概率论进阶作业

林晓烁 2024 春

https://xiaoshuo-lin.github.io

习题 1 计算 Wigner 半圆律

$$w(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

的 k 阶矩.

解答 设 $X \sim w(x)$.

(1) 若 k 为奇数, $\mathbb{E}\big[X^k\big] = \displaystyle\int_{-2}^{2} x^k w(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 若 k 为偶数, 设 $k = 2m$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[X^k\big] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2m}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}\big(x^2\big)^{m-\frac{1}{2}}\big(4-x^2\big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x^2 \\
&\xlongequal{x^2=4t} \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (4t)^{m-\frac{1}{2}}(4-4t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(4t) = \frac{2^{2m+1}}{\pi}\int_0^1 t^{m-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2^{2m+1}}{\pi}\mathrm{B}\left(m+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{2^{2m+1}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\big(m+\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma(m+2)} \\
&= \frac{2^{2m+1}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(2m)\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(m)\Gamma(m+2)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2m-1)!\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(m-1)!(m+1)!} \\
&= \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.
\end{aligned}$$

□

习题 2 (Gaussian Unitary Ensemble, GUE) 复矩阵 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$, $\{\operatorname{Re} x_{ij}, \operatorname{Im} x_{ij}\}_{i,j=1}^n \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, 令

$$H = \frac{1}{2}(X + X^*).$$

证明:

(1) H 矩阵元联合密度为

$$f(H) = 2^{-\frac{n}{2}}\pi^{-\frac{n^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} H^2}.$$

(2) 酉群不变性, 即任给酉矩阵 $U \in \mathrm{U}(n)$ 有

$$UHU^{-1} \overset{\mathrm{D}}{=} H.$$

证明 (1) 设 $H = (h_{ji})_{i,j=1}^n$, 则 $h_{ii} = \operatorname{Re} x_{ii} \sim N(0,1)$, $h_{ij} = \dfrac{\operatorname{Re} x_{ij} + \mathrm{i}\operatorname{Im} x_{ij} + \operatorname{Re} x_{ji} + \mathrm{i}\operatorname{Im} x_{ji}}{2} \sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$. 故

$$f(H)\,\mathrm{d}H = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{h_{ii}^2}{2}}\,\mathrm{d}h_{ii}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-|h_{ij}|^2}\,\mathrm{d}h_{ij},$$

这里 $\mathrm{d}H = \displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\mathrm{d}h_{ij}$. 因此 H 矩阵元联合密度为

$$f(H) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{h_{ii}^2}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-|h_{ij}|^2} = 2^{-\frac{n}{2}}\pi^{-\frac{n^2}{2}}\prod_{i,j=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{|h_{ij}|^2}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}}\pi^{-\frac{n^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} H^2}.$$

(2) 一方面, 对任意 $U \in \mathrm{U}(n)$, $\operatorname{tr}\Big(\big(UHU^{-1}\big)^2\Big) = \operatorname{tr}\big(UH^2U^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(H^2U^{-1}U\big) = \operatorname{tr} H^2$; 另一方面, 线性

变换 $H \mapsto UHU^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵为 $U \otimes \overline{U}$, 设 $P, Q \in U(n)$ 分别将 $U, \overline{U}$ 酉对角化:

$$PUP^{-1} = I_n, \quad Q\overline{U}Q^{-1} = I_n,$$

则

$$\begin{aligned}\det\big(U \otimes \overline{U}\big) &= \det\Big((P \otimes Q)\big(U \otimes \overline{U}\big)(P \otimes Q)^{-1}\Big) = \det\big((PUP^{-1}) \otimes (Q\overline{U}Q^{-1})\big) \\ &= \det(I_n \otimes I_n) = 1.\end{aligned}$$

故 $UHU^{-1} \overset{\mathrm{D}}{=\!=} H$. □

习题 3 (Wishart 模型) $X = (x_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n}, \{x_{ij}\} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, 假设 $\alpha = n - p \geqslant 0, \alpha$ 固定, 证明:

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left(\frac{XX^\intercal}{p}\right)^m\right] \to C_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

证明 首先

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left(\frac{XX^\intercal}{p}\right)^m\right] = \frac{1}{p^{m+1}} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1, \cdots, i_m \leqslant p \\ 1 \leqslant j_1, \cdots, j_m \leqslant n}} \mathbb{E}[x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_m j_m} x_{i_1 j_m}].$$

由于 $\{x_{ij}\} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, 只需考虑每条出现的“边”至少出现两次的求和项. 将每一个求和项视作顶点集 $\{i_1, \cdots, i_m\}$ 与 $\{j_1, \cdots, j_m\}$ 上的二部图, 总边数为 $2m$. 分别用 n_i, n_j 表示这两个顶点集中互异顶点的个数, 则 $n_i + n_j \leqslant m + 1$.

(1) 若 $n_i + n_j \leqslant m$.

① 对 $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_m)$ 定义用以描述 $\mathbf{i}$ 中相同分量分布的 $\mathbf{t_i}$, 例如, 若 $\mathbf{i} = (2,5,2,1,1)$, 则 $\mathbf{t_i} = (1,2,1,3,3)$. 类似地, 对 $\mathbf{j}$ 定义 $\mathbf{t_j}$. 由于 $\{x_{ij}\} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, 具有相同 $\mathbf{t_i}, \mathbf{t_j}$ 的顶点集对应的求和项相同.

② 若某个 $\mathbf{t_i}$ 对应 n_i 个不同的顶点, 具有这样的 $\mathbf{t_i}$ 的 $\mathbf{i}$ 的可能数 $p(p-1)\cdots(p-n_i+1) < p^{n_i}$. 同理, 若某个 $\mathbf{t_j}$ 对应 n_j 个不同的顶点, 具有这样的 $\mathbf{t_j}$ 的 $\mathbf{j}$ 的可能数 $n(n-1)\cdots(n-n_j+1) < n^{n_j}$. 故 $n_i + n_j \leqslant m$ 对应的可能数不超过 $p^{n_i}n^{n_j} = p^{n_i}(p+\alpha)^{n_j} < Cp^{n_i+n_j} \leqslant Cp^m$, 这里 C 是一个依赖于 m, α 但与 p 无关的常数.

③ $n_i + n_j \leqslant m$ 的所有类型对题中 LHS 的贡献为 $\frac{1}{p^{m+1}}O(p^m) = O\left(\frac{1}{p}\right) \xrightarrow{p \to \infty} 0$.

(2) 若 $n_i + n_j = m + 1$.

① 此二部图共有 m 条边, 从而是树, 因此

$$\frac{1}{p^{m+1}}\mathbb{E}[x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_m j_m} x_{i_1 j_m}] = \frac{1}{p^{m+1}}[\operatorname{Var}(X_1)]^m = \frac{1}{p^{m+1}}.$$

② 若某个 $\mathbf{t_i}$ 对应 n_i 个顶点, 某个 $\mathbf{t_j}$ 具有 n_j 个顶点, 具有这样的 $\mathbf{t_i}, \mathbf{t_j}$ 的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 的可能数为 $p(p-1)\cdots(p-n_i+1)n(n-1)\cdots(n-n_j+1)$. 由于 $\alpha = n - p \geqslant 0$ 为定值, 当 $p \to \infty$ 时 $n \approx p$, 因此 $n_i + n_j = m + 1$ 类型的可能数为 $p^{n_i}n^{n_j} + o(1) = p^{m+1} + o(1)$.

③ 由上述讨论知 LHS $\xrightarrow{p \to \infty} \#\{(\mathbf{t_i}, \mathbf{t_j}):$ 对应的 $n_i + n_j = m + 1\}$. 每一闭路 $i_1 j_1 i_2 j_2 \cdots i_m j_m i_1$ 均对应于一个长度为 $2m$ 的类型序列, 其第 j 项为前 j 次移动中首次经过的边的数目与非首次经

过的边的数目, 例如 132524231 的类型序列为 12323210. 我们关注的情形对应的类型序列总是起始于 1 而终止于 0, 且相邻两项相差 ± 1. 注意到类型序列中奇数项意味着经过这次移动后到达 j 顶点集, 偶数项则意味着到达 i 顶点集.

④ 注意到我们关注的 $(\mathbf{t_i}, \mathbf{t_j})$ 一一对应于长度为 $2m$ 的类型序列, 记此数目为 β_m. 设一个长为 $2m$ 的类型序列在第 $2j$ 处首次变为 0, 则从第 $2j+1$ 到第 $2m$ 处为一个长为 $2m-2j$ 的类型序列, 而通过将前 $2j$ 的子序列去除首尾、余下每个数 -1, 可将该长为 $2j$ 的 (有限制的) 类型序列对应于长为 $2j-2$ 的 (无限制的) 类型序列. 补充定义 $\beta_0 = 1$, 则有递推关系

$$\beta_m = \sum_{j=1}^{m} \beta_{j-1}\beta_{m-j}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_0^2 = 1 = C_1, \\
\beta_2 &= 2\beta_0\beta_1 = 2 = C_2, \\
\beta_3 &= 2\beta_2 + \beta_1^2 = 5 = C_3, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

一般地, 由 Catalan 数满足递推关系 $C_m = \sum_{j=1}^{m} C_{j-1}C_{m-j}$ 及 $C_0 = 1$ 可知 $\beta_m = C_m$.

综上所述, 我们证明了

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{XX^{\mathsf{T}}}{p}\right)^m\right] \to C_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}. \qquad \square$$

习题 4 实对称 Wigner 矩阵 $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\{a_{ij} : i \leqslant j\}$ 独立, $\mathbb{E}[a_{ij}] = 0$, $\mathrm{Var}(a_{ij}) = 1$, 高阶矩一致有界, 令

$$\|A_n\|_2 = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1, \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n} \|A_n\mathbf{v}\|.$$

证明：对任意 $\delta > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\|A_n\|_2 \geqslant n^{\frac{1}{2}+\delta}\Big) = 0.$$

证明 利用

$$\max_i [\lambda_i(A_n)]^{2k} \leqslant \sum_i [\lambda_i(A_n)]^{2k} = \mathrm{tr}\big(A_n^{2k}\big)$$

与 $\|A_n\|_2 = \max_i \sigma_i(A_n) = \max_i |\lambda_i(A_n)|$ 即得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\|A_n\|_2 \geqslant n^{\frac{1}{2}+\delta}\Big) &= \mathbb{P}\Big(\max_i |\lambda_i(A_n)| \geqslant n^{\frac{1}{2}+\delta}\Big) = \mathbb{P}\Big(\max_i [\lambda_i(A_n)]^{2k} \geqslant n^{2k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\mathrm{tr}\big(A_n^{2k}\big) \geqslant n^{2k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\Big),
\end{aligned}$$

再由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}\Big(\|A_n\|_2 \geqslant n^{\frac{1}{2}+\delta}\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\mathrm{tr}\big(A_n^{2k}\big) \geqslant n^{2k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\Big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big[\mathrm{tr}\big(A_n^{2k}\big)\big]}{n^{2k\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}}.$$

而

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left(\frac{A_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right]=\frac{1}{n^{k+1}}\mathbb{E}\big[\operatorname{tr}\big(A_n^{2k}\big)\big]\xrightarrow{n\to\infty}C_k=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\implies\mathbb{E}\big[\operatorname{tr}\big(A_n^{2k}\big)\big]\sim C_kn^{k+1},$$

因此只需取满足 $2k\delta>1$ 的正整数 k 即可得结论. □

习题 5 (Hermite Wigner 矩阵)

$$A_n=(a_{ij})_{i,j=1}^n,\quad A_n=A_n^*,$$

- ▷ 实 $\{a_{ii}\}\overset{\text{iid}}{\sim}Y$.
- ▷ $\{\operatorname{Re}a_{ij},\operatorname{Im}a_{ij}\}_{i<j}\overset{\text{iid}}{\sim}Z$.
- ▷ $\{a_{ii}:1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{\operatorname{Re}a_{ij},\operatorname{Im}a_{ij}:1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 独立.
- ▷ $\mathbb{E}[Y]=0,\mathbb{E}[Z]=0,\operatorname{Var}(Y)<+\infty,\operatorname{Var}(Z)=\dfrac{1}{2}$.
- ▷ $\mathbb{E}\big[|Y|^k\big],\mathbb{E}\big[|Z|^k\big]<+\infty,\forall k\geqslant 3$.

证明：类似于实 Wigner 矩阵情形, 我们有

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left(\frac{A_n}{\sqrt{n}}\right)^{k}\right]\to\gamma_k=\int_{-2}^{2}x^k\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

证明 首先

$$\operatorname{tr}\big(A_n^k\big)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ki_1}.$$

由于 $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[Z]=0$, 因此只需考虑每条出现的“边”至少出现两次的求和项.

(1) 若 k 为奇数, 设 $k=2m+1$, 则每个求和项至多有 m 条“边”, 从而至多有 $m+1$ 个“顶点”. 注意到 Y,Z 的各阶矩均有限, 因此

$$\text{LHS}=\frac{1}{n^{m+\frac{3}{2}}}O\big(n^{m+1}\big)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0=\gamma_k.$$

(2) 若 k 为偶数, 设 $k=2m$, 则每个求和项中每条“边”恰出现两次, 且恰有 $m+1$ 个“顶点”. 对这样的不自交路径 $(i_1,i_2,\cdots,i_{2m-1},i_{2m})$ 构造随机游走 $(b_1,b_2,\cdots,b_{2m})$：令

$$b_j=\begin{cases}1, & \text{若 } i_ji_{j+1} \text{ 在游走中首次出现},\\ -1, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $S_i=S_{i-1}+b_i,S_0=0$, 则对称随机游走 $\{S_n\}$ 从 0 出发经过 $2m$ 步回到 0, 且 $S_i\geqslant 0$ $(i=1,\cdots,2m)$, 这样的轨道数为 C_m. 因此

$$\text{LHS}=\frac{C_m}{n^{m+1}}n(n-1)\cdots(n-m)+o(1)\xrightarrow{n\to\infty}C_m=\gamma_k.$$

□

习题 6 证明标准正态分布被其矩序列决定.

证明 标准正态分布的 k 阶矩为

$$\gamma_k=\begin{cases}0, & k \text{ 为奇数},\\ (k-1)!!, & k \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

由 Wallis 公式与 Stirling 公式可知, 当 $k\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{k}\gamma_{2k}^{\frac{1}{2k}}=\frac{1}{k}[(2k-1)!!]^{\frac{1}{2k}}\sim\frac{\left(\frac{2^k k!}{\sqrt{k\pi}}\right)^{\frac{1}{2k}}}{k}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{k!}{\sqrt{k\pi}}\right)^{\frac{1}{2k}}}{k}\sim\frac{\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2k\pi}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k}{\sqrt{k\pi}}\right]^{\frac{1}{2k}}}{k}=\frac{2^{\frac{1}{4k}+\frac{1}{2}}}{\sqrt{k\mathrm{e}}}\to 0,$$

这说明标准正态分布的矩序列满足 Riesz 条件, 因此标准正态分布被其矩序列决定. □

习题 7 求 Wigner 半圆律

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2},\quad x\in[-2,2]$$

的 k 阶矩, 并验证其决定 $\rho(x)$.

解答 习题 1 已求得 Wigner 半圆律的 k 阶矩为

$$\gamma_k=\begin{cases}0, & k\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{m+1}\dbinom{2m}{m}, & k=2m.\end{cases}$$

由 Stirling 公式, 当 $k\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{k}\gamma_{2k}^{\frac{1}{2k}}\sim\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\sqrt{4k\pi}\left(\frac{2k}{\mathrm{e}}\right)^{2k}}{\left[\sqrt{2k\pi}\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k\right]^2}\right\}^{\frac{1}{2k}}\sim\frac{2}{k}(k\pi)^{-\frac{1}{4k}}\sim\frac{2}{k}\to 0,$$

这说明矩序列 $\{\gamma_k\}$ 满足 Riesz 条件, 因此其决定了 $\rho(x)$. □

习题 8 序列 $\gamma_{2k+1}=0,\gamma_{2k}=1$ 是否对应随机变量矩序列?

解答 由于 $\limsup\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\gamma_{2k}^{\frac{1}{2k}}<+\infty$, 满足 Riesz 条件. 假设矩序列 $\{\gamma_k\}$ 对应于随机变量 X, 则其特征函数

$$\phi_X(t)=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{(\mathrm{i}tX)^k}{k!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^k\gamma_k}{k!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}=\cos t,$$

这是两点分布 $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\dfrac{1}{2}$ 的特征函数. □

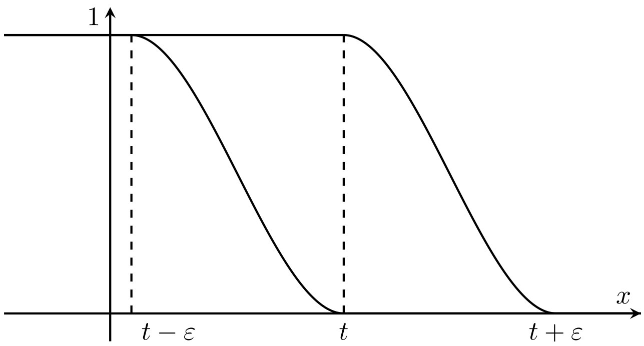
习题 9 设 $\{X_k\}$ 为独立同分布随机变量序列, $\mathbb{E}[X_1]=0,\mathrm{Var}(X_1)=1,\mathbb{E}\left[|X_1|^3\right]<\infty$, 试用 Lindeberg 替换法证明 CLT 的收敛速度

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k\leqslant t\right)-\Phi(t)\right|=O\left(n^{-\frac{1}{8}}\right),$$

这里 $\Phi(t)$ 表示标准正态分布函数. 附注：右边的指数 $\frac{1}{8}$ 可以改进到最优指数 $\frac{1}{2}$.

证明 取截断函数 $\varphi(x)$, 使得当 $x\leqslant 0$ 时 $\varphi(x)=1$, 当 $x\geqslant 1$ 时 $\varphi(x)=0$, 且 $\varphi(x)\in\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. 令

$$\varphi_{t-\varepsilon,\varepsilon}(x)=\varphi\left(\tfrac{x-t+\varepsilon}{\varepsilon}\right),\quad \varphi_{t,\varepsilon}(x)=\varphi\left(\tfrac{x-t-\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$



如上图, 有 $\mathbb{1}_{(-\infty,t-\varepsilon]}(x) \leqslant \varphi_{t-\varepsilon,\varepsilon}(x) \leqslant \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x) \leqslant \varphi_{t,\varepsilon}(x) \leqslant \mathbb{1}_{(-\infty,t+\varepsilon]}(x)$, 且

$$\left|\varphi'''_{t-\varepsilon,\varepsilon}(x)\right| = \frac{1}{\varepsilon^3}\left|\varphi'''\left(\tfrac{x-t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right| = O\left(\varepsilon^{-3}\right), \quad \left|\varphi'''_{t,\varepsilon}(x)\right| = \frac{1}{\varepsilon^3}\left|\varphi'''\left(\tfrac{x-t-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right| = O\left(\varepsilon^{-3}\right).$$

取与 $\{X_k\}$ 独立的随机变量列 $Y, Y_1, Y_2, \cdots \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, 令

$$Z_{n,k} = \sum_{1\leqslant i<k} X_i + \sum_{k<i\leqslant n} Y_i,$$

则

$$Z_{n,n} + X_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Z_{n,1} + Y_1 = \sum_{i=1}^n Y_i,$$
$$Z_{n,k} + X_k = Z_{n,k+1} + Y_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 则

$$\mathbb{E}\left[\varphi_{t,\varepsilon}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}[\varphi_{t,\varepsilon}(Y)] = \sum_{k=1}^n \left\{\mathbb{E}\left[\varphi_{t,\varepsilon}\left(\frac{Z_{n,k}+X_k}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi_{t,\varepsilon}\left(\frac{Z_{n,k}+Y_k}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\},$$

对任意取定的 k, $Z_{n,k}$ 与 X_k, Y_k 独立, 从而

$$\mathbb{E}\left[\varphi'_{t,\varepsilon}\left(\frac{Z_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\frac{X_k - Y_k}{\sqrt{n}}\right] = \mathbb{E}\left[\varphi''_{t,\varepsilon}\left(\frac{Z_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\frac{X_k^2 - Y_k^2}{n}\right] = 0.$$

经 Taylor 展开可知

$$\mathbb{E}\left[\varphi_{t,\varepsilon}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}[\varphi_{t,\varepsilon}(Y)] = n \cdot O\left(\frac{\mathbb{E}\left[|X|^3\right] + \mathbb{E}\left[|Y|^3\right]}{n^{\frac{3}{2}}}\varepsilon^{-3}\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\right).$$

同理

$$\mathbb{E}\left[\varphi_{t-\varepsilon,\varepsilon}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}[\varphi_{t-\varepsilon,\varepsilon}(Y)] = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\right).$$

故

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant t\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(-\infty,t]}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\varphi_{t,\varepsilon}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}[\varphi_{t,\varepsilon}(Y)] + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(-\infty,t+\varepsilon]}(Y)\right] + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\right) = \Phi(t+\varepsilon) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\right).\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\leqslant t\right)&=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(-\infty,t]}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\geqslant\mathbb{E}\left[\varphi_{t-\varepsilon,\varepsilon}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]=\mathbb{E}[\varphi_{t-\varepsilon,\varepsilon}(Y)]+O\Big(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\Big)\\&\geqslant\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{(-\infty,t-\varepsilon]}(Y)\big]+O\Big(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\Big)=\Phi(t-\varepsilon)+O\Big(n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\Big).\end{aligned}$$

综上可得

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k\leqslant t\right)=\Phi(t)+O\Big(\varepsilon+n^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-3}\Big),$$

取 $\varepsilon=n^{-\frac{1}{8}}$ 就有

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k\leqslant t\right)-\Phi(t)=O\Big(n^{-\frac{1}{8}}\Big)\implies\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k\leqslant t\right)-\Phi(t)\right|=O\Big(n^{-\frac{1}{8}}\Big).$$ □

习题 10 对取值 0 和 1 的 Bernoulli 分布求熵.

解答 记 $p=\mathbb{P}(X=1)$, 则 $H(X)=-p\ln p-(1-p)\ln(1-p)$. □

习题 11 投掷两枚均匀的骰子, X 表示骰子点数之和, 求熵 $H(X)$.

解答 用 X_i 表示第 i 枚骰子的点数 ($i=1,2$), 则 $X=X_1+X_2$ 的概率母函数

$$\begin{aligned}G_X(s)&=[G_{X_1}(s)]^2=\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{s^k}{6}\right)^2=\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{s\big(1-s^6\big)}{1-s}\right]^2\\&=\frac{s^{12}}{36}+\frac{s^{11}}{18}+\frac{s^{10}}{12}+\frac{s^9}{9}+\frac{5s^8}{36}+\frac{s^7}{6}+\frac{5s^6}{36}+\frac{s^5}{9}+\frac{s^4}{12}+\frac{s^3}{18}+\frac{s^2}{36}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}H(X)&=-2\left(\frac{1}{36}\ln\frac{1}{36}+\frac{1}{18}\ln\frac{1}{18}+\frac{1}{12}\ln\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\ln\frac{1}{9}+\frac{5}{36}\ln\frac{5}{36}\right)-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{6}\\&=\frac{23}{18}\ln 2+\frac{5}{3}\ln 3-\frac{5}{18}\ln 5.\end{aligned}$$ □

习题 12 离散型随机变量 X, 证明任给一元 Borel 可测函数 g, 均有 $H(g(X))\leqslant H(X)$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}H(g(X))&=-\sum_i\mathbb{P}(g(X)=i)\ln\mathbb{P}(g(X)=i)\\&=-\sum_i\left(\sum_{x:g(x)=i}\mathbb{P}(X=x)\right)\ln\left(\sum_{x:g(x)=i}\mathbb{P}(X=x)\right)\\&\leqslant-\sum_i\sum_{x:g(x)=i}\mathbb{P}(X=x)\ln\mathbb{P}(X=x)\\&=-\sum_x\mathbb{P}(X=x)\ln\mathbb{P}(X=x)\\&=H(X).\end{aligned}$$ □

习题 13 令 $D=\{x: f(x)>0\}$, 证明结论 (2) 和 (3).

(1) $D=(-\infty,+\infty)$, $\mathbb{E}[X]=0$, $\operatorname{Var}(X)=1$, 正态分布熵最大, 为 $\ln\sqrt{2\pi\mathrm{e}}$.

(2) $D=(0,+\infty)$, $\mathbb{E}[X]=\dfrac{1}{\lambda}$, 指数分布 $\operatorname{Exp}(\lambda)$ 熵最大, 为 $\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\lambda}$.

(3) $D=(0,a)$, 均匀分布熵最大, 为 $\ln a$.

证明 由 Gibbs 不等式, 对概率密度函数 $f(x), g(x)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}}[f(x)-f(x)\ln f(x)]\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}}[g(x)-f(x)\ln g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

(2) 取 $g(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$, 若 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$, 则有

$$-\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\mathrm{d}x=-\ln\lambda+\lambda\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x=\ln\frac{\mathrm{e}}{\lambda},$$

后者恰为指数分布 $\operatorname{Exp}(\lambda)$ 的熵.

(3) 取 $g(x)=\dfrac{1}{a}\mathbb{1}_{[0,a]}(x)$, 则有

$$-\int_0^a f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -\int_0^a f(x)\ln\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x=\ln a,$$

后者恰为均匀分布 $U(0,a)$ 的熵. □

习题 14 $\mu_1(\Omega)$ 表示有限样本空间 Ω 上的概率分布 (测度) 全体, 对 $\mu\in\mu_1(\Omega)$ 其熵

$$H(\mu)=-\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\ln\mu(\omega).$$

试证对 $\mu,\nu\in\mu_1(\Omega)$, $\alpha\in[0,1]$ 有

$$H(\alpha\mu+(1-\alpha)\nu)\geqslant \alpha H(\mu)+(1-\alpha)H(\nu).$$

证明 令 $f(x)=-x\ln x$, 则 $f'(x)=-\ln x-1$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x}<0\ (0<x<1)$, 因此 $f(x)$ 为 $(0,1)$ 上的凹函数. 对任意 $\omega\in\Omega$, 有

$$-[\alpha\mu+(1-\alpha)\nu](\omega)\ln[\alpha\mu+(1-\alpha)\nu](\omega)\geqslant -\alpha\mu(\omega)\ln\mu(\omega)-(1-\alpha)\nu(\omega)\ln\nu(\omega).$$

由此对 $\omega\in\Omega$ 求和即得证. □

习题 15 设维数 $d=1$, 周期 Ising 模型对应的 Hamilton 量为

$$H(\sigma)=-J\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sigma_{k+1}-h\sum_{k=1}^{N}\sigma_k,$$

其中 $\sigma_{N+1}=\sigma_1$, 考虑 $M_N=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sigma_k$.

(1) 证明：对一般的磁化强度 h, 我们有

$$\frac{M_N}{N} \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\mathrm{e}^{-4\beta J}+\sinh^2(\beta h)}}.$$

(2) 对一般的磁化强度 h, $\dfrac{M_N}{N}$ 对应的中心极限定理定理是否仍然成立?

证明 考虑

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{z\frac{M_N}{N^\delta}}\right] &= \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_N} \mathrm{e}^{z\frac{M_N}{N^\delta}} \frac{1}{Z_{N;\beta,h}} \mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)} \\
&= \frac{1}{Z_{N;\beta,h}} \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_N} \exp\left\{\frac{z}{N^\delta}\sum_{k=1}^N \sigma_k + \beta J \sum_{k=1}^N \sigma_k\sigma_{k+1} + \beta h \sum_{k=1}^N \sigma_k\right\} \\
&= \frac{1}{Z_{N;\beta,h}} \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_N} \exp\left\{\beta J \sum_{k=1}^N \sigma_k\sigma_{k+1} + \beta\left(h+\frac{z}{\beta N^\delta}\right) \sum_{k=1}^N \sigma_k\right\} \\
&= \frac{Z_{N;\beta,h+\frac{z}{\beta N^\delta}}}{Z_{N;\beta,h}},
\end{aligned}$$

我们有

$$Z_{N;\beta,h} = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta(J+h)} & \mathrm{e}^{-\beta J} \\ \mathrm{e}^{-\beta J} & \mathrm{e}^{\beta(J-h)} \end{pmatrix}^N = \left(\lambda_h^+\right)^N + \left(\lambda_h^-\right)^N,$$

其中转移矩阵的两特征值

$$\begin{aligned}
\lambda_h^+ &= \mathrm{e}^{\beta J}\left(\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h)+\mathrm{e}^{-4\beta J}}\right), \\
\lambda_h^- &= \mathrm{e}^{\beta J}\left(\cosh(\beta h) - \sqrt{\sinh^2(\beta h)+\mathrm{e}^{-4\beta J}}\right).
\end{aligned}$$

由于 $\left|\lambda_h^+\right| > \left|\lambda_h^-\right|$, 当 $N\to\infty$ 时,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{z\frac{M_N}{N^\delta}}\right] = \frac{\left(\lambda^+_{h+\frac{z}{\beta N^\delta}}\right)^N + \left(\lambda^-_{h+\frac{z}{\beta N^\delta}}\right)^N}{\left(\lambda_h^+\right)^N + \left(\lambda_h^-\right)^N} \sim \left(\frac{\lambda^+_{h+\frac{z}{\beta N^\delta}}}{\lambda_h^+}\right)^N = \left(1+\frac{\lambda^+_{h+\frac{z}{\beta N^\delta}}-\lambda_h^+}{\lambda_h^+}\right)^N.$$

(1) 取 $\delta=1$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{z\frac{M_N}{N}}\right] &\sim \left(1+\frac{\lambda^+_{h+\frac{z}{\beta N}}-\lambda_h^+}{\lambda_h^+}\right)^N \sim \left(1+\frac{\frac{z}{\beta N}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda_h^+}{\mathrm{d}h}}{\lambda_h^+}\right)^N = \left(1+\frac{\frac{z}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}\ln\lambda_h^+}{\mathrm{d}h}}{N}\right)^N \\
&\xrightarrow{N\to\infty} \exp\left(\frac{z}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}\ln\lambda_h^+}{\mathrm{d}h}\right),
\end{aligned}$$

这说明

$$\frac{M_N}{N} \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}\ln\lambda_h^+}{\mathrm{d}h} = \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\mathrm{e}^{-4\beta J}+\sinh^2(\beta h)}}.$$

(2) 记 $\mu = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\mathrm{d}\ln\lambda_h^+}{\mathrm{d}h}$. 取 $\delta = \frac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{z\frac{M_N - N\mu}{\sqrt{N}}}\Big] &\sim \left(1 + \frac{\lambda^+_{h+\frac{z}{\beta\sqrt{N}}} - \lambda_h^+}{\lambda_h^+}\right)^N \mathrm{e}^{-z\sqrt{N}\mu} \sim \left(1 + \frac{\frac{\mathrm{d}\lambda_h^+}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{z}{\beta\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\lambda_h^+}{\mathrm{d}h^2} \cdot \frac{z^2}{\beta^2 N}}{\lambda_h^+}\right)^N \mathrm{e}^{-z\sqrt{N}\mu} \\ &= \exp\left\{N \ln\left(1 + \frac{\frac{\mathrm{d}\lambda_h^+}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{z}{\beta\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\lambda_h^+}{\mathrm{d}h^2} \cdot \frac{z^2}{\beta^2 N}}{\lambda_h^+}\right) - z\sqrt{N}\mu\right\} \\ &\sim \exp\left(\frac{1}{2\lambda_h^+} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\lambda_h^+}{\mathrm{d}h^2} \cdot \frac{z^2}{\beta^2}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{M_N - N\mu}{B\sqrt{N}} \xrightarrow{\mathrm{D}} N(0,1),$$

其中

$$B^2 = \frac{1}{\lambda_h^+ \beta^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\lambda_h^+}{\mathrm{d}h^2} = \frac{\cosh(\beta h) + \mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta h)\sqrt{\sinh^2(\beta h) + \mathrm{e}^{-4\beta J}}}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + \mathrm{e}^{-4\beta J}}\Big[\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta h) + 1\Big]}$$

□

习题 16 证明：存在 $c_-, c_+ > 0$, 使得对任意 $m \in A_N \coloneqq \left\{-1 + \frac{2k}{N} : k = 0, 1, \cdots, N\right\}$, 均有

$$c_- N^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{NS(m)} \leqslant \binom{N}{\frac{1+m}{2}N} \leqslant c_+ N^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{NS(m)},$$

这里 $S(m) = -\frac{1-m}{2}\ln\frac{1-m}{2} - \frac{1+m}{2}\ln\frac{1+m}{2}$.

证明 当 $m = \pm 1$ 时, $S(m) = 0$, $\binom{N}{\frac{1+m}{2}N} = 0$, 结论成立. 当 $m \in A_N \setminus \{\pm 1\}$ 时, 由 Stirling 公式可得渐近展开

$$\begin{aligned}\binom{N}{\frac{1+m}{2}N} &= \frac{N!}{\left(\frac{1+m}{2}N\right)!\left(\frac{1-m}{2}N\right)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N}{\sqrt{2\pi\left(\frac{1+m}{2}N\right)}\left(\frac{\frac{1+m}{2}N}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1+m}{2}N}\sqrt{2\pi\left(\frac{1-m}{2}N\right)}\left(\frac{\frac{1-m}{2}N}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1-m}{2}N}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi N(1-m^2)}}\mathrm{e}^{NS(m)}.\end{aligned}$$

由此及 $-1 + \frac{1}{N} < m < 1 - \frac{1}{N}$ 即知结论成立. □

习题 17 设 $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. 考虑如下对 Curie–Weiss 模型 Hamilton 量的修正 ($h = 0$)：

$$H(\sigma) = -\frac{d}{\zeta(N)}\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i\right)^2, \quad \mu_{N;\beta}(\sigma) = \frac{1}{Z_{N;\beta}}\mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}.$$

证明：

(1) 若 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\zeta(N)}{N} = \infty$, 则对任意 $\beta \geqslant 0$, $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N \sigma_i \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\zeta(N)}{N} = 0$, 则对任意 $\beta > 0$, $\frac{1}{N}\left|\sum\limits_{i=1}^N \sigma_i\right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$.

证明 首先

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=m\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=Nm\right)=\frac{1}{Z_{N;\beta}}\mathrm{e}^{\frac{d\beta}{\zeta(N)}(Nm)^2}\binom{N}{\frac{1+m}{2}N}.$$

由习题 16 中的渐近展开, 对上式取对数即得

$$\ln\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=m\right)=N\left(\frac{d\beta N}{\zeta(N)}m^2+S(m)+o(1)\right).$$

(1) 若 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\zeta(N)}{N}=\infty$, 上式 RHS 以 $S(m)$ 为主项. 利用凸函数 $x\ln x$ 的 Jensen 不等式可得 $S(m)$ 在 $m=0$ 时取最大值 $\ln 2$, 因此当 $m\neq 0$ 时,

$$\ln\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=m\right)-\ln\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=0\right)=N(-\lambda+o(1)),\quad \lambda>0,$$

也即

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=m\right)=\mathrm{e}^{-\lambda N+o(N)}\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=0\right),\quad \forall m\in A_N\setminus\{0\}.$$

故此时对任意 $\beta\geqslant 0$, 有 $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma_i\xrightarrow{\mathrm{P}}0$.

(2) 若 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\zeta(N)}{N}=0$, 且 $\beta>0$, 上式 RHS 以 $\dfrac{d\beta N}{\zeta(N)}m^2$ 为主项, 由于 $m\in[-1,1]$, 当 $m^2=1$ 时主项最大, 同 (1) 分析知此时 $\dfrac{1}{N}\left|\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma_i\right|\xrightarrow{\mathrm{P}}1$. □

习题 18 对 Curie–Weiss 模型证明：极限 $\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h):=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\ln Z_{N;\beta,h}^{\mathrm{CW}}$ 存在, 且关于 h 为凸函数. 进一步证明：$\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h)=\max\limits_{-1\leqslant m\leqslant 1}\{\beta hm+\beta dm^2+S(m)\}$.

证明 此时配分函数为

$$Z_{N;\beta,h}^{\mathrm{CW}}=\sum_{m\in A_N}\sum_{\substack{\sigma\in\Omega_N:\\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i=m}}\mathrm{e}^{-\beta H_{N;\beta,h}^{\mathrm{CW}}(\sigma)}=\sum_{m\in A_N}\binom{N}{\frac{1+m}{2}N}\mathrm{e}^{\beta dm^2N+\beta hmN}.$$

由习题 16 中的渐近展开可得

$$\frac{1}{N}\ln\left\{\binom{N}{\frac{1+m}{2}N}\mathrm{e}^{\beta dm^2+\beta hmN}\right\}\sim S(m)+\beta dm^2+\beta hm.$$

取 $m_0\in[-1,1]$ 使此展开式 RHS 取最大值, 则其余 $m\neq m_0$ 对应项均以指数速度小于 m_0 对应项, 因此极限 $\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h)$ 存在, 且 $\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h)=\max\limits_{-1\leqslant m\leqslant 1}\{\beta hm+\beta dm^2+S(m)\}$. 任取 h_1,h_2, 有

$$\begin{aligned}\psi_\beta^{\mathrm{CW}}\left(\tfrac{h_1+h_2}{2}\right)&=\max_{-1\leqslant m\leqslant 1}\left\{\beta m\tfrac{h_1+h_2}{2}+\beta dm^2+S(m)\right\}\\&=\frac{1}{2}\max_{-1\leqslant m\leqslant 1}\left\{\left[\beta h_1m+\beta dm^2+S(m)\right]+\left[\beta h_2m+\beta dm^2+S(m)\right]\right\}\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h_1)+\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h_2)\right],\end{aligned}$$

故 $\psi_\beta^{\mathrm{CW}}(h)$ 关于 h 为凸函数. $\square$