

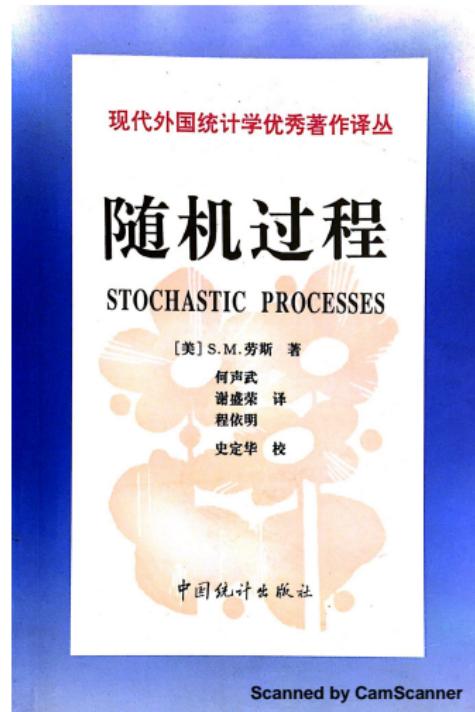
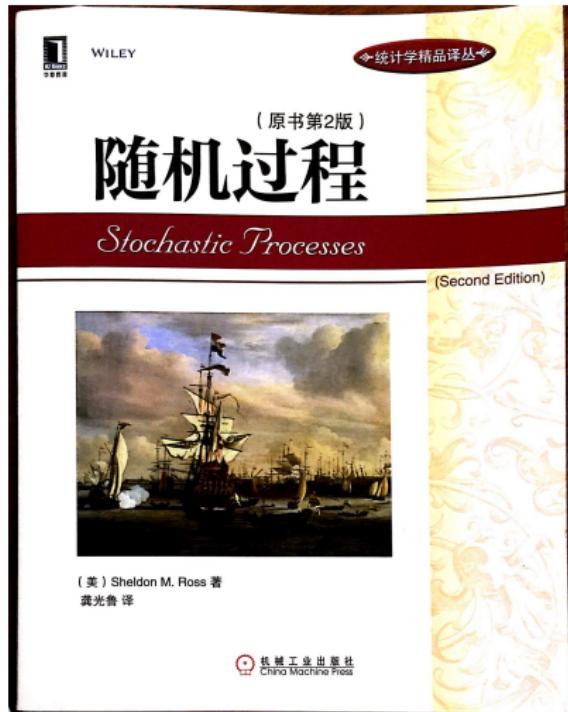
实用随机过程

胡太忠

thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

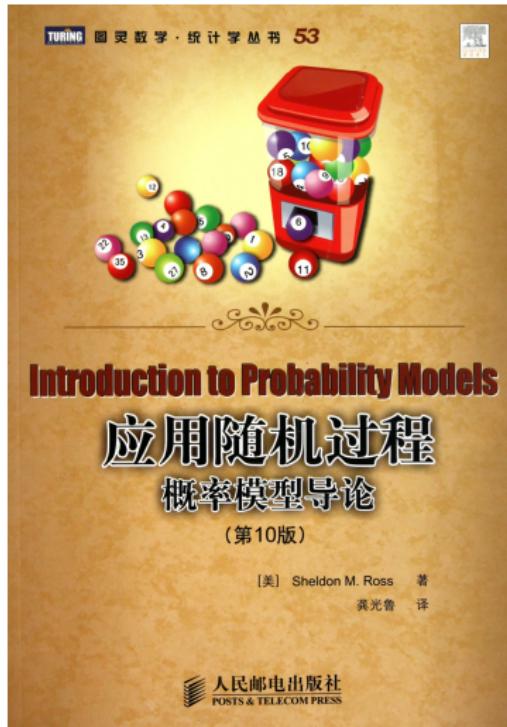
2024 年 2 月





S.M. Ross 世界著名的应用概率和统计学家，现为南加州大学工业与系统工程系讲座教授。1976 至 2004 年期间在加州大学伯克利分校任教，研究领域包括统计模拟、金融工程、应用概率模型、随机动态优化等。他的多种畅销书均产生了世界性的影响。

- Ross, S.M. (1995). *Stochastic Processes* (2nd Edition), John Wiley & Sons.
[龚光鲁译, 《随机过程》(第二版), 机械工业出版社, 2013年]
- Ross, S.M. (1983). *Stochastic Processes* (1st Edition), John Wiley & Sons.
[何声武、谢盛荣、程依明译, 《随机过程》(第一版), 中国统计出版社, 1997年]



参考书



参考书

1. Ross, S.M. (2016). *Introduction to Probability Models* (11th Edition), Elsevier Ltd.
[龚光鲁译, 《应用随机过程概率模型导论》(第11版), 人民邮电出版社, 北京]
2. 方兆本、缪柏其, 《随机过程》(第三版), 科学出版社, 2011年.
3. 郑坚坚, 《随机过程》, 中国科学技术大学出版社, 2016年.

中国科大本科随机过程课程根据难易程度分为 3 档：

- 统计学专业：《实用随机过程》（80 学时，4 学分）
- 金融学专业：《随机过程（A）》（60 学时，3 学分）
- 西区工科院系：《随机过程（B）》（40 学时，2 学分）

研究生阶段的《随机过程》课程基于测度论

平时作业 (20%) + 期中考试 (30%) + 期末考试 (50%)

习题课的重要性

期中考试时间 (第三章结束)

课程目的

- 掌握常见几类随机过程的基本性质
- 培养解决实际问题的概率直观和洞察力
(方法、思路和技巧)
- 激发对随机过程课程学习的兴趣

第 1 章 准备知识

§1.1 概率

微积分中实数序列的极限相关内容：

1. 单调序列 a_n 的极限存在性；
2. 任意序列 a_n 的上、下极限可以表示为单调序列的极限：

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k;$$

3. $\lim a_n$ 存在当且仅当 $\limsup a_n = \liminf a_n$.
 4. 函数 $f(x)$ 于 x_0 点的连续性：左连续和右连续
-

实数序列 $\{a_n\}$	\longrightarrow	事件序列 $\{A_n\}$
$\limsup a_n, \liminf a_n, \lim a_n$	\longrightarrow	$\limsup A_n, \liminf A_n, \lim A_n$
函数左连续和右连续	\longrightarrow	概率 P 的下连续和上连续

§1.1 概率

事件序列的极限: 考虑事件序列 $\{A_n\}$, 定义

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{w : \text{有无穷多个 } A_k \text{ 包含 } w\} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_n, \text{i.o.}\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{w : \text{除有限个 } A_k \text{ 外其余皆包含 } w\}.$$

可以证明:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k.$$

事件序列 $\{A_n\}$ 收敛: $\limsup A_n = \liminf A_n$, 记为 $\lim A_n$.

- 若 $A_n \uparrow$, 则 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; 若 $A_n \downarrow$, 则 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \geq m} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{k \geq m} A_k.$

§1.1 概率

概率的性质

- 强可加性: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 更一般地,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} P(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_k}).$$

- 有限次可加性: $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$.
- σ -次可加性: $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.
- 下连续性: 若 $A_n \uparrow A$, 则 $P(A_n) \rightarrow P(A)$.
- 上连续性: 若 $A_n \downarrow A$, 则 $P(A_n) \rightarrow P(A)$.
- 连续性: 若 $A_n \rightarrow A$, 则 $P(A_n) \rightarrow P(A)$. 更一般地,

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

Borel-Cantelli 引理

- 设事件序列 $\{E_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < \infty$, 则 $P(E_n, \text{i.o.}) = 0$.
- 设事件序列 $\{E_n\}$ 相互独立, 且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \infty$, 则 $P(E_n, \text{i.o.}) = 1$.

证明: (1) $P(E_n, \text{i.o.}) = \lim P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k) = 0$.

(2) 利用 $e^{-x} \geq 1 - x (x > 0)$, 及事件独立性, 得

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right) = \prod_{k=n}^{\infty} P(E_k^c) \leq \exp\left\{-\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k)\right\} = 0. \blacksquare$$

Borel-Cantelli 引理的应用

- 【例 1.1(B)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 不必独立, 满足

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{n^2} = 1 - P(X_n = 1), \quad \forall n \geq 1,$$

则 $\lim X_n = 1$, a.s..

- 【例 1.1(C)】 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立, 满足

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{n} = 1 - P(X_n = 1), \quad \forall n \geq 1,$$

则 $P(X_n = 0, \text{i.o.}) = 1 = P(X_n = 1, \text{i.o.})$. 于是, X_n 的极限不存在.

Borel-Cantelli 引理是概率极限理论的基础

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

求期望的两种方法

- 方法一（随机变量的分解法）：若 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 则

$$E Y = E X_1 + E X_2 + \cdots + E X_n.$$

- 方法二（两步走，即取条件期望）：

$$E Y = E \{E[Y|X]\}.$$

求方差或协方差的的两种方法

- 方法一（随机变量的分解法）：若 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 则

$$\text{Var}(Y) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

- 方法二（两步走，即取条件期望）：

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(E[X|Z], E[Y|Z]) + E[\text{Cov}(X, Y|Z)].$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- ▶ 【例 1.3(A)】 在一次聚会上， n 个人将自己的帽子混在一起，会后每人随机取帽子，记 X 为能正确取到自己帽子的人数. 求 $E X$ 和 $\text{Var}(X)$.

解：首先，将 n 人编号，然后依序取帽. 定义

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 人取到自己的帽子,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

则 $X = \sum_{i=1}^n I_k$. 利用

$$E I_k = \frac{1}{n}, \quad E [I_i I_j] = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall i < j,$$

于是

$$E X = 1, \quad \text{Var}(X) = 1. \blacksquare$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- ▶ 【例】一盒中有编号 $1, 2, \dots, n$ 的小球，从中不放回任意取出 m ($m < n$) 个， X 表示这 m 个小球上的号码之和，求 $E X$.

解：记 Y_j 为第 j 次取出的小球上的号码， $j = 1, \dots, m$ ，则

$$X = \sum_{i=1}^m Y_i.$$

利用 Y_j 服从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的离散均匀分布，于是 $E Y_j = (n+1)/2$, $\forall j$. 因此，

$$E X = \sum_{i=1}^m E Y_i = \frac{m(n+1)}{2}. \blacksquare$$

- ▶ 【例】现有 n 把外形相同的钥匙，其中只有一把能打开锁，用它们逐一去试开锁，每一次开锁是相互独立的，每把钥匙试开锁一次后拿走，记 X 表示打开锁时已经试开过锁的次数. 求 $E X$.

解法一：直观容易看出 X 服从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的均匀分布，亦可以如下计算：对任意 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$P(X = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

因此， $E X = (n+1)/2$.

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

解法二：记 A_i 表示第 i 次取出的钥匙恰好能打开锁，并定义

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{前 } i-1 \text{ 次摸取的钥匙未能打开锁;} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

于是， $X = \sum_{i=1}^n X_i$. 显然， $X_1 = 1$, $E X_1 = 1$,

$$\begin{aligned} E X_i &= P(A_1^c \cdots A_{i-1}^c) = P(A_{i-1}^c | A_{i-2}^c \cdots A_1^c) \cdots P(A_2^c | A_1^c) P(A_1^c) \\ &= \frac{n-i+1}{n-i+2} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-i+1}{n} \end{aligned}$$

因此，

$$E X = 1 + \sum_{i=2}^n E X_i = \sum_{i=1}^n \frac{n-i+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

解法三：引进一个新随机变量 Y :

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{第一次打开锁;} \\ 0, & \text{第一次未打开锁,} \end{cases}$$

则 $P(Y=1) = 1/n$, $P(Y=0) = 1 - 1/n$. 记 $M_n = E[X_n]$, X_n 对应有 n 把钥匙的情形下的 X . 对 Y 取条件, 得

$$\begin{aligned} M_n &= E\{E[X_n|Y]\} = \frac{1}{n}E[X_n|Y=1] + \frac{n-1}{n}E[X_n|Y=0] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}[1 + M_{n-1}], \end{aligned}$$

化简得

$$M_n = 1 + \frac{n-1}{n}M_{n-1}.$$

利用归纳法就可以直接验证了。 ■

- ▶ 【例】设 $Y \sim U(0, 1)$, $[X|Y = p] \sim B(n, p)$, 其中 $0 < p < 1$, 求 X 的分布.

解：对任意 $k = 0, 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= E[P(X = k|Y)] \\ &= \int_0^1 P(X = k|Y = p) dp \\ &= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} dp = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

即 X 服从 $\{0, 1, \dots, n\}$ 上的离散均匀分布. ■

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- 【例 1.5(D)】(卷积) 设 $X \sim F$, $Y \sim G$ 且 $X \perp Y$, 求 $X + Y$ 的 cdf H .

解：对任意 $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(z) &= P(X + Y \leq z) = E[P(X + Y \leq z | Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X + Y \leq z | Y = y) dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(z - y) dG(y). \end{aligned}$$

*

$$E[\eta(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(y) dG(y).$$

▶ 【例】(例 1.3(A)续, 匹配问题)

在一次聚会上, n 个人将自己的帽子混在一起, 会后每人随机取帽. 记 X_n 为总匹配个数, L 表示第一人未匹配. 求 $E[X_n|L]$.

解: 对第一人是否匹配情况取条件,

$$E X_n = E [X_n|L] \cdot P(L) + E [X_n|L^c] \cdot P(L^c)$$

⇒ (利用 $[X_n|L^c] = 1 + X_{n-1}$)

$$1 = E [X_n|L] \cdot \frac{n-1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n}$$

于是,

$$E [X_n|L] = \frac{n-2}{n-1}. \blacksquare$$

- ▶ 【例 1.5(F)】(例 1.3(A)续) 在一次聚会上, n 个人将自己的帽子混在一起, 会后每人随机取帽. 记 $E_n = \{n$ 人完全不匹配 $\}$. 求 $P_n := P(E_n)$.

解: 将 n 人编号, 依序取帽. 记 $M_j = \{1\text{st} \text{ 人取得 } j\text{th} \text{ 人的帽子 } C_j\}$, $j = 1, \dots, n$.

$$P_n = \sum_{i=1}^n P(E_n | M_i) \cdot P(M_i) = \frac{n-1}{n} P(E_n | M_2).$$

$[E_n | M_2]$ 分解:

- 2nd 人取 1st 人帽子 C_1 , 其余 $n-2$ 个人皆未匹配; 概率 $\frac{1}{n-1} P_{n-2}$
- 2nd 人取到的帽子非 C_1 , 其余 $n-2$ 个人皆未匹配. 概率 P_{n-1}

(看法: 视 1st 的帽子 C_1 即为 2nd 人的帽子)

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

于是,

$$P(E_n|M_2) = \frac{1}{n-1} P_{n-2} + P_{n-1}$$

\Rightarrow

$$P_n = \frac{1}{n} P_{n-2} + \frac{n-1}{n} P_{n-1}$$

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2}), \quad n \geq 3$$

利用初始条件 $P_1 = 0, P_2 = 1/2$, 得

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}. \quad \blacksquare$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- ▶ 【例 1.5(C)】(匹配问题) 在一次聚会上, n 个人将自己的帽子混在一起, 会后每人随机取帽. 正确取到自己帽子的人离开, 没有正确取帽的人将帽子重新混在一起, 再进行一轮随机取帽子. 该过程一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 R_n 为所取帽子的轮数. 求 $E R_n$.

分析: 记 M 为第一轮正确取帽的人数, 则 $E M = 1$. 于是猜测

$$E R_n = n. \quad (*.1)$$

解: 归纳证明 $(*.1)$. 当 $n = 1$ 时, 显然. 假设 $E R_k = k, \forall k \leq n - 1$. 对 M 取条件, 得

$$\begin{aligned} E R_n &= \sum_{i=0}^n E[R_n | M = i] \cdot P(M = i) = \sum_{i=0}^n E[1 + R_{n-i}] \cdot P(M = i) \\ &= 1 + E R_n P(M = 0) + \sum_{i=1}^n (n - i) P(M = i) \\ &= E R_n \cdot P(M = 0) + n[1 - P(M = 0)] \implies E R_n = n. \blacksquare \end{aligned}$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- ▶ 【例 1.5(C) 续】(匹配问题) n 个人随机取帽, 该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 S_n 为 n 个人所需取帽子的总次数. 求 $E S_n$.

错误分析: 记 M 为第一轮正确取帽的人数, 则 $E M = 1$. 于是猜测

$$E S_n = n + (n - 1) + \cdots + 2 = n(n + 1)/2 - 1. \quad (*.2)$$

原因: $S_2/2 \sim \text{Geo}(1/2) \implies E S_2 = 4.$

解: 对 M 取条件, 得

$$\begin{aligned} E S_n &= \sum_{i=0}^n E [S_n | M = i] \cdot P(M = i) = \sum_{i=0}^n E [n + S_{n-i}] \cdot P(M = i) \\ &= n + E S_n \cdot P(M = 0) + \sum_{i=1}^n E [S_{n-i}] \cdot P(M = i). \end{aligned}$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

往下归纳证明：

$$E S_n = n + \frac{n^2}{2}, \quad n \geq 2. \quad (*.3)$$

$n = 2$ 情形 \checkmark . 假设 $E S_k = k + k^2/2, \forall k = 2, \dots, n-1$. 记

$$p_j = P(M = j).$$

注意到 $E S_0 = 0$, $E S_1 = 1$, $p_{n-1} = 0$, 于是

$$E S_n = n + E S_n \cdot p_0 + \sum_{i=1}^n \left[n - i + \frac{1}{2}(n-i)^2 \right] \cdot p_i$$

\implies

$$E S_n = n + E S_n \cdot p_0 + \left(n + \frac{n^2}{2} \right) (1 - p_0) - (n+1) E M + \frac{1}{2} E M^2$$

$\implies (*.3)$ (利用 $E M = 1, E M^2 = 2$)

- ▶ 【例 1.5(C) 续】(匹配问题) n 个人随机取帽, 该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 Y_j 为第 j 个人错误取帽的次数. 求 $E Y_j$.

解: 注意到

$$S_n = \sum_{j=1}^n (1 + Y_j) = n + \sum_{i=1}^n Y_i,$$

且 $E Y_1 = \dots = E Y_n$, 于是

$$E Y_j = \frac{n}{2}, \quad j = 1, \dots, n. \blacksquare$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- ▶ 【例 1.5(E)】(选票问题) 一次选举有两位候选人 A 和 B, A 得 n 张选票, B 得 m 张选票, $n > m$. 在唱票前假设选票是随机排列, 证明

$$P(\underbrace{\text{在唱票过程中 A 始终领先于 B}}_{\text{记为 } E_{n,m}}) = \frac{n-m}{n+m}.$$

证明: 记 $P_{n,m} = P(E_{n,m})$, $D = \{\text{A 得最后一票}\}$. 对最后一张票归属取条件, 得

$$P_{n,m} = P(E_{n,m}|D) \cdot P(D) + P(E_{n,m}|D^c) \cdot P(D^c)$$

\Rightarrow

$$P_{n,m} = P_{n-1,m} \cdot \frac{n}{n+m} + P_{n,m-1} \cdot \frac{m}{n+m}$$

\Rightarrow (归纳证明)

$$P_{n,m} = \frac{n-m}{n+m}, \quad P_{n,m} = 1 - \frac{m}{n+1} \text{ (舍去, 因 } P_{n,n} = 0).$$

选票问题的假设:

- 在唱票前每个人得票是确定的;
- 所有票的排列是等可能的.

选票问题的应用: 连续投掷一枚硬币, 每次正面出现概率为 p , 反面出现的概率为 $q = 1 - p$. 抛掷过程中首次出现正反面出现次数相同时刻记为 T . 求 T 分布.

错误解法: 记 $D = \{\text{第 } 2n \text{ 次抛掷出现正面}\}$,

$$\begin{aligned} P(T = 2n) &= P(T = 2n, D) + P(T = 2n, D^c) \\ &= P_{n,n-1} \cdot p + P_{n,n-1} \cdot q = P_{n,n-1} = 1/(2n-1). \end{aligned}$$

原因: $\{T = 2n | D\}$ 中排列并不是等可能. Why ?

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

正确解法：记 $J = \{\text{前 } 2n \text{ 次抛掷正面出现 } n \text{ 次}\}$,

$$\begin{aligned} P(T = 2n) &= P(T = 2n, J) = P(T = 2n|J) \cdot P(J), \\ P(T = 2n|J) &= P(T = 2n, D|J) + P(T = 2n, D^c|J) \\ &= P(T = 2n|D, J) \cdot P(D|J) \\ &\quad + P(T = 2n|D^c, J) \cdot P(D^c|J) \\ &= P_{n,n-1} \cdot \frac{1}{2} + P_{n,n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

验证选票问题假设：任取 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq 2n-1$,

$$P(\text{于时刻 } j_1, j_2, \dots, j_n \text{ 抛出反面} | D, J) = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}}.$$

§1.3 + §1.5 期望与条件期望

- ▶ 【例 1.5(I)】(Poisson 随机变量分类) 假设一系列事件相互独立, 已知在一特定时间内事件发生的次数

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

每个事件又以概率 p_j 划入 j 型, $p_1 + \cdots + p_k = 1$. 记 N_j 为该时间段内 j 型事件的个数. 证明

- N_1, N_2, \dots, N_k 相互独立;
- 对任意 $j = 1, \dots, n$,

$$N_j \sim \text{Poisson}(\lambda p_j).$$

§1.6 寿命分布、指数分布

- ▶ 寿命随机变量、寿命分布
- ▶ 失效率函数：设 $X \sim F$, $F(0-) = 0$, pdf 为 f , 则失效率函数定义为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad \forall t \in [0, u_X),$$

其中 $u_X = \sup\{x : F(x) < 1\}$, 且约定 $\lambda(t) = +\infty$, $t > u_X$.

- ▶ 失效率函数直观解释：若 $\lambda(t)$ 于 $(0, u_X)$ 上连续，则对任意 $t \in (0, u_X)$,

$$P(X \in (t, t + \Delta t) | X > t) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

- ▶ cdf 与失效率函数之间一一对应：

$$\bar{F}(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(x) dx \right\}, \quad t \geq 0.$$

§1.6 寿命分布、指数分布

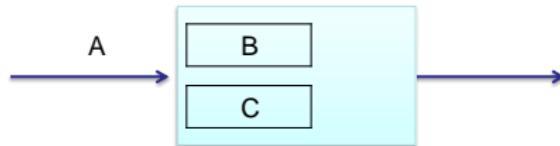
- 指数分布的无记忆性：设 $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则

$$P(T - t > s | T > t) = P(T > s), \quad \forall s > 0, t > 0.$$

- 指数分布的刻画：在绝对连续的寿命随机变量类中，

- 具有常数失效率函数；或
- 具有无记忆性

-
- 【例 1.6(A)】 系统有两个服务台，服务员给顾客提供的服务时间 $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 采用 FIFO 规则. 当 A 到达系统时，发现 B 和 C 占据了两个服务台，求 A 最后离开的概率.



§1.6 寿命分布、指数分布

► 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的记录值：若 $X_n > \max\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$, 则称序列于时刻 n 产生了一个记录，且记录值为 X_n , 这里约定 $X_0 = -\infty$.

- 产生记录的时刻: $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$
- 记录值依次记为: $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$
- 第 i 个与第 $i+1$ 个记录之间的时间间隔: $\tau_i = S_{i+1} - S_i, i \geq 0.$

$$S_1 = 1, \quad R_1 = X_1, \quad R_n = X_{S_n}, \quad n \geq 1.$$

【例 1.6(B)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, F 于其支撑区间 (ℓ, u) 上连续且严格单调, 求 τ_i 的分布.

④ F 的支撑区间 (ℓ, u) 的定义:

$$\ell = \inf\{x : F(x) > 0\}, \quad u = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

§1.6 寿命分布、指数分布

分析：

- 对任意于 (ℓ, u) 上严格单调的函数 h , 下面两个序列

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

$$h(X_1), h(X_2), \dots, h(X_n), \dots$$

创记录的时刻是相同的，因此创记录的时间间隔 τ_i 对应相同.

- 特别取 $h(x) = F(x)$. 注意到

$$F(X_1), F(X_2), \dots, F(X_n), \dots \text{ iid } \sim U(0, 1),$$

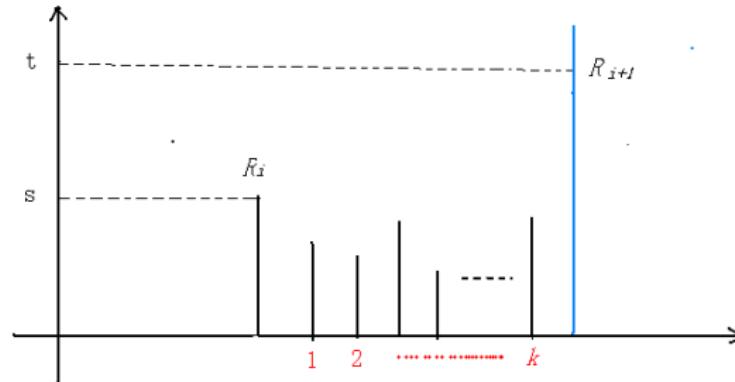
所以 τ_i 的分布与 F 无关.

- 为求 τ_i 分布，不妨设 $F = \text{Exp}(1)$ 分布.

§1.6 寿命分布、指数分布

解：不妨设 F 为 $\text{Exp}(1)$ 分布，先证明

$$R_1, R_2 - R_1, \dots, R_{i+1} - R_i, \dots \text{ iid } \sim \text{Exp}(1).$$



对 $\forall s > 0, t > 0$,

$$\text{P}(R_{i+1} > t | R_i = s) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-s})^k \cdot e^{-t} = e^{-(t-s)}.$$

§1.6 寿命分布、指数分布

$\Rightarrow R_i \sim \Gamma(i, 1), i \geq 1$, 其 pdf 为

$$f_{R_i}(x) = \frac{e^{-t} t^{i-1}}{(i-1)!}, \quad t > 0.$$

为求 τ_i 的分布, 对 R_i 取条件, 对任意 $k = 0, 1, \dots$,

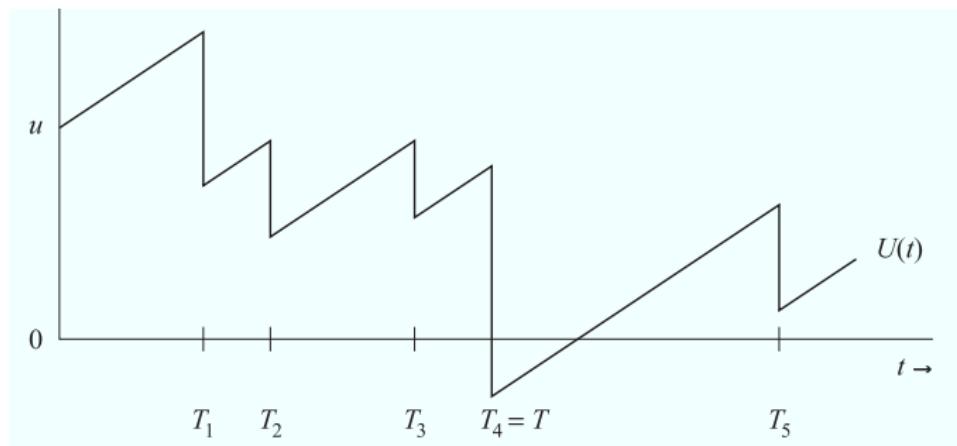
$$\begin{aligned} P(\tau_i > k) &= E\{P(\tau_i > k | R_i)\} \\ &= \int_0^\infty P(\tau_i > k | R_i = t) \cdot \frac{1}{(i-1)!} e^{-t} t^{i-1} dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-t})^k \cdot \frac{1}{(i-1)!} e^{-t} t^{i-1} dy. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

对于一般的连续分布 F , 如何求 R_i 的分布?

§1.9 随机过程

► **随机过程:** $\{X(t), t \in T\}$, 随机事件动态关系的定量描述.

- t : 时间参数, 通常是真实时间或其一个变换, 也可是广义时间;
- T : 指标集合;
- 状态空间: $X(t) (t \in T)$ 所有可能的取值集合;
- 一段样本路径或轨道: $\{X(t), t \in T\}$ 的一个部分实现 $\{X(t, w_0), t \in T_0\}$, 其中 $T_0 \subset T, w_0 \in \Omega$.



§1.9 随机过程

► **随机过程分类:** 根据指标集合 T 和状态空间来划分.

- 离散时间 SP 记为 $\{X_n, n \in T\}$
- 连续时间 SP 记为 $\{X(t), t \in T\}$
- 离散状态 SP
- 连续状态 SP
- 随机场 (时间 t 为向量)

► **随机过程发展历史:** 早期的发展历史属于物理学科领域, 可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究, 以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.

► **随机过程理论基础:** Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展!

§1.9 随机过程

► 随机过程常见的几条性质：设 T 为实数集或其子集.

- 独立增量性：对任意 $t_1 < t_2 < \dots < t_n, \forall n > 2$,

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立.

- 平稳增量性：对任意 $t, t+h \in T, h > 0, X(t+h) - X(t)$ 的分布跟 t 无关，只依赖于 h .
- Markov 性：对任意 $n \geq 2, t_1 < t_2 < \dots < t_n < t,$
 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(X(t) \in B | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n) \\ = P(X(t) \in B | X(t_n) = x_n). \end{aligned}$$

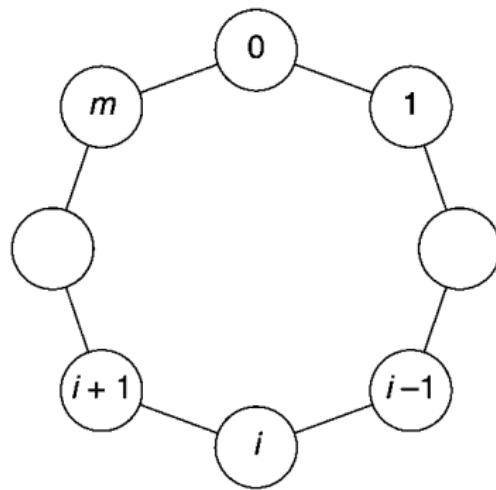
并非任意过程都具有如上的几条性质，有些过程只具备其中的一条或两条性质！

§1.9 随机过程

► 【例 1.9(A)】 一粒子每一步等可能按顺或反时针移动一个位置，即

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = 1/2, \quad \forall n \geq 0,$$

其中 X_n 表示粒子在第 n 步后的位置. 已知 $X_0 = 0$, 给定粒子遍历每个状态, 求状态 i 是最后被访问的概率.



§1.9 随机过程

另一等价问题：一赌徒有 1 元钱参加一系列抛掷均匀硬币的公平赌博。每次出现正面时赌徒赢 1 元，否则输 1 元。记

$D_{m-1} = \{\text{该赌徒在输光前其赌金曾增加过 } m-1 \text{ 元}\}$,
求 $P(D_{m-1})$.

解：记 $A_i = \{\text{给定粒子遍历每个状态, 状态 } i \text{ 是最后被访问}\}$, 且定义
粒子首次访问状态 k 的时刻为 T_k , 则 $P(T_k < \infty) = 1$.

$$\begin{aligned} P(A_i) &= P(A_i, T_{i-1} < T_{i+1}) + P(A_i, T_{i-1} > T_{i+1}) \\ &= P(A_i | T_{i-1} < T_{i+1}) \cdot P(T_{i-1} < T_{i+1}) \\ &\quad + P(A_i | T_{i-1} > T_{i+1}) \cdot P(T_{i-1} > T_{i+1}) \\ &= P(D_{m-1}) \cdot P(T_{i-1} < T_{i+1}) \\ &\quad + P(D_{m-1}) \cdot P(T_{i-1} > T_{i+1}) = P(D_{m-1}). \end{aligned}$$

又 $\sum_{i=1}^m P(A_i) = 1$, 所以 $P(A_i) = 1/m, \forall i \neq 0$. ■

§1.9 随机过程

分析：

- 如何求 $P(A_i | T_{i-1} < T_{i+1})$?

$$\begin{aligned}[A_i | T_{i-1} < T_{i+1}] &= \left\{ \begin{array}{l} \text{当粒子访问状态 } i-1 \text{ 时, 状态 } i \text{ 与 } i+1 \\ \text{未被访问过, 且要求 } i \text{ 最后被访问} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{当粒子处于状态 } i-1 \text{ 时, 由状态 } i \text{ 转移到 } i+1 \\ \text{之前, 不允许从状态 } i-1 \text{ 直接一步转移到 } i \end{array} \right\} \\ &\quad \text{引进公平赌博模型} \quad \Leftrightarrow \quad \{ \text{赌徒在输光前其赌金曾增加过 } m-1 \text{ 元} \} \\ &= D_{m-1}\end{aligned}$$

因此,

$$P(A_i | T_{i-1} < T_{i+1}) = P(D_{m-1}), \quad i = 1, \dots, m.$$

- 对第一步转移的结果取条件. 此时, $[A_i | \text{首次转入状态 1}] \neq A_{i-1}$.

§1.9 随机过程

例 1.9(A) 应用： 在上述抛掷均匀硬币的公平赌博中，

$$P(\text{赌徒赌金减少 } 1 \text{ 元前曾增加过 } n \text{ 元}) = \frac{1}{n+1},$$

$$P(\text{赌徒赌金减少 } n \text{ 元前曾增加过 } 1 \text{ 元}) = \frac{n}{n+1},$$

$$P(\text{赌徒赌金减少 } n \text{ 元前曾增加过 } 2 \text{ 元})$$

$$= P(\text{赌金减少 } n \text{ 元前曾增加过 } 2 \text{ 元} | \text{赌金减少 } n \text{ 元前曾增加过 } 1 \text{ 元}) \\ \times P(\text{赌徒赌金减少 } n \text{ 元前曾增加过 } 1 \text{ 元})$$

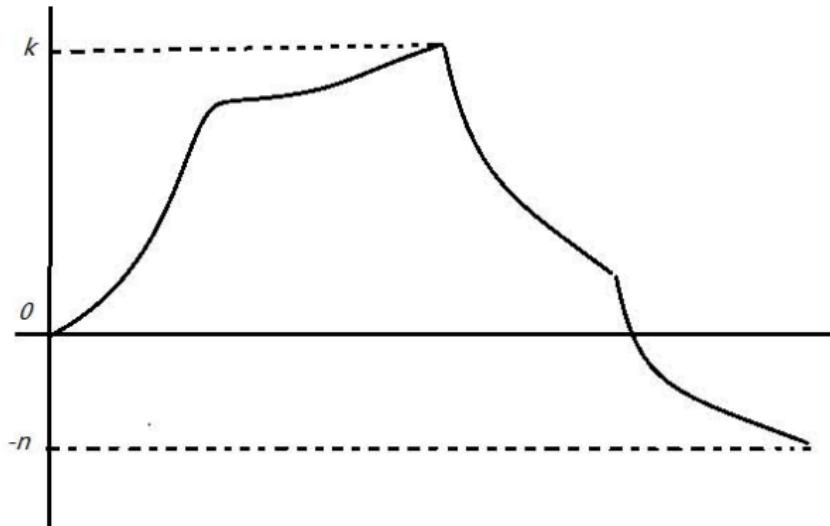
$$= P(\text{赌金减少 } n+1 \text{ 元前曾增加过 } 1 \text{ 元}) \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+2}.$$

§1.9 随机过程

例 1.9(A) 应用： 在上述抛掷均匀硬币的公平赌博中，

$$P(\text{赌徒赌金减少 } n \text{ 元前曾增加过 } k \text{ 元}) = \frac{n}{n+k}, \quad k \geq 1.$$

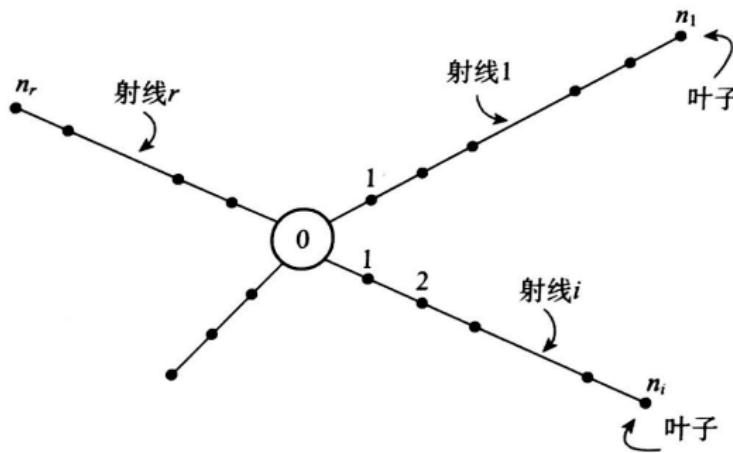


§1.9 随机过程

► 【例 1.9(C)】 标记为 O 的中心有 r 条射线，射线 i 上有 n_i 个点。一质点从中心 O 出发，每次等可能地往可能的各方向移动一格，射线的最远端点称为叶子。记

$$B_i = \{\text{首个被访问的叶子在射线 } i \text{ 上}\}, \quad i = 1, \dots, r.$$

求 $P(B_i)$.



§1.9 随机过程

解：记 $C_j = \{\text{质点首次访问射线 } j\}, j = 1, \dots, r$, 则

$$P(B_i) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{r} P(B_i|C_j),$$

$$P(B_i|C_i) = \frac{1}{n_i} + \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) P(B_i),$$

$$P(B_i|C_j) = \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) P(B_i), \quad j \neq i.$$

\implies

$$rP(B_i) = \frac{1}{n_i} + \left(r - \sum_{j=1}^r \frac{1}{n_j}\right) P(B_i)$$

\implies

$$P(B_i) = \frac{1/n_i}{\sum_{j=1}^r 1/n_j}. \blacksquare$$

作业

第 1 章第一次作业

1, 2, 6, 7, 12, 14, 16, 18, 19, 21

第 1 章第二次作业

25, 26, 27, 30, 31, 34, 38, 39