$ 等度连续.

由 Arzelà-Ascoli 定理, $S(C)$ 列紧. 再由 Schauder 不动点定理, 存在 $u \in C$ 使 $(Su) = u$, 即 $Tu = \lambda u$. $\square$

习题 1.5.1 设 X 是 B* 空间, E 是以 0 为内点的真凸子集, P 是由 E 产生的 Minkowski 泛函, 求证:

(1) $x \in E^\circ \iff P(x) < 1$;

(2) $\overline{E^\circ} = \overline{E}$.

证明 (1) $(\Rightarrow)$ 若 $x \in E^\circ$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\mathbb{B}(x,\varepsilon) \subset E$. 不妨设 $x \neq 0$, 则

$$\frac{x}{\frac{|x|}{|x|+\varepsilon}} \in E \implies P(x) \leqslant \frac{|x|}{|x|+\varepsilon} < 1.$$

$(\Leftarrow)$ 若 $P(x) < 1$, 取定 $\lambda \in (P(x), 1)$, 则 $y \coloneqq \dfrac{x}{\lambda} \in E$. 另一方面, 由于 $0 \in E^\circ$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\mathbb{B}(0, 2\varepsilon) \subset E^\circ \subset E$, 从而 $\partial\mathbb{B}(0,\varepsilon) \subset E$. 于是由 E 是凸集可知

$$\lambda y + (1-\lambda) z \in E, \quad \forall z \in \partial\mathbb{B}(0,\varepsilon),$$

进而

$$\mathbb{B}(x, \varepsilon(1-\lambda)) \subset E.$$

故 $x \in E^\circ$.

(2) 由 $E^\circ \subset E$ 即得 $\overline{E^\circ} \subset \overline{E}$, 下证 $\overline{E} \subset \overline{E^\circ}$. 任取 $x \in \overline{E}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 均存在 $y \in E$, 使得 $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $y_n = \frac{n}{n+1} y$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, 因此存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $d(y_N, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. 由 $\frac{N+1}{N} y_N = y \in E$ 知 $P(y_N) \leqslant \frac{N}{N+1} < 1$. 由 (1), 这意味着 $y_N \in E^\circ$. 而

$$d(x, y_N) \leqslant d(x,y) + d(y, y_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即知 $x \in \overline{E^\circ}$, 故 $\overline{E} \subset \overline{E^\circ}$, 进而 $\overline{E^\circ} = \overline{E}$. $\square$

习题 1.6.1 设 a 是复线性空间 X 上的共轭双线性函数, q 是由 a 诱导的二次型, 求证: 对 $\forall x, y \in X$, 有

$$a(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y) + \mathrm{i}q(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}q(x-\mathrm{i}y)].$$

证明 由

$$\begin{aligned}
q(x+y) &= a(x+y, x+y) = a(x,x) + a(x,y) + a(y,x) + a(y,y),\\
q(x-y) &= a(x-y, x-y) = a(x,x) - a(x,y) - a(y,x) + a(y,y),\\
q(x+\mathrm{i}y) &= a(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) = a(x,x) - \mathrm{i}a(x,y) + \mathrm{i}a(y,x) + a(y,y),\\
q(x-\mathrm{i}y) &= a(x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y) = a(x,x) + \mathrm{i}a(x,y) - \mathrm{i}a(y,x) + a(y,y)
\end{aligned}$$

得

$$q(x+y) - q(x-y) + \mathrm{i}q(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}q(x-\mathrm{i}y) = 4a(x,y).$$

$\square$

习题 1.6.2 求证: 在 $\mathcal{C}([a,b])$ 中不可能引进一种内积 $(\cdot,\cdot)$, 使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \quad (\forall f \in \mathcal{C}([a,b])).$$

证明 不妨设 $[a,b]=[0,1]$. 取 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, 则

$$\|f\|=1,\quad \|g\|=1,\quad \|f+g\|=2,\quad \|f-g\|=\frac{1}{4}.$$

因此

$$2\|f\|^2+2\|g\|^2=4\neq 4+\frac{1}{16}=\|f+g\|^2+\|f-g\|^2,$$

即平行四边形等式不成立, 因此最大模范数不可能为某一内积诱导. □

习题 1.6.4 设 M,N 是内积空间中的两个子集, 求证:

$$M\subset N\implies N^{\perp}\subset M^{\perp}.$$

证明 对任意 $x\in N^{\perp}$, 均有 $x\perp M$, 因此 $x\in M^{\perp}$, 即 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$. □

习题 1.6.5 设 M 是 Hilbert 空间 X 的子集, 求证:

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{\operatorname{span}M}.$$

证明 先证明一个引理: 若 N 是 Hilbert 空间的闭线性子空间, 则 $N=\left(N^{\perp}\right)^{\perp}$.

显然 $N\subset\left(N^{\perp}\right)^{\perp}$; 反过来, 若 $\left(N^{\perp}\right)^{\perp}\setminus N\neq\varnothing$, 任取 $x\in\left(N^{\perp}\right)^{\perp}\setminus N$, 由正交分解 (推论 1.6.37), 存在唯一的正交分解:

$$x=y+z,\quad y\in N, z\in N^{\perp},$$

又由 $x,y\in\left(N^{\perp}\right)^{\perp}$ 有

$$z=x-y\in\left(N^{\perp}\right)^{\perp},$$

因此

$$z\in N^{\perp}\cap\left(N^{\perp}\right)^{\perp}\implies z=0,$$

即 $x=y\in N$, 但这与假设 $x\notin N$ 矛盾. 故引理得证.

回到原问题. 由于

$$x\in M^{\perp}\iff x\perp M\iff x\perp\operatorname{span}M,$$

而对任意 $y\in\overline{\operatorname{span}M}$, 存在点列 $\{y_n\}\subset\operatorname{span}M$ 使得 $y_n\to y$, 进而 $(y,x)=\lim\limits_{n\to\infty}(y_n,x)=0$, 因此

$$x\in M^{\perp}\iff x\perp\overline{\operatorname{span}M},$$

即

$$M^{\perp}=\left(\overline{\operatorname{span}M}\right)^{\perp}.$$

利用引理便有

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=\left(\left(\overline{\operatorname{span}M}\right)^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{\operatorname{span}M}.$$

□

习题 1.6.7 在 $\mathcal{L}^2([a,b])$ 中, 考察函数集 $S=\left\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(1) 若 $|b-a|\leqslant 1$, 求证: $S^{\perp}=\{0\}$;

(2) 若 $|b-a|>1$, 求证: $S^{\perp}\neq\{0\}$.

证明 (1) 若 $b-a\leqslant 1$, $u\in\mathcal{L}^2([a,b])$, 总可以将 u 零延拓为 $\tilde{u}\in\mathcal{L}^2([a,a+1])$. 而 S 是 $\mathcal{L}^2([a,a+1])$ 的完备正交规范集, 因此 $u\perp S\implies\tilde{u}\perp S\implies\tilde{u}=0\implies u=0$, 即 $S^{\perp}=\{0\}$.

(2) 若 $b-a>1$, 对任意 $u \in \mathcal{L}^2([a,b-1])$, 令

$$v_n = -\int_a^{b-1} u(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

由于 S 是 $\mathcal{L}^2([b-1,b])$ 的完备正交规范集, 且通过将 u 零延拓至 $[a,a+1]$ 并运用 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v_n|^2 < +\infty,$$

因此

$$v(x) \coloneqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} \in \mathcal{L}^2([b-1,b]).$$

定义

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [a,b-1], \\ v(x), & x \in (b-1,b], \end{cases}$$

则 $\tilde{u} \in \mathcal{L}^2([a,b])$, 且 $\tilde{u} \perp S$. 故 $S^\perp \neq \{0\}$. □

习题 1.6.8 设 X 表示闭单位圆上的解析函数全体, 内积定义为

$$(f,g) = \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)\overline{g(z)}}{z}\,\mathrm{d}z \quad (\forall f,g \in X).$$

求证: $\left\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ 是一组正交规范集.

证明 记 $e_n = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}$, 则

$$\begin{aligned}
(e_n,e_m) &= \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{r_n\overline{e_m}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} z^{n-1}\overline{z^m}\,\mathrm{d}z \\
&\xlongequal{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \delta_{nm}.
\end{aligned}$$

故 $\left\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ 是一组正交规范集. □

习题 1.6.9 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 X 中的两个正交规范集, 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

求证: $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备.

证明 假设 $\{e_n\}$ 完备而 $\{f_n\}$ 不完备, 则存在 $x \in X \setminus \{0\}$, 使得

$$(x,f_n) = 0, \quad \forall n \geqslant 1.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及所给条件, 有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n - f_n)|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 \|e_n - f_n\|^2 < \|x\|^2,$$

矛盾. 故假设不成立, 即 $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备. □

习题 2.1.7 设 $T : X \to Y$ 是线性的, 令

$$N(T) \coloneqq \{x \in X : Tx = 0\}.$$

(1) 若 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 求证: $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 问 $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间能否推出 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$?

(3) 若 f 是线性泛函, 求证:
$$f \in X^* \iff N(f) \text{ 是闭线性子空间.}$$

证明 (1) 由
$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2) = 0, \quad \forall x_1, x_2 \in N(T), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$
知 $N(T)$ 是 X 的线性子空间. 任取 $N(T)$ 中收敛点列 $\{x_n\}$, 令 $x_n \to x_0$. 由于 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, T 连续, 因此 $T(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = 0$, 即 $x_0 \in N(T)$. 故 $N(T)$ 是闭的.

(2) 不能, 反例如下: 设 $X = \ell^1$, 取 $a = (1, -1, 0, 0, \cdots) \in X$ 及线性泛函

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in X.$$

显然 $\|a\| = 1$ 且 $f(a) = 0$. 定义算子

$$T : X \to X, \quad x \mapsto x - af(x).$$

则
$$Tx = 0 \iff x = af(x) \implies f(x) = f(a)f(x) = 0 \implies x = Tx + af(x) = 0,$$
即 $N(T) = \{0\}$, 从而闭. 下证 T 无界. 先证 f 无界. 令 $x_n = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{n}, 0, 0, \cdots)$, 则 $\|x_n\| = 1$ 且 $f(x_n) = n$. 于是
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = +\infty.$$
再证 T 无界. 用反证法, 假设 T 有界, 则存在 $M > 0$, 使得 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$, $\forall x \in X$. 于是对任意 $x \in X$,
$$|f(x)| = \|a\||f(x)| = \|x - Tx\| \leqslant \|x\| + \|Tx\| \leqslant (1 + M)\|x\|,$$
这与 f 无界矛盾. 故 T 无界.

(3) ($\Rightarrow$) 这即是 (1).

($\Leftarrow$) 用反证法, 假设 f 为无界线性算子, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in X$, 使得

$$\|x_n\| = 1, \quad |f(x_n)| \geqslant n.$$

令 $y_n = \dfrac{x_n}{f(x_n)} - \dfrac{x_1}{f(x_1)}$, 则

$$f(y_n) = \frac{f(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f(x_1)}{f(x_1)} = 0,$$

因此 $y_n \in N(f)$. 而

$$\left\| y_n - \left(-\frac{x_1}{f(x_1)} \right) \right\| = \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

由 $N(f)$ 是闭线性子空间知 $-\frac{x_1}{f(x_1)} \in N(f)$, 但 $f\left(-\dfrac{x_1}{f(x_1)}\right) = -1 \neq 0$, 矛盾. 故 $f \in X^*$. □

习题 2.1.8 设 f 是 X 上的线性泛函, 记

$$H_f^\lambda \coloneqq \{x \in X : f(x) = \lambda\} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{K}).$$

如果 $f \in X^*$, 并且 $\|f\| = 1$, 求证:

(1) $|f(x)| = \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\}$ $(\forall x \in X)$.

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, H_f^λ 上的任一点 x 到 H_f^0 的距离都等于 $|\lambda|$.

并对 $X = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ 情形解释 (1) 和 (2) 的几何意义.

证明 (1) ① 任取 $x \in X$, 由下确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in H_f^0$, 使得

$$\|x - y\| < \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\} + \varepsilon.$$

于是

$$|f(x)| = |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leqslant \|f\| \cdot \|x - y\| < \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\} + \varepsilon.$$

因此 $|f(x)| \leqslant \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\}$.

② 任取 $x \in X$ 与 $t \in X \setminus H_f^0$, 则 $t \neq 0$ 且 $f(t) \neq 0$. 令 $y = x - \dfrac{f(x)}{f(t)} t$, 则

$$f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(t)} f(t) = 0,$$

因此 $y \in H_f^0$. 又

$$f(x)t = f(t)(x - y),$$

从而

$$\frac{|f(t)|}{\|t\|} \cdot \|x - y\| = |f(x)|.$$

于是

$$|f(x)| \geqslant \frac{|f(t)|}{\|t\|} \inf_{\tilde{y} \in H_f^0} \|x - \tilde{y}\|$$

由于上式对任意 $t \neq 0$ 均成立, 结合 $\|f\| = 1$ 就有

$$|f(x)| \geqslant \sup_{t \neq 0} \frac{|f(t)|}{\|t\|} \cdot \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\} = \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\}.$$

由 ① ② 即得 $|f(x)| = \inf\big\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\big\}$.

(2) 由 (1), H_f^λ 上的任一点 x 到 H_f^0 的距离即 $\inf\{\|x-z\|:\forall z\in H_f^0\}=|f(x)|=|\lambda|$.
当 $X=\mathbb{R}^2,\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, f 形如 $f(x,y)=ax+by$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$. 由

$$\|f\|=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{|ax+by|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sup_{\theta\in[0,2\pi]}|a\cos\theta+b\sin\theta|=\sqrt{a^2+b^2}$$

可知 $a^2+b^2=1$. 由此可知

$$H_f^0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:ax+by=0\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的直线, $\inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|:\forall\mathbf{z}\in H_f^0\}$ 表示点 $\mathbf{x}=(x,y)$ 到此直线的距离. 由解析几何知识, 该距离为

$$\frac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}=|ax+by|=|f(\mathbf{x})|.$$

□

习题 2.2.3 设 H 的元素是定义在集合 S 上的复值函数. 又若 $\forall x\in S$, 由

$$J_x(f)=f(x)\quad(\forall f\in H)$$

定义的映射 $J_x:H\to\mathbb{C}$ 是 H 上的连续线性泛函. 求证: 存在 $S\times S$ 上的复值函数 $K(x,y)$, 适合条件:

(1) 对任意固定的 $y\in S$, 作为 x 的函数有 $K(x,y)\in H$.

(2) $f(y)=(f,K(\cdot,y))$, $\forall f\in H$, $\forall y\in S$.

满足以上条件的函数 $K(x,y)$ 称为 H 的再生核.

证明 对任意固定的 $y\in S$, $J_y:H\to\mathbb{C}$ 是 H 上的连续线性泛函, 由 Riesz 表示定理, 存在 $K_y(x)\in H$, 使得

$$J_y(f)=(f,K_y(x))=f(y).$$

令 $K(x,y)=K_y(x)$, 则 (1) 与 (2) 显然满足. □

习题 2.2.5 设 L,M 是 Hilbert 空间 H 上的闭线性子空间, 求证:

(1) $L\perp M\iff P_LP_M=0$.

(2) $L=M^\perp\iff P_L+P_M=\mathrm{Id}$.

(3) $P_LP_M=P_{L\cap M}\iff P_LP_M=P_MP_L$.

证明 (1) ($\Rightarrow$) 对任意 $x\in H$, $P_Mx\in M$, 而 $L\perp M$, 因此 $P_L(P_Mx)=0$. 故 $P_LP_M=0$.
($\Leftarrow$) 对任意 $x\in M$, $P_Lx=P_L(P_Mx)=(P_LP_M)(x)=0$, 因此 $x\perp L$. 故 $L\perp M$.

(2) ($\Rightarrow$) 由于 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 对任意 $x\in H$, 有正交分解

$$x=y+z,\quad y\in M,z\in M^\perp=L.$$

于是

$$y=P_Mx,\quad z=P_Lx,$$

进而

$$(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx=y+z=x.$$

由 x 的任意性知 $P_L+P_M=\mathrm{Id}$.

(⇐) 对任意 $x \in H$, 由 $P_L x + P_M x = x$ 得

$$P_L x = x - P_M x = P_{M^\perp} x.$$

由此可知对任意 $x \in L$,

$$x = P_L x = P_{M^\perp} x \in M^\perp,$$

即 $L \subset M^\perp$. 反过来, 对任意 $x \in M^\perp$, 有

$$x = P_{M^\perp} x = P_L x \in L,$$

即 $M^\perp \subset L$. 故 $L = M^\perp$.

(3) (⇒) $P_L P_M = P_{L\cap M} = P_{M\cap L} \overset{\star}{=} P_M P_L$, 其中 $\star$ 处等号是因为：对任意 $x, y \in H$,

$$(x, P_M P_L y) = (P_M x, P_L y) = (P_L P_M x, y) = (P_{L\cap M} x, y) = (x, P_{L\cap M}, y).$$

(⇐) 假设 $P_L P_M = P_M P_L$, 注意到 $L \cap M$ 是 H 的闭线性子空间, 要证 $P_L P_M = P_{L\cap M}$, 只需证

$$P_L P_M x = \begin{cases} x, & x \in L \cap M, \\ 0, & x \in (L\cap M)^\perp. \end{cases}$$

◇ 若 $x \in L \cap M$, 则 $P_M x = x$, $P_L x = x$, 从而 $P_L P_M x = P_L x = x$.
◇ 若 $x \in (L\cap M)^\perp$, 则对任意 $y \in L \cap M$, 由上一点知 $y = P_L P_M y$, 于是

$$0 = (x, y) = (x, P_L P_M y) = (P_L x, P_M y) = (P_M P_L x, y) = (P_L P_M x, y).$$

特别地, 由于 $P_L P_M x = P_M P_L x \in M \cap L$, 可取 $y = P_L P_M y$, 则上式化为

$$0 = (P_L P_M x, P_L P_M x) = \|P_L P_M x\|^2,$$

因此 $P_L P_M x = 0$.

故结论得证. □

习题 2.3.1 设 X 是 B 空间, X_0 是 X 的闭子空间。映射 $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为

$$\varphi : x \mapsto [x] \quad (\forall x \in X),$$

其中 $[x]$ 表示含 x 的商类 (见习题 1.4.17). 求证 φ 是开映射.

证明 由习题 1.4.17, φ 是连续线性映射, 且当 X 是 B 空间时 X/X_0 也是 B 空间, 而 φ 显然是满射, 因此由开映射定理知 φ 是开映射. □

习题 2.3.11 设 X, Y 是 B 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 是满射. 求证：如果在 Y 中 $y_n \to y_0$, 则存在 $C > 0$ 与 $x_n \to x_0$, 使得 $Ax_n = y_n$, 且 $\|x_n\| \leqslant C\|y_n\|$.

证明 记 $N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$, 定义映射

$$T : X/N(A) \to Y, \quad [x] \mapsto A(x + N(A)),$$

则 T 为单射. 又 A 为满射, 因此 T 为线性双射. 由 A 是有界算子知 T 也是有界算子, 而 $X/N(A)$ 与 Y 均为 B 空间, 因此由 Banach 逆算子定理, $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X/N(A))$. 由于 $y_n \to y_0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|y_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|y_0\|, \quad \forall n > N.$$

◇ 对于每个 $0 \leqslant n \leqslant N$, 可取 $x_n \in A^{-1}y_n$, 使得

$$\|x_n\| \leqslant 2\|[x_n]\| = 2\left\|T^{-1}y_n\right\| \leqslant 2\left\|T^{-1}\right\| \cdot \|y_n\|.$$

◇ 对于任意 $n > N$, 可取 $x_n \in A^{-1}y_n$, 使得

$$\|x_n - x_0\| \leqslant 2\|[x_n - x_0]\| = 2\left\|T^{-1}(y_n - y_0)\right\| \leqslant 2\left\|T^{-1}\right\| \cdot \|y_n - y_0\|,$$

由

$$\left\|T^{-1}(y_n - y_0)\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|y_n - y_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

知 $x_n \to x_0$, 且对 $n > N$, 有

$$\begin{aligned}\|x_n\| &\leqslant \|x_n - x_0\| + \|x_0\| \leqslant 2\left\|T^{-1}\right\|(\|y_n - y_0\| + \|y_0\|) \\ &\leqslant 2\left\|T^{-1}\right\|(\|y_n\| + 2\|y_0\|) \leqslant 2\left\|T^{-1}\right\|(\|y_n\| + 4\|y_n\|) \\ &= 10\left\|T^{-1}\right\| \cdot \|y_n\|.\end{aligned}$$

取 $C = 10\left\|T^{-1}\right\|$ 即可. □

习题 2.3.3 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(H)$, 并且存在 $m > 0$, 使得

$$|(Ax, x)| \geqslant m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H).$$

求证：存在 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

证明 (A 是单射) 若 $Ax = Ay$, 则 $0 = |(A(x-y), x-y)| \geqslant m\|x-y\|^2$, 因此 $\|x-y\| = 0$, 即 $x = y$.

(A 是满射) 对任意 $x \in A(H)^{\perp}$, 有 $0 = |(Ax, x)| \geqslant m\|x\|^2$, 因此 $x = 0$, 即 $A(H)^{\perp} = \{0\}$, 进而 $\overline{A(H)}^{\perp} = \{0\}$. 由此知 $\overline{A(H)} = H$. 为证 $A(H) = H$, 只需证 $A(H)$ 闭. 对任意 $y \in \overline{A(H)}$, 存在 $\{y_n\} \subset A(H)$ 满足 $y_n \to y$. 对应地取 $\{X_n\} \subset H$ 使 $Ax_n = y_n$. 由

$$m\|x_n - x_k\|^2 \leqslant |(A(x_n - x_k), x_n - x_k)| \leqslant \|A(x_n - x_k)\| \cdot \|x_n - x_k\|$$

可得

$$\|x_n - x_k\| \leqslant \frac{1}{m}\|y_n - y_k\|.$$

故 $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列蕴含了 $\{x_n\}$ 为 Hilbert 空间 H 中的 Cauchy 列, 进而 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $x_n \to x \in H$, 则 $y = Ax$. 故 $A(H)$ 闭, 从而 A 为满射.

由于 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(H)$ 既单又满, 由 Banach 逆算子定理, $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. □

习题 2.3.4 设 X, Y 是 B* 空间, D 是 X 的线性子空间, 并且 $A : D \to Y$ 是线性映射. 求证:

(1) 如果 A 连续且 D 是闭的, 那么 A 是闭算子.

(2) 如果 A 连续且是闭算子, 那么 Y 完备蕴含 D 闭.

(3) 如果 A 是单射的闭算子, 那么 A^{-1} 也是闭算子.

(4) 如果 X 完备, A 是单射的闭算子, $R(A)$ 在 Y 中稠密, 并且 A^{-1} 连续, 那么 $R(A)=Y$.

证明 (1) 任取 $\{x_n\}\subset D$, $x_n\to x$, 且 $Ax_n\to y$. 由 D 闭可知 $x\in D$. 由 A 连续可知 $y=Ax_n\to Ax$. 故 A 是闭算子.

(2) 任取 $\{x_n\}\subset D$, $x_n\to x$. 由 A 连续可得

$$\|Ax_n-Ax_m\|\leqslant\|A\|\|x_n-x_m\|,$$

因此 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列蕴含了 $\{Ax_n\}$ 为 Cauchy 列, 由 Y 完备知 $\{Ax_n\}$ 收敛. 设 $Ax_n\to y\in Y$, 则由 A 是闭算子知 $x\in D$ 且 $Ax=y$, 因此 D 是 X 的闭子集.

(3) 由 A 是单射, 可定义线性映射 $A^{-1}:A(D)\to D$. 设 $\{y_n\}\subset A(D)$, $y_n\to y$, $A^{-1}y_n\to x$, 则存在 $\{x_n\}\subset D$, 使得 $x_n=A^{-1}y_n\to x$. 此时 $y_n=Ax_n\to y$. 由 A 是闭算子, $x\in D$ 且 $Ax=y$, 也即 $y\in D$ 且 $A^{-1}y=x$. 故 A^{-1} 是闭算子.

(4) 由于 A 是单射的闭算子, 由 (3) 知 A^{-1} 也是闭算子, 而 $A^{-1}:A(D)\to D$ 连续, 由 (2) 知 D 完备蕴含 $A(D)$ 闭. 又 $A(D)$ 在 Y 中稠密, 因此 $A(D)=\overline{A(D)}=Y$. □

习题 2.3.5 用等价范数定理 (推论 2.3.14) 证明: $(\mathcal{C}([0,1]),\|\cdot\|_1)$ 不是 B 空间, 其中 $\|f\|_1=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t$, $\forall f\in\mathcal{C}([0,1])$.

证明 用反证法, 假设 $(\mathcal{C}([0,1]),\|\cdot\|_1)$ 是 B 空间. 由于 $(\mathcal{C}([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ 是 B 空间, 且 $\|f\|_1\leqslant\|f\|_\infty$, 由范数等价定理, $\|\cdot\|_\infty$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价. 因此存在 $C>0$, 使得 $\|f\|_\infty\leqslant C\|f\|_1$, $\forall f\in\mathcal{C}([0,1])$. 考虑

$$f(x)=\begin{cases}1-Cx, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{C},\\ 0, & \dfrac{1}{C}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

有 $f\in\mathcal{C}([0,1])$, 但 $\|f\|_1=\dfrac{1}{2C}$, 而 $\|f\|_\infty=1$, 与 $\|f\|_\infty\leqslant C\|f\|_1$ 矛盾. 故 $(\mathcal{C}([0,1]),\|\cdot\|_1)$ 不是 B 空间. □

习题 2.3.9 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对任意 $x=\{\xi_k\}\in\ell^1$, 保证 $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\xi_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\}\in\ell^\infty$. 又若 $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\xi_k$ 作为 ℓ^1 上的线性泛函, 求证:

$$\|f\|=\sup_{k\geqslant1}|\alpha_k|.$$

证明 若 $\{\alpha_k\}\notin\ell^\infty$, 则存在 $\{\alpha_k\}$ 的子列 $\{\alpha_{k_n}\}$ 使得 $\alpha_{k_n}\geqslant n$ 或 $\alpha_{k_n}\leqslant -n$ (不妨设为前者). 取 ξ_k 满足

$$\xi_k=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & k=k_n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $x=\{\xi_k\}\in\ell^1$, 但

$$\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\xi_k=\sum_{n=1}^\infty\alpha_{k_n}\xi_{k_n}\geqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{n^2}=+\infty,$$

矛盾. 故 $\{\alpha_k\} \in \ell^\infty$. 由

$$|f(x)| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| \cdot \|x\|_1$$

即知 $\|f\| \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|$. 另一方面, 对任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_k| = |f(e_k)| \leqslant \|f\| \cdot \|e_k\| = \|f\| \implies \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| \leqslant \|f\|.$$

故 $\|f\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|$. □

习题 2.3.12 设 X, Y 是 B 空间, T 是闭线性算子, $D(T) \subset X$, $R(T) \subset Y$, $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$.

(1) 求证：$N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 求证：$N(T) = \{0\}$, $R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是, 存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\|x\| \leqslant \alpha \|Tx\| \quad (\forall x \in D(T)).$$

(3) 如果用 $d(x, N(T))$ 表示点 $x \in X$ 到集合 $N(T)$ 的距离. 求证：$R(T)$ 在 Y 中闭的充要条件是, 存在 $\alpha > 0$, 使得

$$d(x, N(T)) \leqslant \alpha \|Tx\| \quad (\forall x \in D(T)).$$

证明 (1) $N(T)$ 显然是 X 的线性子空间. 任取 $\{x_n\} \subset N(T)$, $x_n \to x$. 由于 $Tx_n = 0 \to 0$, 由 T 是闭算子得 $Tx = 0$, 即 $x \in N(T)$. 故 $N(T)$ 闭.

(2) $(\Rightarrow)$ 由于 $R(T)$ 是 B 空间 Y 的闭子集, $R(T)$ 是 B 空间. 由 $N(T) = \{0\}$ 知 T 是单射. 由习题 2.3.4 (1) 知 $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ 是闭算子. 另一方面, 由 T 是闭算子可知 $R(T)$ 闭, 故可对 $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ 运用闭图像定理, 得到 $T^{-1} \in \mathcal{L}(R(T), D(T))$. 因此存在 $\alpha > 0$, 使得 $\|T^{-1}y\| \leqslant \alpha\|y\|$, $\forall y \in R(T)$. 对任意 $x \in D(T)$, 令 $y = Tx \in R(T)$, 则有 $\|x\| \leqslant a\|Tx\|$.

$(\Leftarrow)$ 设 $Tx = 0$, 则 $0 \leqslant \|x\| \leqslant \alpha\|Tx\| = 0$, 故 $x = 0$, 即 $N(T) = \{0\}$. 任取 $\{y_n\} \subset R(T)$, $y_n \to y$, 则

$$\|y_n - y_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

对应地取 $\{x_n\} \subset D(T)$, 使得 $y_n = Tx_n$, 则

$$\|Tx_n - Tx_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

于是

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \alpha\|Tx_n - Tx_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

即 $\{x_n\}$ 是 B 空间 X 中的 Cauchy 列, 因此 $x_n \to x \in X$. 再由 $Tx_n \to y$ 及 T 是闭算子知 $x \in D(T)$ 且 $Tx = y$. 故 $y \in R(T)$, $R(T)$ 闭.

(3) 由 X 是 B 空间可知 $X/N(T)$ 亦为 B 空间. 考虑由 T 给出的 $\overline{T} : X/N(T) \to Y$, 则 $N(\overline{T}) = \{[0]\}$, $R(\overline{T}) = R(T)$, 由 (2) 及习题 1.4.17 (1), 只需证 $\overline{T}$ 是闭算子, 下证之.

任取 $\{[x_n]\} \subset D(\overline{T})$, $[x_n] \to [x]$, $\overline{T}[x_n] \to y$. 由习题 1.4.17 (3), 可相应地取 $\{x_n\} \subset D(T)$, 使得

$$\|x_n - x\| \leqslant 2\|[x_n - x]\|_0 = 2\|[x_n] - [x]\| \to 0,$$

此时还有 $Tx_n = \overline{T}[x_n] \to y$, 由 T 是闭算子得 $x \in D(T)$ 且 $Tx = y$. 于是 $[x] \in D(\overline{T})$ 且 $\overline{T}[x] = y$, 即 $\overline{T}$ 是闭算子, 结论得证. □

习题 2.3.13 设 $a(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函, 满足:

(1) 存在 $M > 0$, 使得 $|a(x,y)| \leqslant M\|x\| \cdot \|y\|$ $(\forall x, y \in H)$.

(2) 存在 $\delta > 0$, 使得 $|a(x,x)| \geqslant \delta\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$.

求证: 对任意 $f \in H^*$, 存在唯一的 $y_f \in H$, 使得

$$a(x, y_f) = f(x) \quad (\forall x \in H),$$

而且 y_f 连续地依赖于 f.

证明 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一的有连续逆的连续线性算子 $A \in \mathcal{L}(H)$, 使得

$$a(x,y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H \quad \text{且} \quad \left\|A^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

由 Riesz 表示定理, 对任意 $f \in H^*$, 存在唯一的 $z_f \in H$, 使得

$$f(x) = (x, z_f), \quad \forall x \in H.$$

令 $y_f = A^{-1} z_f$, 则

$$f(x) = (x, z_f) = (x, Ay_f) = a(x, y_f), \quad \forall x \in H.$$

且

$$\delta\|y_f\|^2 \leqslant |a(y_f, y_f)| = |f(y_f)| \leqslant \|f\| \cdot \|y_f\|,$$

即

$$\|y_f\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|f\|.$$

故 y_f 连续地依赖于 f. □

习题 2.4.1 设 p 是实线性空间 X 上的次线性泛函, 求证:

(1) $p(0) = 0$.

(2) $p(-x) \geqslant -p(x)$.

(3) 任意给定 $x_0 \in X$, 在 X 上必有实线性泛函 f, 满足 $f(x_0) = p(x_0)$, 以及 $f(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$.

证明 (1) $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0)$, 因此 $p(0) = 0$.

(2) $p(-x) + p(x) \geqslant p(-x + x) = p(0) = 0$, 因此 $p(-x) \geqslant -p(x)$.

(3) 令 $X_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ 为 x_0 生成的 X 的子空间, 定义 X_0 上的实线性泛函 f_0 使得

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0).$$

- ◇ 若 $\lambda = 0$, 则由 (1), $p(\lambda x_0) = p(0) = 0 = f_0(\lambda x_0)$.
- ◇ 若 $\lambda > 0$, 则 $p(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = f_0(\lambda x_0)$.
- ◇ 若 $\lambda < 0$, 则由 (2), $p(\lambda x_0) = p(-(-\lambda x_0)) \geqslant -p(|\lambda| x_0) = -|\lambda| p(x_0) = \lambda p(x_0) = f_0(\lambda x_0)$.

于是在 X_0 上恒有 $f_0(x) \leqslant p(x)$. 由实 Hahn-Banach 定理, f_0 可延拓为 X 上的实线性泛函 f, 满足 $f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0)$, 以及 $f(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$. □

习题 2.4.2 设 X 是由实数列 $x = \{a_n\}$ 全体组成的实线性空间, 其元素间相等和线性运算都按坐标定义, 并定义

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \quad (\forall x = \{a_n\} \in X).$$

求证: $p(x)$ 是 X 上的次线性泛函.

证明 对任意 $\{a_n\}, \{b_n\} \in X$ 与 $\lambda > 0$, 有

$$p(\{a_n\} + \{b_n\}) = \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = p(\{a_n\}) + p(\{b_n\}),$$
$$p(\lambda\{a_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \limsup_{n\to\infty} a_n = \lambda p(\{a_n\}).$$ □

习题 2.4.3 设 X 是复线性空间, p 是 X 上的半范数. $\forall x_0 \in X$, $p(x_0) \neq 0$. 求证: 存在 X 上的线性泛函 f 满足

(1) $f(x_0) = 1$.

(2) $|f(x)| \leqslant \dfrac{p(x)}{p(x_0)}$ $(\forall x \in X)$.

证明 令 $X_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ 为 x_0 生成的 X 的子空间, 定义 X_0 上的线性泛函 f_0 使得

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0).$$

对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有

$$p(\lambda x_0) = |\lambda| p(x_0) = |\lambda p(x_0)| = |f_0(\lambda x_0)|.$$

由复 Han-Banach 定理, f_0 可延拓为 X 上的线性泛函 f_1, 满足 $f_1(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0)$ 且 $|f_1(x)| \leqslant p(x)$ $(\forall x \in X)$. 令 $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{p(x_0)}$, 则 f 为 X 上线性泛函, $f(x_0) = 1$ 且 $|f(x)| \leqslant \dfrac{|f_1(x)|}{p(x_0)} \leqslant \dfrac{p(x)}{p(x_0)}$ $(\forall x \in X)$. □

习题 2.4.6 设 X 是 B* 空间. 给定 X 中 n 个线性无关的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与数域 $\mathbb{K}$ 中的 n 个数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 及 $M > 0$. 求证: 为了存在 $f \in X^*$ 适合 $f(x_k) = C_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 以及 $\|f\| \leqslant M$, 必须且仅须对任意的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^n \alpha_k C_k\right| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right\|.$$

证明 $(\Rightarrow)$ $\left|\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k C_k\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)\right| = \left|f\left(\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k x_k\right)\right| \leqslant \|f\| \cdot \left\|\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k x_k\right\| \leqslant M \left\|\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k x_k\right\|.$

$(\Leftarrow)$ 令 $X_0 = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$. 对任意 $x = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k x_k \in X_0$, 令 $f_0(x) = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k C_k$, 则 f_0 为 X_1 上的线性泛函, 且 $f_0(x_k) = C_k$. 由假设,

$$|f_0(x)| = \left|\sum_{k=1}^n \alpha_k C_k\right| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right\| = M\|x\|.$$

由于 $M\|\cdot\|$ 为 X 上范数, 由 Hahn-Banach 定理, f_0 可延拓为 X 上的线性泛函 f, 满足 $f(x_k)=C_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 且 $|f(x)|\leqslant M\|x\|$ $(\forall x\in X)$, 即 $\|f\|\leqslant M$. □

习题 2.4.7 给定 B* 空间 X 中 n 个线性无关的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 求证: 存在 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in X^*$, 使得

$$\langle f_i,x_j\rangle=\delta_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

证明 令

$$M_i=\operatorname{span}\{x_j:1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i\},\quad i=1,\cdots,n.$$

由于 $x_i\notin M_i$, $\rho(x_i,M_i)>0$, 由定理 2.4.7, 存在 $\tilde f_i\in X^*$, 使得

$$\tilde f_i(M_i)=0,\quad \tilde f_i(x_i)=\rho(x_i,M_i),\quad \left\|\tilde f_i\right\|=1.$$

令 $f_i=\dfrac{1}{\rho(x_i,M_i)}f_i\in X^*$, 则

$$f_i(x_j)=\frac{1}{\rho(x_i,M_i)}\tilde f_i(x_j)=\delta_{ij}.$$

□

习题 2.4.11 设 E,F 是实的 B* 空间 X 中的两个互不相交的非空凸集, 并且 E 是开的和均衡的. 求证: 存在 $f\in X^*$, 使得

$$|f(x)|<\inf_{y\in F}|f(y)|\quad (\forall x\in E).$$

证明 由 E 开知 E 有内点, 由凸集分离定理, 存在 $s\in\mathbb{R}$ 及非零连续线性泛函 $f\in X^*$, 使得

$$f(x)\leqslant s\leqslant f(y),\quad \forall x\in E,\ y\in F.$$

于是

$$f(x)\leqslant\inf_{y\in F}f(y)\leqslant\inf_{y\in F}|f(y)|,\quad \forall x\in E.$$

由于 E 是均衡的, 由上式还可得

$$-f(x)=f(-x)\leqslant\inf_{y\in F}|f(y)|,\quad \forall x\in E.$$

结合上述两式即得

$$\sup_{y\in E}|f(y)|\leqslant\inf_{y\in F}|f(y)|.$$

以下只需证 $|f(x)|$ 在 $x\in E$ 中取不到上确界, 从而对任意 $x\in E$, 有

$$|f(x)|<\sup_{y\in E}|f(y)|\leqslant\inf_{y\in F}|f(y)|.\tag{2.4.11–1}$$

用反证法, 若存在 $x\in E$, 使得 $|f(x)|=\sup\limits_{y\in E}|f(y)|$, 则 $x\neq 0$. 不妨设 $f(x)>0$. 取 $\mathbb{B}(x,r)\subset E$, 则

$$f\left(x+\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)=f(x)\left(1+\frac{r}{2\|x\|}\right)>f(x),$$

矛盾. 故 (2.4.11–1) 成立, f 即为所求泛函. □

习题 2.4.13 设 M 是 B* 空间 X 中的闭凸集, 求证: 对任意 $x\in X\setminus M$, 必存在 $f_1\in X^*$, 满足 $\|f_1\|=1$,

并且

$$\sup_{y\in M} f_1(y) \leqslant f_1(x) - d(x),$$

其中 $d(x) = \inf_{z\in M} \|x-z\|$.

证明 由于 M 为闭集, 当 $x \notin M$ 时, $d(x) > 0$, $\mathbb{B}(x, d(x))$ 是凸开集, $M \cap \mathbb{B}(x, d(x)) = \varnothing$. 由凸集分离定理, 存在非零连续线性泛函 $f \in X^*$, 使得

$$\sup_{y\in M} f(y) \leqslant \inf_{y\in\mathbb{B}(x,d(x))} f(y).$$

注意到

$$\inf_{y\in\mathbb{B}(x,d(x))} f(y) = \inf_{y\in\mathbb{B}(0,1)} f(x-d(x)y) = f(x) - d(x) \sup_{y\in\mathbb{B}(0,1)} f(y) = f(x) - d(x)\|f\|,$$

结合上述两式即得

$$\sup_{y\in M} \frac{f(y)}{\|f\|} \leqslant \frac{f(x)}{\|f\|} - d(x).$$

令 $f_1 = \dfrac{f}{\|f\|}$ 即可. □

习题 2.4.15 设 X 是一个 B 空间, $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是连续的凸泛函, 并且 $f(x) \not\equiv \infty$ (不恒等于 ∞). 若定义 $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ 为

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \quad (\forall x^* \in X^*).$$

求证：$f^*(x^*) \not\equiv \infty$.

证明 由于 $f(x) \not\equiv \infty$, 存在 $y \in X$ 使得 $|f(y)| < +\infty$, 又 f 连续, 存在 $r > 0$, 使得

$$|f(z) - f(y)| < \frac{1}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{B}(y, r).$$

以下先证 f 取不到 $-\infty$. 否则, 设 $x \in X$ 使 $f(x) = -\infty$, 取 $\lambda = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{r}{2\|x-y\|}\right\} \in (0,1)$, 并令 $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, 则 $\|z-y\| = \lambda\|x-y\| \leqslant \dfrac{r}{2} < r$, 即 $z \in \mathbb{B}(y,r)$. 但 f 是凸泛函,

$$f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{f(x)}_{-\infty} + \underbrace{(1-\lambda)f(y)}_{\text{有界}} = -\infty,$$

从而 $f(z) = -\infty$, 这与 $f(z) \geqslant f(y) - \dfrac{1}{2}$ 矛盾. 故 f 取不到 $-\infty$. 由于 $\mathrm{epi}(f)^\circ$ 与 $\{(y, f(y))\}$ 为两个互不相交的非空凸集, $\mathrm{epi}(f)^\circ$ 有内点, 由凸集分离定理, 存在非零连续线性泛函 $(x^*, \xi) \in X^* \times \mathbb{R}^* = X^* \times \mathbb{R}$, 使得

$$\langle (x^*, \xi), (x, t)\rangle \geqslant \langle (x^*, \xi), (y, f(y))\rangle, \quad \forall (x,t) \in \mathrm{epi}(f)^\circ,$$

也即

$$\langle x^*, x\rangle + \xi t \geqslant \langle x^*, y\rangle + \xi f(y), \quad \forall (x,t) \in \mathrm{epi}(f)^\circ. \tag{2.4.15–1}$$

取 $x=y$, $t=f(y)+1$, 由 (2.4.15–1) 得到 $\xi\geqslant 0$. 下证 $\xi>0$. 否则 $\xi=0$, 由 (2.4.15–1) 得到

$$\langle x^*,x\rangle\geqslant\langle x^*,y\rangle,\quad \forall(x,t)\in \operatorname{epi}(f)^\circ.$$

由 r 的选取可知 $\mathbb{B}(y,r)\times\big(f(y)+\frac{2}{3},+\infty\big)\subset\operatorname{epi}(f)^\circ$, 因此

$$\langle x^*,x\rangle\geqslant\langle x^*,y\rangle,\quad \forall x\in\mathbb{B}(y,r).$$

由此可见 x^* 在开集 $\mathbb{B}(y,r)$ 上取到最小值, 从而 $x^*\equiv 0$, (x^*,ξ) 为零泛函, 矛盾. 故 $\xi>0$. 取 $y^*=-\dfrac{x^*}{\xi}$, 由 (2.4.15–1) 可得

$$\langle y^*,y\rangle-f(y)=-\frac{1}{\xi}\langle x^*,y\rangle-f(y)\geqslant-\frac{1}{\xi}\langle x^*,x\rangle-t=\langle y^*,x\rangle-t,\quad \forall(x,t)\in\operatorname{epi}(f)^\circ.$$

记 $I(f)=\{x\in X: f(x)<+\infty\}$, 由 f 连续, 对任意 $\varepsilon>0$ 与 $x\in I(f)$, 有 $(x.f(x)+\varepsilon)\in\operatorname{epi}(f)^\circ$, 进而

$$\langle y^*,y\rangle-f(y)\geqslant\langle y^*,x\rangle-(f(x)+\varepsilon).$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性可得

$$\langle y^*,y\rangle-f(y)\geqslant\langle y^*,x\rangle-f(x),\quad \forall x\in I(f). \tag{2.4.15–2}$$

若 $x\notin I(f)$, 则 $f(x)=+\infty$, 此时 $\langle y^*,x\rangle-f(x)=-\infty$, (2.4.15–2) 仍成立, 即 (2.4.15–2) 对 $\forall x\in X$ 成立. 于是

$$f^*(y^*)=\sup_{x\in X}\{\langle y^*,x\rangle-f(x)\}=\langle y^*,y\rangle-f(y)\in\mathbb{R}.$$

故 f^* 不恒为 ∞. $\square$

习题 2.4.16 设 X 是 B 空间, $x(t):[a,b]\to X$ 是连续的抽象函数. 又设 Δ 表示 $[a,b]$ 的分割:

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$
$$\|\Delta\|:=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{|t_{i+1}-t_i|\}.$$

求证：在 X 中存在极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)(t_{i+1}-t_i).$$

此极限称为抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分.

证明 记 $S_\Delta=\sum\limits_{i=0}^{n-1}x(t_i)(t_{i+1}-t_i)$. 由 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意满足 $|t_1-t_2|<\delta$ 的 $t_1,t_2\in[a,b]$, 都有

$$\|x(t_1)-x(t_2)\|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

对于满足 $\|\Delta_1\|,\|\Delta_2\|<\delta$ 的任意两个 $[a,b]$ 的分割 Δ_1,Δ_2, 任取它们的一个共同加细 Δ_0, 则有

$$\|S_{\Delta_1}-S_{\Delta_2}\|\leqslant\|S_{\Delta_1}-S_{\Delta_0}\|+\|S_{\Delta_2}-S_{\Delta_0}\|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

因此对于满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ 的任一列分割 $\{\Delta_n\}$, 对应的 $\{S_{\Delta_n}\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 由于 X 是 B

空间, 故存在极限 S, 且通过插入共同加细可知此极限唯一. □

习题 2.5.1 求证: $(\ell^p)^* = \ell^q$ $(1 \leqslant p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

证明 $(p=1)$ 对任意 $y = \{y_k\} \in \ell^\infty$, 令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \forall x = \{x_k\} \in \ell^1.$$

由

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||y_k| \leqslant \|y\|_\infty \|x\|_1$$

即知 $f \in \left(\ell^1\right)^*$, 且 $\|f\| \leqslant \|y\|_\infty$. 反过来, 对任意 $x = \{x_k\} \in \ell^1$, 及任意 $f \in \left(\ell^1\right)^*$, 令 $y = \{y_k\} = \{f(e_k)\}$, 则

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

且

$$|y_k| = |f(e_k)| \leqslant \|f\| \cdot \|e_k\| = \|f\|,$$

从而 $\|y\|_\infty \leqslant \|f\|$, $y \in \ell^\infty$. 故

$$T : \left(\ell^1\right)^* \to \ell^\infty, \quad f \mapsto \{f(e_k)\}$$

是保范数的线性满射, 进而是等距同构, 即 $\left(\ell^1\right)^* = \ell^\infty$.

$(1 < p < \infty)$ 对任意 $y = \{y_k\} \in \ell^q$, 令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \forall x = \{x_k\} \in \ell^p.$$

由 Hölder 不等式,

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q,$$

因此 $f \in (\ell^p)^*$, 且 $\|f\| \leqslant \|y\|_q$. 反过来, 对任意 $x = \{x_k\} \in \ell^p$, 及任意 $f \in (\ell^p)^*$, 令 $y = \{y_k\} = \{f(e_k)\}$, 则

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

对任意固定的 n, 令

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} |y_k|^{q-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \arg y_k}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

并记 $x^{(n)} = \left\{x_k^{(n)}\right\} \in \ell^p$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} y_k = f\left(x^{(n)}\right) \leqslant \|f\| \left\|x^{(n)}\right\|_p$$

$$= \|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^{q}\right)^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\|f\| \geqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^{q}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \|y\|_q.$$

故

$$T:(\ell^p)^* \to \ell^q, \quad f \mapsto \{f(e_k)\}$$

是保范数的线性满射, 进而是等距同构, 即 $(\ell^p)^* = \ell^q$. □

习题 2.5.2 设 C 是收敛数列的全体, 赋以范数

$$\|\cdot\| : \{\xi_k\} \in C \mapsto \sup_{k\geqslant 1}|\xi_k|,$$

求证：$C^* = \ell^1$.

证明 若 $a = \{a_k\} \in \ell^1$, 对任意 $x = \{x_k\} \in C$, 令 $f_a(x) = \lambda_x a_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k x_k$, 其中 $\lambda_x \coloneqq \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. 则

$$|f_a(x)| \leqslant \sup_{k\geqslant 1}|x_k|\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \|x\|\cdot\|a\|_1,$$

因此 $\|f_a\| \leqslant \|a\|_1$. 反过来, 对任意 $f \in C^*$, 及任意 $x = \{x_k\} \in C$, 记 $e_0 = (1,1,1,\cdots)$, $\lambda \coloneqq \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, 则

$$x = \lambda e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - \lambda)e_k,$$

从而

$$f(x) = \lambda f(e_0) + \sum_{k=0}^{\infty}(x_k - \lambda)f(e_k).$$

令

$$y_k^{(n)} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg f(e_k)}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

并记 $y^{(n)} = \left\{y_k^{(n)}\right\} \in C$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty} y_k^{(n)} = 0$ 且 $\left\|y^{(n)}\right\| = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)| = \left|\sum_{k=1}^{n} y_k^{(n)} f(e_k)\right| = \left|f\left(y^{(n)}\right)\right| \leqslant \left\|y^{(n)}\right\|\cdot\|f\| = \|f\|,$$

令 $n\to\infty$ 即得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f(e_k)| \leqslant \|f\|$. 故考虑

$$T: C^* \to \ell^1, \quad f \mapsto \left(f(e_0) - \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k), f(e_1), f(e_2), \cdots\right).$$

令
$$z_k^{(n)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg f(e_k)}, & k\leqslant n,\\ \exp\left\{-\mathrm{i}\arg\left(f(e_0)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right)\right\}, & k>n,\end{cases}$$
并记 $z^{(n)}=\left\{z_k^{(n)}\right\}$. 则由

$$\begin{aligned}\left|f\left(z^{(n)}\right)\right|=&\left|\exp\left\{-\mathrm{i}\arg\left(f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right)\right\}\left[\left(f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right)\right]\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg f(e_k)}f(e_k)+\exp\left\{-\mathrm{i}\arg\left(f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right)\right\}\sum_{k=n+1}^{\infty}f(e_k)\right|\\=&\left|\left|f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right|+\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|+\exp\left\{-\mathrm{i}\arg\left(f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right)\right\}\sum_{k=n+1}^{\infty}f(e_k)\right|\\\leqslant&\|f\|\cdot\left\|z^{(n)}\right\|\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}\left|f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right|+\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\leqslant\|f\|\cdot\left\|z^{(n)}\right\|+\left|\exp\left\{-\mathrm{i}\arg\left(f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right)\right\}\sum_{k=n+1}^{\infty}f(e_k)\right|\\\leqslant\|f\|+\sum_{k=n+1}^{\infty}|f(e_k)|.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|f(e_k)|<\varepsilon$, 此时

$$\left|f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right|+\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\leqslant\|f\|+\varepsilon.$$

由 ε 任意性即得
$$\left|f(e_0)-\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)\right|+\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\leqslant\|f\|.$$
综上, 如上定义的 T 是保范数的线性满射, 进而是等距同构, 即 $C^*=\ell^1$. □

习题 2.5.7 在 ℓ^1 中定义算子

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),$$

求证 $T\in\mathcal{L}(\ell^1)$, 并求 T^*.

证明 T 是线性的, 且 $\|Tx\|=\sum\limits_{i=k}^{\infty}|x_k|=\|x\|$, $\forall x=\{x_k\}\in\ell^1$, 因此 $\|T\|=1$, $T\in\mathcal{L}(\ell^1)$. 由习题 2.5.1, $T^*\in\mathcal{L}(\ell^1)=\ell^\infty$. 对任意 $x=\{x_k\}\in\ell^1$ 与任意 $y=\{y_k\}\in\ell^\infty$,

$$(T^*y)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{(T^*y)_k},$$

另一方面,

$$(T^*y)(x) = y(Tx) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_{k+1}},$$

因此 $(T^*y)_k = y_{k+1}$, 即 $T^*y = (y_2, y_3, \cdots)$, T^* 为左推移算子. □

习题 2.5.9 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(H)$ 并满足

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in H),$$

求证:

(1) $A^* = A$.

(2) 若 $R(A)$ 在 H 中稠密, 则方程 $Ax = y$ 对 $\forall y \in R(A)$ 存在唯一解.

证明 (1) 由于 H 为 Hilbert 空间, $H^* = H$. 对任意 $x \in H$ 与 $y \in H^* = H$, 有

$$(A^*y)(x) = y(Ax) = (Ax, y) = (x, Ay) = (Ay)(x),$$

因此 $A^* = A$.

(2) 由于 $R(A)$ 在 H 中稠密, 对任意 $y \in H$, 存在 $\{y_n\} \subset R(A)$, 使得 $y_n \to y$. 下面先证 $R(A)^\perp = \{0\}$. 任取 $z \in R(A)^\perp$, 对任意 $y \in H$, 有

$$0 = \lim_{n\to\infty} (z, y_n) = \left(z, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = (z, y),$$

由 y 的任意性知 $z = 0$, 即 $R(A)^\perp = \{0\}$. 对任意 $y \in R(A)$, $Ax = y$ 存在解, 下证其唯一性. 设 $x_1, x_2 \in H$ 均为其解, 则

$$(Ax_1, z) = (Ax_2, z), \quad \forall z \in H.$$

于是

$$(x_1, A^*z) = (x_2, A^*z).$$

由 (1), 这意味着

$$(x_1, Az) = (x_2, Az),$$

进而

$$(x_1 - x_2, Az) = 0, \quad \forall z \in H.$$

由 z 的任意性得 $x_1 - x_2 \in R(A)^\perp = \{0\}$, 即 $x_1 = x_2$, 解唯一. □

习题 2.5.10 设 X, Y 是 B* 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 又设 A^{-1} 存在且 $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, 求证:

(1) $(A^*)^{-1}$ 存在, 且 $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$.

(2) $(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$.

证明 (1) 由 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 及 $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ 知 A^* 与 $\left(A^{-1}\right)^*$ 是唯一存在的, 且 $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, $\left(A^{-1}\right)^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$.

(A^* 单) 由 A 是满射, 对任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $Ax = y$. 设 $f \in Y^*$, 且 $A^*f = 0$, 则

$$0 = (A^*f, x) = (f, Ax) = (f, y) = 0,$$

由 y 的任意性即知 $f=0$. 故 A^* 为单射.

(A^* 满) 对任意 $x\in X$ 与 $f\in X^*$, 有

$$\left\langle A^*\left(A^{-1}\right)^*f,x\right\rangle=\left\langle\left(A^{-1}\right)^*f,Ax\right\rangle=\langle f,A^{-1}Ax\rangle=\langle f,x\rangle,$$

因此 $A^*\left(A^{-1}\right)^*f=f$, 于是 A^* 为满射.

故 A^* 既单又满, 由 Banach 逆算子定理, $(A^*)^{-1}$ 存在, 且 $(A^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*,Y^*)$.

(2) 对任意 $f\in X^*$, (1) 中已得 $A^*\left(A^{-1}\right)^*f=f$, 因此

$$\left(A^{-1}\right)^*f=(A^*)^{-1}f,$$

由 f 的任意性即知 $(A^*)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$. □

习题 2.5.11 设 X,Y,Z 是 B* 空间, 而 $B\in\mathcal{L}(X,Y)$ 以及 $A\in\mathcal{L}(Y,Z)$, 求证: $(AB)^*=B^*A^*$.

证明 由 $AB\in\mathcal{L}(X,Z)$ 知 $(AB)^*\in\mathcal{L}(Z^*,X^*)$. 对任意 $f\in Z^*$ 与任意 $x\in X$, 有

$$\langle (AB)^*f,x\rangle=\langle f,ABx\rangle=\langle A^*f,Bx\rangle=\langle B^*A^*f,x\rangle,$$

由 x 的任意性即知 $(AB)^*=B^*A^*$. □

习题 2.5.14 已知在 B* 空间 X 中 $x_n\rightharpoonup x_0\ (n\to\infty)$, 求证:

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geqslant\|x_0\|.$$

证明 由于 $x_n\rightharpoonup x_0$, 对任意 $f\in X^*$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$. 记 $\iota:X\hookrightarrow X^{**}$ 为自然的等距嵌入, 并记 $\tilde{x}_n=\iota(x_n)$, $\tilde{x}_0=\iota(x_0)$. 注意到

$$\tilde{x}_0(f)=f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\tilde{x}_n(f).$$

由共鸣定理, $\{\|\tilde{x}_n\|\}$ 有界, 从而 $\{\|x_n\|\}$ 有界. 于是

$$|\tilde{x}_0(f)|=|f(x_0)|=\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|f\|\cdot\|x_n\|,$$

由 f 的任意性即得 $\|x_0\|=\|\tilde{x}_0\|\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$. □

习题 2.5.15 设 H 是 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 的正交规范基, 求证: 在 H 中 $x_n\rightharpoonup x_0\ (n\to\infty)$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\|$ 有界.

(2) $(x_n,e_k)\to(x_0,e_k)\ (n\to\infty)\ (k=1,2,\cdots)$.

证明 ($\Rightarrow$) 由定理 2.5.20 的 ($\Rightarrow$) 即得证.

($\Leftarrow$) 由定理 2.5.20 的 ($\Leftarrow$), 只需证对 $H^*=H$ 中的稠密子集 $\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots\}$ 上的任意 y, 有 $(x_n,y)\to(x_0,y)\ (n\to\infty)$, 而这由条件 (2) 即可确保. □

习题 2.5.17 设 H 是 Hilbert 空间, 在 H 中 $x_n\rightharpoonup x_0\ (n\to\infty)$, 而且 $y_n\to y_0\ (n\to\infty)$, 求证: $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\ (n\to\infty)$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)| &= |[(x_n,y_n)-(x_n,y_0)]+[(x_n,y_0)-(x_0,y_0)]| \\ &\leqslant |(x_n,y_n-y_0)|+|(x_n-x_0,y_0)|.\end{aligned}$$

由 $x_n \rightharpoonup x_0$ 知 $(x_n-x_0,y_0)\to 0$, 且由定理 2.5.20 知 $\|x_n\|$ 有界, 再结合 $y_n\to y_0$ 知 $(x_n,y_n-y_0)\to 0$. 故 $|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|\to 0$ $(n\to\infty)$. □

习题 2.5.19 设 H 是 Hilbert 空间, 求证：在 H 中 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\|\to\|x\|$ $(n\to\infty)$.

(2) $x_n\rightharpoonup x$ $(n\to\infty)$.

证明 $(\Rightarrow)$ 由 $x_n\to x$ 即得 (2). 由 $|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|$ 即得 (1).

$(\Leftarrow)$ 我们有

$$\|x_n-x\|^2=(x_n-x,x_n-x)=\|x_n\|^2-(x,x_n)-(x_n,x)+\|x\|^2.$$

由 $\|x_n\|\to\|x\|$ 得 $\|x_n\|^2\to\|x\|^2$, 由 $x_n\rightharpoonup x$ 知 $(x_n,x)\to(x,x)=\|x\|^2$, 进而 $(x,x_n)=\overline{(x_n,x)}\to\|x\|^2$. 故由上式可得 $\|x_n-x\|^2\to 0$ 即 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$. □

习题 2.6.1 设 X 是 B 空间, 求证：$\mathcal{L}(X)$ 中可逆 (存在有界逆) 算子集是开的.

证明 任取 $\mathcal{L}(X)$ 中可逆 (存在有界逆) 算子 A, 只需证当 $\|B-A\|$ 充分小时 B 亦可逆且 $B^{-1}\in\mathcal{L}(X)$. 由于

$$B=B-A+A=A\big(I-A^{-1}(A-B)\big),$$

其中 $\big\|A^{-1}(A-B)\big\|\leqslant\big\|A^{-1}\big\|\cdot\|A-B\|$. 当 $\|B-A\|<\dfrac{1}{\|A\|}$ 时, $\big\|A^{-1}(A-B)\big\|<1$, 由引理 2.6.6, $I-A^{-1}(A-B)$ 可逆, 从而 B 可逆, 且

$$B^{-1}=\big(I-A^{-1}(A-B)\big)^{-1}A^{-1}\in\mathcal{L}(X).$$

故 $\mathcal{L}(X)$ 中可逆算子集是开的. □

习题 2.6.2 设 A 是闭线性算子, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\sigma_p(A)$ 两两互异, 又设 x_i 是对应于 λ_i 的特征元 $(i=1,2,\cdots,n)$. 求证：$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是线性无关的.

证明 用反证法, 假设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 线性相关, 并不妨设 $x_m=\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_ix_i$, 其中 $x_1,\cdots,x_{m-1}$ 线性无关. 两边作用以 λ_mI-A 得

$$0=\sum_{i=1}^{m-1}a_i(\lambda_mI-A)x_i=\sum_{i=1}^{m-1}a_i(\lambda_m-\lambda_i)x_i.$$

于是 $a_1(\lambda_m-\lambda_1)=\cdots=a_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})=0$. 由于这些特征值两两互异, $a_1=\cdots=a_{m-1}=0$, 从而 $x_m=0$, 矛盾. 故 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是线性无关的. □

习题 2.6.3 在双边 ℓ^2 空间上, 考察右推移算子

$$\begin{aligned}A: x&=(\cdots,\xi_{-n},\xi_{-n+1},\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_n,\cdots)\in\ell^2 \\ &\mapsto Ax=(\cdots,\eta_{-n},\eta_{-n+1},\cdots,\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},\eta_n,\cdots),\end{aligned}$$

其中 $\eta_m = \xi_{m-1}$ $(m \in \mathbb{Z})$. 求证：$\sigma_c(A) = \sigma(A) =$ 单位圆周.

证明 由于 $\|A^n\| = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, 由 Gelfand 定理, $r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$, 即 $\sigma(A) \subset$ 单位圆盘.

(1) 先证明 $\sigma(A) \subset$ 单位圆周. 当 $|\lambda| > 1$ 时, 注意到

$$\lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right),$$

其中 $\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{1}{|\lambda|} < 1$, 因此由引理 2.6.6, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$. 当 $|\lambda| < 1$ 时, 由于 A^{-1} (左推移算子) 存在且 $\|A^{-1}\| = 1$, 注意到

$$\lambda I - A = -A(I - \lambda A^{-1}),$$

其中 $\|\lambda A^{-1}\| = |\lambda| < 1$, 由引理 2.6.6, $I - \lambda A^{-1}$ 可逆且 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$, 从而 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$. 故当 $|\lambda| \neq 1$ 时, 总有 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$, 即 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \neq 1\} \subset \rho(A)$.

(2) 再证明当 $|\lambda| = 1$ 时 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 从而 $\sigma_p(A) = \varnothing$. 设 $(\lambda I - A)x = 0$, 其中 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 则

$$\lambda x_n - x_{n-1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

由此可得 $x_n = \lambda^{-n}x_0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$. 若 $x_0 = 0$, 则 $x = 0$, 得证; 否则, $|x_n| \equiv |x_0| \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_0|^2 = +\infty,$$

与 $x \in \ell^2$ 矛盾. 故 $x = 0$, 即 $\lambda I - A$ 是单射, 其逆存在.

(3) 现证明当 $|\lambda| = 1$ 时, $\overline{R(\lambda I - A)} = \ell^2$, 从而 $\sigma_r(A) = \varnothing$. 设 $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \perp R(\lambda I - A)$, 则对任意 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, 有

$$0 = ((\lambda I - A)x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda x_n - x_{n-1})y_n.$$

特别地, 对每个固定的整数 k, 令 $x_k = 1$, $x_n = 0$ $(\forall n \neq k)$, 由上式即得

$$\lambda y_k - y_{k+1} = 0,$$

这对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立. 同 (2) 中论证可得 $y = 0$. 故 $R(\lambda I - A)^\perp = \{0\}$. 由习题 1.6.5 即得

$$\overline{R(\lambda I - A)} = \{0\}^\perp = \ell^2.$$

(4) 最后证明 $\sigma_c(A) = \sigma(A) =$ 单位圆周, 在 (3) 的基础上, 即证当 $|\lambda| = 1$ 时, $R(\lambda I - A) \neq \ell^2$. 对 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 与 $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 若 $(\lambda I - A)x = y$, 则

$$y_n = \lambda x_n - x_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 令 $y_0 = 1$ 而 $y_n = 0$ $(\forall n \neq 0)$, 由上式即得

$$|x_0| = |x_1| = |x_2| = \cdots,$$
$$|x_{-1}| = |x_{-2}| = |x_{-3}| = \cdots.$$

于是

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{-1}|^2.$$

由 $x \in \ell^2$ 即知 $x = 0$, 但这与 $1 = y_0 = \lambda x_0 - x_{-1}$ 矛盾. 故 $y \in \ell^2 \setminus R(\lambda I - A)$, 得证.

综上所述, $\sigma_c(A) = \sigma(A) =$ 单位圆周. □

习题 2.6.4 在 ℓ^2 空间上, 考察左推移算子

$$A : (\xi_1, \xi_2, \cdots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \cdots).$$

求证: $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, 并且

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A).$$

证明 (1) 先证明 $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}$. 对 $x = (x_n) \in \ell^2$, 有

$$\|Ax\| = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|,$$

因此 $\|A\| \leqslant 1$. 再由 $\|Ae_2\| = \|e_1\| = 1 = \|e_2\|$ 知 $\|A\| \geqslant 1$. 故 $\|A\| = 1$. 当 $|\lambda| > 1$ 时, 注意到

$$\lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right),$$

其中 $\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{1}{|\lambda|} < 1$, 因此由引理 2.6.6, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}\big(\ell^2\big)$.

(2) 再证明 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. 当 $|\lambda| < 1$ 时, 注意到 $\big(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots\big) \in \ell^2$.

$$A\big(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots\big) = \big(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \cdots\big) = \lambda\big(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots\big),$$

因此 $\lambda \in \sigma_p(A)$. 故 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(A)$. 反过来, 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$, $Ax = \lambda x$, 其中 $x = (x_n) \in \ell^2$, 则由

$$\lambda^n x = A^n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|^n = 0$, 从而 $|\lambda| < 1$. 故 $\sigma_p(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

(3) 现证明当 $|\lambda| = 1$ 时, $R(\lambda I - A) \neq \ell^2$. 对任意 $x = (x_n) \in \ell^2$, 令 $y = (y_n) = (\lambda I - A)x$, 则 $y_n = \lambda x_n - x_{n+1}$. 由此可解得

$$x_1 = \frac{y_1}{\lambda} + \frac{y_2}{\lambda^2} + \frac{y_3}{\lambda^3} + \cdots.$$

令 $y_n = \dfrac{\lambda^n}{n}$, 则 $\|y\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, 即 $y \in \ell^2$, 但此时 $x_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 这说明 $y \notin R(\lambda I - A)$.

(4) 最后证明 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c(A)$, 由 (3), 即证当 $|\lambda| = 1$ 时, $\overline{R(\lambda I - A)} = \ell^2$. 任取 $y = (y_n) \in \ell^2$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n|^2 < \varepsilon$. 由于当 $|\lambda| = 1$ 时方程组

$$y_k = \lambda x_k - x_{k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$
$$x_k = 0, \quad \forall k \geqslant N+1$$

有解 x, 且 x 中只有有限项非零, 即 $x \in \ell^2$, 因此 $(y_1, \cdots, y_N, 0, 0, \cdots) = (\lambda I - A)x$. 这说明 $\|(\lambda I - A)x - y\| < \varepsilon$, 故 $\overline{R(\lambda I - A)} = \ell^2$.

综上所述, $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, 且 $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$. □

习题 3.1.1 设 X 是一个无穷维 B 空间, 求证：若 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 A 没有有界逆.

证明 假设 A 有有界逆 A^{-1}, 则由命题 3.1.2 (6) 知 $\mathrm{Id}_X = AA^{-1} \in \mathfrak{C}(X)$, 但这与无穷维空间中单位球不列紧矛盾. □

习题 3.1.2 设 X 是一个 B 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$ 满足

$$\|Ax\| \geqslant \alpha\|x\| \quad (\forall x \in X),$$

其中 α 是正常数. 求证：$A \in \mathfrak{C}(X)$ 的充要条件是 X 是有限维的.

证明 ($\Rightarrow$) 由 $\|Ax\| \geqslant \alpha\|x\|$ 可知 A 为单射, 从而可逆, 且 $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$. 由习题 3.1.1 即知 $\dim X < \infty$.

($\Leftarrow$) $\dim X < \infty$ 时 X 中单位球列紧, 从而 $\overline{A(\mathbb{B}(0,1))}$ 列紧, 即 $A \in \mathfrak{C}(X)$. □

习题 3.1.3 设 X, Y 是 B 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $K \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 如果 $R(A) \subset R(K)$, 求证：$A \in \mathfrak{C}(X, Y)$.

证明 (1) 先证明存在 $M > 0$ 使得 $\|A^*\| \leqslant M\|K^*\|$. 由 $R(A) \subset R(K)$ 得 $N(K^*) \subset N(A^*)$, 因此可定义映射

$$U : X^* \to X^*, \quad K^*\alpha \mapsto A^*\alpha.$$

为证明断言, 只需证 U 有界. 若不然, 则存在 Y^* 中序列 (α_n), 使得 $\|K^*\alpha_n\| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^*\alpha_n\| = \infty$. 对任意 $x \in X$, 由于 $R(A) \subset R(K)$, 存在 $x' \in X$, 使得 $Kx' = Ax$. 于是

$$\langle A^*\alpha_n, x\rangle = \langle \alpha_n, Ax\rangle = \langle \alpha_n, Kx'\rangle = \langle K^*\alpha_n, x'\rangle.$$

结合 $\|K^*\alpha_n\| = 1$ 即得

$$|\langle A^*\alpha_n, x\rangle| = |\langle K^*\alpha_n, x'\rangle| \leqslant 1 \cdot \|x'\| < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由共鸣定理, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A^*\alpha_n\| < \infty$, 但这与我们的假设矛盾. 故断言 $\|A^*\| \leqslant M\|K^*\|$ 得证.

(2) 由于 $K \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 由定理 3.1.5, $K^* \in \mathfrak{C}(Y^*, X^*)$. 由于 $A^* = U \circ K^*$, 其中 $K^* \in \mathfrak{C}(Y^*, X^*)$, 且由 (1), $U \in \mathcal{L}(X^*, X^*)$, 由命题 3.1.2 (6), $A^* \in \mathfrak{C}(Y^*, X^*)$. 再次运用定理 3.1.5 即得 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$. □

习题 3.1.4 设 H 是 Hilbert 空间, $A : H \to H$ 是紧算子, 又设 $x_n \rightharpoonup x_0$, $y_n \rightharpoonup y_0$, 求证：

$$(x_n, Ay_n) \to (x_0, Ay_0) \quad (n \to \infty).$$

证明 由于 $A \in \mathfrak{C}(H)$, 由命题 3.1.4, A 是全连续的, $y_n \rightharpoonup y_0$ 蕴含 $Ay_n \to Ay_0$. 由于

$$\begin{aligned}
|(x_n, Ay_n) - (x_0, Ay_0)| &= |[(x_n, Ay_n) - (x_n, Ay_0)] + [(x_n, Ay_0) - (x_0, Ay_0)]| \\
&\leqslant |(x_n, Ay_n - Ay_0)| + |(x_n - x_0, Ay_0)| \\
&\leqslant \|x_n\| \cdot \|Ay_n - Ay_0\| + |(x_n - x_0, Ay_0)|,
\end{aligned}$$

其中由 $x_n \rightharpoonup x_0$ 可得 $|(x_n - x_0, Ay_0)| \to 0$, 且由定理 2.5.20 (1) 知 $\|x_n\|$ 有界, 因此 $\|x_n\| \cdot \|Ay_n - Ay_0\| \to 0$. 故结论得证. $\square$

习题 3.1.6 设 $\omega_n \in \mathbb{K}$, $\omega_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 求证：映射

$$T : \{\xi_n\} \mapsto \{\omega_n \xi_n\} \quad (\forall \{\xi_n\} \in \ell^p)$$

是 ℓ^p $(p \geqslant 1)$ 上的紧算子.

证明 由 $\|T\|_p \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\omega_n| < +\infty$ 知 $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$. 考虑映射

$$T_k : \ell^p \to \ell^p, \quad \{\xi_n\} \mapsto (\xi_1, \cdots, \xi_k, 0, 0, \cdots).$$

由于 T_k 是有限秩算子, 故 $T_k \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. 对任意 $\xi = \{\xi_n\} \in \ell^p$, 有

$$\|T\xi - T_k\xi\|_p = \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |\omega_n \xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sup_{n>k} |\omega_n| \cdot \|\xi\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

于是 $T_k \to T$, 从而由 $\mathfrak{C}(\ell^p)$ 在 $\mathcal{L}(\ell^p)$ 中闭得 $T \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. $\square$

习题 3.1.7 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个可测集, 又设 f 是 Ω 上的有界可测函数, 求证：$F : x(t) \mapsto f(t)x(t)$ 是 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 上的紧算子, 当且仅当 $f \xlongequal{\text{a.e.}} 0$ 于 Ω.

证明 $(\Leftarrow)$ 若 $f \xlongequal{\text{a.e.}} 0$, 则对任意 $x(t) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, $F(x(t)) = f(t)x(t) \xlongequal{\text{a.e.}} 0$, $\{0\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 中的紧集.

$(\Rightarrow)$ 假设存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $E \coloneqq [|f| > \varepsilon]$ 满足 $m(E) > 0$. 定义映射

$$P : \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega), \quad x(t) \mapsto \mathbb{1}_E(t)x(t).$$

注意到 $R(P) = \big\{x(t) \in \mathcal{L}^2(\Omega) : \mathbb{1}_E(t)x(t) = x(t)\big\}$ 是闭子空间, 从而是 Banach 空间. 对任意 $y(t) \in R(P)$, 由于在 E 上 $|f(t)| > \varepsilon$, 我们有

$$\frac{y(t)}{f(t)} \cdot \mathbb{1}_E(t) \in F^{-1}(y(t)).$$

这说明 $P \circ F : \mathcal{L}^2(\Omega) \to R(P)$ 是满射. 由于 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 与 $R(P)$ 均为 Banach 空间, 且由 f 有界知 $P \circ F \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}^2(\Omega), R(P)\big)$, 由开映射定理, $P \circ F$ 是开映射. 因此 $P \circ F(\mathbb{B}(0,1))$ 是 $R(P)$ 中的开集, 其包含 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 中的某一开球, 从而 $\overline{P \circ F(\mathbb{B}(0,1))}$ 包含 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 中的某一闭球. 但 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 是无穷维的, 其中闭球不紧, 这与 $P \circ F$ 是紧算子矛盾. 故 $f \xlongequal{\text{a.e.}} 0$. $\square$

习题 3.1.11 设 X, Y, Z 是 B 空间, $X \subset Y \subset Z$, 如果 $X \hookrightarrow Y$ 的嵌入映射是紧的, $Y \hookrightarrow Z$ 的嵌入映射是连续的, 求证：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $c(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\|x\|_Y \leqslant \varepsilon \|x\|_X + c(\varepsilon)\|x\|_Z \quad (\forall x \in X).$$

证明 由范数的齐次性, 可不妨设欲证式中 $\|x\|_X = 1$, 从而只需证：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $c(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\|x\|_Y \leqslant \varepsilon + c(\varepsilon)\|x\|_Z, \quad \forall x \in X.$$

用反证法, 假设存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意正整数 n, 均存在 $u_n \in \partial\mathbb{B}_X(0,1)$, 使得

$$\|x_n\|_Y > \varepsilon + n\|x_n\|_Z,$$

而这蕴含着

$$\begin{cases} \|x_n\|_Y > \varepsilon, \\ \|x_n\|_Z < \frac{1}{n}\|x_n\|_Y. \end{cases} \tag{3.1.11–1}$$

由于 $X \hookrightarrow Y$ 是紧算子, 它是有界线性算子, 因此存在 $M > 0$, 使得

$$\|x\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

于是

$$\|x_n\|_Z < \frac{1}{n}\|x_n\|_Y \leqslant \frac{M}{n}\|x_n\|_X = \frac{M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

由此可知 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Z} 0$. 由于 $X \hookrightarrow Y$ 是紧算子, 存在 $x_0 \in X$ 使得 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} x_0$. 再利用 $Y \hookrightarrow Z$ 的连续性可知 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Z} x_0$. 由极限的唯一性知 $x_0 = 0$. 但由 (3.1.11–1),

$$\|x_0\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_Y \geqslant \varepsilon > 0,$$

这与 $x_0 = 0$ 矛盾. 故结论得证. □

习题 3.2.1 设 X 是 B 空间, $M \subset X$ 是一个闭线性子空间, $\operatorname{codim} M = n$, 求证: 存在线性无关集 $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset X^*$, 使得

$$M = \bigcap_{k=1}^n N(\varphi_k).$$

证明 令 $[e_1], \cdots, [e_n]$ 为 X/M 的一组基. 由于 X 是 B 空间, 由习题 2.4.7, 存在 $\widetilde{\varphi}_1, \cdots, \widetilde{\varphi}_n \in (X/M)^*$, 使得 $\widetilde{\varphi}_i([e_j]) = \delta_{ij}$. 每个 $\widetilde{\varphi}_k$ 诱导了

$$\varphi_k : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \widetilde{\varphi}_k([x]).$$

(1) $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ 是线性无关的. 令 $\sum\limits_{k=1}^n c_k\varphi_k = 0$, 则对任意 $x \in X$,

$$0 = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k\widetilde{\varphi}_k([x]).$$

对每个 $j = 1, \cdots, n$, 取 $[x] = [e_j]$ 即得 $c_j = 0$. 故 $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(2) 下证 $M = \bigcap\limits_{k=1}^n N(\varphi_k)$. 由于 φ_k 是由 $\widetilde{\varphi}_k$ 诱导的, “$\subset$” 是显然的. 反过来, 若 $x \in \bigcap\limits_{k=1}^n N(\varphi_k)$, 则

$$\widetilde{\varphi}_k([x]) = 0, \quad k = 1, \cdots, n.$$

设 $[x] = c_1[e_1] + \cdots + c_n[e_n]$, 代入上式即得 $c_k = 0\ (k = 1, \cdots, n)$. 因此 $[x] = [0]$, 即 $x \in M$. 故 “$\supset$” 也成立. □

习题 3.2.2 设 X, Y 是两个 B 空间, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 是满射. 定义 $\widetilde{T} : X/N(T) \to Y$ 如下:

$$\widetilde{T}[x] = Tx \quad (\forall x \in [x])\,(\forall [x] \in X/N(T)).$$

求证: $\widetilde{T}$ 是线性同胚映射.

证明 $\widetilde{T}$ 显然是线性映射.

(1) $\widetilde{T}$ 是单射. 设 $\widetilde{T}[x] = 0$, 则对任意 $x \in [x]$ 有 $Tx = 0$, 即 $x \in N(T)$. 故 $\widetilde{T}[x] = 0$ 蕴含 $[x] = [0]$.

(2) $\widetilde{T}$ 是满射. 对任意 $y \in Y$, 由于 T 是满射, 存在 $x \in X$ 使得 $Tx = y$, 从而 $\widetilde{T}[x] = Tx = y$.

(3) $\widetilde{T}$ 是有界线性算子. 对任意 $[x] \in X/N(T)$, 由习题 1.4.17 (3), 可取 $x \in [x]$ 使得 $\|x\| \leqslant 2\|[x]\|$, 从而

$$\left\|\widetilde{T}[x]\right\| = \|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| \leqslant 2\|T\| \cdot \|[x]\|.$$

故 $\left\|\widetilde{T}\right\| \leqslant 2\|T\|$.

综上, 由于 $X/N(T)$ 与 Y 均为 Banach 空间, 由 Banach 逆算子定理, $\widetilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X/N(T))$, 从而 $\widetilde{T}$ 是同胚映射. □

习题 3.2.3 设 X 是 B 空间, M, N_1, N_2 都是 X 的闭线性子空间, 如果

$$M \oplus N_1 = X = M \oplus N_2,$$

求证: N_1 和 N_2 同胚.

证明 往证 $N_1 \simeq N_2 \simeq X/M$, 下面对 $N \coloneqq N_1$ 证明. 定义线性映射

$$T : N \to X/M, \quad x \mapsto [x].$$

(1) T 是单射. 设 $Tx = 0$, 则 $x \in M$, 从而 $x \in M \cap N = \{0\}$.

(2) T 是满射. 对任意 $[x] \in X/M$, 取 $x \in [x]$, 作直和分解 $x = x_M + x_N$, 其中 $x_M \in M$, $x_N \in N$, 则 $[x] = [x_M] + [x_N] = [x_N]$. 故 $T(x_N) = [x]$, 即 T 是满射.

(3) T 是有界线性算子. 由商空间范数的定义, 对任意 $x \in N$, $\|Tx\| = \|[x]\| \leqslant \|x\|$. 故 $\|T\| \leqslant 1$.

综上, 由于 $N, X/M$ 均为 Banach 空间, 由 Banach 逆算子定理, $T^{-1} \in \mathcal{L}(X/M, N)$, 从而 T 是同胚映射, $N \simeq X/M$ 得证. □

习题 3.2.4 设 $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T = I - A$, 求证:

(1) 对任意 $[x] \in X/N(T)$, 存在 $x_0 \in [x]$, 使得 $\|x_0\| = \|[x]\|$.

(2) 若 $y \in X$, 使方程 $Tx = y$ 有解, 则其中必有一个解达到范数最小.

证明 (1) 对任意 $[x] \in X/N(T)$, 任意取定 $x_0 \in [x]$, 有

$$\|[x]\| = \inf_{x \in [x]} \|x\| = \inf_{y \in N(T)} \|x_0 - y\| = \rho(x_0, N(T)).$$

由 Riesz–Fredholm 定理, $\dim N(T) < \infty$, 因此存在最佳逼近元 $z_0 \in N(T)$, 使得

$$\rho(x_0, N(T)) = \|x_0 - z_0\|.$$

故 $x_0 - z_0 \in [x]$ 满足 $\|x_0 - z_0\| = \|[x]\|$.

(2) 令 $S = \{x \in X : Tx = y\}$, 则由 $x \in S$ 可知 $S = [x]$, 从而由 (1) 知 S 中必有范数最小的元素. □

习题 3.2.5 设 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 且 $T = I - A$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 求证:

(1) $N(T^k)$ 是有限维的.

(2) $R(T^k)$ 是闭的.

证明 由于 $A^j \in \mathfrak{C}(X)$ $(j \geqslant 1)$, 我们有

$$T^k = (I - A)^k = I + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-A)^j = I + \text{ 紧算子}, \tag{3.2.5–1}$$

(1) $k = 1$ 的情形来自 Riesz–Fredholm 定理, $k \geqslant 2$ 的情形来自 (3.2.5–1) 与 Riesz–Fredholm 定理.

(2) 由于 "$I -$ 紧算子" 是闭值域算子, 由 $T = I - A$ 与 (3.2.5–1) 可得结论. □

习题 3.2.6 设 M 是 B 空间 X 的闭线性子空间, 称满足 $P^2 = P$ (幂等性) 的由 X 到 M 上的一个有界线性算子 P 为由 X 到 M 上的投影算子. 求证:

(1) 若 M 是 X 的有限维线性子空间, 则必存在由 X 到 M 上的投影算子.

(2) 若 P 是由 X 到 M 上的投影算子, 则 $I - P$ 是由 X 到 $R(I - P)$ 上的投影算子.

(3) 若 P 是由 X 到 M 上的投影算子, 则 $X = M \oplus N$, 其中 $N = R(I - P)$.

(4) 若 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 且 $T = I - A$, 则在代数与拓扑同构意义下,

$$N(T) \oplus X/N(T) = X = R(T) \oplus X/R(T).$$

证明 (1) 由于 $\dim M < \infty$, 可取它的一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$, 并令其对偶基为 $\{e^1, \cdots, e^m\}$. 定义

$$P : X \to M, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{m} e^k(x) e_k.$$

显然有 $P^2 = P$, $P(X) = M$, 且 $\|Px\| \leqslant \|x\|$, 即 $P \in \mathcal{L}(X, M)$. 故 P 是由 X 到 M 上的投影算子.

(2) 由 $R(I - P) = N(P)$ 及 P 连续可知 $R(I - P)$ 是 X 的闭线性子空间. 由 $P^2 = P$ 可得 $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$. 对任意 $y \in R(I - P)$, 设 $x \in X$ 使 $y = (I - P)x$, 则有 $(I - P)y = (I - P)^2 x = (I - P)x$, 因此 $(I - P)X = R(I - P)$. 设 $\|P\| = M$, 则 $\|(I - P)x\| = \|x - Px\| \leqslant \|x\| + \|Px\| \leqslant (M + 1)\|x\|$, 即 $I - P \in \mathcal{L}(X, R(I - P))$. 故 $I - P$ 是由 X 到 $R(I - P)$ 上的投影算子.

(3) 对任意 $x \in X$, 有分解 $x = Px + (I - P)x$, 其中 $Px \in M$, $(I - P)x \in R(I - P) = N$. 若 $x \in M \cap N$, 则 $Px = x$, 且由 (2), $(I - P)x = x$, 由此可得 $x = Px = 0$. 故 $X = M \oplus N$.

(4) T 是闭值域算子, 且由 Riesz–Fredholm 定理, $\operatorname{codim} R(T) = \dim N(T) < \infty$. 若能证明以下结论:

若 $\dim(X/M) < \infty$, 则存在 $N \subset X$, $\dim N < \infty$, 使得 $N \simeq X/M$, 且 $X = M \oplus N$.

则通过取 $M=R(T)$ 可得 $X=R(T)\oplus X/R(T)$, 取 $M=X/N(T)$ 可得 $X=N(T)\oplus X/N(T)$. 下面证明上述结论：设 $\dim(X/M)=n$, 并取 X/M 的一组基 $[x_1],\cdots,[x_n]$, 任取 $x_k\in[x_k]$ $(k=1,\cdots,n)$, 则 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ 线性无关. 令 $N=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$, 由 $x_k\notin M$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 知 $N\cap M=\{0\}$. 定义线性映射

$$f:N\to X/M,\quad \sum_{k=1}^{n}c_kx_k\mapsto\sum_{k=1}^{n}c_k[x_k].$$

由 $\|fx\|=\|[x]\|\leqslant\|x\|$ 可知 $f\in\mathcal{L}(N,X/M)$. 若 $f(x)=[0]$, 则 $x\in N\cap M=\{0\}$, 因此 f 为单射. 由 $[x_1],\cdots,[x_n]$ 是 X 的基可知 f 为满射. 故由 Banach 逆算子定理, f^{-1} 存在且 $f^{-1}\in\mathcal{L}(X/M,N)$. 故在代数同构与拓扑同胚的意义下, 均有 $N\simeq X/M$. 再定义算子

$$P:X\to N,\quad x\mapsto f^{-1}([x]).$$

则由 $N=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$ 可知 $P(X)=N$, $P^2=P$, 且 $\|Px\|\leqslant\|x\|$, 即 $P\in\mathcal{L}(X,N)$. 故 P 是由 X 到 N 上的投影算子, 由 (3) 即知 $X=N\oplus R(I-P)=N\oplus M$. □

习题 3.3.1 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 在空间 ℓ^1 上定义算子 A 如下：

$$A(x_1,x_2,\cdots)=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots),\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in\ell^1.$$

求证：

(1) $A\in\mathcal{L}(\ell^1)$ 的充要条件是 $\sup\limits_{n\geqslant1}|a_n|<\infty$.

(2) $A^{-1}\in\mathcal{L}(\ell^1)$ 的充要条件是 $\inf\limits_{n\geqslant1}|a_n|>0$.

(3) $A\in\mathfrak{C}(\ell^1)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 (1) ($\Rightarrow$) 若 $\sup\limits_{n\geqslant1}|a_n|=\infty$, 则 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $|a_{n_k}|\geqslant k$ $(\forall k\in\mathbb{N})$. 于是 $\|Ae_{n_k}\|_1=|a_{n_k}|\xrightarrow{k\to\infty}+\infty$. 故 A 不是有界算子.

($\Leftarrow$) 若 $A:=\sup\limits_{n\geqslant1}|a_n|<\infty$, 则 $\|Ax\|_1=\sup\limits_{n\geqslant1}|a_nx_n|\leqslant A\|x\|_1$, 即 $\|A\|\leqslant A$, $A\in\mathcal{L}(\ell^1)$.

(2) ($\Rightarrow$) 若 $A^{-1}\in\mathcal{L}(\ell^1)$, 则存在 $M>0$ 使得 $\|A\|\geqslant M$. 特别地, $|a_n|=\|Ae_n\|_1\geqslant M\|e_n\|=M$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. 故 $\inf\limits_{n\geqslant1}|a_n|\geqslant M>0$.

($\Leftarrow$) 若 $M:=\inf\limits_{n\geqslant1}|a_n|>0$, 则 A 有逆

$$A^{-1}:\ell^1\to\ell^1,\quad (x_1,x_2,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_1}{a_1},\frac{x_2}{a_2},\cdots\right).$$

由于 $\sup\limits_{n\geqslant1}\left|a_n^{-1}\right|=\dfrac{1}{M}<\infty$, 由 (1), $A^{-1}\in\mathcal{L}(\ell^1)$.

(3) ($\Rightarrow$) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$, 则存在 $\varepsilon>0$ 及 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $|a_{n_k}|\geqslant\varepsilon$. 于是序列 $\{Ae_{n_k}\}$ 没有收敛子列, 因为其中任意两点的距离至少为 ε. 故 A 不是紧算子.

($\Leftarrow$) 定义算子

$$A_n:\ell^1\to\ell^1,\quad (x_1,x_2,\cdots)\mapsto(a_1x_1,\cdots,a_nx_n,0,0,\cdots).$$

则 A_n 为有限秩算子. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时 $|a_n| < \varepsilon$. 于是当 $n > N$ 时, 就有

$$\|A_n x - Ax\|_1 = \sup_{k>n} |a_k x_k| \leqslant \varepsilon \sup_{k>n} |x_k| \leqslant \varepsilon \|x\|_1.$$

故 $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$, 从而 $A \in \overline{\mathcal{F}(\ell^1)} \subset \mathfrak{C}(\ell^1)$. □

习题 3.3.5 设 X 是 B 空间, $A, B \in \mathcal{L}(X)$, 并且 $AB = BA$, 求证:

(1) $R(A)$ 和 $N(A)$ 都是 B 的不变子空间.

(2) $R(B^n)$ 和 $N(B^n)$ 都是 B 的不变子空间 ($\forall n \in \mathbb{N}$).

证明 (1) $B(R(A)) = R(BA) = R(AB) \subset R(A)$, 因此 $R(A)$ 是 B 的不变子空间. 对任意 $x \in N(A)$, 有 $A(Bx) = B(Ax) = B(0) = 0$, 即 $Bx \in N(A)$, $B(N(A)) \subset N(A)$, 故 $N(A)$ 是 B 的不变子空间.

(2) $B(R(B^n)) = R(B^{n+1}) = B^n(R(B)) \subset R(B^n)$, 因此 $R(B^n)$ 是 B 的不变子空间. 对任意 $x \in N(B^n)$, 有 $B^n(Bx) = B(B^n x) = B(0) = 0$, 即 $Bx \in N(B^n)$, $B(N(B^n)) \subset N(B^n)$, 因此 $N(B^n)$ 是 B 的不变子空间. □

习题 3.4.1 设 H 为复 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(H)$, 求证: $A + A^*$, AA^*, A^*A 都是对称算子, 并且

$$\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

证明 由

$$\begin{gathered}((A + A^*)x, y) = (Ax, y) + (A^*x, y) = (x, A^*y) + (x, Ay) = (x, (A + A^*)y),\\ (AA^*x, y) = (A^*x, A^*y) = (x, AA^*y),\\ (A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)\end{gathered}$$

可知 $A + A^*$, AA^*, A^*A 都是对称算子, 且还有

$$\begin{gathered}\|AA^*\|^2 = \sup_{\|x\|=1} |(AA^*x, x)| = \sup_{\|x\|=1} \|A^*x\|^2 = \|A^*\|^2 = \|A\|^2,\\ \|A^*A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} |(A^*Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.\end{gathered}$$ □

习题 3.4.3 设 H 为复 Hilbert 空间, A 是 H 上的有界对称算子, 令

$$m(A) \coloneqq \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M(A) \coloneqq \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

求证:

(1) $\sigma(A) \subset [m(A), M(A)]$, 且 $m(A), M(A) \in \sigma(A)$.

进一步假设 A 是 H 上的对称紧算子, 求证:

(2) 若 $m(A) \neq 0$, 则 $m(A) \in \sigma_p(A)$.

(3) 若 $M(A) \neq 0$, 则 $M(A) \in \sigma_p(A)$.

证明 (1) ① 任取 $\lambda \notin [m(A), M(A)]$, 往证 $\lambda \in \rho(A)$. 由于 $(Ax, x) \in [m(A), M(A)]$, 对任意满足 $\|x\| = 1$ 的 $x \in H$, 有

$$((\lambda I - A)x, x) = \lambda - (Ax, x) \neq 0.$$

因此 $\lambda I - A$ 为单射. 下证 $\lambda I - A$ 为满射. 若不满, 则存在 $z \in H \setminus \{0\}$ 使得 $z \perp R(\lambda I - A)$, 即

$$(z, (\lambda I - A)x) = 0, \quad \forall x \in H.$$

这意味着

$$(\lambda z, x) = (z, Ax) = (Az, x), \quad \forall x \in H.$$

因此 $Az = \lambda z$. 令 $y = \frac{z}{\|z\|}$, 则 $\|y\| = 1$, 且

$$(Ay, y) = (\lambda y, y) = \lambda \notin [m(A), M(A)],$$

矛盾. 故 $\lambda I - A$ 为满射. 由 Banach 逆算子定理, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, 即 $\lambda \in \rho(A)$. 因此 $\sigma(A) \subset [m(A), M(A)]$.

② 下证 $M := M(A) \in \sigma(A)$. 首先注意到对任意 $k > 0$, $M(A + kI) = M(A) + k$ 且 $\sigma(A + kI) = \sigma(A) + k$. 因此通过选取充分大的 k 并将 A 代以 $A + kI$, 可假定

$$\sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|. \tag{3.4.3–1}$$

我们使用反证法. 若不然, 由单位球面的紧性, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|(MI - A)x\| \geqslant \delta, \quad \forall x \in \{x \in H : \|x\| = 1\}.$$

由 $M = M(A)$ 的定义与单位球面的紧性, 可取 $x_n \to x_0 \in \{x \in H : \|x\| = 1\}$, 使得 $(Ax_n, x_n) \to M$. 于是

$$\delta^2 \leqslant ((MI - A)x_n, (MI - A)x_n) = M^2 - 2M(Ax_n, x_n) + (Ax_n, Ax_n) \to (Ax_0, Ax_0) - M^2,$$

从而

$$\|Ax_0\| \geqslant \sqrt{M^2 + \delta^2} > M,$$

这说明 $\|A\| > M$. 另一方面, 由定理 3.4.6 (5) 与 (3.4.3–1),

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = M,$$

矛盾.

③ 注意到 $-A$ 也是有界对称算子, 由 ② 得 $M(-A) \in \sigma(-A) = -\sigma(A)$, 而 $M(-A) = -m(A)$, 因此 $m(A) \in \sigma(A)$ 得证.

(2) 由于 $-A$ 也是有界对称算子, $\sigma_p(-A) = -\sigma_p(A)$, 且 $M(-A) = -m(A)$, 因此这等价于证明 (3).

(3) 由于 A 是对称紧算子, 根据 Riesz–Schauder 理论,

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}.$$

对任意 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 存在 $x_\lambda \in \{x \in H : \|x\| = 1\}$ 使得 $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. 由 $(Ax_\lambda, x_\lambda) = \lambda$ 与定义就有

$$m \coloneqq m(A) \leqslant \lambda \leqslant M(A) \eqqcolon M.$$

同 (1) 中 ② 所述, 通过用 $A + kI$ 替换 A ($k > 0$ 充分大), 可不妨设 $m(A) > 0$. 于是由命题 3.4.6 (5) 可得

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = M(A).$$

由 M 的定义, 存在 $\{x_n\} \subset \{x \in H : \|x\| = 1\}$, 使得 $(Ax_n, x_n) \to M$. 于是

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \|Ax_n - Mx_n\|^2 = (Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) \\
&= \|A\|^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M^2 \\
&\to M^2 - 2M^2 + M^2 = 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

因此 $Ax_n \to Mx_n$. 又因为 A 是紧算子, $\{Ax_n\}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}$. 此时

$$x_{n_k} = \frac{1}{M}[Ax_{n_k} - (\underbrace{Ax_{n_k} - Mx_{n_k}}_{\to 0})]$$

亦收敛. 设 $x_{n_k} \to x_0 \in \{x \in H : \|x\| = 1\}$, 则 $Ax_0 = Mx_0$, 即 $M \in \sigma_p(A)$. □

习题 3.4.4 设 A 是对称紧算子, 求证:

(1) 若 A 非零, 则 A 至少有一个不等于零的特征值.

(2) 若 M 是 A 的非零不变子空间, 则 M 上必含有 A 的特征元.

证明 (1) 由命题 3.4.6 (5), $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. 因此存在 $\{x_n\} \subset \{x \in H : \|x\| = 1\}$, 使得 $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$. 通过选取子列, 不妨设 $(Ax_n, x_n) \to \lambda \in \mathbb{R}$, 其中 $|\lambda| = \|A\| > 0$. 由

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \|(\lambda I - A)x_n\|^2 = ((\lambda I - A)x_n, (\lambda I - A)x_n) \\
&= |\lambda|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \|Ax_n\|^2 \\
&\leqslant \lambda^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \to 0, \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

可知 $(\lambda I - A)x_n \to 0$. 由于 $\lambda \neq 0$, A 是紧算子, 因此存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $Ax_{n_k} \to z$, 从而

$$\lambda x_{n_k} = (\lambda I - A)x_{n_k} + Ax_{n_k} \to z.$$

故

$$\|z\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = (\lambda I - A)\frac{z}{\lambda},$$

这说明 $Az = \lambda z$, 而 $\|z\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| > 0$, 因此 $\lambda \in \sigma_p(A)$.

(2) 由于 $A|_M$ 仍为对称紧算子, 若 $A|_M$ 非零, 由 (1) 即可得证; 若 $A|_M = 0$, 则 M 上的任意非零元均为 $A|_M$ 的特征元. □

习题 3.6.1 设 X, Y 为 B 空间, $T \in \mathscr{F}(X, Y)$, $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 求证:

(1) $T + A \in \mathscr{F}(X, Y)$.

(2) $\mathrm{ind}(T+A)=\mathrm{ind}(T)$.

证明 (1) 由于 $T\in\mathscr{F}(X,Y)$, 存在 $S\in\mathcal{L}(Y,X)$ 与 $A_1\in\mathfrak{C}(X)$, $A_2\in\mathfrak{C}(Y)$, 使得

$$S\circ T=\mathrm{Id}_X-A_1,\quad T\circ S=\mathrm{Id}_Y-A_2. \tag{3.6.1–1}$$

注意到

$$\begin{aligned}S\circ(T+A)&=S\circ T+S\circ A=\mathrm{Id}_X-(A_1-S\circ A),\\(T+A)\circ S&=T\circ S+A\circ S=\mathrm{Id}_Y-(A_2-A\circ S),\end{aligned}$$

且由 $A\in\mathfrak{C}(X,Y)$ 可得

$$A_1-S\circ A\in\mathfrak{C}(X),\quad A_2-A\circ S\in\mathfrak{C}(Y).$$

于是由 Fredholm 算子的等价刻画可知 $T+A\in\mathscr{F}(X,Y)$.

(2) 由 (3.6.1–1) 可知 $S\in\mathscr{F}(Y,X)$. 因此

$$\mathrm{ind}(S)+\mathrm{ind}(T)=\mathrm{ind}(S\circ T)=\mathrm{ind}(\mathrm{Id}_X-A_1)=0.$$

同理,

$$\mathrm{ind}(S)+\mathrm{ind}(T+A)=\mathrm{ind}(S\circ(T+A))=\mathrm{ind}(\mathrm{Id}_X-(A_1-S\circ A))=0.$$

故

$$\mathrm{ind}(T+A)=\mathrm{ind}(T).$$

□

习题 3.6.2 设 X,Y 为 B 空间, $T\in\mathscr{F}(X)$, $S\in\mathscr{F}(Y)$, 求证:

(1) $T\oplus S\in\mathscr{F}(X\oplus Y)$.

(2) $\mathrm{ind}(T\oplus S)=\mathrm{ind}(T)+\mathrm{ind}(S)$.

证明 (1) 由 Fredholm 算子的等价刻画, 存在 $P\in\mathcal{L}(X)$, $Q\in\mathcal{L}(Y)$, $A_1,A_2\in\mathfrak{C}(X)$ 与 $B_1,B_2\in\mathfrak{C}(Y)$, 使得

$$\begin{aligned}P\circ T&=\mathrm{Id}_X-A_1,\quad T\circ P=\mathrm{Id}_X-A_2,\\Q\circ S&=\mathrm{Id}_Y-B_1,\quad S\circ Q=\mathrm{Id}_Y-B_2.\end{aligned}$$

由此可得 $P\oplus Q\in\mathcal{L}(X\oplus Y)$ 满足

$$\begin{aligned}(P\oplus Q)\circ(T\oplus S)&=(P\circ T)\oplus(Q\circ S)=(\mathrm{Id}_X-A_1)\oplus(\mathrm{Id}_Y-B_1)=\mathrm{Id}_{X\oplus Y}-A_1\oplus B_1,\\(T\oplus S)\circ(P\oplus Q)&=(T\circ P)\oplus(S\circ Q)=(\mathrm{Id}_X-A_2)\oplus(\mathrm{Id}_Y-B_2)=\mathrm{Id}_{X\oplus Y}-A_2\oplus B_2.\end{aligned}$$

由于 $(A_i\oplus B_i)$ $(i=1,2)$ 将有界集映为预紧集, 它们是紧算子, 从而 $T\oplus S\in\mathscr{F}(X\oplus Y)$.

(2) 注意到

$$N(T\oplus S)=N(T)\oplus N(S),\quad R(T\oplus S)=R(T)\oplus R(S),$$

因此

$$\dim N(T\oplus S)=\dim N(T)+\dim N(S),\quad \mathrm{codim}\,R(T\oplus S)=\mathrm{codim}\,R(T)+\mathrm{codim}\,R(S).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(T\oplus S)&=\dim N(T\oplus S)-\operatorname{codim} R(T\oplus S)\\&=[\dim N(T)+\dim N(S)]-[\operatorname{codim} R(T)+\operatorname{codim} R(S)]\\&=[\dim N(T)-\operatorname{codim} R(T)]+[\dim N(S)-\operatorname{codim} R(S)]\\&=\operatorname{ind}(T)+\operatorname{ind}(S).\end{aligned}$$

□

习题 3.6.5 设 X,Y 为 B 空间, $T\in\mathscr{F}(X,Y)$, 求证:

(1) $T^*\in\mathscr{F}(Y^*,X^*)$.

(2) $\operatorname{ind}(T^*)=-\operatorname{ind}(T)$.

证明 (1) 由于 $t\in\mathscr{F}(X,Y)$, 存在 $S\in\mathcal{L}(Y,X)$, $A_1\in\mathfrak{C}(X)$, 与 $A_2\in\mathfrak{C}(Y)$, 使得

$$S\circ T=\mathrm{Id}_X-A_1,\quad T\circ S=\mathrm{Id}_Y-A_2.$$

两边取共轭即得

$$T^*\circ S^*=\mathrm{Id}_{X^*}-A_1^*,\quad S^*\circ T^*=\mathrm{Id}_{Y^*}-A_2^*.$$

由 Schauder 定理 (定理 3.1.5), $A_1^*\in\mathfrak{C}(X^*)$, $A_2^*\in\mathfrak{C}(Y^*)$. 于是由 Fredholm 算子的等价刻画可知 $T^*\in\mathscr{F}(Y^*,X^*)$.

(2) 由于 $T\in\mathscr{F}(X,Y)$, 根据定义, $R(T)=\overline{R(T)}$. 再由引理 3.2.9, $N(T^*)^\perp=\overline{R(T)}=R(T)$. 因此

$$\dim N(T^*)=\operatorname{codim} R(T). \tag{3.6.5–1}$$

同理 (见第 210 页), 由 (1) 结论,

$$R(T^*)=\overline{R(T^*)}={}^\perp N(T),$$

从而

$$\dim N(T)=\operatorname{codim} R(T^*). \tag{3.6.5–2}$$

由 (3.6.5–1), (3.6.5–2) 及

$$\begin{cases}\operatorname{ind}(T)=\dim N(T)-\operatorname{codim} R(T),\\ \operatorname{ind}(T^*)=\dim N(T^*)-\operatorname{codim} R(T^*),\end{cases}$$

即得 $\operatorname{ind}(T^*)=-\operatorname{ind}(T)$. □

习题 3.6.7 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是由光滑曲线 Γ 围成的区域, $X\subset\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ 是由在 Ω 内解析、在 $\overline{\Omega}$ 上连续的函数组成的闭线性子空间. 举例说明: 限制算子

$$R:X\to\mathcal{C}(\Gamma),\quad u(z)\mapsto u(z)|_{z\in\Gamma}$$

不是 Fredholm 算子.

解答 考虑 $\Omega=\mathbb{B}(0,1)$, $\Gamma=\mathbb{S}^1$ 与 $f_n(z)=\dfrac{1}{z-\frac{1}{n+1}}\in\mathcal{C}(\Gamma)$ $(n\geqslant 1)$. 我们证明 $\{[f_n]\}_{n=1}^\infty$ 线性无关 (其中

$[f_n]$ 表示 f_n 在 $\mathcal{C}(\Gamma)/R(X)$ 中的等价类). 假设存在 $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m$ 与 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_{n_k}(z) \in R(X),$$

由于 X 中函数在 $\mathbb{B}(0,1)$ 中全纯, 通过考虑 $\frac{1}{n_k+1}$ 处的留数可知 $\lambda_k = 0\ (k = 1, \cdots, m)$. 故 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关, 从而 $\operatorname{codim} R(X) = \dim(\mathcal{C}(\Gamma)/R(X)) = \infty$, R 不是 Fredholm 算子. □

习题 3.6.10 设 X 为 B 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, 且存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$I - A^n \in \mathfrak{C}(X),$$

求证: $A \in \mathscr{F}(X)$.

证明 由 $I - A^n \in \mathfrak{C}(X)$ 可知 $A^n \in \mathscr{F}(X)$. 因此存在 $S \in \mathcal{L}(X)$ 与 $A_1, A_2 \in \mathfrak{C}(X)$, 使得

$$S \circ A^n = I - A_1, \quad A^n \circ S = I - A_2.$$

这可以改写为

$$\left(S \circ A^{n-1}\right) \circ A = I - A_1, \quad A \circ \left(A^{n-1} \circ S\right) = I - A_2.$$

这说明 $A \in \mathscr{F}(X)$. □

习题 3.6.11 设 X, Y, Z 为 B 空间, $T_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, 使得 $T_2 \circ T_1 \in \mathscr{F}(X,Z)$, 求证:

$$T_1 \in \mathscr{F}(X,Y) \iff T_2 \in \mathscr{F}(Y,Z).$$

证明 ($\Rightarrow$) 若 $T_1 \in \mathscr{F}(X,Y)$, 则存在 $S \in \mathscr{F}(Y,X)$ 与 $A \in \mathfrak{C}(Y)$, 使得

$$T_1 \circ S = \mathrm{Id}_Y - A.$$

于是

$$T_2 \circ T_1 \circ S = T_2 - T_2 \circ A.$$

由于 $T_2 \circ A \in \mathfrak{C}(Y,Z)$, 且 $T_2 \circ T_1 \in \mathscr{F}(X,Z)$ 蕴含 $T_2 \circ T_1 \circ S \in \mathscr{F}(Y,Z)$, 结合习题 3.6.1 (1) 即得

$$T_2 = T_2 \circ T_1 \circ S + T_2 \circ A \in \mathscr{F}(Y,Z).$$

($\Leftarrow$) 若 $T_2 \in \mathfrak{C}(Y,Z)$, 则存在 $S \in \mathscr{F}(Z,Y)$ 与 $A \in \mathfrak{C}(Y)$, 使得

$$S \circ T_2 = \mathrm{Id}_Y - A.$$

于是

$$S \circ T_2 \circ T_1 = T_1 - A \circ T_1.$$

由于 $A \circ T_1 \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 且 $T_2 \circ T_1 \in \mathscr{F}(X,Z)$ 蕴含 $S \circ T_2 \circ T_1 \in \mathscr{F}(X,Y)$, 结合习题 3.6.1 (1) 即得

$$T_1 = S \circ T_2 \circ T_1 + A \circ T_1 \in \mathscr{F}(X,Y).$$ □

第二部分

课程小记

2024-09-02

(1) 课程概览.

(2) Cantor 紧集套原理：完备度量空间中非空递降闭集套若直径趋于 0, 则交集非空.

(3) 举例：$(\mathcal{C}([0,1]),\rho_\infty)$ 的有界闭子集套, 其交为空集.

(4) Banach 不动点定理及其在 Cauchy 初值问题中的应用.

2024-09-04

(1) 完备化.

(2) 良定性验证：若有两个同极限收敛序列, 将它们分别安插在新序列的奇、偶数位可得一 Cauchy 列.

(3) 列紧.

(4) $A\subset\left(\mathcal{L}^1([0,1]),\|\cdot\|_1\right)$, 寻找 A 列紧的充要条件.

(5) Hausdorff 定理.

2024-09-09

(1) $(\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ 完备 (拓扑作业 Problem 43 (2)), 但不可分 (MSE).

(2) 设 X 为完备度量空间, 则 $(\mathcal{C}_\mathrm{b}(X),\|\cdot\|_\infty)$ 可分当且仅当 X 紧 ("$\Rightarrow$" 见 MSE, 注意完备度量空间若不紧则不完全有界, 从而存在点列两两距离 $>\varepsilon$; "$\Leftarrow$" 由 $\mathcal{C}_\mathrm{b}(X)=\mathcal{C}(X)$, 下接 [ZGQ] 第 29 页, 参考拓扑命题 2.7.9).

(3) 度量空间紧性的等价刻画 (参考拓扑讲义).

(4) 一个点列若无收敛子列, 则这个点列构成闭集 (因为导集为空).

(5) Arzelà–Ascoli 定理.

(6) 是否有 $\mathcal{L}^p([0,1])$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 版本的 Arzelà–Ascoli 定理?

(7) Stone–Weierstrass 定理 (参考拓扑讲义).

2024-09-11

(1) 赋范线性空间.

(2) $\mathcal{C}([0,1])$ 没有可数线性基: $\left\{\frac{1}{x-a} : a > 1\right\}$ 线性无关.

(3) 度量由范数诱导当且仅当它具有平移不变性与数乘连续性.

(4) $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ 不完备.

(5) 将范数完备化.

(6) 有限维赋范线性空间范数等价 ([ZGQ] 第 36-38 页).

(7) 有限维赋范线性空间必为 Banach 空间; 赋范线性空间的任一有限维子空间必为闭子空间.

(8) 具有相同维数的两个有限维赋范线性空间之间的线性同构必为同胚映射.

(9) 无限维赋范线性空间无 "范数等价性": $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ 完备, 但 $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ 不完备 (不过此时仍有 $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_\infty$).

(10) 准范数与 Fréchet 空间.

(11) 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上定义准范数 $\|x\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, 则 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 关于此准范数构成 Fréchet 空间, 其上收敛等价于按分量 (逐点) 收敛 (参考拓扑 Problem 39 (3)). 由此导出 Hilbert 方体 $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ 关于此准范数是自列紧的 ($[-1,1]$ 自列紧, 再结合对角线方法).

2024-09-14

(1) 任一紧致度量空间同胚于 Hilbert 方体的某个闭子集 (参考拓扑定理 2.7.12).

(2) 设 X 为紧致度量空间, 则 $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ 可分 ([ZGQ] 第 29 页笔记).

(3) 任一紧致度量空间都是 Cantor 三分集的连续像 (参考拓扑 Problem 38).

(4) 次线性泛函/非线性期望 ([ZGQ] 第 38 页), 例子: 一族概率测度下积分的 sup.

(5) 连续函数空间的 Riesz 表示定理 ([ZGQ] 第 153 页).

(6) 半范数/半模.

(7) [ZGQ] 第 39 页定理 1.4.22 (有限维赋范线性空间上的次线性泛函, 正定性条件等价于与度量球互相包含).

(8) 有限维赋范线性空间的内蕴刻画: 单位球面自列紧/任意有界集列紧 (任意有界点列有收敛子列).

(9) 赋范线性空间对有限维子空间最佳逼近元的存在性、(附加严格凸条件下的) 唯一性.

(10) 严格凸/非严格凸空间的例子 ([ZGQ] 第 41 页).

(11) 无限维闭线性子空间未必有最佳逼近元 (习题 1.4.14).

2024-09-18

(1) 赋范线性空间对有限维子空间最佳逼近元的存在性.

(2) Riesz 引理 ([ZGQ] 第 43 页).

(3) $\mathbb{R}^n$ 中非空紧凸集具有不动点性质.

(4) Schauder 不动点定理 ([ZGQ] 第 57 页).

(5) 常微分方程 Peano 定理 ([ZGQ] 第 59 页).

2024-09-23

(1) Minkowski 泛函及其性质.

(2) $P(x)$ 何时不取 ∞, 何时具有齐次性, 何时具有正定性?

(3) Banach 空间中闭凸集的**端点** (不能表示为两个不同点的凸组合) 集是 G_δ-集; 存在例子, 使得端点集在该闭凸集中稠密 (无限维时).

(4) 内积空间与 Hilbert 空间.

(5) 内积空间是严格凸的赋范线性空间 ([ZGQ] 第 65 页, 因此 $\mathcal{C}([0,1])$ 与 $\mathcal{L}^p([0,1])$ ($p \neq 2$) 均不是内积空间). 范数满足平行四边形等式的赋范线性空间可引入内积.

(6) 正交与正交基.

(7) 设 M 为 X 子集, 则 $M^\perp$ 是闭线性子空间.

2024-09-25

(1) (规范) 正交集, 完备正交集.

(2) Bessel 不等式, Parseval 等式, Hilbert 空间中“完备规范正交集” $\iff$ “规范正交基”.

(3) 内积空间同构.

(4) 可分 Hilbert 空间同构于 ℓ^2 或 $\mathbb{K}^n$ (先证明 Hilbert 空间可分当且仅当有至多可数的规范正交基).

2024-09-30

(1) Hilbert 空间中点到闭凸子集的最佳逼近元存在且唯一.

(2) 对上述最佳逼近元的刻画.

(3) Hilbert 空间关于闭线性子空间的正交分解.

(4) 线性算子, 有界算子.

(5) 赋范线性空间之间的线性算子连续 $\iff$ 在 0 处连续 $\iff$ 有界.

(6) 若 Y 是 Banach 空间, 则 $(\mathcal{L}(X,Y),\|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间.

2024-10-09

(1) Hölder 不等式：$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$, 其中 $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ 为共轭指数.

(2) $\mathcal{L}^p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$ 是自反空间, $\left(\mathcal{L}^1([0,1])\right)^* = \mathcal{L}^\infty([0,1])$, $(\mathcal{L}^\infty([0,1]))^* \supsetneq \mathcal{L}^1([0,1])$ (利用 Banach 定理, [ZGQ] 第 168 页, 以及 $\mathcal{L}^\infty([0,1])$ 不可分, 但 $\mathcal{L}^1([0,1])$ 可分).

(3) 设 X 为 Hilbert 空间, $P \in \mathcal{L}(X)$, 则以下等价：

- ◇ P 为正交投影算子.
- ◇ $P^2 = P$ 且 $(x, Py) = (Px, y)$, $\forall x, y \in X$.
- ◇ $P^2 = P$ 且 $\|P\| \leqslant 1$.

(4) 二次对偶空间 X^{**} 上的内积.

(5) Riesz 表示定理.

(6) 共轭算子, 自伴算子.

(7) Hilbert 空间上的共轭双线性函数在“有界”条件下可由唯一的有界算子诱导 ([ZGQ] 第 94 页), 由此可定义 $*: \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$.

2024-10-12

(1) 度量空间中的疏集、剩余集 (疏集之补)、第一纲集、第二纲集.

(2) Baire 纲定理 (完备度量空间中可数个稠密开集之交稠密, 且为第二纲集).

(3) $\mathcal{F} \coloneqq \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f \text{ 处处不可微}\}$ 是 $\mathcal{C}([0,1])$ 中的剩余集 ([ZGQ] 第 105 页).

(4) 设 M 为紧致度量空间, $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(M)$. 令 $g = \inf\limits_{n \geqslant 1} f_n$, $h = \sup\limits_{n \geqslant 1} f_n$, 则 g 为上半连续函数, h 为下半连续函数, 且它们的连续点集均为 M 中的稠密 G_δ-集 (剩余集).

(5) 满足开映射定理条件的映射将剩余集映为剩余集 (由此可将 X 的通有性质转移到 Y 上).

(6) 开映射定理证明的第一步转化.

2024-10-14

(1) 开映射定理 ([ZGQ] 第 106 页) 及其一般化结论 ([ZGQ] 第 111 页).

(2) Banach 逆算子定理 ([ZGQ] 第 106 页).

(3) 等价范数定理 ([ZGQ] 第 113 页).

(4) 闭算子 (图像关于图模闭) 的例子 (求导算子, [ZGQ] 第 111 页).

(5) 闭图像定理 (**必考点：在定义域闭时, 将验证一个算子是有界线性算子转化为验证它是闭算子**).

(6) 赋范线性空间到 Banach 空间的连续线性算子可唯一地保范延拓至其定义域的闭包上成为连续线性算子 ([ZGQ] 第 112 页).

(7) Toeplitz–Hellinger 定理 (选自 [101])：

例 3.2.6 (Toeplitz-Hellinger (特普利茨 – 黑林格)) 设 X, Y 是 Banach 空间, 若 T 是 X 到 Y 的映射, S 是 Y^* 到 X^* 的映射, 且对任意 $x \in X, y^* \in Y^*$ 有

$$y^*(Tx) = (Sy^*)(x), \tag{3.2}$$

则 T, S 都是有界线性算子.

证明 由 (3.2) 式, 对任意的 $y^* \in Y^*, x_1, x_2 \in X$, 数 a, b,

$$\begin{aligned} y^*(T(ax_1 + bx_2)) &= (Sy^*)(ax_1 + bx_2) = a(Sy^*)x_1 + b(Sy^*)x_2 \\ &= y^*(aTx_1 + bTx_2). \end{aligned}$$

由 y^* 的任意性, 使用 Hahn-Banach 延拓定理可知,

$$T(ax_1 + bx_2) = aTx_1 + bTx_2,$$

即 T 是线性映射. 再说明 T 是闭算子: 对 $x_n \to x, Tx_n \to y$, 对任意 $y^* \in Y^*$, 我们有

$$\begin{aligned} y^*(y) &= \lim_{n\to\infty} y^*(Tx_n) = \lim_{n\to\infty} (Sy^*)(x_n) \\ &= (Sy^*)(x) = y^*(Tx), \end{aligned}$$

因此 $Tx = y$, 这就说明了 T 是一个闭算子. 由闭算子定理得, T 是有界的. 类似地, 也可以证明 S 是有界线性算子, 请读者自行验证. □

2024-10-16

(1) 共鸣定理 (条件可放宽为 $R := \left\{x \in X : \sup\limits_{T\in W} \|Tx\| < +\infty\right\}$ 为第二纲集, 见第 115 页上方笔记; 此时得出的结论蕴含着 $R = X$).

(2) 应用共鸣定理的逆否命题：$\mathcal{L}^2([0,1])$ 为 $\mathcal{L}^1([0,1])$ 中的第一纲集 (一般地, 对共轭指数 $p > q \geqslant 1$, 可证 $\mathcal{L}^p([0,1])$ 为 $\mathcal{L}^q([0,1])$ 中的第一纲集).

(3) Banach–Steinhaus 定理 ([ZGQ] 第 115 页).

(4) 测度的 Riesz 表示定理, 测度在弱 * 拓扑下的收敛.

(5) 紧致度量空间上概率测度全体在弱 * 拓扑下构成紧致度量空间 (遍历理论的基石).

2024-10-21

(1) Hahn–Banach 定理 (实、复、赋范线性空间版本).

(2) Hahn–Banach 定理的各种应用形式 ([ZGQ] 第 127-129 页).

(3) 在无内积结构的一般 Banach 空间中定义补空间.

2024-10-23

(1) Hahn–Banach 定理的几何形式 (点与含内点凸集的分离).

(2) 凸集分离定理 (两个凸集, 其一有内点, 则可用一超平面将两者分开).

(3) 习题 2.4.2 很重要.

(4) 抽象可微函数的中值定理 ([ZGQ] 第 137 页).

(5) 凸泛函.

2024-10-28

(1) 凸泛函次微分 ([ZGQ] 第 142 页) 的存在性; 若在 x_0 处可微, 则 $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

(2) 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $(\mathscr{L}^p([0,1]))^* = \mathscr{L}^q([0,1])$ ([ZGQ] 第 146 页).

(3) 当 $1 < p < \infty$ 时, $\mathscr{L}^p([0,1])$ 是自反空间.

(4) $(\mathcal{C}([0,1]))^* = \{f \in \mathrm{BV}([0,1]) : f(0) = 0$ 且 f 右连续$\}$ ([ZGQ] 第 150 页).

(5) Riesz 表示定理 ([RGB] PPT 19 结尾/[ZGQ] 第 153 页).

2024-10-30

(1) 赋范线性空间可等距嵌入到它的二次对偶 (第二共轭) 空间中 ([ZGQ] 第 156 页).

(2) 在 Hilbert 空间上求共轭算子 (可分 Hilbert 空间时即“无穷维矩阵”) 的例子 ([ZGQ] 第 159 页).

(3) 赋范线性空间中的弱收敛与弱极限.

(4) Eberlein–Smulian 定理 ([ZGQ] 第 169 页)：自反空间的单位 (闭) 球是弱 (自) 列紧的.

2024-11-04

(1) Banach 定理 ([ZGQ] 第 168 页)：赋范线性空间的对偶空间可分则本身也可分.

(2) Pettis 定理 ([ZGQ] 第 169 页)：自反性是闭遗传的.

(3) 赋范线性空间的对偶空间中的 $*$ 弱收敛与 $*$ 弱极限.

(4) X^* 上的弱收敛蕴含 X^* 上的 $*$ 弱收敛; 当 X 是自反空间时, $*$ 弱收敛与弱收敛等价.

(5) Banach–Steinhaus 定理的两个特殊情形 ([ZGQ] 第 164-165 页).

(6) 弱列紧与 $*$ 弱列紧.

(7) 可分赋范线性空间的对偶空间上的有界列必有 $*$ 弱收敛子列 ([ZGQ] 第 167 页).

(8) $*$ 弱开集与 $*$ 弱紧.

(9) Alaoglu 定理 ([ZGQ] 第 171 页).

2024-11-06

(1) 赋范线性空间中**算子**的一致收敛、强收敛、**弱收敛** ([ZGQ] 第 165 页).

(2) 强收敛而不一致收敛的例子 ([ZGQ] 第 165 页).

(3) 弱收敛而不强收敛的例子 ([ZGQ] 第 166 页).

(4) 对 $1 < p < \infty$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ 中稠密 (留意这与 Banach–Steinhaus 定理的结合使用).

2024-11-11

(1) 复 Banach 空间上闭线性算子 T 的谱：

$$\mathbb{C} = \underbrace{\rho(T)}_{\text{预解集, 正则值}} \sqcup \overbrace{\underbrace{\sigma_p(T)}_{\text{点谱}} \sqcup \underbrace{\sigma_c(T)}_{\text{连续谱}} \sqcup \underbrace{\sigma_r(T)}_{\text{剩余谱}}}^{\sigma(T),\ \text{谱集, 谱点}}.$$

(2) 复平面中任一有界闭集都是某个复 Hilbert 空间上某个有界线性算子的谱集 (当 $\dim X = +\infty$ 时, 有界线性算子的谱集是 $\mathbb{C}$ 中紧集).

(3) 上述各类谱均可能出现的例子 ([ZGQ] 第 180-182 页).

(4) 次可加序列 ($a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$), 超可加序列 ($a_{n+m} \geqslant a_n + a_m$); [ZGQ] 第 183 页下方笔记.

(5) Banach 代数, Gelfand 表示 ([ZGQ] 下册第 10 页).

(6) $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$ 为有界集.

2024-11-13

(1) 闭线性算子的预解集是开集 ([ZGQ] 第 184 页).

(2) 有界线性算子谱点存在性定理 ([ZGQ] 第 185 页).

(3) Gelfand 公式 ([ZGQ] 第 188 页)：$r_\sigma(T) \coloneqq \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\geqslant 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

(4) Hilbert 空间上对称算子的谱集包含于 $\mathbb{R}$, 且剩余谱为空集 ([ZGQ] 第 190 页).

(5) ℓ^2 上右推移算子的各类谱 ([ZGQ] 第 188 页).

2024-11-18

(1) 谱映射与谱定理：$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$, 其中 f 为复解析函数 (先对其作 Taylor 展开).

(2) 用 ℓ^2 上右推移算子引入 Fredholm 算子的指标 ([ZGQ] 第 236 页).

2024-11-20

(1) 有限秩算子 ([ZGQ] 第 196 页).

(2) 秩一算子 $y\otimes f : X \to Y$, $x \mapsto \langle f, x\rangle y$ ([ZGQ] 第 197 页).

(3) 有限秩算子的等价刻画 ([ZGQ] 第 197 页).

(4) Banach 空间之间的紧算子 ([ZGQ] 第 193 页)：将有界集映为预紧集的线性算子.

(5) 紧算子的性质 ([ZGQ] 第 193 页).

(6) 紧算子的例子 ([ZGQ] 第 196 页, 用到 Arzelà–Ascoli 定理; 或用 Stone–Weierstrass 定理构造二元多项式一致逼近, 再用 $\overline{F(X,Y)} \subset \mathfrak{C}(X,Y)$).

(7) 有界线性算子的全连续性 ([ZGQ] 第 194 页).

(8) 紧算子的全连续的; 自反空间上的全连续算子是紧算子 ([ZGQ] 第 194 页).

2024-11-25

(1) 当 Y 为 Hilbert 空间时 $\overline{F(X,Y)} = \mathfrak{C}(X,Y)$.

(2) 直和分解与投影算子构造的讨论：$\dim M < +\infty$ 或 $\operatorname{codim} M < +\infty$ 时可对 Banach 空间的闭子空间 M 构造投影算子.

(3) 可分 Banach 空间的 Schauder 基 ([ZGQ] 第 198 页).

(4) 若可分 Banach 空间 X 有 Schauder 基, 则 $\overline{F(X)} = \mathfrak{C}(X)$ ([ZGQ] 第 199 页).

2024-11-27

(1) Riesz–Fredholm 定理 ([ZGQ] 第 202 页上方笔记, 第 205 页).

(2) “恒同算子 $-$ 紧算子” 是闭值域算子 ([ZGQ] 第 205 页).

(3) Schauder 定理 ([ZGQ] 第 195 页)：$T \in \mathfrak{C}(X, Y) \iff T^* \in \mathfrak{C}(Y^*, X^*)$.

2024-12-02

(1) Riesz–Fredholm 定理的证明 (续).

2024-12-04

(1) 紧算子的谱理论 (Riesz–Schauder 理论, [ZGQ] 第 212 页)：对于无穷维空间上的紧算子 A, 只有三种可能情形：

- ⋄ $\sigma(A) = \{0\}$.
- ⋄ $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.
- ⋄ $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}$, 其中 $\lambda_n \to 0$.

(2) 上述各类谱均可能出现的例子.

(3) 不变子空间 ([ZGQ] 第 214 页), 严格不变子空间 ($TM = M$).

(4) 若 $\sigma_p(T) = \varnothing$, 则没有有限维 T-不变子空间 (若有, 则化为矩阵问题, 必有特征值, 矛盾).

(5) 由 x 生成的 T-不变子空间 $L(x) = \{p(T)x : p \text{ 为多项式}\}$.

(6) 设 X 为 Banach 空间, $\dim X \geqslant 2$, 则对任意 $T \in \mathfrak{C}(X)$, T 必有非平凡的闭不变子空间 ([ZGQ] 第 215 页).

2024-12-09

(1) 零链长 $p(T)$ 与像链长 $q(T)$ ([ZGQ] 第 218 页).

(2) “恒同算子 $-$ 紧算子” 的零链长 $=$ 像链长 $< +\infty$ ([ZGQ] 第 219 页).

(3) 设 $T = I - A$, $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则存在非负整数 p, 使得 $X = N(T^p) \oplus R(T^p)$, 且 $T|_{R(T^p)}$ 存在有界线性逆算子 ([ZGQ] 第 218 页).

2024-12-11

(1) 第三章习题 (重点是 [ZGQ] 习题 3.2.6, 可温习一下 [ZGQ] 习题 2.4.7, 赋范线性空间中有限个线性无关元素“对偶基”的存在性).

2024-12-16

(1) Hilbert 空间上对称算子的基本性质 ([ZGQ] 第 222 页).

(2) Hilbert–Schmidt 定理 ([ZGQ] 第 226 页).

(3) 若 T 是对称算子, 则 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$ ([ZGQ] 第 223 页), 且该极值可在单位球面上取到 ([ZGQ] 第 224 页).

2024-12-18

(1) 对称紧算子的特征值排序, 极大极小刻画 ([ZGQ] 第 227-228 页).

(2) 正 (对称) 算子 ([ZGQ] 第 229-230 页).

(3) 对称紧算子的函数运算, $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$.

(4) [ZGQ] 习题 3.6.5：$\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$.

(5) Fredholm 算子的等价刻画 (Atkinson 定理, [ZGQ] 第 248 页下方笔记, 第 237 页).

2024-12-23

(1) Fredholm 算子的紧扰动与小扰动 (指标局部常值).

(2) 指标为 0 的 Fredholm 算子可以表示为“存在有界逆的线性算子 $-$ 紧算子”.

(3) Fredholm 算子的复合仍为 Fredholm 算子, 且指标为原指标之和 ([ZGQ] 第 239 页).

2024-12-25

(1) 对称算子的函数 (续 2024-12-18).

(2) 对称算子的比较 (利用单调性定义极限).

(3) 单调增对称算子列的“控制收敛定理”.

(4) 若 A, B 为正算子, 且 $AB = BA$, 则 AB 也是正算子 ([ZGQ] 第 230 页上方笔记).

(5) 特别地, 可以对正算子开 n 次根号.

2024-12-30

期末考试题型分布 (其中 **2** 与 **5** 是难题, 注意可利用前面小问的结论):

1. 压缩映射原理的应用：证明积分方程有唯一解或数列存在极限 (参考 [ZGQ] 习题 1.1), 需注意验证对象空间的完备性.
2. 证明一个算子的有界线性算子: 运用共鸣定理、闭图像定理、开映射定理等证明有界性, Hahn–Banach 定理可能会在过程中使用 (注意其几何形式).
3. 各种收敛性的结合与判定：可能会结合其他知识点.
4. 线性算子的谱：判断是否为紧算子/Fredholm 算子, 计算 $\sigma(T)$ (尤其是点谱) 与 $r_\sigma(T)$ (注意计算谱半径除了使用 Gelfand 公式还可以直接从定义入手), 熟悉 [ZGQ] 第 188-192 页的例题结论, 考试题可以归结到这些基本的例子上.
5. 与 Hilbert 空间正交性相关的综合题：正交基, Parseval 等式, Riesz 表示定理.
6. Riesz–Fredholm 定理的综合题：掌握记号 ${}^{\perp}M$ 与 $N^{\perp}$ 的含义, 闭值域算子.

第三部分

往年试题

2017 秋期末考试

1. 证明 Banach 不动点定理 (压缩映像原理).

证明 设 (X,ρ) 是完备度量空间, $T: X \to X$ 是压缩映射, 即存在 $\alpha \in (0,1)$, 使得 $\rho(Tx,Ty) \leqslant \alpha\rho(x,y)$, $\forall x,y \in X$. 取定 $x_0 \in X$, 并令

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

我们有

$$\rho(x_{n+p},x_n) \leqslant \sum_{i=1}^{p}\rho(x_{n+i},x_{n+i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{p}\alpha^{n+i-1}\rho(x_1,x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

由此可见 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 由 X 完备知它有极限 x^*, 进而 $x^* = Tx^*$, 即 x^* 是 T 的不动点. 假设 x^*, x^{**} 都是 T 的不动点, 则由

$$|x^* - x^{**}| = |Tx^* - Tx^{**}| \leqslant \alpha|x^* - x^{**}|$$

可得 $x^* = x^{**}$, 即不动点唯一. □

2. 设 M 是 X 的子集, 若对任意 $f \in X^*$, $f(M)$ 有界, 求证 M 有界.

证明 将 M 中元素视为 X^{**} 中的, 则它们在每个点 $f \in X^*$ 处有界, 由共鸣定理, $\sup\limits_{m\in M}\|m\| < \infty$. □

3. 设 X 是赋范线性空间, $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$, 求证: $f_n \rightharpoonup^* f$ 当且仅当

(1) $\|f_n\|$ 有界.

(2) 对 X 中任意稠密子集 M 与任意 $x \in M$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

证明 这是 Banach–Steinhaus 定理 (定理 2.3.17). □

4. 设 $K(x,y) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n(x+y)}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$.

(1) 求证如下 T 是 $\mathcal{L}^2([0,1])$ 上的紧算子:

$$Tu(x) \coloneqq \int_0^1 K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 计算 T 的谱.

证明 (1) 设 $f_n(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx}$, 则

$$(f_n, f_m) = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} mx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(n-m)x}\,\mathrm{d}x = \delta_{nm},$$

因此 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{L}^2([0,1])$ 的规范正交基. 对任意 $u(x) \in \mathcal{L}^2([0,1])$, 设 $u(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n f_n(x)$, 则

$$Tu(x) = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n(x+t)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m f_m(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n u_m \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx}\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(n+m)t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u_{-n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(n-n)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u_{-n} f_n(x).$$

令

$$T_N : \mathcal{L}^2([0,1]) \to \mathcal{L}^2([0,1]), \quad u(x) \mapsto \sum_{|n|\leqslant N} a_n u_{-n} f_n(x),$$

则 $\|T - T_N\| \xrightarrow{N\to\infty} 0$, 而 T_N 是有限秩算子, 因此 T 是紧算子.

(2) 由于 T 是紧算子, 且 $\dim \mathcal{L}^2([0,1]) = \infty$, 根据 Riesz–Schauder 理论, $0 \in \sigma(T)$, 且 $\sigma(T)\setminus\{0\} = \sigma_p(T)\setminus\{0\}$. 下面计算 $\sigma_p(T)$. 设 $Tu(x) = \lambda u(x)$, 即

$$a_n u_{-n} = \lambda u_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

于是对任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} a_n u_{-n} = \lambda u_n, \\ a_{-n} u_n = \lambda u_{-n} \end{cases} \implies \lambda^2 = a_n a_{-n}.$$

因此 $\lambda = \pm\sqrt{a_n a_{-n}}$ 是特征值, 对应的特征向量是 $\sqrt{a_{-n}} f_{-n} \pm \sqrt{a_n} f_n$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R(0I - T)$, 而 $\overline{\mathrm{span}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}} = \mathcal{L}^2([0,1])$, 因此若 $0 \notin \sigma_p(T)$, 则 $0 \in \sigma_c(T)$. 故

$$\sigma_p(T) = \left\{\pm\sqrt{a_n a_{-n}} : n \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \sigma_c(T) = \begin{cases} \{0\}, & \text{若 } 0 \notin \sigma_p(T), \\ \varnothing, & \text{其他}, \end{cases} \quad \sigma_r(T) = \varnothing.$$

□

5. 构造 $f \in (\ell^\infty)^*$, 使得对任意 $a \in \ell^\infty$, 都有

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) \leqslant f(a) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}).$$

证明 本题可加强为 [2019] 题目 5. □

6. 设 X 是 Banach 空间, Y 是有限维空间, $f : X \to Y$ 是线性算子, 求证: f 连续当且仅当 $N(f) \coloneqq \{x \in X : f(x) = 0\}$ 是闭集.

证明 $(\Rightarrow)$ $N(f)$ 是 Y 中闭集 $\{0\}$ 关于连续函数 f 的原像, 因此是闭集.

$(\Leftarrow)$ 通过用 $R(f)$ 代替 Y, 可不妨设 f 是满射. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 Y 的一组基, 并取 $x_i \in X$ 使得 $f(x_i) = e_i$. 令 $X_0 = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则 $X_0 \simeq Y$, 且 $X = X_0 \oplus N(f)$. 由于 $N(f)$ 是闭集, $\rho(x) \coloneqq d(x, N(f))$ 是 X_0 上的范数, 而有限维赋范线性空间范数等价, 因此 ρ 与 X 上范数在 X_0 上的限制等价, 即存在 $C > 0$, 使得

$$\|x_0\| \leqslant C d(x_0, N(f)), \quad \forall x_0 \in X_0.$$

注意到 f 在 X 上的限制可由矩阵表示, 因此存在 $M > 0$, 使得

$$\|f(x_0)\| \leqslant M\|x_0\|, \quad \forall x_0 \in X_0.$$

进而对任意 $x \in X$, 可设 $x = x_0 + w$, 其中 $x_0 \in X_0$, $w \in N(f)$, 则有

$$\|f(x)\| = \|f(x_0)\| \leqslant M\|x_0\| \leqslant MCd(x_0, N(f)) \leqslant MCd(x_0, -w)$$

$$= MC\|x_0 - (-w)\| = MC\|x\|.$$

故 f 有界, 从而连续. $\square$

7. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 若 A 和任意紧算子 B 交换, 求证: $A = \lambda I$.

证明 设 $\{e_\alpha\}$ 为 H 的规范正交基. 设 $Ae_\alpha = \sum\limits_{\beta} \lambda_{\beta\alpha} e_\beta$. 由于秩一算子 $e_\alpha \otimes e_\alpha$ 是紧算子, 根据条件,

$$\lambda_{\alpha\beta} e_\alpha = (e_\alpha \otimes e_\alpha) A e_\beta = A(e_\alpha \otimes e_\alpha) e_\beta = \delta_{\alpha\beta} \sum_\beta \lambda_{\beta\alpha} e_\beta.$$

由此可得

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha} = 0, \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

因此

$$Ae_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha.$$

下证这些 λ_α 均相等. 考虑有限秩算子 $F_{\alpha\beta}$, 满足

$$F_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} e_\alpha + e_\beta, & x = e_\alpha, e_\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据条件,

$$F_{\alpha\beta} A e_\alpha = \lambda_\alpha (e_\alpha + e_\beta) \quad \text{与} \quad AF_{\alpha\beta}(e_\alpha) = \lambda_\alpha e_\alpha + \lambda_\beta e_\beta$$

需相等, 这意味着 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$. 故 $\lambda_\alpha \equiv \lambda$, 即 $A = \lambda I$. $\square$

2018 秋期末考试

1. 设 $y(t)\in\mathcal{C}([0,1])$ 是一个给定的函数, 求证如下积分方程存在唯一解 $x(t)\in\mathcal{C}([0,1])$:

$$x(t)-\frac{\mathrm{e}^t}{3}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s=y(t),\quad \forall t\in[0,1].$$

证明 考虑映射

$$T:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1]),\quad x(t)\mapsto\frac{\mathrm{e}^t}{3}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s+y(t).$$

对任意 $x_1(t),x_2(t)\in\mathcal{C}([0,1])$, 有

$$\rho(Tx_1(t),Tx_2(t))=\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{\mathrm{e}^t}{3}\int_0^t[x_1(s)-x_2(s)]\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{3}\rho(x_1(t),x_2(t)).$$

由 $\frac{\mathrm{e}}{3}<1$ 知 T 是压缩映射. 由于 $(\mathcal{C}([0,1]),\rho)$ 是完备度量空间, 由 Banach 不动点定理, T 存在唯一不动点 $x(t)$, 即上述积分方程存在唯一解. □

2. 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 H 中的正交规范集, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是一列实数. 证明:

(1) $b_ne_n\rightharpoonup 0$ 当且仅当 $\sup\limits_{n\geqslant1}|b_n|<+\infty$.

(2) $\{b_ne_n\}_{n=1}^\infty$ 是 H 中的完全有界集当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

证明 (1) ($\Rightarrow$) 若 $b_ne_n\rightharpoonup 0$, 将 b_ne_n 看成 $H^*=H$ 上的有界线性泛函, 由 Banach–Steinhaus 定理即得 $\sup\limits_{n\geqslant1}\|b_ne_n\|=\sup\limits_{n\geqslant1}|b_n|<+\infty$.

($\Leftarrow$) 若 $\sup\limits_{n\geqslant1}|b_n|<+\infty$, 令 $M=\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^\infty}$, 则 M 为闭子空间, 它有补空间 N. 由于 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 M 的标准正交基, 对任意 $m\in M$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(m,e_n)=0$, 进而对任意 $x\in H$, 有

$$|(x,b_ne_n)|=|b_n(x_M,e_n)+b_n(x_N,e_n)|=|b_n(x_M,e_n)|\leqslant\sup_{n\geqslant1}|b_n|\cdot|(x_M,e_n)|\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

即 $b_ne_n\rightharpoonup 0$.

(2) ($\Rightarrow$) 若不然, 对任意取定的 $\varepsilon>0$, 集合 $\Lambda\coloneqq\{n\in\mathbb{N}:|b_n|>\varepsilon\}$ 是无限集. 对不同的 $m,n\in\Lambda$, 有 $\|b_me_m-b_ne_n\|=\sqrt{b_m^2+b_n^2}>\sqrt{2}\varepsilon$. 故有限个直径为 ε 的球无法覆盖 $\{b_ne_n\}_{n=1}^\infty$, 矛盾.

($\Leftarrow$) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, $\|b_Ne_N-b_ne_n\|<\varepsilon$. 故 $\{\mathbb{B}(b_ie_i,\varepsilon)\}_{i=1}^N$ 可覆盖 $\{b_ne_n\}_{n=1}^\infty$. □

3. 设 X,Y 是 Banach 空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 是单射. 证明: $T^{-1}:R(T)\to X$ 连续当且仅当 T 是闭值域算子.

证明 ($\Rightarrow$) 若 $T^{-1}:R(T)\to X$ 连续, 则 X 与 $R(T)$ 同胚. 由 X 是 Banach 空间知 $R(T)$ 是闭集.

($\Leftarrow$) 若 $R(T)$ 是闭集, 则 $R(T)$ 是 Banach 空间, 且 $T:X\to R(T)$ 既单又满, 由 Banach 逆算子定理即知 $T^{-1}:R(T)\to X$ 连续. □

4. 求证: $\mathcal{L}^4([0,1])$ 中的非空子集 A 有界, 当且仅当对 A 中的任何序列 $\{f_n\}$, 必存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 和函数 $f\in\mathcal{L}^4([0,1])$ 使得

$$\int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\,\mathrm{d}t\to\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,\quad\forall g\in\mathcal{L}^{\frac43}([0,1]).$$

证明 注意到欲证即“A 有界当且仅当 A 弱列紧”.

(⇒) 若 A 有界, 由于 $\mathcal{L}^4([0,1])$ 是自反空间, 由 Eberlein–Smulian 定理知 A 是弱列紧的.

(⇐) 若 A 无界, 可选取 $\{f_n\}\subset A$ 满足 $\|f_n\|>n$, 则它不可能有弱收敛子列, 因为由 Banasch–Steinhaus 定理, 弱收敛子列必有界. □

5. 在复 Hilbert 空间 ℓ^2 上定义如下算子:

$$T:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{3x_1+x_2}{2},\frac{4x_2+x_3}{3},\cdots,\frac{(n+2)x_n+x_{n+1}}{n+1},\cdots\right).$$

(1) 证明: T 是有界线性算子.

(2) 求 T 的谱和谱半径.

证明 (1) 将 T 分解为如下两个线性算子之和:

$$T_1:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{3x_1}{2},\frac{4x_2}{3},\cdots,\frac{(n+2)x_n}{n+1},\cdots\right),$$
$$T_2:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots,\frac{x_{n+1}}{n+1},\cdots\right).$$

由 $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 均为递减数列可知 $\|T_1\|\leqslant\frac{3}{2}$, $\|T_2\|\leqslant\frac{1}{2}$. 因此 $T=T_1+T_2$ 是有界线性算子.

(2) 记 $A=T=T_1+T_2, B=T_1$, 先证 $A-B=T_2$ 是紧算子. 对 $n\geqslant1$, 令

$$F_n:\ell^2\to\ell^2,\quad(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_{n+1}}{n+1},0,0,\cdots\right),$$

则每个 F_n 均为有限秩算子, 且 $\|T_2-F_n\|=\frac{1}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}0$, 由此可知 T_2 是紧算子. 由 [2019] 题目 4 (1) 结论,

$$\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)\subset\sigma(B),\quad\sigma(B)\setminus\sigma_p(B)\subset\sigma(A).$$

首先, 注意到 $\sigma(B)=\sigma(T_1)=\{1\}\cup\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$. 这是因为 $I-T_1$ 的逆无界, 且对任意 $n\geqslant2$, $\frac{n+1}{n}I-T_1$ 不是单射, 而对其余的 λ 显然都是正则值.

下面计算 $\sigma_p(T)$. 若 $Tx=\lambda x$, 即

$$[(n+1)\lambda-(n+2)]x_n=x_{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

由此可解得

$$x=x_1(1,2\lambda-3,(2\lambda-3)(3\lambda-4),\cdots,(2\lambda-3)(3\lambda-4)\cdots(n\lambda-(n+1)),\cdots).$$

当 $x_1\neq0$ 时, 注意到:

- ◇ 若 $\lambda=\frac{n+1}{n}$ $(n\geqslant2)$, 则此解只有有限个分量非零, 从而是 ℓ^2 中的解.
- ◇ 若 $\lambda\neq\frac{n+1}{n}$ $(n\geqslant2)$, 且 $\lambda>1$, 则对所有满足 $\lambda>1+\frac{2}{n}$ 的 n, 均有 $n\lambda-(n+1)>(n+2)-(n+1)=1$, 从而此解不属于 ℓ^2.
- ◇ 若 $\lambda\neq\frac{n+1}{n}$ $(n\geqslant2)$, 且 $\lambda\leqslant1$, 则 $n\lambda-(n+1)\leqslant n-(n+1)=-1$, 从而此解不属于 ℓ^2.

综上可得 $\sigma_p(A)=\sigma_p(T)=\left\{\frac{n+1}{n}:n\geqslant 2\right\}$. 于是, 由 $\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)\subset\sigma(B)$ 可得

$$\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)\subset\{1\}.$$

下证 $1\in\sigma_c(A)$. 由

$$B-I:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{3},\cdots,\frac{x_n}{n+1},\cdots\right)$$

可知 $N(B-I)=\{0\}$, 即 $1\notin\sigma_p(B)$, 从而由 $\sigma(B)\setminus\sigma_p(B)\subset\sigma(A)$ 可得 $1\in\sigma(A)$. 因此为证 $1\in\sigma_c(A)$, 只需证 $\overline{R(A-I)}=\ell^2$. 而这等价于证明 $R(A-I)^{\perp}=\{0\}$, 也即 $N((A-I)^*)=\{0\}$. 由

$$A-I:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2+x_3}{3},\cdots,\frac{x_n+x_{n+1}}{n+1},\cdots\right)$$

可得其共轭算子

$$(A-I)^*:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3},\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{4},\cdots,\frac{x_{n-1}}{n}+\frac{x_n}{n+1},\cdots\right).$$

故 $R(A-I)^{\perp}=N((A-I)^*)=\{0\}$ 得证. 综上所述, 我们得到

$$\sigma_p(T)=\left\{\tfrac{n+1}{n}:n\geqslant 2\right\},\quad \sigma_c(T)=\{1\},\quad \sigma_r(T)=\varnothing.$$

由定义, T 的谱半径 $r_\sigma(T)=\frac{3}{2}$. □

6. 设 X 是实 Banach 空间, M 是 X 的有限维子空间.

(1) 存在 X 的闭线性子空间 N, 使得 $X=M\oplus N$.

(2) 若 A,B 是 X 的两个互不相交的非空闭凸集, 且 $B\subset M$, 证明: 存在非零连续线性泛函 $f\in X^*$ 与 $s\in\mathbb{R}$, 使得超平面 H_f^s 分离 A,B, 即

$$f(x)\leqslant s,\ \forall x\in A,\quad f(x)\geqslant s,\ \forall x\in B.$$

证明 (1) 设 $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是 M 的一组基, 由习题 2.4.7 结论, 存在 $f_1,\cdots,f_m\in X^*$, 使得 $\langle f_i,x_j\rangle=\delta_{ij}$. 令 $N=\bigcap\limits_{i=1}^{m}N(f_i)$, 则 N 是闭线性子空间, 且 $X=M\oplus N$.

（2）我们先证明凸紧集和凸闭集能够分离。这是许全华定理 8.2.3。大体思路就是类似紧 T2 推 T3 的做法，创造内点。
这样，$C_n=B_M(0,n)\cap B$都是紧集，能够找到$f_n,\|f_n\|=1$严格分离C_n和A。这是说，$\forall c_n\in C_n,a\in A,f_n(c_n)<f_n(a)$. 根据[S]3.2.4，$X^*$单位球是弱*紧的，根据[S]3.2.5，$X^*$单位球是弱*自列紧的。因此$\exists f_{n_k}\rightharpoonup^* f$. .固定$c\in B,a\in A$,当$k$充分大时，$c\in C_{n_k}$.因此我们有$k$充分大时，$f_{n_k}(c_n)<f_n(a)$.由于$f_{n_k}(c_n)\to f(c),f_{n_k}(a)\to f(a)$，由极限的保序性，我们有$f(c)\leq f(a)$.$a,c$有任意性，我们找到了分离的。由于$A,B$非空，可以找到不是$\infty$的$s$。 □

7. 设 X 是 Banach 空间, $T:X\to X^*$ 是线性算子, $D(T)=X$. 若 $\langle T(x),x\rangle:=T(x)(x)\geqslant 0$ 对任意 $x\in X$ 都成立, 证明 T 有界.

证明 往证 T 是闭线性算子. 设 $x_n \to x$, $T(x_n) \to y$. 对任意 $u \in X$, 有

$$(T(x_n) - T(u))(x_n - u) \geqslant 0,$$

令 $n \to \infty$ 即得

$$(T(x) - T(u))(x - u) \geqslant 0.$$

取 $u = x + th$, 代入上式整理可得

$$-t(y - T(x))(h) + t^2 T(h)(h) \geqslant 0.$$

- ⋄ 当 $t \to 0^+$ 时, 后一项是高阶无穷小, 因此 $(y - T(x))(h) \leqslant 0$
- ⋄ 当 $t \to 0^-$ 时, 后一项是高阶无穷小, 因此 $(y - T(x))(h) \geqslant 0$.

由 h 的任意性即得 $y = T(x)$, 即 T 是闭线性算子. 由于 $D(T) = X$, 由闭图像定理知 T 是连续 (即有界) 的. □

2019 秋期末考试

1. 考虑复 Hilbert 空间 ℓ^2 的子集

$$C=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\ell^2:|x_n|\leqslant\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

证明：若 $T:C\to C$ 连续，则 T 在 C 上必有一个不动点.

证明 (1) 先证 C 是列紧集，由 Hausdorff 定理，这等价于证明 C 是完全有界集. 任给 $\varepsilon>0$，取正整数 N，使得 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\varepsilon$. 由于 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in C:x_{N+1}=x_{N+2}=\cdots=0\}$ 是完全有界集，存在有限 ε-网，将该 ε-网中每个小球半径扩大为 3ε 即得 C 的有限 3ε-网. 故 C 完全有界.

(2) 再证 C 是闭凸集. 闭性由定义式即得. 对任意 $(x_n),(y_n)\in C$ 与 $\lambda\in[0,1]$，由

$$|\lambda x_n+(1-\lambda)y_n|\leqslant\lambda|x_n|+(1-\lambda)|y_n|\leqslant\frac{1}{n}[\lambda+(1-\lambda)]=\frac{1}{n}$$

即知 $\lambda(x_n)+(1-\lambda)(y_n)\in C$. 故 C 是闭凸集.

(3) 由 Schauder 不动点定理，若 $T:C\to C$ 连续，则 T 在 C 上必有一个不动点. □

2. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty},\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的两个规范正交基. 定义算子 T 如下：

$$T(x):=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\sigma_n,\quad\forall x\in H.$$

证明：T 是 H 到自身的线性等距满射. 进一步地，证明每个 $H\to H$ 的线性等距满射均可以由以上方式得到.

证明 (1) 线性性由内积的线性性给出. 等距性由 Parseval 定理给出：

$$\|Tx-Ty\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x-y,e_n)\sigma_n\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}|(x-y,e_n)|^2=\|x-y\|^2.$$

对任意 $y=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n\sigma_n\in H$，取 $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_ne_n\in H$，则 $T(x)=y$，故 T 是满射.

(2) 设 $T:H\to H$ 是线性等距满射，$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的一组规范正交基，则 $\|Te_i\|=\|e_i\|=1$，且对 $i\neq j$，有

$$2=(e_i-e_j,e_i-e_j)=(Te_i-Te_j,Te_i-Te_j)=2-2\operatorname{Re}(Te_i,Te_j),$$
$$2=(e_i-\mathrm{i}e_j,e_i-\mathrm{i}e_j)=(Te_i-T(\mathrm{i}e_j),Te_i-T(\mathrm{i}e_j))=2-2\operatorname{Re}(Te_i,\mathrm{i}Te_j)=2-2\operatorname{Im}(Te_i,Te_j).$$

于是 $(Te_i,Te_j)=0$. 故 $\{Te_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是规范正交集. 由 T 是满射知 $\overline{\operatorname{span}\{Te_i\}_{i=1}^{\infty}}=H$. 令 $\sigma_i=Te_i$，则 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的规范正交基，且

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)Te_n=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\sigma_n,\quad\forall x\in H.$$

□

3. 求证：$\mathcal{L}^4([0,1])$ 中的非空子集 A 有界，当且仅当对 A 中的任何序列 $\{f_n\}$，必存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 和函数 $f \in \mathcal{L}^4([0,1])$ 使得

$$\int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall g \in \mathcal{L}^{\frac{4}{3}}([0,1]).$$

证明 注意到欲证即"A 有界当且仅当 A 弱列紧".

($\Rightarrow$) 若 A 有界，由于 $\mathcal{L}^4([0,1])$ 是自反空间，由 Eberlein–Smulian 定理知 A 是弱列紧的.

($\Leftarrow$) 若 A 无界，可选取 $\{f_n\} \subset A$ 满足 $\|f_n\| > n$，则它不可能有弱收敛子列，因为由 Banasch–Steinhaus 定理，弱收敛子列必有界. □

4. (1) 设 A, B 是复 Banach 空间 X 上的有界线性算子. 求证：若 $A - B$ 是紧算子，则有

$$\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B), \quad \sigma(B) \setminus \sigma_p(B) \subset \sigma(A).$$

(2) 在复 Hilbert 空间 ℓ^2 上定义如下算子：

$$T : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(\frac{x_1}{2}, \frac{4x_1 + x_2}{3}, \frac{5x_2 + x_3}{4}, \cdots, \frac{(n+2)x_{n-1} + x_n}{n+1}, \cdots\right).$$

求 T 的谱集 $\sigma(T)$ 和谱半径 $r_\sigma(T)$.

证明 (1) 若 $A - B$ 是紧算子，则 $B - A$ 也是紧算子，因此只需证 $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$. 假设存在 $\lambda \in \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma(B))$，则 $\lambda I - A$ 是单射，$\lambda I - B$ 既单又满. 注意到

$$\lambda I - A = (\lambda I - B) + (B - A) = (\lambda I - B)\big(I + (\lambda I - B)^{-1}(B - A)\big),$$

其中 $(\lambda I - B)^{-1}(B - A)$ 是紧算子，且由 $\lambda I - A$ 是单射可知 $I + (\lambda I - B)^{-1}(B - A)$ 是单射. 根据 Riesz–Fredholm 定理 (二择一性质)，$I + (\lambda I - B)^{-1}(B - A)$ 是既单又满，从而由上式可知 $\lambda I - A$ 既单又满，但这与 $\lambda \in \sigma(A)$ 矛盾.

(2) 将 T 分解为如下两个有界线性算子之和：

$$T_1 : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(0, \frac{4x_1}{3}, \cdots, \frac{(n+2)x_{n-1}}{n+1}, \cdots\right),$$
$$T_2 : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \cdots, \frac{x_n}{n+1}, \cdots\right).$$

记 $A = T = T_1 + T_2, B = T_1$，先证 $A - B = T_2$ 是紧算子. 对 $n \geqslant 1$，令

$$F_n : \ell^2 \to \ell^2, \quad (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(\frac{x_1}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n+1}, 0, 0, \cdots\right),$$

则每个 F_n 均为有限秩算子，且 $\|T_2 - F_n\| = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$，由此可知 T_2 是紧算子. 由 (1) 结论，

$$\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B), \quad \sigma(B) \setminus \sigma_p(B) \subset \sigma(A).$$

由于 $\|T_1^n\| = \frac{n+3}{3}$，由 Gelfand 公式可知

$$r_\sigma(T_1) = \lim_{n\to\infty} \|T_1^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

对任意 λ,

$$\lambda I - T_1 : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(\lambda x_1, \lambda x_2 - \frac{4x_1}{3}, \cdots, \lambda x_n - \frac{(n+2)x_{n-1}}{n+1}, \cdots\right)$$

总是单射, 故 $\sigma_p(B) = \sigma_p(T_1) = \varnothing$. 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda I - T_1$ 显然不是满射. 当 $0 < |\lambda| \leqslant 1$ 时, $(1, 0, 0, \cdots) \notin R(\lambda I - T_1)$, 这是因为由上式解 $(\lambda I - T_1)x = 0$ 可得

$$x_n = \frac{n+2}{3\lambda^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时此 $x \notin \ell^2$. 故 $\sigma(B) = \sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}$, 于是

$$\sigma(A) \supset \sigma(B) \setminus \sigma_p(B) = \sigma(B),$$

进而

$$\sigma(T) = \sigma(A) = \sigma(B) \cup \sigma_p(A).$$

下面计算 $\sigma_p(T)$. 若 $Tx = \lambda x$, 即

$$(2\lambda - 1)x_1 = 0, \quad [(n+1)\lambda - 1]x_n = (n+2)x_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

若 $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$, 则由上式可知 $x = 0$. 因此 $\sigma_p(T) \subset \left\{\frac{1}{n} : n \geqslant 2\right\} \subset \sigma(B)$. 故

$$\sigma(T) = \sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}.$$

由定义, T 的谱半径 $r_\sigma(T) = 1$. □

5. 证明：存在连续线性泛函 $f \in (\ell^\infty)^*$, 使得对任意 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in \ell^\infty$, 都有如下两条性质成立：

- ◇ $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) \leqslant f(a) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1})$.
- ◇ $f(a_1, a_2, \cdots) = f(a_2, a_3, \cdots)$.

证明 注意到只要满足右半边不等式, 左半边自动成立：用 $-a$ 代入 a,

$$-f(a) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(-a_n - a_{n+1}) = -\liminf_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}),$$

由此即得左半边. 容易验证

$$p(a) := \limsup_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1})$$

是 ℓ^∞ 上的次线性泛函. 令

$$X_0 = \{(a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots) : a \in \ell^\infty\} \subset \ell^\infty,$$

易知 X_0 是 ℓ^∞ 的子空间. 令 f_0 为 X_0 上的零泛函. 对任意 $x = (a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots) \in X_0$,

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty}((a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2})) = \limsup_{n\to\infty}(a_n - a_{n+2}),$$

下面说明 $p(x) \geqslant 0$. 否则, 设 $-c = p(x) < 0$, 则当 n 充分大时, 有 $a_n - a_{n+2} < -\frac{c}{2}$, 即 $a_{n+2} > a_n + \frac{c}{2}$, 这与 $a \in \ell^\infty$ 矛盾. 故在 X_0 上有 $f_0(x) \leqslant p(x)$. 由实 Hahn–Banach 定理, f_0 可延拓为 ℓ^∞ 上的实线性泛

函 f, 满足 $f(x) \leqslant p(x)$. 于是对任意 $a \in \ell^\infty$, 有

- ⋄ $f(a) \leqslant p(a) = \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1})$.
- ⋄ $f(a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots) = 0$, 即 $f(a_1, a_2, \cdots) = f(a_2, a_3, \cdots)$. □

6. 设 X 是实 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. 证明以下两条是等价的:

(1) $\sum\limits_{n=1}^\infty |f(x_n)| < \infty, \forall f \in X^*$.

(2) 存在 $C > 0$ 使得对任意正整数 N 和 $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, $1 \leqslant n \leqslant N$, 都有 $\left\| \sum\limits_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \right\| \leqslant C$ 成立.

证明 $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ 将 $\sum\limits_{n=1}^N \varepsilon_n x_n$ 视为 X^{**} 中元素, 则

$$\sup_{N\geqslant 1,\, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n(f) \right\| \leqslant \sup_{N\geqslant 1,\, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \sum_{n=1}^N |f(\varepsilon_n x_n)| = \sum_{n=1}^\infty |f(x_n)| < \infty, \quad \forall f \in X^*.$$

由共鸣定理, 存在常数 $C > 0$, 使得 $\left\| \sum\limits_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \right\| \leqslant C$ ($\forall N \geqslant 1$, $\forall \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$).

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ 取 $\varepsilon_n = \mathrm{sgn}(f(x_n))$ (若 $f(x_n) = 0$ 则取 $\varepsilon_n = 1$). 我们有

$$\sum_{n=1}^N |f(x_n)| = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n f(x_n) = f\left(\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n\right) \leqslant \|f\| \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \|f\| C.$$

令 $N \to \infty$ 即得证. □

7. 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 H 的一个规范正交基, $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ 满足

$$\sum_{n=1}^\infty \|e_n - \sigma_n\|^2 < \infty,$$

且 $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ 在如下意义下线性无关: 没有 σ_n 会落在其他 σ_k ($k \neq n$) 张成的线性子空间的闭包 $\overline{\mathrm{span}\{\sigma_k : k \neq n\}}$ 中. 求证: $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ 是 H 的一组 Schauder 基.

证明 见 [WDH] 第 60-63 页. □

2020 秋期末考试

1. 设 $T:\mathcal{L}^2([0,1])\to\mathcal{L}^2([0,1])$ 为 $Tf(x):=\int_0^1 x^2yf(y)\,\mathrm{d}y$, 求算子范数 $\|T\|$.

解答 对任意 $f\in\mathcal{L}^2([0,1])$, 由 Cauchy–Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_2^2&=\int_0^1\left(\int_0^1 x^2yf(y)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 yf(y)\,\mathrm{d}y\right)^2\\&\leqslant\frac{1}{5}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\int_0^1 f^2(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(y)\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{15}\|f\|_2^2,\end{aligned}$$

即 $\|T\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{15}}$. 另一方面, 取 $f(x)=x$, 则上面不等号可取等, 从而 $\|T\|=\frac{1}{\sqrt{15}}$. □

2. 设函数列 $f_n(t)=\chi_{[2^n,2^{n+1}]}(t)$. 问:

(1) 在 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ 中, 是否有 $f_n\rightharpoonup 0$?

(2) 在 $\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\right)^*$ 中, 是否有 $f_n\rightharpoonup^* 0$?

解答 (1) 当 $p\in[1,+\infty)$ 时, 取 $g=x^{-1}\chi_{[1,+\infty)}\in\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, 则 $g\in\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ ($\forall q\in(1,+\infty]$), 且

$$(f_n,g)=\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln 2\neq 0,$$

因此 $f_n\not\rightharpoonup 0$. 当 $p=+\infty$ 时, 由于 $\left(\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})\right)^*=$ 紧支正则 Borel 测度全体, 常值函数 1 关于这些测度可积, 而它是 $\{f_n\}$ 是控制函数, 根据 Lebesgue 收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n\,\mathrm{d}=\int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)\mathrm{d}\mu=0,$$

因此 $f_n\rightharpoonup 0$.

(2) 对任意 $g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 我们有

$$\sum_{n=1}^\infty\left|\int_{\mathbb{R}}f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{n=1}^\infty\int_{\mathbb{R}}f_n(t)|g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\mathbb{R}}1\cdot|g(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty.$$

这意味着 $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t=0$. 故 $f_n\rightharpoonup^* 0$. □

3. 设 H 是 Hilbert 空间, $T:H\to H$ 满足对任意 $x,y\in H$, $(Tx,Ty)=(x,y)$. 计算 T 的谱半径, 并证明 T 的连续谱值的模长都为 1.

证明 由 $(T^nx,T^ny)=\left(T^{n-1}x,T^{n-1}y\right)=\cdots=(x,y)$ 可知 $\|T^nx\|=\|x\|$, 从而 $\|T^n\|=1$. 由 Gelfand 公式即知谱半径 $r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=1$.

(1) 若 T 是满射, 由条件 T 还是单射, 根据 Banach 逆算子定理, $T^{-1}\in\mathcal{L}(H)$ 且 $\left\|T^{-1}\right\|=1$. 设 $|\lambda|<1$, 则

$$\lambda I-T=-T\left(I-\lambda T^{-1}\right).$$

注意到 $\|\lambda T^{-1}\| = |\lambda|\|T^{-1}\| = |\lambda| < 1$, 因此 $I - \lambda T^{-1}$ 存在有界逆, 进而 $\lambda I - T$ 存在有界逆, 于是 $\lambda \notin \sigma(T)$. 故 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. 特别地, T 的连续谱值的模长都为 1.

(2) 若 T 不是满射, 由 $\|Tx\| = \|x\|$ 可知 T 是闭值域算子, 于是 $\overline{R(T)} = R(T) \neq H$, 从而 $N(T^*) = R(T)^{\perp} \neq \{0\}$. 取定 $x \in N(T^*) \setminus \{0\}$, 当 $|\lambda| < 1$ 时,

$$x + \lambda Tx + \lambda^2 T^2 x + \cdots \neq 0,$$

而

$$(\lambda I - T^*)\big(x + \lambda Tx + \lambda^2 T^2 x + \cdots\big) \xrightarrow[T^*x=0]{T^*T=I} 0,$$

因此 $\lambda I - T^*$ 不可逆, 即 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(T)$, 进而 $\sigma_c(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. □

4. 设 $\{\sigma_n\}$ 是 ℓ^2 中的规范正交基, 定义

$$T(x_1, \cdots, x_n, \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} x_n \sigma_n.$$

证明:

(1) T 是 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

(2) 若 n 充分大时有 $\sigma_n = e_n$ (只有第 n 个分量为 1, 其余分量为 0). 证明: $\sigma(T)$ 是以 1 为聚点的至多可数集.

证明 (1) 显然 T 是单射. 而由 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} x_n \sigma_n \in \ell^2$ 及 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} x_n\Big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2$, 这说明 T 是满射, 自然 $R(T)$ 是闭的. 故 $\dim N(T) = \operatorname{codim} R(T) = 0$, T 是 Fredholm 算子, 且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

(2) 令

$$S_N : \ell^2 \to \ell^2, \quad (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \sum_{n=1}^{N} \Big(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} x_n \sigma_n - x_n e_n\Big),$$

则 S_N 是有限秩算子, 且由条件, 当 n 充分大时, 有

$$(T - I) - S_N : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}} - 1\Big) x_n e_n,$$

由此可见 $\|(T - I) - S_N\| \xrightarrow{N\to\infty} 0$, 于是 $T - I$ 是紧算子. 由 Riesz–Schauder 理论, $\sigma(T - I)$ 是以 0 为聚点的至多可数集, 从而 $\sigma(T)$ 是以 1 为聚点的至多可数集. □

5. 设 (X, d) 是紧度量空间, $H(X) = \{A : A \text{ 为 } X \text{ 中的非空闭集}\}$, 定义

$$L(A, B) \coloneqq \max\left\{\sup_{x \in A} d(X, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\right\}.$$

(1) 证明：$(H(X),L)$ 是紧度量空间.

(2) 设 S_1,S_2 是 (X,d) 到自身的压缩映射. 证明：存在唯一的 $K\in H(X)$ 使得 $K=K(S_1)\cup K(S_2)$.

证明 (1) $(H(X),L)$ 是度量空间：

(正定性) 由于 X 紧, $H(X)$ 元素也是紧集. 对任意 $A,B\in H(X)$, 若 $A=B$, 则显然有 $L(A,B)=0$. 若 $A\neq B$, 不妨设存在 $x_0\in A\setminus B$, 则由 $\{x_0\}$ 与 B 均为紧集, $\sup\limits_{x\in A} d(x,B)\geqslant d(x_0,B)>0$, 从而 $L(A,B)>0$.

(对称性) 这是显然的.

(三角不等式) 对任意 $x\in A$, $y\in B$, $z\in C$, 有

$$d(x,C)\leqslant d(x,y)+d(y,C) \implies d(x,C)\leqslant d(x,B)+d(y,C)\leqslant L(A,B)+L(B,C),$$
$$d(A,z)\leqslant d(A,y)+d(y,z) \implies d(A,z)\leqslant d(A,y)+d(B,z)\leqslant L(A,B)+L(B,C).$$

由此可得 $L(A,C)\leqslant L(A,B)+L(B,C)$. 下证 $(H(X),L)$ 是完全有界的. □

其次我们来证明紧性。列紧和紧是不可操作的，这里我们考虑全有界性。设x_n是X的有限$\varepsilon-$网，则我们证明$2^{\{x_n\}}$是H的。首先里面所有集合都是有限集，当然是闭集。其次我们来证明它是H的$\varepsilon-$网。$\forall A\in H,\exists B=A^\varepsilon(=\{x|d(x,A)<\varepsilon\})\cap\{x_n\}\in 2^{\{x_n\}},L(A,B)<\varepsilon,\because \forall x_{n_i}\in B$, $d(x_{n_i},A)<\varepsilon\because x_{n_i}\in A^\varepsilon;\forall z\in A,d(z,B)<\varepsilon\because x_n$是$\varepsilon-$网，$z$必定和某个$x_n$距离$<\varepsilon$.由$A^\varepsilon$的定义，这个$x_n$在$A^\varepsilon$里，因此在$B$里。因此$L(A,B)<\varepsilon$.由于$2^{\{x_n\}}$是有限集，它是有限$\varepsilon-$网。因此全有界。（类似地，我们可以得出可分空间的$H$可分。）

(2) 为了证明这道题，我们先来证明[E]1-177。

(a) $\forall A,B,C,D\in H,L(A\cup B,C\cup D)\leq\max\big(L(A,C),L(B,D)\big)$

设 $E=A\cup B,F=C\cup D,\varepsilon=\max\big(L(A,C),L(B,D)\big)$，有 $E=A\cup B\subseteq C^\varepsilon\cup D^\varepsilon=(C\cup D)^\varepsilon=F^\varepsilon;F=C\cup D\subseteq A^\varepsilon\cup B^\varepsilon=(A\cup B)^\varepsilon=E^\varepsilon$.因此$L(E,F)<\varepsilon$.

(b) f是$k-$压缩映射，则$\forall A,B\in H,L\big(f(A),f(B)\big)\leq kL(A,B)$.

设 $f(A)=A',f(B)=B',L(A,B)=\varepsilon$. 设 $y=f(x)\in A',d(x,u)\leq\varepsilon,u\in B,d(y,B')\leq d\big(y,f(u)\big)=d\big(f(x),f(u)\big)\leq kd(x,u)\leq k\varepsilon$。因此$A'\subseteq B'^{k\varepsilon}$.同理$B'\subseteq A'^{k\varepsilon}$。因此$L(A',B')\leq k\varepsilon$.

$$L\big(S_1(K)\cup S_2(K),S_1(M)\cup S_2(M)\big)\leq\max\Big(L\big(S_1(K),S_1(M)\big),L\big(S_2(K),S_2(M)\big)\Big)$$
$$\leq\max\big(k_1L(K,M),k_2L(K,M)\big)=\max(k_1,k_2)L(K,M)$$

是压缩映射，因此有不动点。 □

6. 设 X 为 Banach 空间, $T:X\to X^{**}$ 是线性算子, $D(T)=X$. 若存在 $C>0$, 使得对任意 $x\in X$ 都有

$$\langle T(x),x\rangle := T(x)(x)\geqslant -C\|x\|-C.$$

证明：T 是有界线性算子.

证明 对任意正整数 n,

$$T(nx)(nx)\geqslant -nC\|x\|-C \implies T(x)(x)\geqslant -\frac{C}{n}\|x\|-\frac{C}{n^2}\geqslant -\frac{C}{n}\|x\|-\frac{C}{n}.$$

令 $n\to\infty$ 即可将条件加强为 $T(x)(x)\geqslant 0$, 这就转化成 [2018] 题目 7. □

7. 设 $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准内积, $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准范数.

(1) 设 $K_1,\cdots,K_r$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的凸集, $x\in\mathbb{R}^d$ 满足：x 不能被表示为 $\sum_{i=1}^r c_ix_i$, $c_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^r c_i=1$, $x_i\in K_i$.
证明：存在 $x\in\mathbb{R}^d$ 使得 $(u,x)=1$, $(u,y)\leqslant 1$, $\forall y\in K_i$.

(2) 设 $\|\cdot\|_1$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数, 定义 $\|\cdot\|_1^*$ 为

$$\|u\|_1^*\coloneqq\sup\big\{(u,v):v\in\mathbb{R}^d,\ \|v\|_1\leqslant 1\big\}.$$

证明：对任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 存在 y,z 使得 $x=y+z$, 且 $\|y\|_1+\|z\|_1^*\leqslant\|x\|$.

[F]20-7(1) 设$K_1,\dots,K_r$是$\mathbb{R}^d$中的凸集，$x\in\mathbb{R}^d, x\neq\sum c_ix_i, c_i\geq 0,\sum c_i=1, x_i\in K_i$.求证：$\exists u\in\mathbb{R}^d,\langle u,x\rangle=1,\langle u,y\rangle\leq 1.\forall y\in\cup K_i$

证明 此即$x\notin K=\operatorname{conv}K_i$,后者是凸集，前者是点。对于有限维来说，只要是两个凸集就可以（不严格）分离：$\forall C,D\in\mathbb{R}^d$凸，$C\cap D=\emptyset,\exists u,\forall c\in C,d\in D,\langle u,c\rangle\geq\langle u,d\rangle$

先证$C^\circ=\bar{C}^\circ$.如果维数低，那么它和闭包内部均为空集；如果维数相同，则由 1.5.1 证明过程知和闭包的内部相同。

再证$0\notin C^\circ\Rightarrow\exists u,\forall x\in\bar{C},\langle u,x\rangle\geq 0$. 有$0\notin\bar{C}^\circ, x_i\notin\bar{C}, x_i\to 0$.找$x_i$在$\bar{C}$上的最佳逼近$y_i,\langle y_i-x_i,x-y_i\rangle\geq 0\Rightarrow\langle y_i-x_i,x-x_i\rangle\geq 0\forall x\in\bar{C}$. 因此$u_i=(y_i-x_i)\|y_i-x_i\|^{-1}$是单位向量，$\langle u_i,x-x_i\rangle\geq 0\forall x\in\bar{C}$. 取$u_i$的收敛子列收敛到$u$,两边令$i\to\infty,\langle u,x\rangle\geq 0$.

因此取$0\notin C+(-D)$,这是一个凸集，可以和0按照上面的方式分离，即$\langle u,c-d\rangle\geq 0\Rightarrow\langle u,c\rangle\geq\langle u,d\rangle, s$取为上确界即可（显然不会是无穷）。

因此$x\notin K$,可以有$u,\exists x\in\mathbb{R}^d,\langle u,x\rangle\geq\langle u,y\rangle\forall y\in K$.对$u$乘以一个合适的标量，可以让$\langle u,x\rangle=1$。由于$\cup K_i\subset K$,我们证明了题目结论。 □

[F]20-7(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$是$\mathbb{R}^n$标准内积，$\|\cdot\|$是 2 范数。设$\|\cdot\|_1$是另一个范数，定义$\|x\|_1^*=\sup\limits_{\|v\|_1\leq 1}\langle x,v\rangle$,

求证：$\forall x\in\mathbb{R}^d\exists y,z,x=y+z,\|y\|_1+\|z\|_1^*\leq\|x\|$.

证明 首先，如果有$\|x\|_1\leq\|x\|$或$\|x\|_1^*\leq\|x\|$，则取$y,z=x,0$或$0,x$即可。

在往下走之前，我们需要验证$\|\cdot\|_1^*$是范数。齐次性显然。正定性取$v=cu,0<c<\|u\|_1^{-1}$即可。$\|x+y\|_1^*=\sup\limits_{\|v\|\leq 1}\langle x+y,v\rangle\leq\sup\limits_{\|v\|\leq 1}\langle x,v\rangle+\sup\limits_{\|v\|\leq 1}\langle y,v\rangle=\|x\|_1^*+\|y\|_1^*$

不妨设$\|x\|=1$，下面假设$\|x\|_1>1,\|x\|_1^*>1$.

如果存在$a\in[0,1],\|u\|_1\leq 1,\|v\|_1^*\leq 1,x=au+(1-a)v$，则取$y,z=au,(1-a)v$即可。

如果还是不行的话，我们证明这是不可能的。

20-7(1)告诉我们：（这道题比较简单，是 2-4 的唯一题目）$K_1,\dots,K_r$是凸集，$x\notin\sum c_ik_i,k_i\in K_i,\sum c_i=1\Rightarrow\exists u\in\mathbb{R}^d,\langle u,x\rangle=1,\langle u,y\rangle\leq 1\forall y\in K_i$

如果如此，则$\exists w,\langle w,x\rangle=1,\forall\|f\|_1\leq 1$或$\|f\|_1^*\leq 1$都有$\langle w,f\rangle\leq 1(K_1=B_1(1),K_2=B_{1^*}(1)$, “如果还是不行的话”是指$x\notin aK_1+(1-a)K_2$，赋范空间的球由于三角不等式是凸集。）因此$\|w\|_1^*\leq 1,\|w\|_1^{**}\leq 1$.

我们再来证明一个范数*两次就变成自己。

设$K_1=B_1(\|x\|_1),x\notin K_1$.则有$u,\langle u,x\rangle=1,\langle u,y\rangle\leq 1\forall y\in B_1(\|x\|_1)$即$\|u\|_1^*\leq\|x\|_1^{-1}$.因此

$$\|x\|_1\leq\max_v\frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|_1^*}\leq\max\frac{\langle x,v\rangle}{\frac{\langle v,x\rangle}{\|x\|_1}}=\|x\|_1$$

因此$\|x\|_1=\max\limits_v\frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|_1^*}=\|x\|_1^{**}$.

因此$\|w\|_1^*\leq 1,\|w\|_1\leq 1,w\neq x.\|w\|^2=\langle w,w\rangle=\|w\|_1\left\langle w,\frac{w}{\|w\|_1}\right\rangle\leq\|w\|_1\|w\|_1^*\leq 1$.

但是，$\|w\|^2=\|w-x\|^2+2\langle w,x\rangle-\|x\|^2>2\langle w,x\rangle-\|x\|^2=2-1=1$，和$\|w\|\leq 1$矛盾.□

2021 秋期末考试

1. 设 Hilbert 空间 X 可分, M 是 X 的稠密子空间, 证明: M 包含 X 的一个规范正交基.

证明 由于度量空间可分当且仅当第二可数, 而第二可数对子空间遗传, 因此 M 也可分. 设 $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ 是 M 的一个可数稠密子集, 则它在 X 中也稠密, 从而对任意 $x \in X$, $x \perp \{m_i\}_{i=1}^\infty$ 蕴含 $x = 0$. 对 $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ 作 Gram–Schmidt 标准正交化, 得到 $\{m_i'\}_{i=1}^\infty$, 由于 $(\operatorname{span}\{m_i'\}_{i=1}^\infty)^\perp = (\operatorname{span}\{m_i\}_{i=1}^\infty)^\perp = \{0\}$, 它是包含在 M 中的 X 的规范正交基. □

2. 设 (M, d) 是完备度量空间, F 是 M 的一个非空紧子集, $T : F \to F$ 满足

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad \forall x \neq y.$$

证明: T 在 F 上有唯一不动点.

证明 由于 F 是紧的, 可考虑 F 上的连续函数 $f(x) = d(x, Tx)$. 设 x_0 是 f 在 F 上的最小值点, 若 $x_0 \neq Tx_0$, 则由条件, $f(Tx_0) = d(Tx_0, TTx_0) < d(x_0, Tx_0) = f(x_0)$, 与 x_0 是最小值点矛盾. 故 $x_0 = Tx_0$. 若 T 在 F 上还有另一不动点 x_1, 则 $d(Tx_0, Tx_1) = d(x_0, x_1)$, 与条件矛盾. □

3. 设有赋范线性空间 X, Y, 证明: 若 $\mathcal{L}(X, Y)$ 是 Banach 空间, 则 Y 是 Banach 空间.

证明 由 Hahn–Banach 定理, 存在 $f \in X^*$, 满足 $f(a) = \|a\| = 1$. 对任意 Y 中 Cauchy 列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n f\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 中 Cauchy 列, 因为 $\|y_n f - y_m f\| = \|y_n - y_m\| \|f\|$. 因此 $y_n f \to g \in \mathcal{L}(X, Y)$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n f(a) = g(a)$ 存在. 故 Y 是 Banach 空间. □

4. 设 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $U = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1\right\}$ 的稠密子集, $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ 是复 Hilbert 空间 ℓ^2 的规范正交基, 令

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \sigma_n, \quad \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2.$$

(1) 证明: T 是 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

(2) 若 n 充分大时 $\sigma_n = e_n$ (只有第 n 个分量为 1, 其余分量为 0). 求 $\sigma(T)$ 与 $r_\sigma(T)$.

证明 (1) 显然 T 是单射. 而由 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n x_n \sigma_n \in \ell^2$ 及 Parseval 等式可得 $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_n x_n|^2 < \infty$, 进而

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 = 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4} |x_n|^2 \leqslant 4 \sum_{n=1}^\infty |a_n x_n|^2 < \infty,$$

即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2$, 这说明 T 是满射, 自然 $R(T)$ 是闭的. 故 $\dim N(T) = \operatorname{codim} R(T) = 0$, T 是 Fredholm 算子, 且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

(2) 对任意 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2$,

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \sigma_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |a_n x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2,$$

因此 $\|T\| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 进而 $\sigma(T) \subset U$. 而由条件, 当 n 充分大时, $a_n \in \sigma_p(T)$, 因此 $\sigma(T)$ 包含了 U 的一个稠密子集, 再由 $\sigma(T)$ 是闭集即知 $U \subset \sigma(T)$. 故 $\sigma(T) = U$, 进而 $r_\sigma(T) = 1$. □

5. 证明：在 ℓ^1 中弱收敛和强收敛等价.

证明 只需证 ℓ^1 中弱收敛蕴含强收敛. 用反证法, 假设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \ell^1$ 弱收敛到 0, 但不强收敛到 0, 则通过取子列可不妨设 $\|x_n\|_1 > 5\delta > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 下面构造 $y \in \ell^\infty$ 与子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 使得 $|y(x_{n_k})| > \delta$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 从而得到矛盾.

首先, 令 $n_1 = 1$, 取 i_1 充分大使得 $\displaystyle\sum_{i=i_1+1}^\infty |x_{n_1}(i)| < \delta$. 下面通过归纳构造严格递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^\infty$ 与 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, 使得

$$\sum_{i=i_k+1}^\infty |x_{n_k}(i)| < \delta, \quad \sum_{i=1}^{i_k} |x_{n_{k+1}}(i)| < \delta.$$

定义 $y = (y(i)) \in \ell^\infty$ 为 $(i_0 = 0)$

$$y(i) = \overline{\mathrm{sgn}(x_{n_k})}, \quad i_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant i_k, \quad k \geqslant 1,$$

注意到 $\|y\|_\infty = 1$. 于是对任意 $k \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
|y(x_{n_k})| &\geqslant \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=i_k+1}^\infty |x_{n_k}(i)| \\
&= \|x_{n_k}\|_1 - 2\sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - 2\sum_{i=i_k+1}^\infty |x_{n_k}(i)| \\
&> 5\delta - 2\delta - 2\delta = \delta,
\end{aligned}$$

这与 $x_n \rightharpoonup 0$ 矛盾. □

6. 设 X, Y 是 Banach 空间, 线性算子 $T: X \to Y$. 令 $N = \displaystyle\bigcap_{V\text{ 是 }0\text{ 的邻域}} \overline{T(V)}$, 证明：

(1) N 是 Y 的闭子空间.

(2) T 连续当且仅当 $N = \{0\}$.

(3) 设 $p: Y \to Y/N$ 是商映射, 则 $p \circ T$ 连续.

证明 不难验证 $N = \displaystyle\bigcap_{n=1}^\infty \overline{T\mathbb{B}(0, \tfrac{1}{n})}$.

(1) N 是闭集之交, 因此为闭集. 设 $y \in N$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_i \in \mathbb{B}(0, \frac{1}{n})$, 使得 $Tx_i \to y$. 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 往证 $\lambda y \in N$. 若 $\lambda = 0$, 这自动成立. 若 $\lambda \neq 0$, 不妨设 $\lambda > 0$, 则 $\lambda x_i \in \mathbb{B}(0, \frac{\lambda}{n}) = \mathbb{B}\Big(0, \frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\Big) \subset \mathbb{B}\Big(0, \frac{1}{\lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor}\Big)$ 满足 $T(\lambda x_i) \to \lambda y$. 当 n 遍历 $\mathbb{N}$ 时, $\lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor$ 遍历所有充分大的正整数, 因此 $\lambda y \in N$ 得证. 若还有 $z \in N$, $w_i \in \mathbb{B}(0, \frac{1}{n})$ 满足 $Tw_i \to z$, 则有 $x_i + w_i \in \mathbb{B}(0, \frac{2}{n}) = \mathbb{B}\Big(0, \frac{1}{\frac{n}{2}}\Big) \subset \mathbb{B}\Big(0, \frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\Big)$. 由于 $T(x_i + w_i) \to y + z$, 且当 n 遍历 $\mathbb{N}$ 时, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 也遍历 $\mathbb{N}$, 因此 $y + z \in N$, 故 N 是线性子空间.

(2) ($\Rightarrow$) 若 T 连续, 则 $\|T\| < \infty$, 从而 $N \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^\infty \overline{\mathbb{B}\Big(0, \frac{\|T\|}{n}\Big)} = \{0\}$.

($\Leftarrow$) 根据闭图像定理, 只需证 T 是闭线性算子, 即若 $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, 则 $y = Tx$. 为此, 只需证若 $x_n \to 0$, $Tx_n \to y$, 则 $y = 0$. 由于 $x_n \to 0$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $M > 0$, 使得 $\{x_k\}_{k=M}^\infty \subset \mathbb{B}(0, \frac{1}{n})$, 于是 $y \in N$, 而 $N = \{0\}$, 故 $y = 0$ 得证.

(3) 考虑

$$N' \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{p\big(T\mathbb{B}(0, \tfrac{1}{n})\big)}.$$

由 (2) 结论, 为证 $p \circ T$ 连续, 只需证 $N' = \{[0]\}$. 设 $[x] \in N'$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_i \in \mathbb{B}(0, \frac{1}{n})$, 使得 $[Tx_i] \to [x]$, 从而存在 $n_i \in N$, 使得 $Tx_i + n_i \to x$. 由于 $n_i \in N$, 它可由 Tm_{ij} 逼近, 从而 $T(x_i + m_{ij}) \to x$. 当 i, j 充分大时, $m_{ij} \in \mathbb{B}(0, \frac{1}{n})$. 于是得到 $x \in N$, 即 $[x] = [0]$ 得证. □

7. 设 X 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$. 证明以下等价:

(1) $R(T) = X$.

(2) 存在 $c > 0$, 使得 $\|T^*x\| \geqslant c\|x\|$, $\forall x \in X$.

证明 $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ 令 $A = \{f \in X : \|T^*f\| \leqslant 1\}$. 对任意 $g \in X$, 由于 T 是满射, 存在 $u \in X$ 使得 $g = Tu$. 我们有

$$|(f, g)| = |(f, Tu)| = |(T^*f, u)| \leqslant \|T^*f\|\|u\| \leqslant \|u\|, \quad \forall f \in A.$$

由共鸣定理,

$$M \coloneqq \sup_{f \in A} \|f\| < \infty.$$

因此

$$\|T^*f\| \leqslant 1 \implies \|f\| \leqslant M.$$

对任意 $x \in X$, 不妨设 $x \neq 0$, 则由上式可知 $\|T^*x\| \neq 0$. 故可令 $f = \frac{x}{\|T^*x\|}$, 从而 $\|T^*f\| = 1$, 于是 $\|f\| = \frac{\|x\|}{\|T^*x\|} \leqslant M$, 即 $\|T^*x\| \geqslant \frac{1}{M}\|x\|$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ 任取 $g \in X$. 由于 $T^{**} = T$, 为证存在 $u \in X$, 使得 $Tu = g$, 等价于证明存在 $u \in X$, 使得 $(u, T^*f) = (g, f)$, $\forall f \in X$. 由条件 (2),

$$|(g, f)| \leqslant \|g\|\|f\| \leqslant \frac{1}{c}\|g\|\|T^*f\|,$$

于是由 Riesz 表示定理, 这样的 $u \in X$ 存在. □

2022 秋期末考试

1. (10 分) 在中科大东区 USTC 1958 咖啡厅的一张桌子上平摊着一张合肥市的精确地图, 证明地图上恰有一点正好位于它所代表的点上.

证明 注意构造压缩映射时需确保“合肥市”是闭集. □

2. (15 分) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一组正交规范基. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令 $f_n = e_{n+1} - e_n$. 证明：由序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 张成的子空间在 H 中稠密.

证明 设 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in \operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 由 $(x, e_{n+1} - e_n) = 0$ 可得 $x_{n+1} = x_n$, 再结合 Parseval 等式可知 $x = 0$. 故 $\operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$, 即 $\operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 H 中稠密. □

3. (15 分) 设 X 为 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$. 如果存在 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 使得 $x_n \to x$ (按范数收敛) 且 $\mathrm{w}^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

证明 由于 $\mathrm{w}^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 且根据 Banach–Steinhaus 定理, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 于是

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\| \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

4. (20 分) 设 $K(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \cos[2\pi n(x+y)]$, $\forall 0 \leqslant x, y \leqslant 1$. 定义 $\mathcal{L}^2([0,1])$ 上的线性算子

$$T : u(x) \mapsto u(x) + \int_0^1 K(x,y) u(y)\, \mathrm{d}y, \quad \forall u \in \mathcal{L}^2([0,1]).$$

证明：

(1) T 是 $\mathcal{L}^2([0,1])$ 上的 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

(2) 求 T 的谱集 $\sigma(T)$ 和谱半径 $r_\sigma(T)$.

证明 (1) 设 $f_n(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x}$, 则

$$(f_n, f_m) = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} m x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(n-m)x}\, \mathrm{d}x = \delta_{nm},$$

因此 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{L}^2([0,1])$ 的规范正交基. 设

$$A : \mathcal{L}^2([0,1]) \to \mathcal{L}^2([0,1]), \quad u(x) \mapsto \int_0^1 K(x,y) u(y)\, \mathrm{d}y.$$

注意到

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos[2\pi n(x+y)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2n^2} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n(x+y)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n^2} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n(x+y)},$$

其中

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

对任意 $u(x) \in \mathcal{L}^2([0,1])$, 设 $u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n f_n(x)$, 则

$$\begin{aligned} Au(x) &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n(x+y)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m f_m(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n u_m \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n+m)y}\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u_{-n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n-n)y}\,\mathrm{d}y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u_{-n} f_n(x). \end{aligned}$$

令

$$A_N : \mathcal{L}^2([0,1]) \to \mathcal{L}^2([0,1]), \quad u(x) \mapsto \sum_{|n|\leqslant N} a_n u_{-n} f_n(x),$$

则 $\|A - A_N\| \xrightarrow{N\to\infty} 0$, 而 A_N 是有限秩算子, 因此 A 是紧算子. 根据 Riesz–Fredholm 定理, $T = I + A$ 是 Fredholm 算子, 且 $\operatorname{ind}(T) = 0$.

(2) 由于 A 是紧算子, 且 $\dim \mathcal{L}^2([0,1]) = \infty$, 根据 Riesz–Schauder 理论, $0 \in \sigma(T)$, 且 $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$. 下面计算 $\sigma_p(A)$. 设 $Au(x) = \lambda u(x)$, 即

$$a_n u_{-n} = \lambda u_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

于是对任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} a_n u_{-n} = \lambda u_n, \\ a_{-n} u_n = \lambda u_{-n} \end{cases} \implies \lambda^2 = a_n a_{-n}.$$

因此 $\lambda = \pm\sqrt{a_n a_{-n}}$ 是特征值, 对应的特征向量是 $\sqrt{a_{-n}} f_{-n} \pm \sqrt{a_n} f_n$. 故

$$\sigma_p(A) = \{0\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2n^2} : n \geqslant 1\right\}, \quad \sigma_c(A) = \varnothing, \quad \sigma_r(A) = \varnothing,$$

进而

$$\sigma_p(T) = \{1\} \cup \left\{1 \pm \frac{1}{2n^2} : n \geqslant 1\right\}, \quad \sigma_c(T) = \varnothing, \quad \sigma_r(T) = \varnothing,$$

谱半径 $r_\sigma(T) = \frac{3}{2}$. □

5. (20 分) 设 X 是一个实 Banach 空间, $f, g \in X^*$ 满足 $\|f\| = \|g\| = 1$. 证明:

(1) 如果 $g(x) = 0$ 对任意 $x \in N(f)$ 成立, 则我们有 $f = g$ 或 $f = -g$.

(2) 如果存在 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 使得 $|g(x)| \leqslant \varepsilon\|x\|$ 对任意 $x \in N(f)$ 成立, 则我们有

$$\|f - g\| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{或} \quad \|f + g\| \leqslant 2\varepsilon.$$

证明 (1) 取 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) = 1$. 对任意 $x \in X$, $x - f(x)x_0 \in N(f) \subset N(g)$. 因此

$$g(x) = g(f(x)x_0) = g(x_0)f(x), \quad \forall x \in X.$$

由 $\|f\| = \|g\| = 1$ 即知 $|g(x_0)| = 1$, 从而 $f = g$ 或 $f = -g$.

(2) 根据条件, $|g|_{N(f)}| \leqslant \varepsilon$. 由 Hanh–Banach 定理, 存在 $h \in X^*$, 使得 $h|_{N(f)} = g|_{N(f)}$, 且 $\|h\| \leqslant \varepsilon$. 于是 $(h - g)|_{N(f)} = 0$, 同 (1) 中推理, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $h - g = \lambda f$. 于是

$$|1 - |\lambda|| = |\|g\| - \|g - h\|| \leqslant \|g - (g - h)\| = \|h\| \leqslant \varepsilon.$$

- ◇ 若 $\lambda \geqslant 0$, 则 $\|f+g\| = \|(1-\lambda)f+h\| \leqslant |1-\lambda| + \|h\| \leqslant 2\varepsilon$.
- ◇ 若 $\lambda \leqslant 0$, 则 $\|f-g\| = \|(1+\lambda)f-h\| \leqslant \|1+\lambda| + \|h\| \leqslant 2\varepsilon$. □

6. (20 分) 设 X, Y 是两个 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 为满射. 证明以下两个条件等价:

(1) 存在 $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ 使得 $TS = \mathrm{Id}_Y$.

(2) 存在 X 的闭子空间 W 使得 $X = N(T) \oplus W$.

证明 $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ 令 $W = R(S)$. 对任意 $x \in X$, $x = (x - STx) + STx$, 其中

$$T(x - STx) = Tx - TSTx = Tx - Tx = 0,$$

即 $x - STx \in N(T)$, 且 $STx \in R(S)$. 又设 $x \in N(T) \cap R(S)$, 则存在 $u \in S$ 使得 $Su = x$, 从而 $0 = Tx = TSu = u$, 即 $x = Su = 0$. 故 $X = N(T) \oplus W$. 最后, 设 $Su_i \to x$, 则 $TSu_i \to Tx$ 即 $u_i \to Tx$, 从而 $Su_i \to STx \in R(S)$, 即 $W = R(S)$ 为 X 的闭子空间.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ 由 $X = N(T) \oplus W$ 且 $T : X \to Y$ 为满射可知 $T|_W : W \to Y$ 既单又满, 而 W 和 Y 均为 Banach 空间, 根据 Banach 逆算子定理, $T|_W$ 存在有界逆 $S : Y \to W \subset X$. 故 $TS = \mathrm{Id}_Y$. □

2023 秋期末考试

1. (12 分) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可分 Hilbert 空间 H 中的一组正交规范基. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令 $f_n = e_{n+1} - e_n$. 证明：序列 $f_n \rightharpoonup 0\ (n \to \infty)$.

证明 对任意 $x \in H$, 由 Parseval 等式, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(e_n, x)|^2 < +\infty$, 因此 $(e_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, 进而

$$(x, f_n) = (x, e_{n+1} - e_n) = \overline{(e_{n+1}, x)} - \overline{(e_n, x)} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

即 $f_n \rightharpoonup 0$. □

2. (16 分) 定义一个正数序列如下：令 $x_0 > 0$ 是一个正实数, 且令

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明：这个序列收敛, 并求它的极限.

证明 由于 $x_0 > 0$, $x_1 = \dfrac{1}{1 + x_0} < 1$, 从而 $x_2 = \dfrac{1}{1 + x_1} > \dfrac{1}{2}$, 如此递推可知

$$x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \forall n \geqslant 2.$$

下证

$$f : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

是压缩映射：对任意 $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 我们有

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \left|\frac{y - x}{(1+x)(1+y)}\right| \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}|x - y| = \frac{4}{9}|x - y|.$$

由于 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 是完备度量空间, 根据压缩映射原理, f 存在唯一不动点 x^*, 即 $x^* = \dfrac{1}{1 + x^*}$, 解得 $x^* = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. 而

$$\left|x_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right| \leqslant \frac{4}{9}\left|x_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. □

3. (16 分) 设 M 为 Banach 空间 X 的一个非空子集, 证明如下两条等价：

(1) M 是 X 的有界集.

(2) 对每个 $\phi \in X^*$, 集合 $\{\phi(x) : x \in M\}$ 是有界集.

证明 $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ $\sup\limits_{x\in M} |\phi(x)| \leqslant \|\phi\| \sup\limits_{x\in X} \|x\| < +\infty$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ 将 M 中的元素 x 视为 X^{**} 中的元素, 即 $x(\phi) := \phi(x)$, 则由条件 (2), M 中泛函在 X^* 上逐

点有界, 根据共鸣定理 (以及 X 嵌入 X^{**} 是等距的), $\sup\limits_{x\in M}\|x\|<+\infty$. $\square$

4. (18 分) 在复空间 ℓ^2 上定义算子

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{2x_1+x_2}{1},\frac{3x_2+x_3}{2},\cdots,\frac{(n+1)x_n+x_{n+1}}{n},\cdots\right).$$

(1) 证明: T 是 ℓ^2 上的 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(T)=0$.

(2) 求 T 的谱集 $\sigma(T)$ 和谱半径 $r_\sigma(T)$.

证明 (1) 注意到

$$T-I:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_1+x_2}{1},\frac{x_2+x_3}{2},\cdots,\frac{x_n+x_{n+1}}{n},\cdots\right).$$

令

$$S_N:\ell^2\to\ell^2,\quad (x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(\frac{x_1+x_2}{1},\frac{x_2+x_3}{2},\cdots,\frac{x_N+x_{N+1}}{N},0,0,\cdots\right),$$

则 S_N 是有限秩算子, 且由

$$\|((T-I)-S_N)(x)\|^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x_n+x_{n+1}|^2\xrightarrow{N\to\infty}0$$

可知 $\|(T-I)-S_N\|\xrightarrow{N\to\infty}0$, 因此 $T-I$ 是紧算子. 根据 Riesz–Fredholm 定理, $T=I+(T-I)$ 是 Fredholm 算子, 且 $\operatorname{ind}(T)=0$.

(2) 根据 Riesz–Schauder 理论, $0\in\sigma(T-I)$, 且

$$\sigma(T-I)\setminus\{0\}=\sigma_p(T-I)\setminus\{0\}.$$

下面计算 $\sigma_p(T-I)$. 设 $(T-I)x=\lambda x$, 即

$$\lambda x_n=\frac{x_n+x_{n+1}}{n}\iff x_{n+1}=(n\lambda-1)x_n,$$

因此可解得

$$x=x_1(1,\lambda-1,(\lambda-1)(2\lambda-1),(\lambda-1)(2\lambda-1)(3\lambda-1),\cdots).$$

不妨设 $x_1\neq 0$.

- ◇ 若 $\lambda=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则如上 $x\in\ell^2$, 因此 $\lambda\in\sigma_p(T-I)$.
- ◇ 若 $\lambda\neq 0,\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则对充分大的 n, 均有 $|n\lambda-1|>1$, 从而 $x_{n+1}>x_n$, 于是如上 $x\notin\ell^2$.

因此 $\sigma_p(T-I)\setminus\{0\}=\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,3,\cdots\right\}$, 从而 $\sigma(T-I)=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,3,\cdots\right\}$. 故

$$\sigma(T)=\{1\}\cup\left\{1+\tfrac{1}{n}:n=1,2,3,\cdots\right\},$$

且谱半径 $r_\sigma(T)=2$. $\square$

5. (20 分) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

(1) 如果 Y 和 Z 是 X 的两个闭子空间, 且满足对任意 $x \in X$, 存在唯一的表示

$$x = y + z, \quad y \in Y, z \in Z.$$

证明：存在 $k > 0$, 使得对任意 $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$, 均有

$$\|y\| \leqslant k\|x\| \quad 和 \quad \|z\| \leqslant k\|x\|$$

成立.

(2) 如果 $T : X \to X$ 是一个线性算子, 且 $D(T) = X$, $T^2 = T$, 以及

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\} \quad 和 \quad R(T) = \{Tx : x \in X\}$$

均是 X 的闭的线性子空间, 证明：T 是有界线性算子.

证明 (1) 定义线性映射

$$T : X \to Y \times Z, \quad x = y + z \mapsto (y, z).$$

设 $x_n \to x$, 则相应地有 $y_n + z_n \to y + z$, 从而 $(y_n, z_n) \to (y, z)$. 故 T 是闭线性映射, 由于 $D(T) = X$, 根据闭图像定理, T 是有界线性算子, 即存在 $k > 0$, 使得 $\|(y, z)\| = \|y\| + \|z\| \leqslant k\|x\|$. 这蕴含了 $\|y\| \leqslant k\|x\|$ 和 $\|z\| \leqslant k\|x\|$.

(2) 对任意 $x \in X$, 有 $x = (x - Tx) + Tx$, 其中 $x - Tx \in N(T)$, 而 $Tx \in R(T)$. 又设 $x \in N(T) \cap R(T)$, 则存在 $u \in X$ 使得 $Tu = x$, 进而 $0 = Tx = T^2u = Tu = x$, 即 $N(T) \cap R(T) = \{0\}$. 故 $X = N(T) \oplus R(T)$, 由 (1) 知 T 是有界线性算子. □

6. (18 分) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个实 Banach 空间, $0 < \varepsilon < 1$, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ 满足 $\|x_i\| = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 证明：如果对任意 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 均有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| \leqslant (1 + \varepsilon) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$$

成立, 则我们有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| \geqslant (1 - \varepsilon) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$$

对任意 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 成立.

证明 用反证法, 假设存在一组不全为 0 的 λ_i, 使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| < (1 - \varepsilon) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|,$$

设下标 j 使得 $|\lambda_j|$ 最大. 考虑 $\lambda_1, \cdots, -\lambda_j, \cdots, \lambda_n$ 这组数, 根据题设,

$$(1 + \varepsilon)|\lambda_j| \geqslant \left\|\sum_{i \neq j} \lambda_i x_i - \lambda_j x_j\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - 2\lambda_j x_j\right\| \geqslant 2|\lambda_j| - \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| > 2|\lambda_j| - (1 - \varepsilon)|\lambda_j|,$$

矛盾. □