微分方程引论笔记

为 ε 消得人憔悴, 现代分析始上路

林晓烁

https://xiaoshuo-lin.github.io

2023 年秋季

导言

1. 常微分方程部分教材:

- 常微分方程, 柳彬, 北京大学出版社, 2021.

2. 常微分方程部分参考书目:

- Theory of Ordinary Differential Equations, Earl A. Coddington, Norman Levinson, R.E. Krieger, 1984.

- Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, Elsevier, Academic Press, 2013.

3. 偏微分方程部分教材:

- 偏微分方程, 周蜀林, 北京大学出版社, 2023.

目录

第一部分　常微分方程

1　微分方程的基本概念

定义 1.1.1 称如下形式的方程为常微分方程:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{1.1}$$

其中 F 为已知函数, 自变量 x 在 $\mathbb{R}$ 中某个区间上变化, 未知函数 $y \in \mathbb{R}$, 正整数 n 称作该常微分方程的阶.

定义 1.1.2 在方程 (1.1) 中, 若 F 关于 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 是线性的, 则称该方程为线性常微分方程, 简称线性微分方程.

定义 1.1.3 设 J 是 $\mathbb{R}$ 中的区间, 称函数 $y = \phi(x)$ $(x \in J)$ 是方程 (1.1) 的解, 若

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)\right) \equiv 0, \quad x \in J.$$

此时, 称 J 为解 $y = \phi(x)$ 的存在区间. 若 $y = \phi(x)$ 不包含任意常数, 则称之为特解. 若 $y = \phi(x)$ 包含 n 个相互独立的任意常数 $c_1, \cdots, c_n$, 则称之为通解, 这里“相互独立”是指 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial\left(\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)}\right)}{\partial(c_1, c_2, \cdots, c_n)}\right) \neq 0, \quad x \in J.$$

定义 1.1.4 考虑一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{1.2}$$

其中 f 在平面区域 G 上连续. 假设

$$y = \phi(x), \quad x \in J$$

是该方程的一个解, $J \subset \mathbb{R}$ 是区间, 则平面点集

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = \phi(x), x \in J\}$$

就是平面上的一条可微曲线, 称之为解曲线或积分曲线.

注 1.1.5 通过引入积分曲线的概念可以给方程 (1.2) 一个几何解释, 即 f 在积分曲线 Γ 上每点处的取值恰为曲线在该点处的斜率.

2　初等积分法

定义 1.2.1 考虑方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{1.3}$$

如果存在一个连续可微函数 $\varPhi(x,y)$, 使得

$$\mathrm{d}\varPhi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

则称方程 (1.3) 是恰当方程或全微分方程. 此时称

$$\varPhi(x,y) = c \quad (\text{其中 } c \text{ 为任意常数})$$

为方程 (1.3) 的通积分.

定理 1.2.2 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单连通区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 且具有连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 则方程 (1.3) 是恰当方程的充要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.4}$$

在 D 内成立; 而当上式成立时, 对于 $(x_0,y_0),(x,y) \in D$, 方程 (1.3) 的通积分为

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = c, \tag{1.5}$$

其中 γ 是任意连接 (x_0,y_0) 与 (x,y) 并在 D 内的由有限多条光滑曲线段组成的曲线, c 为任意常数.

证明 假设方程 (1.3) 是恰当的, 则存在可微函数 $\varPhi(x,y)$, 使得

$$\mathrm{d}\varPhi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

因此

$$P(x,y) = \frac{\partial \varPhi}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial \varPhi}{\partial y}.$$

再由 $P(x,y), Q(x,y)$ 的可微性可知

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 是连续的, 因此

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

反之, 假设 (1.4) 式成立. 由曲线积分的 Green 公式可知, 对于 D 内连接 (x_0, y_0) 与 (x,y) 的逐段光滑的曲线 γ,

$$\Phi(x,y) = \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

不依赖于路径 γ 的选择, 且满足

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

即方程 (1.3) 是恰当的. □

定义 1.2.3 如果方程 (1.3) 中的函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 均可写成 x 的函数和 y 的函数的乘积, 即

$$P(x,y) = P_1(x)P_2(y), \quad Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y),$$

则称方程 (1.3) 是变量分离方程.

对于变量分离方程

$$P_1(x)P_2(y)\,\mathrm{d}x + Q_1(x)Q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

当 $P_2(y)Q_1(x) \neq 0$ 时 (注意是恒不为 0), 可同解变形为恰当方程

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,\mathrm{d}y = 0,$$

进而可求得通积分. 另外, 若 a 是 $P_2(y)$ 的一个零点, 则 $y \equiv a$ 也是一个解; 若 b 是 $Q_1(x)$ 的一个零点, 则 $x \equiv b$ 也是一个解.

例 1.2.4 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P(x)y.$$

解 当 $y \neq 0$ 时, 同解变形为

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + P(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

通积分为

$$\ln|y| + \int_{x_0}^{x} P(s)\,\mathrm{d}s = c,$$

因此

$$y = c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 c 为任意非零常数. 结合 $y = 0$ 是一个特解得方程的通解为

$$y = c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 c 为任意常数. □

例 1.2.5 求解微分方程

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-y^2}.$$

解 若 $x\sqrt{1-y^2} \neq 0$, 方程可同解变形为

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0,$$

通积分为

$$\arcsin y - \ln|x| = c,$$

其中 c 为任意常数, 整理可得

$$x = ce^{\arcsin y},$$

其中 c 为任意非零常数. 由于 $x \equiv 0$ 不是解, 而 $y \equiv \pm 1$ 是解, 故原方程的解为

$$y \equiv \pm 1$$

和

$$x = ce^{\arcsin y},$$

其中 c 为任意非零常数. □

例 1.2.6 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{1}{3}}.$$

解 当 $y \neq 0$ 时, 方程可同解变形为

$$y^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x = 0,$$

通积分为

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} - x = c,$$

其中 c 为任意常数. 又 $y \equiv 0$ 是特解, 故原方程的解为

$$y \equiv 0$$

和

$$y = \pm\left[\frac{2}{3}(x+c)\right]^{\frac{3}{2}}, \quad x \geqslant -c,$$

其中 c 为任意常数. □

注 1.2.7 此方程过 x 轴上任一点的解有无穷多个. 进一步讨论见例 1.3.9.

下面讨论一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x), \tag{1.6}$$

其中 $p(x), q(x) \in \mathcal{C}((a,b))$.

定义 1.2.8 在方程 (1.6) 中, 当 $q(x) \equiv 0$ 时, 得到微分方程

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.7}$$

称方程 (1.7) 是方程 (1.6) 对应的齐次方程, 也称它为一阶齐次线性微分方程. 当 $q(x)$ 不恒为 0 时, 称方程 (1.6) 为一阶非齐次线性微分方程.

在微分方程中的一个重要规则是, 要解非齐次方程, 先解对应的齐次方程. 方程 (1.7) 的通解为

$$y = c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{1.8}$$

其中 c 为任意常数. 这里 $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$ 决定积分曲线的形状, 而 c 起的是 “伸缩” 即改变大小的作用. 若将方程 (1.6) 右侧的 $q(x)$ 看作物理方程中的 “外力”, 我们猜想当此 “外力” 是较微小的扰动时, $q(x)$ 对方程的解的影响是将 (1.8) 中的常数 c 变为函数 $c(x)$. 即我们希望此时方程 (1.6) 的解形如

$$y = c(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{1.9}$$

将此式代入 (1.6) 即得

$$c'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right) \cancel{-p(x)c(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)} \cancel{+p(x)c(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)} = q(x).$$

于是

$$c'(x) = q(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right) \implies c(x) = c + \int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s.$$

代回 (1.9) 即得

$$\begin{aligned} y &= \left[c + \int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s\right]\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(-\int_{s}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 c 为任意常数.

若方程 (1.6) 还满足初始条件 $y(x_0) = y_0$, 则可得 $c = y_0$, 从而解为

$$y = y_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(-\int_{s}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s.$$

下面讨论初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

解的唯一性问题. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (1.10) 的两个解, 令 $\varphi(x) = y_1(x) - y_2(x)$, 则转化为研究

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + p(x)\varphi = 0, \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

解的唯一性问题. 我们有如下观察:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi(x)\right) = \left(\cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + p(x)\varphi}\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right) = 0,$$

于是

$$\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi(x) = \varphi(x_0) = 0.$$

由于 $p(x) \in \mathcal{C}((a,b))$, 积分 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s$ 有限 (不会出现 “$e^{-\infty} \to 0$” 的情形), 所以

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

这就证明了方程 (1.10) 解的唯一性.

定理 1.2.9 (1) 方程 (1.7) 的解恒为零或者恒不为零.

(2) 方程 (1.7) 的任意两个解的线性组合仍然是解.

(3) 方程 (1.7) 的解是整体存在的, 即该方程的任意一个解的存在区间与函数 $p(x), q(x)$ 有定义的共同区间是一样的.

(4) 非齐次方程 (1.6) 的两个解的差是齐次方程 (1.7) 的解.

(5) 非齐次方程 (1.6) 的初值问题的解存在且唯一.

提示 (5) 的证明需要利用 (1).

注 1.2.10 由定理 1.2.9 (1)(2) 可知, 方程 (1.7) 的全体解构成一个线性空间, 该空间是一维的, $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$ 是它的一个基.

例 1.2.11 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x^2.$$

解 在方程两边同乘 e^x 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x y\right) = x^2 e^x.$$

两边积分得

$$e^x y = (x^2 - 2x + 2)e^x + c,$$

即原方程的解为

$$y = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x},$$

其中 c 为任意常数. □

例 1.2.12 设函数 $f(x) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty))$, $a(x)$ 连续, 且存在常数 $c_0 > 0$, 使得 $a(x) \geqslant c_0$. 若

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x) + a(x)f(x)\right) = 0,$$

求证:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证明 令 $g(x) = f'(x) + a(x)f(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 将上式看作 $f(x)$ 满足的微分方程, 由一阶线性微分方程解的公式立得

$$f(x) = \frac{f(0) + \displaystyle\int_0^x \exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right) g(t)\,\mathrm{d}t}{\exp\left(\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\right)}.$$

注意到 $a(x) \geqslant c_0 > 0$, 因此

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty.$$

由 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\right) g(x)}{a(x)\exp\left(\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{a(x)} = 0.$$

□

下面讨论一些特殊的微分方程.

例 1.2.13 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}.$$

解 因为等号右边是齐次式, 所以令 $y = xu(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u(x) + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u}{1-u},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

由 $x \equiv 0$ 不是解可将其转化为变量分离方程

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解得

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + c,$$

其中 c 为任意常数. 若采用极坐标还可改写为更简单的形式:

$$r = ce^{\theta}, \quad c > 0.$$

□

例 1.2.14 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax+by+c}{mx+ny+l},$$

其中 a, b, c, m, n, l 为常数.

解 令 $x = \widetilde{x} + \alpha$, $y = \widetilde{y} + \beta$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}\widetilde{x}} = \frac{a\widetilde{x} + b\widetilde{y} + a\alpha + b\beta + c}{m\widetilde{x} + n\widetilde{y} + m\alpha + n\beta + l}.$$

① 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0$, 则方程组 $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ m\alpha + n\beta + l = 0 \end{cases}$ 有解 α, β. 此时原方程可进一步化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}\widetilde{x}} = \frac{a\widetilde{x} + b\widetilde{y}}{m\widetilde{x} + n\widetilde{y}},$$

从而可解.

② 若 $an = bm$, 令 $\lambda \coloneqq \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$, 则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda(mx + ny) + c}{mx + ny + l},$$

通过令 $u = mx + ny$ 可进一步化为变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = m + n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m + n\frac{\lambda u + c}{u + l},$$

从而可解. □

例 1.2.15 求解 Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 1.$$

解 当 $y \not\equiv 0$ 时, 在原方程两边同除以 y^n 可得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x),$$

也即

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

令 $u(x) = y^{1-n}$ 即化为一阶线性微分方程

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + p(x)u = q(x).$$

另外, 当 $n > 0$ 时, 原方程还有解 $y \equiv 0$. □

3　解的存在性和唯一性

§3.1　Gronwall 不等式

引理 1.3.1 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $g(x)\geqslant 0$, c 是常数. 如果

$$f(x)\leqslant c+\int_a^x g(s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

则

$$f(x)\leqslant c\exp\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

证明 令

$$F(x)=\int_a^x g(s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

则由 $g(x)\geqslant 0$ 得

$$F'(x)=g(x)f(x)\leqslant cg(x)+g(x)F(x),$$

即 F 满足微分不等式

$$F'(x)-g(x)F(x)\leqslant cg(x).$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp\left(-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)F(x)\right]&=\exp\left(-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)[F'(x)-g(x)F(x)]\\&\leqslant c\exp\left(-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)g(x)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-c\exp\left(-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)\right],\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp\left(-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)(F(x)+c)\right]\leqslant 0.$$

于是

$$\exp\left(-\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)(F(x)+c)\leqslant c,$$

即

$$F(x)\leqslant c\exp\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)-c.$$

因此

$$f(x)\leqslant c+F(x)\leqslant c\exp\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

□

注 1.3.2 引理 1.3.1 中, 若 $c\leqslant 0$, 则可得 $f(x)\leqslant 0$.

§3.2 Picard 存在唯一性定理

考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{1.12}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在矩形闭区域

$$D\colon |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

上连续.

定义 1.3.3 称函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上对 y 满足 Lipschitz 条件, 如果存在常数 $L>0$, 使得对于任意的 $(x,y_1),(x,y_2)\in G$, 有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|.$$

注 1.3.4 若函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 R 上对 y 有连续偏导数, 则 $f(x,y)$ 对 y 满足 Lipschitz 条件. 这是因为对任意 $(x,y_1),(x,y_2)\in R$, 有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant \underbrace{\max_{(x,z)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}_{L}|y_2-y_1|.$$

下面讨论方程 (1.12) 满足初始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{1.13}$$

的解的存在性. Picard 定理表明, 当方程 (1.12) 中 $f(x,y)$ 对 y 满足 Lipschitz 条件时, 满足初始条件 (1.13) 的解在局部范围是存在且唯一的. 初值问题 (1.12) (1.13) 也称为 Cauchy 问题.

定理 1.3.5 (Picard 存在唯一性定理) 假设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续且对 y 满足 Lipschitz 条件, 则 Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 的解在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在且唯一, 其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

证明 1 **第一步** 将问题转化为积分方程. Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 等价于积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\,\mathrm{d}s, \tag{1.14}$$

这是因为:

- 若 $y=\phi(x)$ 是 Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 的解, 对方程 (1.12) 等号两边从 x_0 到 x 积分可得 $\phi(x)$ 也是积分方程 (1.14) 的解.
- 若 $y=\phi(x)$ 是积分方程 (1.14) 的解, 则 $y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s$ 可导, 即 $\phi(x)$ 可导, 故 $\phi'(x)=f(x,\phi(x))$, 即 $\phi(x)$ 满足方程 (1.12) (1.13).

【将微分方程转化为积分方程可能带来一些便利, 如只要连续就自动可微、适用更多估计手段 (如积分三角不等式等).】

第二步 构造 Picard 序列. 令

$$
\begin{aligned}
y_0(x)&=y_0,\\
y_1(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_0(s))\,\mathrm{d}s,\\
y_2(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s,\\
&\ \vdots\\
y_n(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

【以上 Picard 序列实际上对应于微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}y_n(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,y_{n-1}(x)),\\
y_n(x_0)=y_0,
\end{cases}
$$

这是一系列简单的常微分方程, 可通过迭代求解. 实际上写成微分方程还是积分方程只是形式上的区别, 关键在于后面第三步证明一致收敛时需要用到积分的形式.】

为了说明如上定义的 Picard 序列是良好定义的, 需证明当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时, $|y_n(x)-y_0|\leqslant b$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 对 n 运用数学归纳法. 当 $n=0$ 时, 结论平凡. 当 $n=1$ 时, 由

$$
|y_1-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b
$$

知结论成立. 设直到 $n-1$ $(n\geqslant 2)$ 结论都成立, 则

$$
|y_n(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,
$$

故结论对 n 也成立. 于是良定性得证.

第三步 证明解的存在性. 由于

$$
y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]+y_0(x),
$$

为证 $y_n(x)$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛, 只需证函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[y_n(x)-y_{n-1}(x)]$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛. 我们证明更强的结论: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛. 由于

$$\begin{aligned}
|y_1(x)-y_0(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M|x-x_0|,\\
|y_2(x)-y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))]\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|\,\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(s)-y_0(s)|\,\mathrm{d}s\right| \overset{\text{上一式}}{\leqslant} L\left|\int_{x_0}^{x} M|s-x_0|\,\mathrm{d}s\right| = \frac{LM}{2}|x-x_0|^2,
\end{aligned}$$

上面放缩时积分式外也加绝对值是因为积分上下限大小关系不确定. 归纳可得

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant M\frac{L^{n-1}|x-x_0|^n}{n!},\quad \forall |x-x_0|\leqslant h.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{L^n|x-x_0|^n}{n!}\leqslant \frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L^nh^n}{n!}<+\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛. 因此 $y_n(x)$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收敛, 设

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x).$$

由于

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s,$$

两边同时令 $n\to\infty$ 得

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s,$$

即 $y(x)$ 是 Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 的解.

第四步 证明解的唯一性. 设 $y=\phi_1(x), y=\phi_2(x)$ 是积分方程 (1.14) 的两个解, 则

$$\begin{aligned}
|\phi_1(x)-\phi_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(s,\phi_1(s))-f(s,\phi_2(s))]\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,\phi_1(s))-f(s,\phi_2(s))|\,\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} |\phi_1(s)-\phi_2(s)|\,\mathrm{d}s\right|,
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式即得

$$|\phi_1(x)-\phi_2(x)|\equiv 0.$$

□

注 1.3.6 (1) 由 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$ 可见, 扩大矩形区域并不意味着 h 变大.

(2) 迭代序列的形式并不唯一, 但要求能从已知的 y_{n-1} 解出 y_n.

下面利用算子法给出 Picard 存在唯一性定理的另一个证明. 这里将定理 1.3.5 中对 h 的定义加强为 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M},\dfrac{1}{2L}\right\}$, 其中 L 为 $f(x,y)$ 在 D 上对 y 的 Lipschitz 常数. 后面会看到, h 的大小不太重要.

证明 2 定义算子 T 满足 $(T\phi)(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s$, 则积分方程 (1.14) 等价于 $\phi(x)=T\phi(x)$, 即 $\phi(x)$ 为算子 T 的不动点.

设 $I=\{x\mid |x-x_0|\leqslant h\}$, 函数空间 $X(I)=\{\phi\in\mathcal{C}(I)\mid |\phi(x)-y_0|\leqslant b\}$. 下证 T 是一个压缩映射, 即

① $T\colon X(I)\to X(I)$.

② 对任意 $\phi_1,\phi_2\in X(I)$, 存在 $c<1$ 使 $\max\limits_{x\in I}|T\phi_1(x)-T\phi_2(x)|\leqslant c\max\limits_{x\in I}|\phi_1(x)-\phi_2(x)|$.

①的证明 由算子 T 的定义可知, 若 $\phi\in\mathcal{C}(I)$, 则也有 $T\phi\in\mathcal{C}(I)$. 对任意 $\phi\in X(I)$,

$$|T\phi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant Mh\leqslant b.$$

故 $T\phi\in X(I)$.

②的证明 对任意 $\phi_1,\phi_2\in X(I)$,

$$\begin{aligned}|T\phi_1(x)-T\phi_2(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(s,\phi_1(s))-f(s,\phi_2(s))\right]\,\mathrm{d}s\right|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\phi_1(s)-\phi_2(s)|\,\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant Lh\max_{x\in I}|\phi_1(x)-\phi_2(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max_{x\in I}|\phi_1(x)-\phi_2(x)|.\end{aligned}$$

于是 $T\colon X(I)\to X(I)$ 是一个压缩映射, 又 $X(I)$ 是 Banach 空间中的闭集, 故 T 存在唯一不动点. □

定理 1.3.7 (Peano 存在性定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭矩形区域 $D\colon |x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$ 上连续, 则 Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在至少一个解, 其中 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$.

例 1.3.8 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解存在且唯一.

解 因为 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$ 上连续，又 $f'_y=2y$ 在 D 上连续，因此 f 关于 y 在 D 上是 Lipschitz 的. 于是，由 Picard 存在唯一性定理，经过 (x_0,y_0) 的解曲线在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是唯一的，其中 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$，$M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$. □

例 1.3.9 在例 1.2.6 中，若 $y_0\neq 0$，则可构造矩形区域包含点 (x_0,y_0)，使得该矩形区域与 x 轴无交点，从而 f 在其上连续且关于 y 是 Lipschitz 的，于是由 Picard 存在唯一性定理可知过 (x_0,y_0) 的解曲线存在且唯一；若 $y_0=0$，则 f 在任一包含 (x_0,y_0) 的矩形区域上对 y 都不是 Lipschitz 的，从而无法使用 Picard 存在唯一性定理，但通过直接求解微分方程可得解曲线的形状.

例 1.3.10 设函数 $f(y)$ 是连续的. 证明：初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+1+(f(y))^2,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解存在且唯一.

证明 设 $F(x,y)=x^2+1+(f(y))^2$，$D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$. 由于 $F(x,y)$ 在 D 上是连续的，由 Peano 存在性定理，在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上所给初值问题存在解. 设 $y=\phi(x)$ 是一个解，则

$$\phi'(x)=x^2+1+(f(\phi(x)))^2\geqslant 1.$$

由反函数定理，$y=\phi(x)$ 的反函数 $x=\psi(y)$ 是存在的，且它满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{1+u^2+(f(y))^2},\\ u(y_0)=x_0.\end{cases}$$

注意到此初值问题中微分方程的右端对 u 是连续可微的，于是由 Picard 存在唯一性定理可知此初值问题的解存在且唯一. 再利用反函数的唯一性可知原初值问题的解存在且唯一. □

注 1.3.11 本例中未知 f 的可微性，因此不能直接使用 Picard 存在唯一性定理.

定义 1.3.12 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续. 如果对于任意的 $(x,y_1),(x,y_2)\in G$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|),$$

其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数, 且

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{F(r)}\,\mathrm{d}r=+\infty,\quad \forall\varepsilon>0,$$

则称 $f(x,y)$ 对 y 满足 Osgood 条件.

注 1.3.13 若 $f(x,y)$ 在 G 上关于 y 是 Lipschitz 的, 则可取 $F(r)=Lr$, 其中 L 为 $f(x,y)$ 在 G 上对 y 的 Lipschitz 常数, 使得 $f(x,y)$ 对 y 满足 Osgood 条件.

定理 1.3.14 (Osgood 定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上对 y 满足 Osgood 条件, 则对任意 $(x_0,y_0)\in D$, Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 的解存在且唯一.

证明 由 Peano 存在性定理, Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在解, 设 $\phi_1(x),\phi_2(x)$ 是它的两个不同的解. 则存在 $x_1\neq x_0$, 使得 $\phi_1(x_1)\neq\phi_2(x_1)$. 不妨设 $x_1>x_0$ 且 $\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1)$, 其余情形类似处理即可.

令 $\overline{x}\coloneqq\max\{x\in[x_0,x_1]\mid\phi_1(x)=\phi_2(x)\}$, 于是

$$\phi_1(x)>\phi_2(x),\quad\forall x\in(\overline{x},x_1)\,.$$

令 $r(x)\coloneqq\phi_1(x)-\phi_2(x)$, 则 $r(x)>0$, $\forall x\in(\overline{x},x_1)$, 且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\phi_1'(x)-\phi_2'(x)=f(x,\phi_1(x))-f(x,\phi_2(x))\leqslant F(\phi_1(x)-\phi_2(x))=F(r(x)).$$

由 $F(r)>0$ 得

$$\frac{1}{F(r)}\,\mathrm{d}r\leqslant\mathrm{d}x,$$

两边积分即得

$$\int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{F(r)}\leqslant\int_{\overline{x}}^{x_1}\mathrm{d}x=x_1-\overline{x},$$

其中 $r_1=r(x_1)>0$. 这与 Osgood 条件矛盾. 故 Cauchy 问题 (1.12) (1.13) 的解是唯一的. □

例 1.3.15 研究微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0, & y=0,\\ y\ln|y|, & y\neq0\end{cases}$$

的解的唯一性.

解 当 $y\neq0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y\ln|y|)=\ln|y|+1$, 故存在矩形 R 以 (x_0,y_0) 为中心, 使得 f 在 R 上关于 y 是 Lipschitz 的. 由 Picard 存在唯一性定理可知, 以 (x_0,y_0) 为初值的解是唯一的.

当 $y_0=0$ 时, $y\equiv 0$ 显然是该方程的一个解. 若 $y=\phi(x)$ 是另一个解, 任取 $x_1\neq x_0$ 使得 $\phi(x_1)\neq 0$, 不妨设 $x_1>x_0$ 且 $\phi(x_1)>0$. 令 $\overline{x}\coloneqq \max\{x\in[x_0,x_1]\mid \phi(x)=0\}$, 则当 $x\in[\overline{x},x_1]$ 时, $\phi(x)>0$, 因而 $\phi'(x)=\phi(x)\ln\phi(x)$. 于是

$$\int_0^{\phi(x_1)}\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\ln\phi}\leqslant\int_{\overline{x}}^{x_1}\mathrm{d}x=x_1-\overline{x},$$

但上式左边积分不收敛, 与右边为有限数矛盾. 故以 $(x_0,0)$ 为初值的解是唯一的. □

注 1.3.16 本例中直接验证 Osgood 条件是不容易的, 但仿照 Osgood 定理的证明可以解决其中 $y_0=0$ 的情形. 相比 Osgood 条件, Lipschitz 条件往往更容易验证.

§3.3 解的延伸

定理 1.3.17 (解的延伸定理) 考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0, \end{cases}\tag{1.15}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续. 则该 Cauchy 问题的任意解曲线 $\mathit{\Gamma}$ 均可延伸至 G 的边界, 即对于 G 内的任意有界闭区域 G_1 及 $(x_0,y_0)\in G_1$, 该 Cauchy 问题的解曲线 $\mathit{\Gamma}$ 可以延伸到 $G\setminus G_1$.

证明 只考虑向前延伸[1] $(x\geqslant x_0)$ 的解. 用反证法, 设解曲线一直在 G_1 中. 令 G_1' 是包含 G_1 的区域, $\overline{G_1'}$ 有界且 $G_1'\subset G$, 则 $d\left(G_1,(G_1')^{\mathrm{c}}\right)>0$. 于是存在 $0<\delta_0<d\left(G_1,(G_1')^{\mathrm{c}}\right)$ 使得

$$R\coloneqq\{(x,y)\mid |x-\overline{x}|\leqslant\delta_0, |y-\overline{y}|\leqslant\delta_0\}\subset G_1',\quad \forall\,(\overline{x},\overline{y})\in G_1.$$

于是由 Peano 存在性定理, 以 $(\overline{x},\overline{y})$ 为初值的解在 $|x-\overline{x}|\leqslant h$ 上存在, 其中 $h=\min\left\{\delta_0,\dfrac{\delta_0}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{\overline{G_1'}}|f|$. 由 Peano 存在性定理, 以 (x_0,y_0) 为初值的解 $y=\phi(x)$ 在 $[x_0,x_0+h]$ 上存在. 令 $x_1=x_0+h$, $y_1=\phi(x_0+h)$. 由假设知 $(x_1,y_1)\in G_1$, 于是在 $[x_0,x_0+2h]$ 上存在解, 仍记为 $y=\phi(x)$. 令 $x_2=x_0+2h$, $y_2=\phi(x_0+2h)$, 则以 (x_2,y_2) 为初值的解在 $[x_2,x_2+h]$ 上存在. 重复上述过程, 以 (x_0,y_0) 为初值的解在 $[x_0,x_0+nh]$ $(\forall n)$ 上存在. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_0+nh)=+\infty$, 而 $\overline{G_1}$ 是有界闭集, 矛盾. 故解曲线离开 G_1. □

注 1.3.18 解曲线可延伸至 G 的边界 $\not\Rightarrow$ 解的存在区间为 $[x_0,+\infty)$, 这是因为解曲线可能在有限区间内延伸至 y 方向的无穷. 可参考例 1.3.20.

[1] 我们把 $x\geqslant x_0$ 的解称为右行解 (或向前的解), 把 $x\leqslant x_0$ 的解称为左行解 (或向后的解).

推论 1.3.19 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续, 对 y 满足局部 Lipschitz 条件[2], 则对任意 $(x_0,y_0)\in G$, 微分方程 $y'=f(x,y)$ 存在唯一的积分曲线 $\varGamma$ 经过 (x_0,y_0), 并且它可以延伸到 G 的边界.

例 1.3.20 证明: 微分方程

$$y'=x^2+y^2$$

的每个解的存在区间均是有界的.

证明 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, $f'_y=2y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 因此 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上对 y 是局部 Lipschitz 的. 由延拓定理, 经过任何一点 (x_0,y_0) 的积分曲线存在且唯一, 并且可以延拓到 $\mathbb{R}^2$ 的边界. 现在要证右行解的存在区间是有界的.

设 $[x_0,\beta)$ 是它的右行最大区间 (区间右侧为 "开", 否则由 $(\beta,y(\beta))\in\mathbb{R}^2$ 知可继续向右延拓), 并不妨设 $\beta>0$, 否则已得证. 设 $\max\{x_0,0\}<x_1<\beta$, 则在 $[x_1,\beta)$ 上 $f(x,y)\geqslant x_1^2+y^2$. 设右行解为 $y=\phi(x)$, 则在 $[x_1,\beta)$ 上 $\phi'(x)=x^2+(\phi(x))^2\geqslant x_1^2+(\phi(x))^2$. 故

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{x_1^2+(\phi(x))^2}\geqslant \mathrm{d}x,$$

两端积分得到

$$\frac{1}{x_1}\left(\arctan\frac{\phi(x)}{x_1}-\arctan\frac{\phi(x_1)}{x_1}\right)\geqslant x-x_1>0.$$

由 $\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 知这意味着

$$0\leqslant x-x_1\leqslant\frac{\pi}{x_1},\quad x_1\leqslant x<\beta.$$

由此可知

$$\beta\leqslant x_1+\frac{\pi}{x_1}<+\infty.$$

同理可证左行解的存在区间也是有界的. 于是, 解 $y=\phi(x)$ 的存在区间是有界的. □

例 1.3.21 证明: 微分方程

$$y'=\left(x^2+y^2+1\right)\sin(\pi y)$$

的每个解都是单调的, 且存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

[2]即对任意 $(x_0,y_0)\in G$, 存在闭矩形 $R\ni(x_0,y_0)$, $R\subset G$, 使得 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 是 Lipschitz 的. 一个简单常用的判别方法是, 若 f'_y 在 G 上连续, 则 f 在 G 上关于 y 是局部 Lipschitz 的.

证明 $f(x,y)=\left(x^2+y^2+1\right)\sin(\pi y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且关于 y 是局部 Lipschitz 的, 由延拓定理, 过任意一点存在唯一解, 并且可以延拓到 $\mathbb{R}^2$ 的边界.

注意到 $y=n$ $(n\in\mathbb{Z})$ 是方程的解, 它是单调的, 且存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 如果 (x_0,y_0) 是初值, 其中 $y_0\notin\mathbb{Z}$, 则存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $n<y_0<n+1$. 由唯一性, 以 (x_0,y_0) 为初值的解曲线 $y=\phi(x)$ 不与 $y=n$、$y=n+1$ 相交, 因此它只能延伸至 $x=-\infty$ 和 $x=+\infty$, 且 $n<\phi(x)<n+1, \forall x\in(-\infty,+\infty)$. 于是 $\phi'(x)=f(x,\phi(x))=\left(x^2+(\phi(x))^2+1\right)\sin\left(\pi\phi(x)\right)$ 不变号, $\phi(x)$ 是单调的. □

例 1.3.22 考虑初值问题

$$\begin{cases} y'=\left(y^2-2y-3\right)e^{(x+y)^2}, \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

证明: 该初值问题解的存在区间为 $a<x<b$, 这里 $a=-\infty$ 和 $b=+\infty$ 中至少有一个成立.

证明 $f(x,y)=\left(y^2-2y-3\right)e^{(x+y)^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 并且 f_y' 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续. 因此 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上关于 y 是局部 Lipschitz 的. 故由延拓定理, 初值问题的解曲线是唯一的, 并且可以延伸到边界.

显然 $y\equiv 3$ 和 $y\equiv -1$ 是该初值问题的特解. 若 $y_0>3$, 由唯一性, 以 (x_0,y_0) 为初值的解 $y=\phi(x)$ 不能与 $y=3$ 相交. 因此, 它一直在 $y=3$ 上方, 从而 $\phi'(x)=f(x,\phi(x))>0$, $\phi(x)$ 单调递增, 以 (x_0,y_0) 为初值的左行解必然在 $y\equiv y_0$ 和 $y\equiv 3$ 之间. 由延拓定理, 它比延拓到 $x=-\infty$. 因此, 它的存在区间为 $-\infty<x<b$. 类似地, 若 $y_0<-1$, 则解的存在区间为 $(a,+\infty)$.

若 $1-<y_0<3$, 经过 (x_0,y_0) 的解在 $y\equiv -1$ 和 $y\equiv 3$ 之间. 由延拓定理, 它延伸到 $\mathbb{R}^2$ 的边界 $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$, 存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. □

注 1.3.23 由以上几例可见, 解的延伸定理有助于我们不解方程便分析解在“远处”的性态.

§3.4　比较定理

定理 1.3.24 (第一比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 均在区域 G 内连续, 且

$$f(x,y)<F(x,y),\quad \forall (x,y)\in G, \tag{1.16}$$

又设函数 $y=\phi(x)$ 和 $y=\varPhi(x)$ 在区间 (a,b) 上分别是初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y'=F(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解, 其中 $(x_0,y_0)\in G$, 则

$$\begin{cases}\phi(x)<\varPhi(x), & x_0<x<b,\\ \phi(x)>\varPhi(x), & a<x<x_0.\end{cases}$$

证明 只考虑右行解. 令 $\psi(x)=\varPhi(x)-\phi(x)$, 则 $\psi(x_0)=0$, $\psi'(x_0)=F(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)>0$. 于是, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\psi(x)>0,\quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta).$$

要证 $\psi(x)>0, \forall x\in(x_0,b)$. 用反证法, 否则, 存在 $\alpha<b$ 使得 $\psi(\alpha)=0$ 且 $\psi'(\alpha)\leqslant 0$. 但是由 (1.16) 式可知

$$\psi'(\alpha)=F(\alpha,\varPhi(\alpha))-f(\alpha,\phi(\alpha))>0,$$

矛盾. □

注 1.3.25 定理 1.3.24 的几何意义是明显的: 斜率小的曲线向右不可能从斜率大的曲线的下方穿越到上方. 另外, 注意此处要求 $f(x,y)<F(x,y)$, 若 “$<$” 改成 “$\leqslant$” 则得不到有意义的结论, 由此衍生出第二比较定理 (定理 1.3.32).

引理 1.3.26 初值问题

$$\begin{cases}y'=A(x)|y|+B(x)+1,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{1.17}$$

的解在区间 (a,b) 上存在且唯一, 其中 $A(x),B(x)$ 在 (a,b) 上是非负的连续函数.

证明 $f(x,y)=A(x)|y|+B(x)+1$ 在条形区域

$$D\colon a<x<b, -\infty<y<+\infty$$

上连续, 且关于 y 在 D 上是局部 Lipschitz 的. 由延拓定理, 初值问题 (1.17) 的解存在且唯一, 并可以延拓到 D 的边界. 现在要证任一解的存在区间为 (a,b).

设初值问题的解为 $y=\phi(x)$, 则 $\phi'(x)=A(x)|\phi(x)|+B(x)+1>0$, 故 $\phi(x)$ 是单调递增的. 若 $\phi(x)$ 无零点, 不妨设 $\phi(x)>0$, 则 $y=\phi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases}y'=A(x)y+B(x)+1,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解, 因此 $y=\phi(x)$ 在 (a,b) 上存在. 若 $\phi(x)$ 有零点, 设 $x=x_1$ 是它的零点, 则 $y=\phi(x)$ 在 $[x_1,b)$ 上是初值问题

$$\begin{cases} y'=A(x)y+B(x)+1, \\ y(x_1)=0 \end{cases}$$

的解, 因此 $y=\phi(x)$ 在 $[x_1,b)$ 上存在. 同样地, 在 $(a,x_1]$ 上 $y=\phi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} y'=-A(x)y+B(x)+1, \\ y(x_1)=0 \end{cases}$$

的解, 因此 $y=\phi(x)$ 在 $(a,x_1]$ 上存在. 故 $y=\phi(x)$ 在 (a,b) 上存在. □

类似地, 还有以下引理.

引理 1.3.27 初值问题

$$\begin{cases} y'=-A(x)|y|-B(x)-1, \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解在区间 (a,b) 上存在且唯一, 其中 $A(x),B(x)$ 在 (a,b) 上是非负的连续函数.

定理 1.3.28 考虑微分方程

$$y'=f(x,y), \tag{1.18}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域

$$D\colon a<x<b, -\infty<y<+\infty$$

内连续, 并且满足

$$|f(x,y)|\leqslant A(x)|y|+B(x), \tag{1.19}$$

这里 $A(x)\geqslant 0$ 和 $B(x)\geqslant 0$ 在区间 (a,b) 上连续. 则方程 (1.18) 的每个解的存在区间均为 (a,b).

证明 令 $y=\Phi(x)$ 是方程 (1.18) 的解, $y=\phi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} y'=-A(x)|y|-B(x)-1, \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

$y=\psi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} y' = A(x)|y| + B(x) + 1, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解. 则由第一比较定理, 由

$$-A(x)|y| - B(x) - 1 < f(x,y) < A(x)|y| + B(x) + 1$$

知当 $x > x_0$ 时, $\phi(x) < \Phi(x) < \psi(x)$, 因此 $y=\Phi(x)$ 在 $[x_0,b)$ 上存在. 同理, $y=\Phi(x)$ 在 $(a,x_0]$ 上存在. 故 $y=\Phi(x)$ 在 (a,b) 上存在. □

引理 1.3.29 (Arzelà-Ascoli 引理) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致有界:

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in [a,b],\ \forall n,$$

并且等度连续: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \quad \forall\, |x' - x''| < \delta,\ \forall n.$$

则存在子列 $\left\{f_{n_j}(x)\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定义 1.3.30 如果 Cauchy 问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

在区间 $|x-x_0| \leqslant a$ 上有两个解 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$, 使得对于该初值问题的任意解 $y(x)$, 都有

$$\Psi(x) \leqslant y(x) \leqslant \Phi(x), \quad |x-x_0| \leqslant a,$$

则分别称 $\Psi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 为该初值问题在区间 $|x-x_0| \leqslant a$ 上的最小解和最大解.

定理 1.3.31 存在 $\tau > 0$ 使得在区间 $|x-x_0| \leqslant \tau$ 上, Cauchy 问题 (1.20) 存在最大解和最小解.

证明 第一步 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f_n(x,y) \coloneqq f(x,y) + \varepsilon_n, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.21}$$

其中 $\varepsilon_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. 令 $R = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\} \subset G$. 由 Peano 存在性定理, 初值问题 (1.21) 在 $|x-x_0| \leqslant h_n$ 上存在解 $y = \varphi_n(x)$, 其中 $h_n = \min\left\{a, \dfrac{b}{M_n}\right\}$, $M_n = \max\limits_{(x,y)\in R} |f_n(x,y)|$. 令 $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$, $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, 则当 $n \to \infty$ 时, $M_n \to M$, $h_n \to h$. 故存在 $\tau < h$ 使得 $\varphi_n(x)$ 在 $[x_0-\tau, x_0+\tau]$ 上存在.

第二步 要证有子列 $\left\{\varphi_{n_j}(x)\right\}$ 在 $|x-x_0| \leqslant \tau$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$, 并且 $y = \varphi(x)$ 是 Cauchy 问题 (1.20) 的解. 由于 $\varphi_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s$,

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} f_n(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant (M+1)\tau, \quad \forall n.$$

因此 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $|x-x_0| \leqslant \tau$ 上一致有界. 又

$$|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| = \left|\int_{x''}^{x'} f_n(s,\varphi_n(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant (M+1)\,|x'-x''|\,,$$

故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M+1}$, 使得对任意 $|x'-x''| < \delta$ 都有 $|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \varepsilon$, 即 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $|x-x_0| \leqslant \tau$ 上等度连续. 因此, 由 Arzelà-Ascoli 引理, 有子列 $\left\{\varphi_{n_j}(x)\right\}$ 在 $|x-x_0| \leqslant \tau$ 上一致收敛. 设 $\varphi_{n_j}(x)$ 一致收敛到 $\varphi(x)$. 由于 $\varphi_{n_j}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_{n_j}(s,\varphi_{n_j}(s))\,\mathrm{d}s$, 令 $j \to \infty$, 有

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

故 $y = \varphi(x)$ 是 (1.20) 在 $|x-x_0| \leqslant \tau$ 上的解.

第三步 构造最大解. 由第一比较定理, 对 (1.20) 的任意一个解 $y = y(x)$, 在 $(x_0, x_0+\tau]$ 上 $y(x) < \varphi_{n_j}(x)$. 因此, $y(x) \leqslant \varphi(x)$, $\forall x \in [x_0, x_0+\tau]$. 从第一步开始, 用 $-\varepsilon_n$ 代替 ε_n, 重复前面过程, 可得存在 $\psi(x)$, 使得

$$y(x) \leqslant \psi(x), \quad \forall x \in [x_0-\tau, x_0].$$

令

$$\varPhi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\tau, \\ \psi(x), & x_0-\tau \leqslant x < x_0, \end{cases}$$

则 $\varPhi(x)$ 是 (1.20) 的解, 且是最大的.

类似可构造最小解. □

定理 1.3.32 (第二比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在区域 G 内连续, 且

$$f(x,y) \leqslant F(x,y), \quad (x,y) \in G,$$

又设函数 $y=\phi(x)$ 和 $y=\Phi(x)$ 在区间 (a,b) 上分别是初值问题

$$\mathrm{E}_1\colon\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

和

$$\mathrm{E}_2\colon\begin{cases}y'=F(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解 ($(x_0,y_0)\in G$), 并且 $y=\phi(x)$ 是初值问题 (E_1) 的右侧最小解和左侧最大解 (或 $y=\Phi(x)$ 是初值问题 (E_2) 的右侧最大解和左侧最小解), 则

$$\begin{cases}\phi(x)\leqslant\Phi(x), & x_0\leqslant x<b,\\ \phi(x)\geqslant\Phi(x), & a<x\leqslant x_0.\end{cases}$$

证明 设 $y=\phi(x)$ 是初值问题 E_1 的右侧最小解和左侧最大解. 考虑初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y)-\varepsilon_n,\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

其中 $\varepsilon_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 同定理 1.3.31 的证明可知, 存在该初值问题的解序列 $\{\phi_n(x)\}$ 的一个子列 $\left\{\phi_{n_j}(x)\right\}$ 一致收敛到 $\phi(x)$. 因为 $f(x,y)-\varepsilon_{n_j}<f(x,y)\leqslant F(x,y)$, 由第一比较定理得

$$\begin{cases}\phi_{n_j}(x)<\Phi(x), & x>x_0,\\ \phi_{n_j}(x)>\Phi(x), & x<x_0,\end{cases}$$

令 $j\to\infty$ 即得证. □

例 1.3.33 设初值问题

$$\begin{cases}y'=x^2+(y+1)^2,\\ y(0)=0\end{cases}$$

的解向右侧可延伸的最大存在区间为 $[0,\beta)$. 证明: $\dfrac{\pi}{4}<\beta<1$.

证明 设 $f(x,y)=x^2+(y+1)^2$. 由延拓定理, 该初值问题的解是唯一的, 并可以延伸到 $\mathbb{R}^2$ 的边界. 由例 1.3.20 (作换元 $z=y+1$), 解 $y=y(x)$ 的右行极大存在区间为 $[0,\beta)$, $\beta<+\infty$.

对任意的 $x\in(0,1)$, $(1+y)^2\leqslant f(x,y)\leqslant 1+(1+y)^2$. 令 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 分别是

$$\mathrm{A}_1:\begin{cases}y'=(1+y)^2,\\ y(0)=0\end{cases}\qquad\text{和}\quad \mathrm{A}_2:\begin{cases}y'=1+(1+y)^2,\\ y(0)=0\end{cases}$$

的解. 由 Picard 存在唯一性定理, $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 分别是初值问题 (A_1) 和 (A_2) 的唯一解 (从而既是最大解又是最小解). 注意到这两个方程都是变量分离方程, 可解得

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{1-x}-1,\quad \text{右行存在区间为 } [0,1),$$
$$\varphi_2(x)=-1+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\quad \text{右行存在区间为 } \left[0,\frac{\pi}{4}\right).$$

由第二比较定理, $\varphi_1(x)\leqslant y(x)\leqslant\varphi_2(x)$. 由延伸定理, $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\beta\leqslant 1$. 下证不等号是严格的. 由延伸定理 (画图), $\lim\limits_{x\to\beta^-}y(x)=+\infty$. 再由方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+(1+y)^2$ 可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+(1+y(x))^2}=\int_0^{\beta}\mathrm{d}x=\beta.$$

由积分性质有

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y(x)}{1+(1+y(x))^2}<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y(x)}{x^2+(1+y(x))^2}<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y(x)}{(1+y(x))^2}=1,$$

故 $\dfrac{\pi}{4}<\beta<1$. □

4　解对初值和参数的依赖性

§4.1　n 维线性空间中的微分方程

考虑高阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right).$$

令

$$y_1=y,\quad y_2=y',\quad\cdots,\quad y_n=y^{(n-1)},$$

则原方程等价于

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_2, \\
\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_3, \\
\quad\vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} = y_n, \\
\dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = F(x, y_1, \cdots, y_n).
\end{cases} \tag{1.22}
$$

考虑更一般的微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\
\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\
\quad\vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n),
\end{cases} \tag{1.23}
$$

若 $f_1 = y_2, f_2 = y_3, \cdots, f_{n-1} = y_n, f_n = F$, 则这恰对应于高阶微分方程组 (1.22).

令 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = (f_1(x, \boldsymbol{y}), \cdots, f_n(x, \boldsymbol{y}))$, 则 (1.23) 可记为 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$, 进而可研究初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ 下的初值问题.

特别地, 若 $f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + e_i(x)$, 则

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}(x),
$$

其中

$$
A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}(x) = \begin{pmatrix} e_1(x) \\ \vdots \\ e_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.
$$

我们称这是 n 阶线性方程组, 其中 n 是系数矩阵 A 的阶数.

下面考虑初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \\
\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0.
\end{cases} \tag{1.24}
$$

定义 1.4.1 称函数 $\boldsymbol{f}$ 在有界闭区域

$$
R\colon |x - x_0| \leqslant a, \quad |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| \leqslant b
$$

上对 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件, 如果存在常数 $L>0$, 使得对于任意的 $(x,\boldsymbol{y}_1),(x,\boldsymbol{y}_2)\in R$, 有

$$|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_2)|\leqslant L|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2|.$$

定理 1.4.2 (Picard 存在唯一性定理) 假设函数 $\boldsymbol{f}$ 在有界闭区域 R 上连续, 且对 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件, 则初值问题 (1.24) 的解在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在且唯一, 其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{\max\limits_{(x,\boldsymbol{y})\in R}|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})|}\right\}.$$

定理 1.4.3 (Peano 存在性定理) 假设函数 $\boldsymbol{f}$ 在有界闭区域 R 上连续, 则初值问题 (1.24) 的解在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在, 其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{\max\limits_{(x,\boldsymbol{y})\in R}|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})|}\right\}.$$

定理 1.4.4 对于 n 阶线性方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}(x)$, 若 $A(x),\boldsymbol{e}(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 则该方程组对于任意初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ $(x_0\in(a,b))$ 的解在整个区间 (a,b) 上存在且唯一.

§4.2　解对初值和参数的连续依赖性

考虑一般的 n 阶微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\end{cases}\tag{1.25}$$

的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 对初值 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 和参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 的依赖性, 其中 $\boldsymbol{f}$ 是 n 维向量函数, $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m$.

作变换

$$t=x-x_0,\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0,$$

则初值问题 (1.25) 变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t+x_0,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{1.26}$$

注意到原来的初值 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 在初值问题 (1.26) 中和 $\boldsymbol{\lambda}$ 一样以参数的形式出现, 因此可以只考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{1.27}$$

的解对参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 的依赖性.

定理 1.4.5 设 n 维向量函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 在闭区域

$$G\colon |x|\leqslant a,\quad |\boldsymbol{y}|\leqslant b,\quad |\boldsymbol{\lambda}|\leqslant c$$

上连续, 且对 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件, 即对于任意的 $(x,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{\lambda}),(x,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{\lambda})\in G$, 有

$$|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{\lambda})|\leqslant L|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2|,$$

其中常数 $L>0$. 令

$$M=\max_{(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})\in G}|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})|,\quad h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},$$

则初值问题 (1.27) 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x,\boldsymbol{\lambda})$ 在闭区域

$$D\colon |x|\leqslant h,\quad |\boldsymbol{\lambda}|\leqslant c$$

上是连续的.

证明概要 **第一步** 初值问题 (1.27) 等价于积分方程

$$\boldsymbol{y}(x,\boldsymbol{\lambda})=\int_0^x \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}s.$$

第二步 构造 Picard 序列:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\phi}_0(x,\boldsymbol{\lambda})\equiv 0,\\&\boldsymbol{\phi}_k(x,\boldsymbol{\lambda})=\int_0^x \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\phi}_{k-1}(s,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}s,\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由此可知 Picard 序列 $\{\boldsymbol{\phi}_k(x,\boldsymbol{\lambda})\}$ 关于 $(x,\boldsymbol{\lambda})\in D$ 是连续的.

第三步 利用数学归纳法证明

$$|\boldsymbol{\phi}_{k+1}(x,\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\phi}_k(x,\boldsymbol{\lambda})|<\frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!}\leqslant\frac{M}{L}\frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!},$$

因此 Picard 序列 $\{\boldsymbol{\phi}_k(x,\boldsymbol{\lambda})\}$ 对 $(x,\boldsymbol{\lambda})\in D$ 是一致收敛的.

第四步 令

$$\boldsymbol{\phi}(x,\boldsymbol{\lambda})=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\phi}_k(x,\boldsymbol{\lambda}),\quad (x,\boldsymbol{\lambda})\in D,$$

则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x,\boldsymbol{\lambda})$ 是初值问题 (1.27) 的唯一解. 再由上述 Picard 序列的一致收敛性可知, 极限函数 $\boldsymbol{\phi}(x,\boldsymbol{\lambda})$ 关于 $(x,\boldsymbol{\lambda})\in D$ 是连续的. □

在定理 1.4.5 中, Lipschitz 条件不是必要的. 事实上, 只要假设初值问题 (1.25) 的解存在且唯一即可.

定理 1.4.6 考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}),$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 的区域 $G\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上有界、连续的 n 维向量函数. 假设对于任意的初值点 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$, 该方程组的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 是在区间 I_0 上存在且唯一的, 其中 $I_0\subset\mathbb{R}$ 是有界闭区间, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $(\xi,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}')\in G$, 且

$$|(\xi,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}')-(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})|<\delta,$$

就有

$$|\boldsymbol{\phi}(x;\xi,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}')-\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})|<\varepsilon,\quad \forall x\in I_0,$$

即解对初值和参数是连续依赖的.

§4.3　解对初值和参数的连续可微性

定理 1.4.7 假设函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 在闭区域

$$G\colon |x-x_0|\leqslant a,\quad |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|\leqslant b,\quad |\boldsymbol{\lambda}|\leqslant c$$

上连续, 对 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 有连续偏导数, 则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\end{cases}$$

在闭区域 $R\colon |x-x_0|\leqslant h, |\boldsymbol{\lambda}|\leqslant c$ 上的唯一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 对 $(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 可微, 其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M=\max_{(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})\in G}|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})|.$$

变分方程　设定理 1.4.7 中方程的解为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$, 则它满足积分方程

$$\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}s. \tag{1.28}$$

① 在 (1.28) 两边对 x_0 求导, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})&=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{\phi}(x_0;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})+\int_{x_0}^{x}\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{y}}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})}_{A(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}s\\&=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})+\int_{x_0}^{x}A(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{z}(x)=\dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{z},\\ \boldsymbol{z}(x_0)=-\boldsymbol{f}(x_0,y_0,\lambda).\end{cases}$$

② 在 (1.28) 两边对 y_0 求导, 得到[3]

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{1}+\int_{x_0}^{x}\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{y}}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})}_{A(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{y}_0}\,\mathrm{d}s.$$

令 $\boldsymbol{z}(x)=\dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{z},\\ \boldsymbol{z}(x_0)=\mathbf{1}.\end{cases}$$

③ 在 (1.28) 两边对 $\boldsymbol{\lambda}$ 求导, 得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=\int_{x_0}^{x}\left[\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{y}}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})}_{A(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})+\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}_{B(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})}\right]\mathrm{d}s.$$

令 $\boldsymbol{z}(x)=\dfrac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$, 则[4]

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{z}+B,\\ \boldsymbol{z}(x_0)=\mathbf{0}.\end{cases}$$

注意到若 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}$ 均是一维向量, 以上 ① ② ③ 中得到的 3 个微分方程是一阶线性微分方程, 可以解出. 于是我们无需求解原方程便能求得相关量 (如下面的例 1.4.8).

例 1.4.8 设函数 $y=y(x,\mu)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\mu(x+y^2),\\ y(0)=1\end{cases}$$

的解. 求 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}$.

[3]这里用 $\mathbf{1}$ 表示单位矩阵.

[4]这里用 $\mathbf{0}$ 表示零矩阵.

解 $f(x,y,\mu)=y+\mu(x+y^2)$ 在 $(x,y,\mu)\in\mathbb{R}^3$ 上连续, 在任意闭矩形上关于 y,μ 都有连续的偏导数, 由定理 1.4.7 , 解 $y=y(x,\mu)$ 关于 x,μ 是可微的.

由积分方程

$$y(x,\mu)=1+\int_0^x\left[y(s,\mu)+\mu\left(s+(y(s,\mu))^2\right)\right]\,\mathrm{d}s$$

两边对 μ 求导可得

$$\frac{\partial y}{\partial\mu}(x,\mu)=\int_0^x\left[\frac{\partial y}{\partial\mu}(s,\mu)+s+(y(s,\mu))^2+2\mu y(s,\mu)\frac{\partial y}{\partial\mu}(s,\mu)\right]\,\mathrm{d}s.$$

令 $z(x,\mu)=\dfrac{\partial y}{\partial\mu}(x,\mu)$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1+2\mu y(x,\mu))\,z+x+(y(x,\mu))^2\,,\\ z(0,\mu)=0.\end{cases}$$

解这个一阶线性微分方程可得

$$z(x,\mu)=\int_0^x\left[(y(s,\mu))^2+s\right]\exp\left(\int_s^x\left[1+2\mu y(t,\mu)\right]\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s.$$

由解对参数的连续依赖性可知, $y(x,0)$ 是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y,\\ y(0)=1\end{cases}$$

的解, 因此 $y(x,0)=e^x$. 在前式中取 $\mu=0$ 则有

$$z(x,\mu)\Big|_{\mu=0}=e^x\int_0^x e^{-t}\left(t+e^{2t}\right)\,\mathrm{d}t,$$

于是 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=z(x,\mu)\Big|_{\mu=0}=e^{2x}-x-1.$ □

5　线性微分方程组

§5.1　一般理论

考虑线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j+f_i(x),\quad i=1,2,\cdot,n,$$

其中函数 $a_{ij}(x), f_i(x)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在区间 (a,b) 上连续. 令

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\quad A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix},$$

可将上面的微分方程组改写成更紧凑的形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x). \tag{1.29}$$

定理 1.5.1 线性微分方程组 (1.29) 满足初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解在 (a,b) 上存在且唯一, 其中 $x_0\in(a,b)$ 和 $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^n$ 是任意给定的.

正如在初等积分法中提到的, 要解非齐次方程, 先解对应的齐次方程, 仍然是这里会用到的重要规则. 下面我们就先考虑齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}. \tag{1.30}$$

引理 1.5.2 对任意 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 若 $\boldsymbol{y}_1(x),\boldsymbol{y}_2(x)$ 是方程组 (1.30) 的解, 则 $c_1\boldsymbol{y}_1(x)+c_2\boldsymbol{y}_2(x)$ 也是方程组 (1.30) 的解.

记 S 为方程组 (1.30) 的所有解组成的集合, 则由引理 1.5.2 可知 S 是一个线性空间.

引理 1.5.3 S 是 n 维线性空间, 这里 n 是方程组 (1.30) 的阶数.

证明 我们构造 S 与 $\mathbb{R}^n$ 之间的同构. 任意取定 $x_0\in(a,b)$, 对任意 $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^n$, 由定理 1.5.1 , 存在唯一的 (a,b) 上的解 $\boldsymbol{y}(x)$ 使得 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$. 定义映射

$$\boldsymbol{H}:\mathbb{R}^n\to S,\quad \boldsymbol{y}_0\mapsto\boldsymbol{y}(x).$$

- $\boldsymbol{H}$ 是满射. 对任意 $\boldsymbol{y}(x)\in S$, 令 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}(x_0)$, 则以 $\boldsymbol{y}_0$ 为初值的解是 $\boldsymbol{y}(x)$, 即 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}(x)$.
- $\boldsymbol{H}$ 是单射. 若 $\boldsymbol{y}(x),\boldsymbol{z}(x)\in S$, 且 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{z}(x_0)$, 则由解的唯一性, $\boldsymbol{y}(x)\equiv\boldsymbol{z}(x)$, $\forall x\in(a,b)$.
- $\boldsymbol{H}$ 是线性映射. 对任意 $\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{H}(c_1\boldsymbol{y}_0+c_2\boldsymbol{z}_0)$ 是以 $c_1\boldsymbol{y}_0+c_2\boldsymbol{z}_0$ 为初值的解. 令以 $\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0$ 为初值的解分别为 $\boldsymbol{y}(x),\boldsymbol{z}(x)$, 则 $(c_1\boldsymbol{y}+c_2\boldsymbol{z})|_{x=x_0}=c_1\boldsymbol{y}_0+c_2\boldsymbol{z}_0$. 由唯一性,

$$c_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_0+c_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}_0=c_1\boldsymbol{y}(x)+c_2\boldsymbol{z}(x)=\boldsymbol{H}(c_1\boldsymbol{y}_0+c_2\boldsymbol{z}_0).$$

故 $\boldsymbol{H}:\mathbb{R}^n\to S$ 是线性同构, 从而 S 是 n 维的. □

定义 1.5.4 称向量函数 $\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)$ 在区间 (a,b) 上是线性相关的, 若存在不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_n$, 使得

$$c_1\boldsymbol{\phi}_1(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\phi}_n(x)=0,\quad \forall x\in(a,b).$$

否则, 称它们是线性无关的.

定理 1.5.5 方程组 (1.30) 在区间 (a,b) 上有 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots\boldsymbol{\phi}_n(x)$, 并且它的通解为

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{\phi}_1(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\phi}_n(x),$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 为任意常数.

证明 令 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个线性无关的向量. 令 $\boldsymbol{\phi}_1(x)=\boldsymbol{He}_1,\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)=\boldsymbol{He}_n$. 要证 $\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)$ 是线性无关的. 否则, 存在不全为零的 $c_1,\cdots,c_n$, 使得

$$c_1\boldsymbol{\phi}_1(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\phi}_n(x)=0,\quad \forall x\in(a,b).$$

当 $x=x_0$ 时, 便有

$$c_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关, $c_1=\cdots=c_n=0$, 矛盾.

若 $\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)$ 是线性无关的, 则对任意 $\boldsymbol{y}(x)\in S$, $\boldsymbol{y}(x),\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)$ 是线性相关的, 因此存在不全为零的 $c_0,c_1,\cdots,c_n$, 使得

$$c_0\boldsymbol{y}(x)+c_1\boldsymbol{\phi}_1(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\phi}_n(x)=0,\quad \forall x\in(a,b).$$

由 $\boldsymbol{\phi}_1(x),\cdots,\boldsymbol{\phi}_n(x)$ 线性无关知 $c_0\neq 0$. 故

$$\boldsymbol{y}(x)=-\frac{1}{c_0}\left[c_1\boldsymbol{\phi}_1(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{\phi}_n(x)\right].$$

□

称方程组 (1.30) 的 n 个线性无关的解向量为它的一个基本解组. 下面研究一个问题: 如何判断方程组 (1.30) 的 n 个解向量是线性无关的?

设 $\boldsymbol{y}_1(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)=\begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$ 是方程组 (1.30) 的 n 个解向量.定义

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

称这个行列式为解组 $\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$ 的 Wronsky 行列式. 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} &= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y'_{i1}(x) & y'_{i2}(x) & \cdots & y'_{n1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_{j1}(x) & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_{j2}(x) & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_{jn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[\text{依次减去其他行的倍数}]{\text{第 } i \text{ 个行列式中第 } i \text{ 行}} [a_{11}(x)+\cdots+a_{nn}(x)]\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \\
&= \operatorname{tr} A(x)\cdot W,
\end{aligned}$$

这是一个一阶齐次线性微分方程, 可以解得

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

这个公式称为 Liouville 公式. 由此可知, Wronsky 行列式 $W(x)$ 在区间 (a,b) 上要么恒为零, 要么恒不为零.

定理 1.5.6 方程组 (1.30) 的解组 $\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$ 构成基本解组的充要条件是

$$W(x)\neq 0,\quad a<x<b.$$

对于方程组 (1.30) 的解组 $\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$, 令矩阵 $Y(x)=(y_{ij}(x))_{n\times n}$[5], 则

$$\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x}=A(x)Y(x),$$

称 $Y(x)$ 为方程组 (1.30) 的解矩阵. 若 $\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$ 线性无关, 则称 $Y(x)$ 为方程组 (1.30) 的一个基 (本) 解矩阵. 若 $\varPhi(x)$ 是方程组 (1.30) 的一个基解矩阵, 则方程组 (1.30) 的通解为 $\boldsymbol{y}=\varPhi\boldsymbol{c}$, 其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意常数构成的 n 维列向量.

推论 1.5.7 (1) 设 $\varPhi(x)$ 是方程组 (1.30) 的一个基解矩阵, 则对于任意的非奇异常数矩阵 C, 矩阵 $\varPsi(x)=\varPhi(x)C$ 也是方程组 (1.30) 的一个基解矩阵.

(2) 若 $\varPhi(x)$ 和 $\varPsi(x)$ 的方程组 (1.30) 的两个基解矩阵, 则存在非奇异矩阵 C, 使得 $\varPsi(x)=\varPhi(x)C$.

证明 (1) 只需注意到

$$\frac{\mathrm{d}\varPsi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\varPhi(x)}{\mathrm{d}x}C=(A(x)\varPhi(x))C=A(x)(\varPhi(x)C)=A(x)\varPsi(x)$$

以及 $\det\varPsi(x)=\det\varPhi(x)\cdot\det C\neq 0$.

(2) 令 $C=\varPhi(x_0)^{-1}\varPsi(x_0)$, 其中 $x_0\in(a,b)$, 则 $\varPsi(x)-\varPhi(x)C$ 是方程组 (1.30) 的解矩阵, 且 $\varPsi(x_0)-\varPhi(x_0)C=0$, 由解的唯一性, $\varPsi(x)-\varPhi(x)C\equiv O$. □

下面回到非齐次线性微分方程组的研究上.

引理 1.5.8 如果 $\varPhi(x)$ 是方程组 (1.30) 的一个基解矩阵, $\boldsymbol{\phi}^*(x)$ 是方程组 (1.29) 的一个特解, 则方程组 (1.29) 的任意解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\phi}(x)=\varPhi(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\phi}^*(x),$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是常数列向量.

证明 由于 $\boldsymbol{\phi}(x)-\boldsymbol{\phi}^*(x)$ 是方程组 (1.30) 的解, 由定理 1.5.6 , 存在常数列向量 $\boldsymbol{c}$ 使得

$$\boldsymbol{\phi}(x)-\boldsymbol{\phi}^*(x)=\varPhi(x)\boldsymbol{c}.$$

□

[5]这里矩阵行列指标 i,j 的含义见第 34 页.

下面用常数变易法求方程组 (1.29) 的特解 $\boldsymbol{\phi}^*(x)$.

令 $\boldsymbol{\phi}^*(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)$, 其中 $\boldsymbol{c}(x)$ 是函数列向量. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)\right)=A(x)\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{f}(x).$$

由

$$\mathrm{LHS}=\Phi'(x)\boldsymbol{c}(x)+\Phi(x)\boldsymbol{c}'(x)=A(x)\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)+\Phi(x)\boldsymbol{c}'(x)$$

可将上式化简为

$$\Phi(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{f}(x),$$

也即

$$\boldsymbol{c}'(x)=\Phi^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x).$$

因此

$$\boldsymbol{c}(x)=\boldsymbol{c}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s,$$

从而

$$\boldsymbol{\phi}^*(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

若取 $\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{0}$ (注意这里只需要得到一个特解) 就有

$$\boldsymbol{\phi}^*(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

再结合引理 1.5.8 就得到方程组 (1.29) 的通解为

$$\boldsymbol{\phi}(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

若 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$, 则解为

$$\boldsymbol{y}=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

§5.2　常系数线性微分方程组

我们称

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x) \tag{1.31}$$

为常系数线性微分方程组, 其中 A 为 n 阶实常数矩阵, n 维向量函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 在区间 (a,b) 上连续. 与上一小节一样, 我们先研究齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y}. \tag{1.32}$$

定义 1.5.9 对于任意 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

对 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 容易验证 $\|\cdot\|$ 是范数:

(1) $\|A\|\geqslant 0$ 且 $\|A\|=0 \iff A=O$.

(2) $\|kA\|=|k|\|A\|, \forall k\in\mathbb{R}$.

(3) $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

引理 1.5.10 矩阵无穷级数

$$e^{Ax}=I_n+Ax+\frac{1}{2!}(Ax)^2+\cdots+\frac{1}{k!}(Ax)^k+\cdots\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

在 $\mathbb{R}$ 的任意有界区间上是一致收敛的, 也是绝对收敛的. 此时, 我们称 e^{Ax} 为矩阵指数函数.

引理 1.5.11 (1) 若 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB=BA$, 则 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B$.

(2) 若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则 e^A 可逆, 且 $\left(e^A\right)^{-1}=e^{-A}$.

(3) 若 $A,P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 P 可逆, 则 $e^{PAP^{-1}}=Pe^AP^{-1}$.

定理 1.5.12 矩阵指数函数 e^{Ax} 是常系数齐次线性微分方程组 (1.32) 的基解矩阵.

证明 由 e^{Ax} 在 $\mathbb{R}$ 的任意有界区间上一致收敛, 利用逐项微分法则, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{Ax}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Ax)^k=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}x^{k-1}=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Ax)^k=Ae^{Ax}.$$

根据 Wronsky 行列式性质, 由 $\det\left(e^{Ax}\right)|_{x=0}=1\neq 0$ 知 e^{Ax} 是方程组 (1.32) 的基解矩阵. □

推论 1.5.13 (1) 常系数齐次线性微分方程组 (1.32) 的通解为

$$\boldsymbol{y}=e^{Ax}\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是由任意常数构成的 n 维列向量.

(2) 常系数非齐次线性微分方程组 (1.31) 的通解为

$$\boldsymbol{y}=e^{Ax}\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}e^{A(x-s)}\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 c 是由任意常数构成的 n 维列向量; 满足初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{y}=e^{A(x-x_0)}\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}e^{A(x-s)}\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

回顾线性代数　对于任意 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 存在可逆方阵 P, 使得 $P^{-1}AP = J$, 其中

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \cdots, J_k)$$

为 Jordan 标准形, J_i $(i = 1, \cdots, k)$ 为 n_i 阶方阵, 其形如

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} =: \lambda_i I_{n_i} + Z_{n_i}.$$

我们有

$$e^{J_i x} = e^{\lambda_i I_{n_i} x} \cdot e^{Z_{n_i} x} = e^{\lambda_i x} \cdot e^{Z_{n_i} x} = e^{\lambda_i x} \begin{pmatrix} 1 & x & \dfrac{x^2}{2!} & \cdots & \dfrac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \dfrac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}.$$

由 $A = PJP^{-1}$ 可得 $e^{Ax} = e^{P(xJ)P^{-1}} = Pe^{Jx}P^{-1}$, 因此由推论 1.5.7 (1) 可知 $e^{Ax}P = Pe^{Jx}$ 是方程组 (1.32) 的基解矩阵.

A **只有单特征值**　若 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 设 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\xi}_n \end{pmatrix}$, 则

$$Pe^{Jx} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\xi}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{\xi}_1 & \cdots & e^{\lambda_n x}\boldsymbol{\xi}_n \end{pmatrix}.$$

由 Pe^{Jx} 是方程组 (1.32) 的基解矩阵知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\lambda_i x}\boldsymbol{\xi}_i\right) = A\left(e^{\lambda_i x}\boldsymbol{\xi}_i\right),$$

也即

$$\lambda_i e^{\lambda_i x}\boldsymbol{\xi}_i = e^{\lambda_i x} A\boldsymbol{\xi}_i,$$

故 $A\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$, 即 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是特征值 λ_i 对应的特征向量.

若 A 的某个特征值 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, 其特征向量为 $\boldsymbol{\xi}$, 则从 $A\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 可得 $A\overline{\boldsymbol{\xi}}=\overline{\lambda\boldsymbol{\xi}}$, 即 $\left(\overline{\lambda},\overline{\boldsymbol{\xi}}\right)$ 也是 A 的特征对. 令 $\boldsymbol{y}=e^{\lambda x}\boldsymbol{\xi}$, 则 $\overline{y}=e^{\overline{\lambda}x}\overline{\boldsymbol{\xi}}$ 也是方程组 (1.32) 的解. 故

$$\operatorname{Re}\boldsymbol{y}\coloneqq\frac{\boldsymbol{y}+\overline{\boldsymbol{y}}}{2}\quad\text{和}\quad\operatorname{Im}\boldsymbol{y}\coloneqq\frac{\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}}{2\,\mathrm{i}}$$

也是方程组 (1.32) 的解.

例 1.5.14 求微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y}$$

的通解, 其中

$$A=\begin{pmatrix}5&-1\\1&5\end{pmatrix}.$$

解 计算可得 A 有特征值 $\lambda_1=5+\mathrm{i}$ 与 $\lambda_2=5-\mathrm{i}$, 其对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$. 由

$$e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}e^{(5+\mathrm{i})x}\,\mathrm{i}\\e^{(5+\mathrm{i})x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{5x}\left(-\sin x+\mathrm{i}\cos x\right)\\e^{5x}\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)\end{pmatrix}$$

可得基解矩阵为

$$e^{5x}\begin{pmatrix}-\sin x&\cos x\\\cos x&\sin x\end{pmatrix}.$$

因此方程组的通解为

$$\boldsymbol{y}=c_1e^{5x}\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}+c_2e^{5x}\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

A **有重特征值**　若 A 有重的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$ $(n_1+\cdots+n_s=n)$, 则基解矩阵 $e^{Ax}P=Pe^{Jx}=P\operatorname{diag}\left(e^{J_1x},\cdots,e^{J_sx}\right)$. 分析 e^{J_ix} 的具体形状可知所有与 λ_i 有关的列向量均形如

$$\boldsymbol{y}=\left(\boldsymbol{\xi}_0+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}\right)e^{\lambda_i x}.$$

将其代入方程组 (1.32) 可得

$$\left(\boldsymbol{\xi}_1+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}\right)e^{\lambda_i x}+\lambda_i\left(\boldsymbol{\xi}_0+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}\right)e^{\lambda_i x}$$
$$=A\left(\boldsymbol{\xi}_0+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}\right)e^{\lambda_i x}.$$

约去 $e^{\lambda_i x}$ 就得到

$$\boldsymbol{\xi}_1+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}=(A-\lambda_i I)\left(\boldsymbol{\xi}_0+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}\right).$$

对比等号两边 x 的同幂次系数可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1=(A-\lambda_i I)\boldsymbol{\xi}_0,\\ \boldsymbol{\xi}_2=(A-\lambda_i I)\boldsymbol{\xi}_1,\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{\xi}_{n_i-1}=(A-\lambda_i I)\boldsymbol{\xi}_{n_i-2},\\ \mathbf{0}=(A-\lambda_i I)\boldsymbol{\xi}_{n_i-1}.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(A-\lambda_i I)^{n_i}\boldsymbol{\xi}_0=\mathbf{0},\\ \boldsymbol{\xi}_1=(A-\lambda_i I)\boldsymbol{\xi}_0,\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{\xi}_{n_i-1}=(A-\lambda_i I)^{n_i-1}\boldsymbol{\xi}_0.\end{cases}\tag{1.33}$$

定理 1.5.15 设 n 阶矩阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 它们的重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$, 则方程组 (1.32) 有如下形式的基解矩阵:

$$\varPhi(x)=\left(e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{P}_1^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{P}_{n_1}^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}\boldsymbol{P}_1^{(s)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}\boldsymbol{P}_{n_s}^{(s)}(x)\right),$$

其中

$$\boldsymbol{P}_j^{(i)}(x)=\boldsymbol{\xi}_{j0}^{(i)}+\frac{x}{1!}\boldsymbol{\xi}_{j1}^{(i)}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{\xi}_{j,n_i-1}^{(i)}$$

是与 λ_i 对应的第 j 个向量多项式 $(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,n_i)$, 而 $\boldsymbol{\xi}_{10}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n_i 0}^{(i)}$ 是齐次线性方程组 (1.33) 右侧第 1 式的 n_i 个线性无关解, 且其余的 $\boldsymbol{\xi}_{jl}^{(i)}(j=1,\cdots,n_i;l=1,\cdots,n_i-1)$ 是将相应的 $\boldsymbol{\xi}_{j0}^{(i)}$ 代替 (1.33) 右侧后 n_i-1 式中的 $\boldsymbol{\xi}_0$ 而依次得到的.

例 1.5.16 求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\ 0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

解 A 的特征多项式 $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^3$, 特征值为 $\lambda_1 = 1$ (3 重). 由于 $(A-\lambda_1 I)^3 = O$, 因此方程组 $(A-\lambda_1 I)^3\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ 有 3 个线性无关解

$$\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_{11}^{(1)} &= (A-\lambda_1 I)\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)} = \mathbf{0},\\
\boldsymbol{\xi}_{12}^{(1)} &= (A-\lambda_1 I)^2\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)} = \mathbf{0},\\
\boldsymbol{\xi}_{21}^{(1)} &= (A-\lambda_1 I)\boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\xi}_{22}^{(1)} &= (A-\lambda_1 I)^2\boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)} = \mathbf{0},\\
\boldsymbol{\xi}_{31}^{(1)} &= (A-\lambda_1 I)\boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\xi}_{32}^{(1)} &= (A-\lambda_1 I)^2\boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因此基解矩阵

$$\Phi(x) = e^x\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}x & -\frac{2}{3}x\\ 0 & 1-\frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x\\ 0 & -\frac{1}{3}x & 1+\frac{1}{3}x\end{pmatrix}.$$

所给方程的所有解为

$$\boldsymbol{y} = \Phi(x)\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意三维常数列向量. □

利用基解矩阵, 还可对解在 $x\to+\infty$ 时的行为作出估计.

例 1.5.17 证明: 常系数齐次线性微分方程组 (1.32) 的所有解当 $x\to+\infty$ 时均趋向于零 $\Longleftrightarrow$ A 的所有特征值的实部均小于零.

证明 基解矩阵形如

$$\Phi(x)=\left(e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{P}_1^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{P}_{n_1}^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}\boldsymbol{P}_1^{(s)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}\boldsymbol{P}_{n_s}^{(s)}(x)\right).$$

若 A 的所有特征值的实部均小于零, 则

$$\left|e^{\lambda_i x}\boldsymbol{P}_j^{(i)}(x)\right|=e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)x}\underbrace{\left|e^{\mathrm{Im}(\lambda_i)\,\mathrm{i}\,x}\right|}_{1}\left|\boldsymbol{P}_j^{(i)}(x)\right|=e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)x}\left|\boldsymbol{P}_j^{(i)}(x)\right|\to 0,\quad x\to+\infty,\quad \forall i,j.$$

反过来, 若存在特征值 λ_i 使得 $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant 0$, 则存在 j, 使得方程组的一个解

$$e^{\lambda_i x}\boldsymbol{P}_j^{(i)}(x)\not\to\boldsymbol{0},\quad x\to+\infty,$$

得出矛盾. □

§5.3　高阶线性微分方程

考虑 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),\tag{1.34}$$

其中函数 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 均在区间 (a,b) 上连续. 当 $f(x)\not\equiv 0$ 时, 称方程 (1.34) 为非齐次线性微分方程; 当 $f(x)\equiv 0$ 时, 得到

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,\tag{1.35}$$

称之为方程 (1.34) 对应的齐次线性微分方程.

方程 (1.34) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}y\\y'\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n(x)&-a_{n-1}(x)&-a_{n-2}(x)&\cdots&-a_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y'\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\f(x)\end{pmatrix}.\tag{1.36}$$

若 $y=\phi(x)$ 是方程 (1.34) 的解, 则 $\begin{pmatrix}\phi(x)\\\phi'(x)\\\vdots\\\phi^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}$ 是方程组 (1.36) 的解向量.

方程 (1.35) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

设 $\begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_1'(x) \\ \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \phi_n(x) \\ \phi_n'(x) \\ \vdots \\ \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ 是 (1.37) 的 n 个解向量 (也即设 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 是方程 (1.35) 的 n 个解). 定义

$$W(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

为 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 的 Wronsky 行列式. 由 Liouville 公式,

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

称 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 线性相关, 若存在不全为零的常数 $c_1, \cdots, c_n$, 使得

$$c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

否则, 称它们线性无关.

定理 1.5.18 方程 (1.35) 在区间 (a, b) 上有 n 个线性无关的解, 且该方程的任意解均可由这 n 个线性无关解线性表出.

定理 1.5.19 设 $y = \phi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个解, 其中 $p(x), q(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 又假设 $\phi(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. 则该方程的通解为

$$y = c_1\phi(x) + c_2\phi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

证明 只要找到一个与 $\phi(x)$ 线性无关的解即可. 设它为 $y(x)$, 则由 Liouville 公式,

$$W(x)=\begin{vmatrix}\phi(x) & y(x)\\ \phi'(x) & y'(x)\end{vmatrix}=W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

由 $\phi(x)\neq 0$ 知这等价于

$$\left(\frac{y(x)}{\phi(x)}\right)'=\frac{y'(x)\phi(x)-y(x)\phi'(x)}{\phi^2(x)}=\frac{W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}s\right)}{\phi^2(x)}.$$

积分即得

$$\frac{y(x)}{\phi(x)}-\frac{y(x_0)}{\phi(x_0)}=W(x_0)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s,$$

故

$$y(x)=\frac{y(x_0)}{\phi(x_0)}\phi(x)+W(x_0)\phi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s.$$

由此可得该方程的通解为

$$y=c_1\phi(x)+c_2\phi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

例 1.5.20 已知 $y=x$ 是方程

$$y''+\frac{x}{1+x^2}y'-\frac{y}{1+x^2}=0$$

的解, 求该方程的通解.

解 设该方程与解 $y=x$ 线性无关的另一个解为 $y=\varphi(x)$, 则由 Liouville 公式,

$$W(x)=\begin{vmatrix}x & \varphi\\ 1 & \varphi'\end{vmatrix}=c_1\exp\left(-\int_0^x\frac{s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s\right)=\frac{c_1}{\sqrt{x^2+1}},$$

其中 c_1 为任意常数. 再将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varphi}{x}\right)=\frac{c_1}{x^2\sqrt{x^2+1}},$$

解得 (右式积分时利用换元 $x=\tan t$)

$$\frac{\varphi(x)}{x}=-c_1\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c_2\iff\varphi(x)=-c_1\sqrt{x^2+1}+c_2x,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 故所给方程的通解为

$$y=c_1\sqrt{x^2+1}+c_2x,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

仿照常系数线性微分方程组的处理, 仍可用常数变易法由方程 (1.35) 的解推导方程 (1.34) 的解. 由于高阶线性微分方程中最重要的是二阶线性微分方程, 下面仅讨论二阶情形.

考虑二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1.38}$$

方程 (1.38) 的方程组形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

设对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个线性无关的解为 $\phi_1(x), \phi_2(x)$, 其基解矩阵为

$$\varPhi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix}.$$

设方程组 (1.39) 的解为 $\varPhi(x)\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$, 代入方程组 (1.39) 就得到

$$\varPhi'(x)\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + \varPhi(x)\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = A(x)\varPhi(x)\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

结合 $\varPhi'(x) = A(x)\varPhi(x)$ 可将上式化简为

$$\varPhi(x)\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

也即

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \varPhi^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

写出这个方程组的具体形式, 即

$$\begin{cases} \phi_1(x)c_1'(x) + \phi_2(x)c_2'(x) = 0, \\ \phi_1'(x)c_1'(x) + \phi_2'(x)c_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{\phi_2(x)}{W(x)} f(x), \\ c_2'(x) = \dfrac{\phi_1(x)}{W(x)} f(x). \end{cases}$$

下面不采用化为方程组的方式, 重新推导常数变易法的步骤.

设方程 (1.38) 的解为

$$y = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x),$$

则

$$y' = c_1(x)\phi_1'(x) + c_2(x)\phi_2'(x) + c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x).$$

令

$$c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) = 0, \tag{1.40}$$

则

$$\begin{aligned} y'' &= c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) + c_1(x)\left[-p(x)\phi_1'(x) - q(x)\phi_1(x)\right] + c_2(x)\left[-p(x)\phi_2'(x) - q(x)\phi_2(x)\right] \\ &= c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) - p(x)y' - q(x)y. \end{aligned}$$

于是

$$y' + p(x)y' + q(x)y = c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x),$$

也即要求

$$c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) = f(x). \tag{1.41}$$

进而由 (1.40) 与 (1.41) 可解得 $c_1'(x)$ 与 $c_2'(x)$.

下面讨论常系数齐次高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{1.42}$$

方程 (1.42) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \lambda + a_1 \end{vmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

我们把 $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ 称为方程 (1.42) 的特征多项式, 并称 $p(\lambda) = 0$ 为方程 (1.42) 的特征方程. 可将特征方程记忆为“把所给方程中 $y^{(k)}$ 替换成 λ^k”.

定理 1.5.21 设常系数齐次高阶微分方程 (1.42) 的特征多项式在 $\mathbb{C}$ 中有 s 个不同的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数分别为 $n_1, \cdots, n_s$ $(n_1 + \cdots + n_s = n)$, 则函数组

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, & \cdots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ & \cdots \\ e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, & \cdots, x^{n_s-1}e^{\lambda_s x} \end{cases}$$

是方程 (1.42) 的一个基本解组.

注 1.5.22 对于 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, 在方程 $p(\lambda) = 0$ 有虚根的时候, 虚根必定成对出现. 这时, 可以利用提取实部和虚部的方法来得到相应的实值解.

例 1.5.23 求解微分方程

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y'' - 8y' + 3y = 0.$$

解 特征方程为 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$, 特征根为

$$\lambda_1 = 1(2\text{ 重}), \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}\,\mathrm{i}, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{i}\,.$$

基本解组为

$$e^x, xe^x, e^x\cos\left(\sqrt{2}x\right), e^x\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

通解为

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^x\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_4e^x\sin\left(\sqrt{2}x\right),$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数. $\square$

例 1.5.24 求解微分方程

$$y'' + \alpha^2 y = f(x),$$

其中 $\alpha > 0$ 是常数, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续.

证明 齐次线性微分方程 $y''+\alpha^2 y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\alpha^2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = \alpha\,\mathrm{i}, \lambda_2 = -\alpha\,\mathrm{i}$, 基本解组为 $\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)$, 通解为

$$y = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 设所给非齐次线性微分方程的一个特解为

$$y^* = c_1(x) \cos(\alpha x) + c_2(x) \sin(\alpha x).$$

则 Wronsky 行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & \sin(\alpha x) \\ -\alpha \sin(\alpha x) & \alpha \cos(\alpha x) \end{vmatrix} = \alpha.$$

于是

$$c_1'(x) = -\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) f(x), \quad c_2'(x) = \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) f(x).$$

由此可解出[6]

$$c_1(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^{x} \sin(\alpha s) f(s)\,\mathrm{d}s,$$
$$c_2(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^{x} \cos(\alpha s) f(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此特解

$$y^* = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^{x} \left[-\cos(\alpha x) \sin(\alpha s) + \sin(\alpha x) \cos(\alpha s)\right] f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^{x} \sin\left[\alpha(x-s)\right] f(s)\,\mathrm{d}s.$$

故所给方程的通解为

$$y = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\sin\left[\alpha(x-s)\right]}{\alpha} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

注 1.5.25 本例中求得的通解在偏微分方程中非常重要, 建议记忆.

[6] 由于只需求出一个特解, 可取 $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{0}$.

经验解法　当方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$$

的右端函数 $f(x)$ 具有某些特殊形式时, 可凭经验推测出相应特解的形式, 进而由待定系数法求出特解.

(1) $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$, 其中 $P_m(x)$ 是 m 次多项式, μ 不是对应齐次线性微分方程的特征多项式的根. 则特解形如

$$\phi^*(x)=Q_m(x)e^{\mu x},$$

其中 $Q_m(x)$ 是 m 次多项式.

例 1.5.26 求解微分方程

$$y''+y=xe^x.$$

解 对应的齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 特征根为 $\lambda_1=\mathrm{i},\lambda_2=-\mathrm{i}$. 因此 $\mu=1$ 不是特征根. 设特解

$$\phi^*(x)=(ax+b)e^x,$$

则

$$\phi^{*\prime\prime}=(ax+2a+b)e^x.$$

代入方程可得

$$(2ax+2a+2b)e^x=xe^x,$$

即

$$\begin{cases}2a=1,\\ 2a+2b=0\end{cases}\implies\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

因此特解

$$\phi^*(x)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^x,$$

通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^x,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

(2) $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$, 其中 $P_m(x)$ 是 m 次多项式, μ 是对应齐次线性微分方程的特征多项式的 k 重根. 则特解形如

$$\phi^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\mu x},$$

其中 $Q_m(x)$ 是 m 次多项式.

例 1.5.27 求解微分方程

$$y'' + y' - 2y = xe^x.$$

解 对应的齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$. 因此 $\mu = 1$ 是单重特征根. 设特解

$$\phi^*(x) = x(ax + b)e^x,$$

代入所给方程就得到

$$6ax + 2a + 3b = x,$$

解得

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{9}.$$

因此特解

$$\phi^*(x) = x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^x,$$

通解为

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

例 1.5.28 求解微分方程

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$$

思路 令 $\phi_1(x)$ 是方程

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$$

的一个特解, $\phi_2(x)$ 是方程

$$y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$$

的一个特解, 则 $\phi_1 + \phi_2$ 是原方程的一个特解. □

(3) $f(x) = [A_m(x)\cos(\beta x) + B_l(x)\sin(\beta x)]\,e^{\alpha x}$, 其中 $A_m(x), B_l(x)$ 分别是 m 次和 l 次多项式, $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ 是对应齐次线性微分方程的特征多项式的 k 重根 (若不是根则 $k = 0$). 则特解形如

$$\phi^*(x) = x^k\left[C_n(x)\cos(\beta x) + D_n(x)\sin(\beta x)\right]e^{\alpha x},$$

其中 $C_n(x)$ 和 $D_n(x)$ 均为 n 次多项式, $n = \max\{m, l\}$.

例 1.5.29 求解微分方程

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

解 对应的齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}, \lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$, 它的通解为

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 设所给方程的一个特解为

$$\phi^*(x) = x(A\cos x + B\sin x)e^x,$$

代入方程可得

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}.$$

因此特解

$$\phi^*(x) = \frac{1}{2} x \sin x e^x,$$

通解为

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{2} x \sin x e^x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

例 1.5.30 求解 Euler 方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad x > 0,$$

其中 $a_1, \cdots, a_n$ 都是常数.

解 作变换 $x = e^t$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy',$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = x^2 y'' + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

因此

$$xy' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad x^2 y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

一般地, 假设

$$x^n y^{(n)} = c_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + c_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + c_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

其中 $c_1, \cdots, c_n$ 为常数, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^n y^{(n)}\right) = c_n \frac{\mathrm{d}^{n+1} y}{\mathrm{d}t^{n+1}} + c_{n-1}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + \cdots + c_1 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}.$$

另一方面,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^n y^{(n)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n y^{(n)}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(n x^{n-1} y^{(n)} + x^n y^{(n+1)}\right) x = n x^n y^{(n)} + x^{n+1} y^{(n+1)}.$$

这表明 $x^{n+1}y^{(n+1)}$ 可由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}t^{n+1}}$ 线性表出. 由数学归纳法即知对任意 $n \geqslant 1$, $x^n y^{(n)}$ 均可由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ 线性表出. 于是 Euler 方程在变换 $x = e^t$ 下将变成一个关于 $y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ 的 n 阶常系数齐次线性微分方程, 从而可求解. □

注 1.5.31 令 $x = e^t$, 算子 $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则 $x^n y^{(n)} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-n+1)y$.

6　微分方程定性理论简介

§6.1　动力系统, 相空间和轨线

考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{1.43}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ 是连续的. 若方程组 (1.43) 的右端函数 $\boldsymbol{f}$ 不显含自变量 t[7], 则称 (1.43) 为自治系统; 反之, 则称之为非自治系统.

在以下部分中, 我们总假定方程组 (1.43) 的初值问题的**解存在且唯一**.

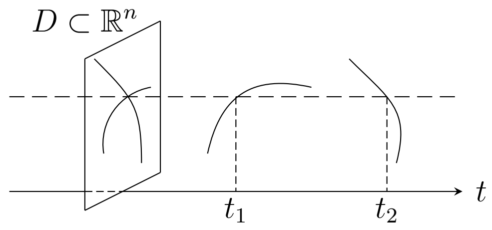
定义 1.6.1 将方程组 (1.43) 中 $\boldsymbol{x}$ 的取值范围 D 称作相空间. 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0)$ 是方程组 (1.43) 满足初始条件 $\boldsymbol{\phi}(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解, 它的存在区间为 J. 定义相空间 D 中的一条曲线

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in D \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0), t \in J\}$$

为解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0)$ 或方程组 (1.43) 的轨线. 称 $(t, \boldsymbol{x})$ 所在的空间为增广相空间.

注 1.6.2 轨线就是增广相空间中积分曲线 $\{t, \boldsymbol{x}(t)\}$ 沿着 t 轴向相空间的投影, 是由方程组 (1.43) 描述的质点运动的轨迹.

[7]但不能说 $\boldsymbol{f}$ 与 t 无关, 因为 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的向量值函数, 而 $\boldsymbol{x}$ 是 t 的函数.



在微分方程定性理论中, 我们的目标是 (不解方程而) 分析清楚轨线 (族) 的拓扑结构. 以下是两种特殊的拓扑结构:

(1) **平衡点:** 如果方程组 (1.43) 有一个常值解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0) \equiv \boldsymbol{x}_0$, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 (1.43) 的平衡点[8].

(2) **闭轨:** 如果方程组 (1.43) 的解是一个非定常的周期运动, 即存在 $T > 0$, 使得 $\boldsymbol{\phi}(t + T, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0)$, $\forall t$, 则它在相空间中是一条闭曲线, 称为闭轨.

例 1.6.3 考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + x\left(x^2 + y^2 - 1\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y\left(x^2 + y^2 - 1\right). \end{cases} \tag{1.44}$$

求出它的轨线类型, 并画出相图.

解 注意到方程组 (1.44) 中第一行乘 x 加上第二行乘 y 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2 + y^2\right) = x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

受此启发, 我们采用极坐标, 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则方程组 (1.44) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r\left(r^2 - 1\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1. \end{cases}$$

可以直接解出该方程组的解

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt{1 - c_1 e^{2t}}}, \\ \theta = t + c_2 \end{cases} \qquad \text{和} \quad r \equiv 0,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 由此可知该方程组有平衡点 $r \equiv 0$ 和闭轨 $r \equiv 1$.

接着考虑其他解. 对于初值 $r_0 = r(0)$, 有

[8] 当 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 (1.43) 的平衡点时, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\phi}'(t, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$; 反过来, 若存在 $\boldsymbol{x}_0$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$ 是该方程组的一个常值解. 因此, 自治系统 (1.43) 的平衡点就是 $\mathbb{R}^n$ 中向量场 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 的奇点, 故有时也称自治系统的平衡点为自治系统的奇点.

(1) 若 $0 < r_0 < 1$, 由 $r_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-c_1}} < 1$ 可得 $c_1 < 0$. 因此始终有 $r < 1$, 即从 (r_0, θ_0) 出发的解永远位于 x-y 平面上的单位圆内部, 且当 $t \to +\infty$ 时, $r(t)$ 逆时针盘旋趋向于原点 $r = 0$; 当 $t \to -\infty$ 时, $r(t)$ 顺时针盘旋趋向于单位圆周 $r = 1$.

(2) 若 $r_0 > 1$, 由 $r_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-c_1}} > 1$ 可得 $c_1 > 0$. 因此始终有 $r > 1$, 即从 (r_0, θ_0) 出发的解永远位于 x-y 平面上的单位圆外部, 且当 $t \to -\infty$ 时, $r(t)$ 顺时针盘旋趋向于单位圆周 $r = 1$; 当 $t \to t_*$ 时, $r(t) \to +\infty$, 其中 $t_* > 0$ 为一有限时刻 (由方程组的解可知 $t_* = -\dfrac{\ln c_1}{2}$).

故方程组 (1.44) 有三种轨线类型: 奇点 $(0,0)$、轨线 $x^2 + y^2 = 1$、开轨线[9]. 由此可画出该方程组的相图 (图 1.1).

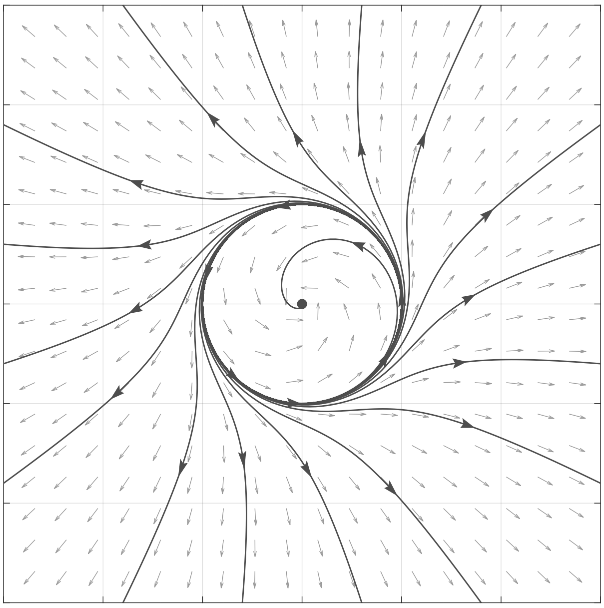


图 1.1: 方程组 (1.44) 的相图

□

注 1.6.4 例 1.6.3 中仍然解了方程, 这是出于初学时理解概念的需要.

定理 1.6.5 (自治微分方程组 (1.43) 的解的基本性质)

(1) 积分曲线的平移不变性: 若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0)$ 是方程组 (1.43) 的一条积分曲线, 则对任意常数 c, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t + c, \boldsymbol{x}_0)$ 也是它的一条积分曲线.

(2) 过相空间每一点的轨线的唯一性: 如果方程组 (1.43) 的轨线 $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{y}_0)$ 相交, 则它们必定重合, 即 $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{y}_0)$.

[9]开轨线是指 $\boldsymbol{\phi}(\,\cdot\,, \boldsymbol{x}_0) : \mathbb{R} \to \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0)$ 为一一映射.

(3) 群的性质: 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x}_0)$ 是方程组 (1.43) 的解, 则对任意 $t,s\in\mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{\phi}(t+s,\boldsymbol{x}_0).$$

也就是说, 在相空间中, 如果从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的解经过时间 s 到达 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{x}_0)$, 而从 $\boldsymbol{x}_1$ 出发经过时间 t 到达 $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{x}_0))$, 则从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的解沿轨线经过时间 $t+s$ 也到达 $\boldsymbol{x}_2$.

证明 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\phi}(t+c,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{\phi}'(t+c,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\phi}(t+c,\boldsymbol{x}_0)\right)$.

(2) 设过相空间中一点 $\boldsymbol{x}_0$ 有两条轨线 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$, 则存在增广相空间中的两条积分曲线 $\boldsymbol{\phi}_1(t),\boldsymbol{\phi}_2(t)$, 它们在相空间中的投影分别为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$. 设 $\boldsymbol{\phi}_1(t_1)=\boldsymbol{\phi}_2(t_2)=\boldsymbol{x}_0$. 将 $\boldsymbol{\phi}_1(t)$ 沿 t 轴正方向平移 t_2-t_1 得到曲线 $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1(t)$, 则由 (1) 知 $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1(t)$ 也是方程组 (1.43) 的积分曲线, 且它与 $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ 同样经过 $(t_2,\boldsymbol{x}_0)$. 由方程组 (1.43) 初值问题解的唯一性知 $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ 重合, 从而它们在相空间中有相同的投影, 也即 $\boldsymbol{\phi}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ 在相空间中有相同的投影, $\boldsymbol{\gamma}_1$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_2$ 重合.

(3) 由 (1), $\boldsymbol{\phi}(t+s,\boldsymbol{x}_0)$ 与 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{x}_0))$ 都是方程组 (1.43) 的解, 且在 $t=0$ 时初值均为 $\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{x}_0)$. 由方程组 (1.43) 解的唯一性知 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{\phi}(t+s,\boldsymbol{x}_0)$. □

对于固定的 t, $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x}_0)$ 给出了从相空间 $\mathbb{R}^n$ 到自身的变换

$$\boldsymbol{\phi}_t\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad \boldsymbol{x}_0\mapsto\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x}_0).$$

我们称这个映射为解映射. 考虑单参数变换集合 $\{\boldsymbol{\phi}_t\mid t\in\mathbb{R}\}$, 它具有以下性质:

(1) $\boldsymbol{\phi}_0=\mathbf{Id}$.

(2) $\boldsymbol{\phi}_s\circ\boldsymbol{\phi}_t=\boldsymbol{\phi}_t\circ\boldsymbol{\phi}_s=\boldsymbol{\phi}_{t+s}$.

(3) $\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{x})$ 关于 t 和 $\boldsymbol{x}$ 都连续.

定义 1.6.6 具有上述性质 (1)(2)(3) 的单参数连续变换群, 称为一个动力系统.

注 1.6.7 由前述自治系统的解映射构成的集合 $\{\boldsymbol{\phi}_t\mid t\in\mathbb{R}\}$ 称为微分动力系统. 此时, 性质 (1) 对应于对方程组 (1.43) 的初值问题的叙述, 性质 (2) 即定理 1.6.5 (3) 所述解的群性质, 性质 (3) 对应于方程组 (1.43) 的解对初值的连续依赖性, 由定理 1.4.6 , 这等价于微分方程组初值问题的解是唯一的.

§6.2　稳定性

考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\tag{1.45}$$

其中函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{x}\in G\subset\mathbb{R}^n$ 均连续, 并且使得该方程组初值问题的解是存在且唯一的.

若方程组 (1.45) 的一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 由定理 1.4.6 可知, 方程组 (1.45) 的解对初值是连续依赖的, 即对任意有界闭区间 $I\subset\mathbb{R}$, 任意 $t_0\in I$, 以及任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\phi}(t_0)|<\delta$, 就有

$$|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\phi}(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in I,$$

其中 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 是方程组 (1.45) 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解. 注意这里的 δ 不仅依赖于 ε, 还依赖于区间 I, 因此当区间 I 换成无界区间时, 上面的不等式一般不再成立 (见例 1.6.8).

例 1.6.8 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$$

有解 $x\equiv 0$, 而其他的解为 $x=ce^t$, 其中 c 为任意非零常数. 显然, 对任意 $\varepsilon>0$, $\left|ce^t-0\right|<\varepsilon$ 不可能对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均成立, 除非 $c=0$.

注 1.6.9 例 1.6.8 说明解对初值的连续依赖性和解在 $t\to+\infty$ 时的性态并不直接关联[10]. 因此, 我们有必要研究 "解对初值的连续依赖性在无穷区间上的保持" 这一问题.

定义 1.6.10 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\phi}(t_0)|<\delta$, 就有

$$|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\phi}(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in\mathbb{R},\tag{1.46}$$

则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 稳定的.

定义 1.6.11 如果 (1.46) 式的成立范围是 $t\in(t_0,+\infty)$, 则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 正向稳定的; 如果 (1.46) 式的成立范围是 $t\in(-\infty,t_0)$, 则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 负向稳定的. 如果解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 既不是 Lyapunov 正向稳定的, 也不是 Lyapunov 负向稳定的, 则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 是不稳定的.

定义 1.6.12 如果解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 正向稳定的, 且存在 $\delta>0$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\phi}(t_0)|<\delta$, 就有

$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\phi}(t)|=0,$$

[10]解对初值的连续依赖性的破坏可以导致解对初值的敏感依赖甚至混沌现象的出现.

则称解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 正向渐近稳定的; 如果解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 负向稳定的, 且存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\phi}(t_0)| < \delta$, 就有

$$\lim_{t\to-\infty} |\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\phi}(t)| = 0,$$

则称解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ 是 Lyapunov 负向渐近稳定的.

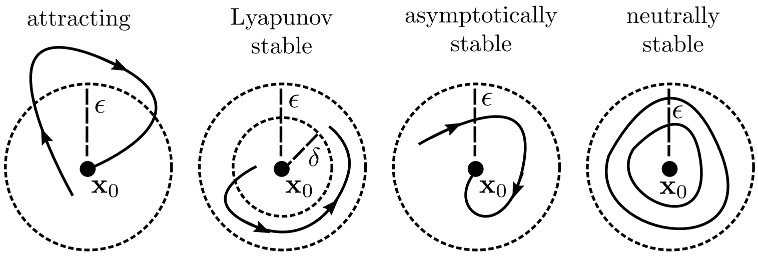


图 1.2: 几种稳定性示意图

注 1.6.13 若 $\boldsymbol{x}_0$ 为奇点, 当常值解 $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_0$ 具有 Lyapunov 稳定性时, 也称奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 具有相应的 Lyapunov 稳定性.

例 1.6.14 分析图 1.1 可知, 例 1.6.3 中方程组的零解 $(x, y) \equiv (0, 0)$ 是 Lyapunov 正向渐近稳定的.

要讨论解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ 的稳定性, 可以通过作变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\phi}(t)$ 转化为讨论零解的稳定性:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\phi}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\phi}(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\phi}(t)) =: \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}).$$

故以下只讨论零解 $\boldsymbol{\phi}(t) \equiv \mathbf{0}$ 的 Lyapunov 稳定性问题.

用线性近似判断 Lyapunov 稳定性 (可处理非自治系统)

设 $\boldsymbol{\phi}(t) \equiv \mathbf{0}$ 是方程组 (1.45) 的解, 则 $\boldsymbol{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. 将方程组 (1.45) 的右端函数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 展开成 $\boldsymbol{x}$ 的线性部分 $A(t)\boldsymbol{x}$ 与高阶[11]部分 $\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$ 之和, 即考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x}), \tag{1.47}$$

其中 $A(t)$ 是 n 阶矩阵函数, 而函数 $\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$ 满足[12]

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to 0} \frac{|\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|} = 0, \quad \forall t.$$

并假定 $A(t)$ 关于 t 连续, $\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是 Lipschitz 的.

[11]此处指高于一阶.

[12]我们希望当 $|\boldsymbol{x}|$ 足够小时, $\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$ 是对线性项 $A(t)$ 的微小扰动.

注 1.6.15 我们以微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

为例, 说明如何得到 (1.47) 中的形式. 写出

$$f_1(t, x_1, x_2) = \partial_{x_1} f_1(t, 0, 0)x_1 + \partial_{x_2} f_1(t, 0, 0)x_2 + [f_1(t, x_1, x_2) - \partial_{x_1} f_1(t, 0, 0)x_1 - \partial_{x_2} f_1(t, 0, 0)x_2],$$
$$f_2(t, x_1, x_2) = \partial_{x_1} f_2(t, 0, 0)x_1 + \partial_{x_2} f_2(t, 0, 0)x_2 + [f_2(t, x_1, x_2) - \partial_{x_1} f_2(t, 0, 0)x_1 - \partial_{x_2} f_2(t, 0, 0)x_2]$$

即可得

$$A(t) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(t, 0, 0) & \partial_{x_2} f_1(t, 0, 0) \\ \partial_{x_1} f_2(t, 0, 0) & \partial_{x_2} f_2(t, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

当 $A(t) \equiv A$ 为常数矩阵时, 根据线性微分方程组理论, 微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \tag{1.48}$$

的解是可以明确写出表达式的 (参见例 1.5.17), 因此可立即得到如下结果.

定理 1.6.16 对方程组 (1.48) 的零解, 有如下结论:

(1) 零解是 Lyapunov 正 (负) 向渐近稳定的 $\iff$ 矩阵 A 的特征值的实部均小 (大) 于零.

(2) 零解是 Lyapunov 正 (负) 向稳定的 $\iff$ 矩阵 A 的特征值的实部非正 (负), 并且实部为零的特征值所对应的 Jordan 块都是一阶的.

(3) 零解是 Lyapunov 稳定的 $\iff$ 矩阵 A 的特征值的实部为零, 并且出现重根时所对应的 Jordan 块是可对角化的.

(4) 零解不是 Lyapunov 正 (负) 向稳定的 $\iff$ 矩阵 A 至少有一个实部为正 (负) 数的特征值, 或者至少有一个实部为零的特征值, 但是它所对应的 Jordan 块是不可对角化的.

一般而言, 非线性微分方程组 (1.47) 的零解的 Lyapunov 稳定性与对应的线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x}$ 的零解的 Lyapunov 稳定性无直接关联. 但是, 当 $A(t) \equiv A$ 为常数矩阵时, 有如下两个结果.

定理 1.6.17 设方程组 (1.47) 中 $A(t) \equiv A$ 为常数矩阵, 且 A 的所有特征值的实部均是负数, 则方程组 (1.47) 的零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的.

证明 由常数变易法可知, 方程组 (1.47) 在初值 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 下的解 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)$ 满足积分方程

$$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-s)}\boldsymbol{N}\left(s,\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\right)\,\mathrm{d}s.$$

由于 A 是所有特征值的实部均是负数, 不妨设这些负数均不大于 -2σ $(\sigma>0)$, 则由 e^{At} 的表达式 (参见第 39 页) 中

$$\left|e^{\lambda_i t}\boldsymbol{P}^{(i)}(t)\right|\leqslant e^{-2\sigma t}\left|\boldsymbol{P}^{(i)}(t)\right|$$

可知, 存在常数 $A_0>0$, 使得

$$\left|e^{At}\right|\leqslant A_0e^{-\sigma t},\quad \forall t\geqslant 0.$$

由于 $\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{N}(t,\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|}=0$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}|<\delta$, 就有 $|\boldsymbol{N}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{x}|$. 选取 $|\boldsymbol{x}_0|<\delta$, 由解的唯一性可知, 存在 $t_1>0$, 使得

$$|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|\leqslant\delta,\quad \forall t\in[0,t_1).$$

因此, 对任意 $t\in[0,t_1)$, 有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|&=\left|e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-s)}\boldsymbol{N}\left(s,\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\right)\,\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant A_0|\boldsymbol{x}_0|e^{-\sigma t}+A_0\varepsilon\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\left|\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\right|\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

也即

$$e^{\sigma t}\left|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)\right|\leqslant A_0|\boldsymbol{x}_0|+A_0\varepsilon\int_0^t e^{\sigma s}\left|\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\right|\,\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[0,t_1).$$

由 Gronwall 不等式即得

$$e^{\sigma t}\left|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)\right|\leqslant A_0|\boldsymbol{x}_0|e^{A_0\varepsilon t},\quad t\in[0,t_1),$$

即

$$|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|\leqslant A_0|\boldsymbol{x}_0|e^{-(\sigma-A_0\varepsilon)t},\quad \forall t\in[0,t_1). \tag{1.49}$$

取 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\sigma}{A_0}\right)$ 与 $|\boldsymbol{x}_0|<\min\left\{\delta,\dfrac{\delta}{A_0}\right\}$, 则有

$$|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|\leqslant\delta,\quad \forall t\in[0,+\infty). \tag{1.50}$$

由 t_1 定义可知 $t_1=+\infty$. 在 (1.50) 式中由 $\delta<\varepsilon$ 可得方程组 (1.47) 零解的 Lyapunov 正向稳定性, 再在 (1.49) 式中令 $t\to+\infty$ 就得到方程组 (1.47) 零解的 Lyapunov 正向渐近稳定性. □

定理 1.6.18 设方程组 (1.47) 中 $A(t) \equiv A$ 为常数矩阵, 且 A 有一个实部为正数的特征值, 则方程组 (1.47) 的零解不是 Lyapunov 正向稳定的.

注 1.6.19 定理 1.6.17 与定理 1.6.18 并不能涵盖所有情形. 当系统的线性近似系数矩阵具有零实部的特征值, 但没有正实部的特征值时, 无法使用线性近似法判定零解的稳定性.

Lyapunov 第二方法/直接方法 (只能处理自治系统)

考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{1.51}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 函数 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 且使得该方程组初值问题的解存在且唯一, $\mathbf{0}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的孤立临界点 (即存在 $\Omega \ni \mathbf{0}$, 使得 $\boldsymbol{f}$ 在 Ω 上无其他零点).

令 $V(\boldsymbol{x})$ 是区域 Ω 上的标量函数. 若 $V(\mathbf{0}) = 0$ 且 $V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \Omega$, 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是正定的; 若 $-V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是正定的, 则称 $V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是负定的.

再定义 $V(\boldsymbol{x})$ 关于自治系统 (1.51) 的导数为

$$V^*(\boldsymbol{x}) = \langle (\nabla V)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rangle = \partial_{x_1} V f_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \partial_{x_n} V f_n(\boldsymbol{x}).$$

注意, 若 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ 是方程组 (1.51) 的解, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{\phi}(t)) = \langle (\nabla V)(\boldsymbol{\phi}(t)), \boldsymbol{\phi}'(t) \rangle = \langle (\nabla V)(\boldsymbol{\phi}(t)), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}(t)) \rangle = V^*(\boldsymbol{\phi}(t)).$$

定理 1.6.20 若存在标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在包含原点的某个区域 Ω 上正定, 且它关于自治系统 (1.51) 的导数 $V^*(\boldsymbol{x})$ 满足 $V^*(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$, 则自治系统 (1.51) 的零解是 Lyapunov 正向稳定的. 进一步地, 若 $V^*(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$[13], 则自治系统 (1.51) 的零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的.

证明 ① 先证 $V^*(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \implies$ 零解是 Lyapunov 正向稳定的. 取 $r > 0$ 使得 $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, r) \subset \Omega$. 对任意 $\varepsilon \in (0, r)$, 令 $S = \{\boldsymbol{x} \mid \varepsilon \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant r\}$. 由于 $V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上连续, 而 $S \subset \Omega$ 是紧集, 故 $V(\boldsymbol{x})$ 在 S 上有最小值, 令 $\eta = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in S} V(\boldsymbol{x})$, 由 $V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上正定知 $\eta > 0$. 再由 $V(\mathbf{0}) = 0$ 可知存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}| < \delta$, 就有 $V(\boldsymbol{x}) < \eta$. 若 $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$, 由解的存在唯一性可知, 存在 t_1 使得在 $[0, t_1)$ 上有唯一解 $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)) = V^*(\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)) \leqslant 0$. 由此可得 $V(\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) < \eta$, 结合 η 的定义得 $|\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$. 这说明解未能延伸至相空间的边界, 由延拓定理, $t_1 = +\infty$. 故证明了对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{x}_0 - \mathbf{0}| < \delta \implies |\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

[13] 因为 $\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{0}$ 是方程组 (1.51) 的解, 所以总有 $V^*(\mathbf{0}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\mathbf{0}) = 0$.

② 再证 $V^*(\boldsymbol{x})<0 \implies$ 零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的. 由 ①, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}_0|<\delta$, 就有 $|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|\leqslant\varepsilon$, $\forall t\geqslant 0$. 由 $V^*(\boldsymbol{x})<0$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V\left(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)\right)=V^*\left(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)\right)<0$, 故 $V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))$ 关于 t 严格单调递减. 下证 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))=0$. 用反证法, 假设存在 $\eta>0$, 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))=\eta$. 由于 $V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上连续, $V(\mathbf{0})=0$, 存在 $\alpha\in(0,\varepsilon)$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}|<\alpha$, 就有 $V(\boldsymbol{x})<\eta$. 但 $V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))\geqslant\eta$, 所以 $|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|\geqslant\alpha$, $\forall t\geqslant 0$. 设 $\widetilde{S}=\{\boldsymbol{x}\mid\alpha\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant\varepsilon\}$, 则 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)\in\widetilde{S}$, $\forall t\geqslant 0$. 设 $-\mu=\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\widetilde{S}}V^*(\boldsymbol{x})$, $\mu>0$. 则由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))=V^*(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))\leqslant-\mu$$

可得

$$V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)-\mu t.$$

在上式中令 $t\to+\infty$ 就与 V 的正定性矛盾. 故 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0))=0$, 即 $\lim\limits_{t\to+\infty}|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|=0$, 零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的. □

定理 1.6.21 若存在 Ω 上的连续函数 $V(\boldsymbol{x})$, $V(\mathbf{0})=0$, 使得 $V^*(\boldsymbol{x})$ 正定且在原点的任一邻域内均存在点 $\boldsymbol{a}$, 使得 $V(\boldsymbol{a})>0$, 则零解是不稳定的.

证明 取 $r>0$ 使得 $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{0},r)\subset\Omega$. 由 $V(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上连续知 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{0},r)$ 上有界. 对任意 $\delta>0$, 取 $\boldsymbol{a}$ 使得 $0<|\boldsymbol{a}|<\delta$ 且 $V(\boldsymbol{a})>0$. 令 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ 是方程组 (1.51) 以 $\boldsymbol{a}$ 为初值的解. 我们断言: 存在 $t_1<+\infty$, 使得 $|\boldsymbol{x}(t_1;\boldsymbol{a})|=r$.

用反证法, 假设 $|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})|<r$, $\forall t\geqslant 0$, 则由延拓定理知 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})$ 是整体解. 由 $V(\boldsymbol{x})$ 连续, $V(\mathbf{0})=0$ 且 $V(\boldsymbol{a})>0$ 知, 存在 $\alpha>0$, 使得只要 $|\boldsymbol{x}|<\alpha$ 就有 $|V(\boldsymbol{x})|<V(\boldsymbol{a})$. 另一方面, 因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}))=V^*(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}))\geqslant 0$, $\forall t\geqslant 0$, 所以 $V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}))\geqslant V(\boldsymbol{a})$, $\forall t\geqslant 0$, 从而 $|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a})|\geqslant\alpha$, $\forall t\geqslant 0$. 令 $S=\{\boldsymbol{x}\mid\alpha\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant r\}$, $\mu=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in S}V^*(\boldsymbol{x})>0$. 则由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}))=V^*(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}))\geqslant\mu$$

可得

$$V(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{a}))\geqslant V(\boldsymbol{a})+\mu t.$$

在上式中令 $t\to+\infty$ 就与 V 在 $\overline{\mathbb{B}}(\mathbf{0},r)$ 上的有界性矛盾. 于是我们证明了存在 $r>0$, 使得对任意 $\delta>0$, 存在满足 $|\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}_0$, 都存在 t 使 $|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)|\geqslant r$, 即零解是不稳定的. □

定理 1.6.22 若存在函数 $V(\boldsymbol{x})$ 使得在包含原点的某个区域 Ω 上, $V^*=\lambda V+W$, 其中 $\lambda>0$, W 或者恒为零, 或者恒非正, 或者恒非负且在原点的任一邻域上均存在点 $\boldsymbol{a}$, 使得 $V(\boldsymbol{a})W(\boldsymbol{a})>0$, 则零解是不稳定的.

例 1.6.23 考虑方程

$$y'' + g(y) = 0,$$

其中函数 $g(y)$ 在 $|y| < k$ 上连续, $g(0) = 0$ 且当 $y \neq 0$ 时有 $yg(y) > 0$. 判断零解的稳定性.

解 令 $y_1 = y, y_2 = y'$, 则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -g(y_1) \end{pmatrix}.$$

借鉴物理学中能量的观点[14], 我们设

$$V(y_1, y_2) = \underbrace{\frac{1}{2}y_2^2}_{\text{动能项}} + \underbrace{\int_0^{y_1} g(s)\,\mathrm{d}s}_{\text{势能项}}.$$

则可知 $V(y_1, y_2) \geqslant 0$, 且 $V(y_1, y_2) = 0$ 当且仅当 $y_1 = y_2 = 0$, 故 V 正定. 设 $\Omega = \{(y_1, y_2) \mid |y_1| < k, |y_2| < +\infty\}$. 又

$$V^*(y_1, y_2) = \partial_{y_1} V \cdot y_2 + \partial_{y_2} V \cdot (-g_1) = g(y_1)y_2 + y_2(-g(y_1)) = 0.$$

由定理 1.6.20 知零解是 Lyapunov 正向稳定的.

设 $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ 是方程组以 $(y_{10}, y_{20}) \neq (0, 0)$ 为初值的解, 则由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\phi_1(t), \phi_2(t)) = V^*(\phi_1(t), \phi_2(t)) \equiv 0$$

可得

$$V(\phi_1(t), \phi_2(t)) \equiv V(y_{10}, y_{20}) \neq (0, 0), \quad \forall t \geqslant 0.$$

因此零解不是渐近稳定的. □

例 1.6.24 分析方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\varepsilon x + 2y)(z + 1), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + \varepsilon y)(z + 1), \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -z^3 \end{cases}$$

的平衡点的稳定性, 其中 ε 为参数.

[14]可以把原方程中 y 视作位移, 则 y'' 表示加速度, 根据牛顿第二定律, $-g(y)$ 是系统所受外力. 更一般地, 可将 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 视作广义能量函数, 而将 $-V^*(\boldsymbol{x})$ 视作广义耗散函数. 在此意义下, 可将定理 1.6.20 中 $V^*(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 这一条件理解为能量在除去原点外的其他点总是耗散的.

解 由

$$\begin{cases}(\varepsilon x+2y)(z+1)=0,\\ (-x+\varepsilon y)(z+1)=0,\\ -z^3=0\end{cases} \iff x=y=z=0$$

可知 $(0,0,0)$ 是该自治系统的唯一平衡点. 该自治系统的线性近似系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\varepsilon & 2 & 0\\ -1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

计算得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\varepsilon+\sqrt{2}\,\mathrm{i},\lambda_3=\varepsilon-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

① 若 $\varepsilon>0$, 则由定理 1.6.18 得零解是不稳定的.

② 若 $\varepsilon\leqslant 0$, 我们先采用 Lyapunov 第二方法, 待定 Lyapunov 函数为 $V(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$, 其中 $a,b,c>0$. 此时

$$\begin{aligned}V^*(x,y,z)&=2ax(\varepsilon x+2y)(z+1)+2by(-x+\varepsilon y)(z+1)+2cz\left(-z^3\right)\\ &=2\varepsilon\left(ax^2+by^2\right)(z+1)+2(2a-b)(xy)(z+1)-2cz^4.\end{aligned}$$

我们希望 $V^*\leqslant 0$, 试取 $a=1,b=2,c=1$, 则

$$V^*(x,y,z)=2\varepsilon\left(x^2+2y^2\right)(z+1)-2z^4.$$

再取 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z>-1\}$, 则

$$V(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2$$

在 Ω 上正定. 当 $\varepsilon<0$ 时, 在 Ω 上有 $V^*(x,y,z)<0$, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$, 因此由定理 1.6.20 可知零解是渐近稳定的. 当 $\varepsilon=0$ 时, Ω 上有 $V^*(x,y,z)<0$, 因此由定理 1.6.20 可知零解是稳定的. 再进一步讨论 $\varepsilon=0$ 时零解的渐近稳定性. 事实上, 此时方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y(z+1),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x(z+1),\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z^3.\end{cases}$$

由第三式可解得

$$z=\frac{1}{\sqrt{2(t+c_1)}},$$

其中 c_1 为任意常数. 再由前两式可得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$$

因此

$$\frac{1}{2}x^2+y^2=c_2,$$

其中 c_2 为任意常数. 当 $c_2\neq 0$ 时, 点 (x,y) 始终在 x-y 平面一不过原点的椭圆上, 因此对任意 $\delta>0$, 都存在点 (x,y,z) 满足 $|(x,y,z)|<\delta$, 使得以之为初值的解在 $t\to+\infty$ 时并不趋近于 $(0,0,0)$, 即零解不是渐近稳定的. □

定义 1.6.25 称点集 $\mathcal{P}$ 是正不变的, 若对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{P}$ 都有 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)\in\mathcal{P}$, $\forall t\geqslant 0$.

定理 1.6.26 (Lasalle 不变集原理) 设标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在包含原点的某个区域 Ω 上正定, 且它关于自治系统 (1.51) 的导数 $V^*(\boldsymbol{x})$ 满足 $V^*(\boldsymbol{x})\leqslant 0$. 又设 $\mathcal{P}\subset\Omega$ 为包含原点的一个闭集, $\mathcal{P}$ 是正不变的, 且自治系统 (1.51) 在点集 $\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}\mid \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $V^*(\boldsymbol{x})=0\}$ 上没有整体解[15]. 则自治系统 (1.51) 的零解是渐近稳定的.[16]

证明 用反证法, 假设存在解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{P}$, $\forall t\geqslant 0$, 但当 $t\to+\infty$ 时 $\boldsymbol{x}(t)\not\to\boldsymbol{0}$. 则存在 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{a}\in\mathcal{P}$ 与单调递增趋向正无穷的序列 $\{t_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n)=\boldsymbol{a}$.

我们断言: 以 $\boldsymbol{a}$ 为初值的解是整体解且都在 $\mathcal{P}$ 中, 也即 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{a})\in\mathcal{P}$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 一方面, 由 $\mathcal{P}$ 是正不变的, $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{a})$ 对一切 $t\geqslant 0$ 均有定义且在 $\mathcal{P}$ 中; 另一方面, $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x}(t_n))$ 对一切 $t\in[-t_n,0]$ 均有定义且在 $\mathcal{P}$ 中. 由于 $\{t_n\}$ 是单调增的, $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x}(t_{n+k}))$ $(k\geqslant 0)$ 对一切 $t\in[-t_n,0]$ 也有定义且在 $\mathcal{P}$ 中. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}(t_{n+k})=\boldsymbol{a}$, 由解对初值的连续依赖性即知, $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{a})$ 对一切 $t\in[-t_n,0]$ 均有定义且在 $\mathcal{P}$ 中. 再令 $n\to\infty$ 即得 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{a})$ 对一切 $t\leqslant 0$ 均有定义且在 $\mathcal{P}$ 中. 故 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{a})\in\mathcal{P}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

下证 $V^*(\boldsymbol{x})$ 在以 $\boldsymbol{a}$ 为初值的整体解上恒为 0. 设 $V(\boldsymbol{a})=\alpha$, 则对任意趋向正无穷的序列 $\{s_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(s_n))=\alpha$. 于是由 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n+s)=\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{a})$ 可得 $V(\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{a}))=\alpha$, $\forall s\in\mathbb{R}$. 从而 $V^*(\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{a}))=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V(\boldsymbol{\phi}(s,\boldsymbol{a}))=0$, $\forall s\in\mathbb{R}$. 这与条件矛盾. □

[15]此处整体解指对全体 $t\in\mathbb{R}$ 均有定义的解.

[16]即非零轨线不可能始终保持在 “无耗散” 的地方.

§6.3　平面上的动力系统

定义 1.6.27 称点 (x_0, y_0) 是平面上的微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x,y) \end{cases} \tag{1.52}$$

的初等奇点, 如果

$$X(x_0,y_0) = Y(x_0,y_0) = 0,$$

且

$$\det\left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\right)\bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \neq 0.$$

下面讨论方程组 (1.52) 在初等奇点附近的轨线结构.

不妨设 $(0,0)$ 为方程组 (1.52) 的初等奇点. 令

$$a = \frac{\partial X}{\partial x}(0,0), \quad b = \frac{\partial X}{\partial y}(0,0), \quad c = \frac{\partial Y}{\partial x}(0,0), \quad d = \frac{\partial Y}{\partial y}(0,0),$$

则方程组 (1.52) 在点 $(0,0)$ 处的线性化方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy. \end{cases} \tag{1.53}$$

再由初等奇点的定义得 $ad - bc \neq 0$.

令 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 作线性变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, 其中 T 为可逆矩阵, 则方程组 (1.53) 变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

可以选取适当的 T, 使得 $T^{-1}AT$ 是 A 的实相似标准形, 因此不妨设 A 就是下面 3 种形式之一:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda, \mu, \beta \neq 0$.

(1) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$. 此时方程组 (1.53) 即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mu y.\end{cases}$$

它的解为

$$\begin{cases}x=c_1e^{\lambda t},\\ y=c_2e^{\mu t},\end{cases}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 于是该方程组在 x-y 平面上的轨线方程为

$$|x|^{\mu}=c|y|^{\lambda},$$

其中 c 为任意非负常数.

① $\lambda=\mu$. 若 $\lambda=\mu<0$, 则奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 正向渐近稳定的; 若 $\lambda=\mu>0$, 则奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 负向渐近稳定的. 称这样的奇点为星形结点 (图 1.3).

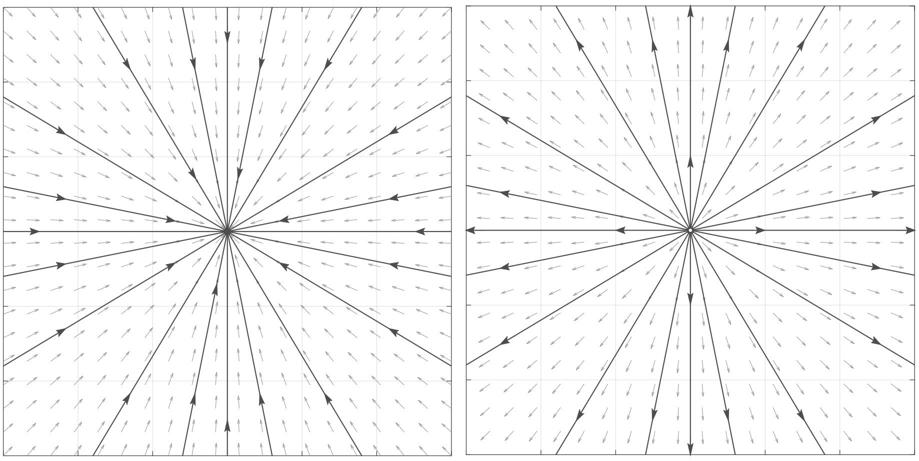


图 1.3: 星形结点 (左: $\lambda=\mu<0$; 右: $\lambda=\mu>0$)

② $\lambda\neq\mu,\lambda\mu>0$. 若 $\lambda,\mu<0$, 奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 正向渐近稳定的; 若 $\lambda,\mu>0$, 奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 负向渐近稳定的. 此时每条曲线均被奇点 $(0,0)$ 分割成两条轨线, 故称这样的奇点为双向结点 (图 1.4).

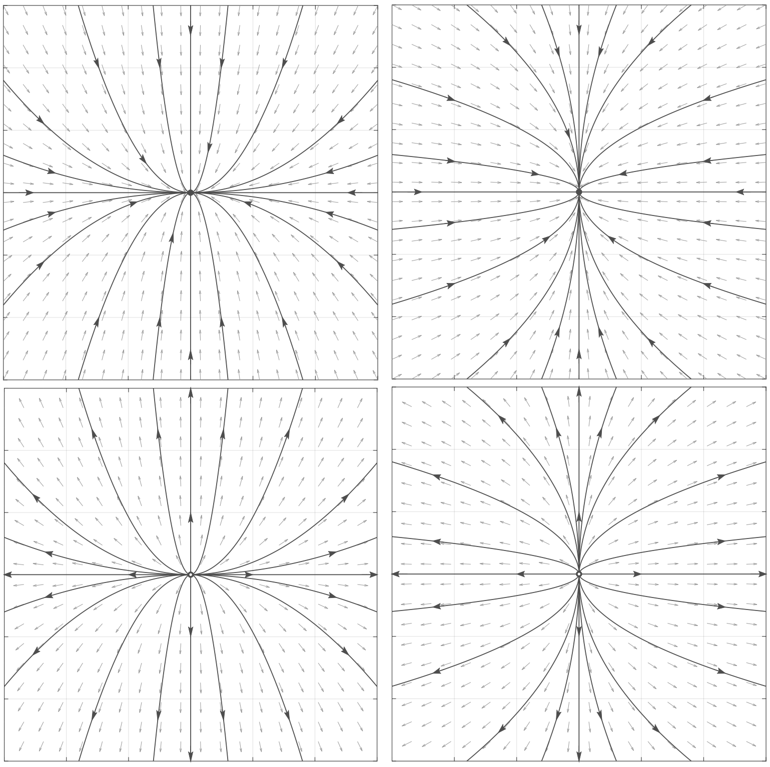


图 1.4: 双向结点 (左: $|\lambda| < |\mu|$; 右: $|\lambda| > |\mu|$; 上: $\lambda, \mu < 0$; 下: $\lambda, \mu > 0$)

③ $\lambda\mu < 0$. 此时奇点 $(0,0)$ 是不稳定的. 称这样的奇点为鞍点 (图 1.5).

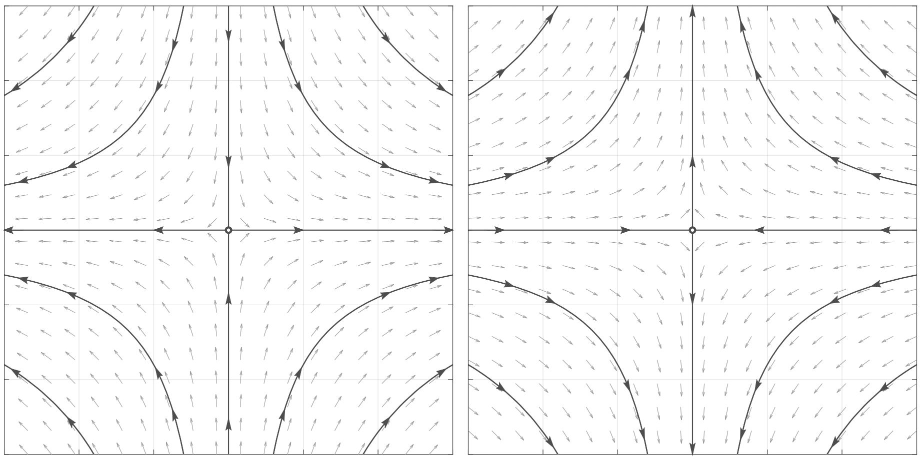


图 1.5: 鞍点 (左: $\mu < 0 < \lambda$; 右: $\lambda < 0 < \mu$)

(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. 此时方程组 (1.53) 即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \lambda y. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, 用第二式除以第一式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\lambda}.$$

令 $y = xu(x)$, 则方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\lambda}.$$

解得

$$y = cx + \frac{x}{\lambda}\ln|x|,$$

其中 c 为任意常数.

若 $x \equiv 0$, 则 $y = ce^{\lambda t}$, 其中 c 为任意常数.

若 $\lambda < 0$, 奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 正向渐近稳定的; 若 $\lambda > 0$, 奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 负向渐近稳定的. 称这样的奇点为单向结点 (图 1.6).

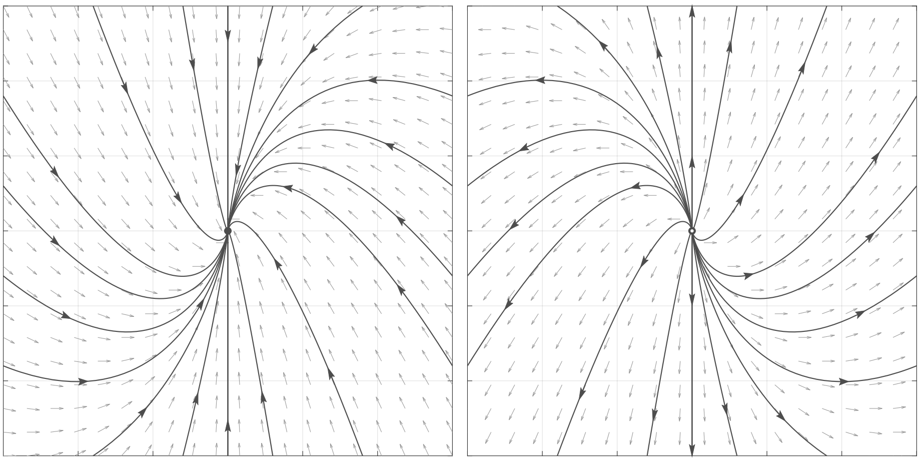


图 1.6: 单向结点 (左: $\lambda < 0$; 右: $\lambda > 0$)

(3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. 利用极坐标换元 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 可将方程组 (1.53) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \alpha r, \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \beta. \end{cases}$$

解得

$$r = ce^{\frac{\alpha}{\beta}\theta},$$

其中 c 为任意非负常数.

当 $\beta > 0$ 时, 轨线沿逆时针方向盘旋; 当 $\beta < 0$ 时, 轨线沿顺时针方向盘旋.

当 $\alpha < 0$ 时, 轨线为螺线族, 零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的; 当 $\alpha > 0$ 时, 轨线为螺线族, 零解是 Lyapunov 负向渐近稳定的; 当 $\alpha = 0$ 时, 轨线为圆族, 零解是稳定但不渐近稳定的.

称 $\alpha \neq 0$ 时的奇点为焦点 (图 1.7); 称 $\alpha = 0$ 时的奇点为中心 (图 1.8).

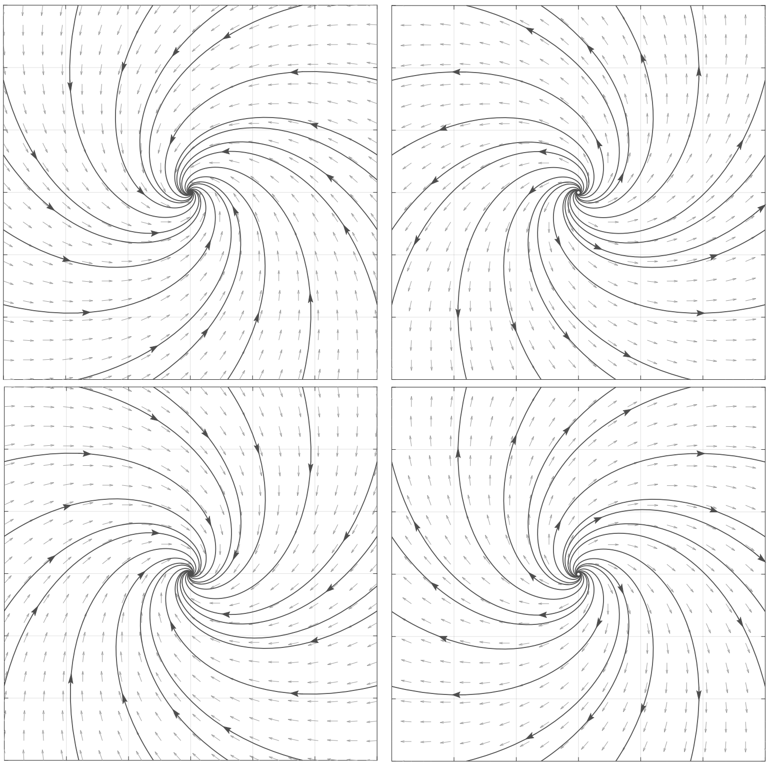


图 1.7: 焦点 (左: $\alpha < 0$; 右: $\alpha > 0$; 上: $\beta > 0$; 下: $\beta < 0$)

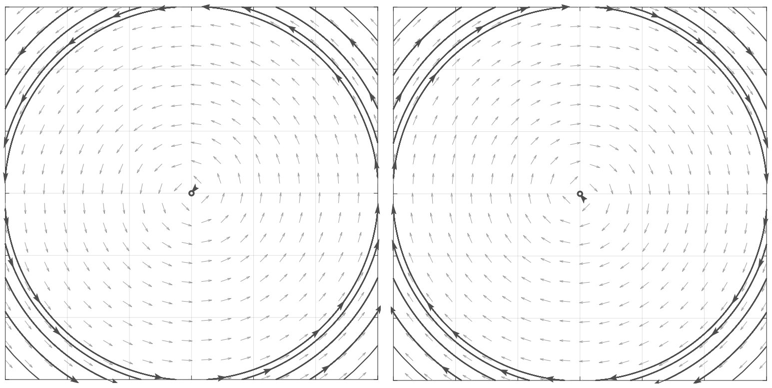


图 1.8: 中心 (左 $\alpha = 0, \beta > 0$; 右: $\alpha = 0, \beta < 0$)

定理 1.6.28 对于方程组 (1.53) , 记 $T = \mathrm{tr}(A), D = \det(A)$, 则

(1) 若 $D<0$, 则奇点 $(0,0)$ 为鞍点;

(2) 若 $D>0$ 且 $T^2>4D$, 则奇点 $(0,0)$ 为双向结点;

(3) 若 $D>0$ 且 $T^2=4D$, 则奇点 $(0,0)$ 为单向结点或星形结点;

(4) 若 $D>0$ 且 $0<T^2<4D$, 则奇点 $(0,0)$ 为焦点;

(5) 若 $D>0$ 且 $T=0$, 则奇点 $(0,0)$ 为中心.

而且, 在 (2)(3)(4) 中, 当 $T<0$ 时, 奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 正向渐近稳定的; 当 $T>0$ 时, 奇点 $(0,0)$ 是 Lyapunov 负向渐近稳定的.

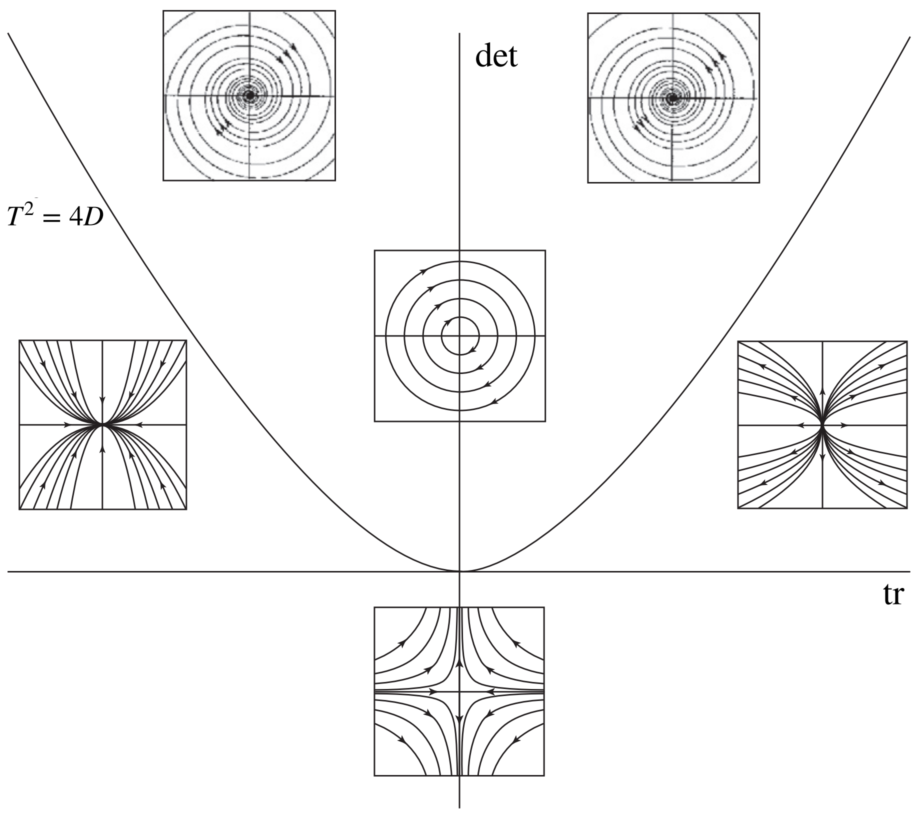


图 1.9: $\mathrm{tr}-\det$ 平面

当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时, 如果有轨线沿着某一确定的直线趋向于奇点 $(0,0)$, 则称这条直线所在方向为特殊方向.

- 星形结点: 无穷多个特殊方向.
- 双向结点、鞍点: 两个特殊方向.
- 单向结点: 一个特殊方向.
- 焦点、中心: 没有特殊方向.

利用特殊方向、向量场的连续性以及由定理 1.6.28 得到的初等奇点类型可以画出线性化方程组 (1.53) 的相图. 实际上, 由于我们只关心轨线的拓扑性质, 多数情况下并不必细致刻画轨线的具体几何信息. 例如, 我们可以不区分图 1.4 中同一行的左右两个相图.

下面回到非线性系统 (1.52) 上. 设

$$X(x,y)=ax+by+\varphi(x,y),\quad Y(x,y)=cx+dy+\psi(x,y).$$

当满足以下某些条件时, 非线性系统 (1.52) 与线性化方程组 (1.53) 的奇点稳定性相同.

条件 A: $\varphi(x,y),\psi(x,y)=o(r)$, 当 $r\to 0$ 时.

条件 A*: $\varphi(x,y),\psi(x,y)=o\left(r^{1+\varepsilon}\right)$, 当 $r\to 0$ 时. 其中 ε 为某一正数.

条件 B: $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 在原点的某个邻域内连续可微.

定理 1.6.29 若非线性系统 (1.52) 以 $(0,0)$ 为初等奇点, 则下述结论成立.

$$\begin{array}{c}(0,0)\text{ 是线性化}\\ \text{方程组 (1.53) 的}\end{array}\begin{cases}\text{焦点}\\ \text{鞍点或双向结点}\\ \text{单向结点}\\ \text{星形结点}\end{cases}+\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \mathbf{A+B}\\ \mathbf{A^*}\\ \mathbf{A^*+B}\end{array}\Longrightarrow\begin{array}{c}(0,0)\text{ 也是非线性系统}\\ \text{(1.52) 的同类型奇点}\end{array}$$

零趋势线 (Nullcline) 方法 定理 1.6.29 为我们提供了在非线性系统的奇点附近绘制相图的可能, 但我们还希望能定性分析其全局行为.

定义 1.6.30 对于平面动力系统 (1.52) , 称点集 $\{(x,y)\mid X(x,y)=0\}$ 为其 x-零趋势线, $\{(x,y)\mid Y(x,y)\}$ 为其 y-零趋势线.

向量场 (X,Y) 在 x-零趋势线上各点处的切向量均竖直, 在 y-零趋势线上各点处的切向量均水平. 而 x-零趋势线与 y-零趋势线的交点就是平衡点. 平面上不在 x-零趋势线或 y-零趋势线上的点处的切向量均不竖直或水平, 因此它们必定指向 NE、NW、SE、SW 四个方向之一.

例 1.6.31 考虑平面动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-x^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2.\end{cases}\tag{1.54}$$

它的奇点为 $(2,4)$, x-零趋势线为抛物线 $y=x^2$, y-零趋势线为直线 $x=2$. 两条零趋势线将 $\mathbb{R}^2$ 平面划分为四个区域, 通过在每个区域选取一点求出该点处切向量可得到该区域的切向

量总体方向 (如图 1.10 中的浅色箭头). 于是再由向量场的连续性就可以得到两条零趋势线上的切向量方向.

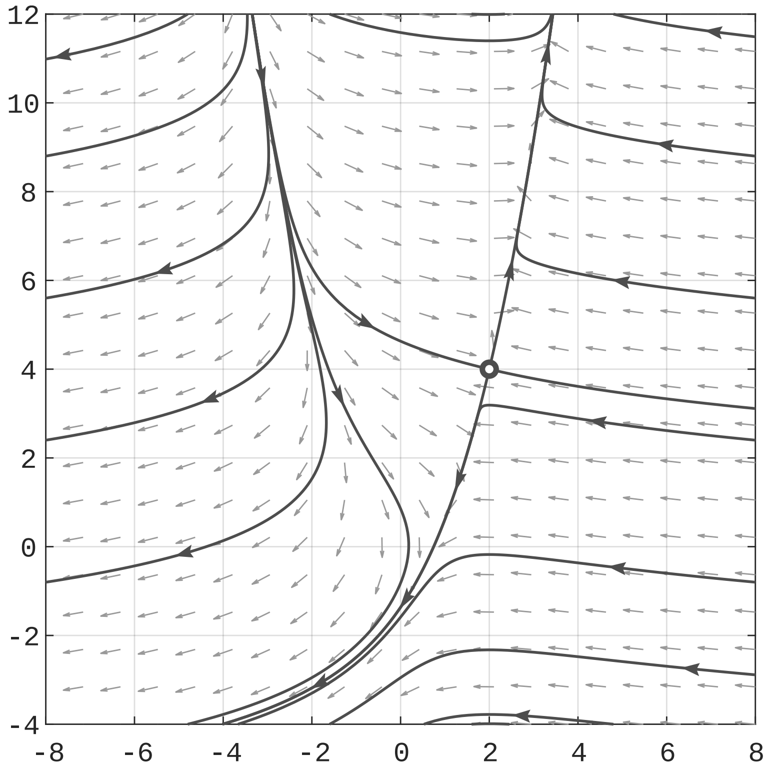


图 1.10: 平面非线性动力系统 (1.54) 的相图

作变量替换 $\begin{cases}\widetilde{x}=x-2,\\ \widetilde{y}=y-4\end{cases}$ 可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}t}=\widetilde{y}-4\widetilde{x}-\widetilde{x}^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}t}=\widetilde{x}.\end{cases} \tag{1.55}$$

方程组 (1.55) 对应的线性化方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}t}=\widetilde{y}-4\widetilde{x},\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}t}=\widetilde{x}. \tag{1.56}$$

计算可知 $(0,0)$ 是线性化方程组 (1.56) 的鞍点. 再由方程组 (1.55) 满足前面提到的**条件 A** 和**条件 B**, 根据定理 1.6.29 , 奇点 $(0,0)$ 也是方程组 (1.55) 的鞍点, 从而奇点 $(2,4)$ 是原动力系统 (1.54) 的鞍点. 由此可知奇点 $(2,4)$ 是不稳定的.

现考虑被两条零趋势线划分后位于平面右上方的区域. 注意到此区域边界上所有点处的切向量均指向此区域内部, 且由 $x',y'>0$ 可知此区域内切向量均指向 NE 方向. 因此此区域

内的解必定停留在此区域内且延伸到 NE 方向的无穷远处. 类似分析可知平面左下方的区域内的解将停留在此区域内且延伸到 SW 方向的无穷远处.

其余两个区域内的解要么与零趋势线相交后进入前述区域 (此后解的行为我们已经掌握), 要么趋于奇点 $(2,4)$. 但由于奇点 $(2,4)$ 是鞍点, 在这两个区域中各有且仅有一条轨线趋向于 $(2,4)$(可参考图 1.5). 于是我们就完成了对非线性系统 (1.54) 相图的全部分析.

7　Sturm–Liouville 边值问题

考虑二阶齐次线性微分方程

$$(p(x)y')' + (\lambda r(x) + q(x))\, y = 0, \tag{1.57}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是参数, 函数 $q(x), r(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 $p(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微, $p(x), r(x) > 0$. 边值条件

$$Ky(a) + Ly'(a) = 0, \quad My(b) + Ny'(b) = 0, \tag{1.58}$$

常数 K, L, M, N 满足

$$K^2 + L^2 > 0, \quad M^2 + N^2 > 0.$$

定义 1.7.1 如果对于 $\lambda = \lambda_0$, Sturm–Liouville 边值问题 (1.57) (1.58) 有非零解 $y = \phi_0(x)$, 则称 λ_0 是这个边值问题的特征值, 而称解 $y = \phi_0(x)$ 是对应于此特征值 λ_0 的特征函数.

例 1.7.2 求 Sturm–Liouville 边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0,\ y'(l) = 0 \end{cases} \qquad (l \neq 0)$$

的特征值和特征函数.

解 ① 若 $\lambda = -a^2 < 0$ $(a > 0)$, 上述方程的通解为

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 由边值条件知

$$ac_1 - ac_2 = 0, \quad ac_1 e^{al} - ac_2 e^{-al} = 0.$$

由此得到 $c_1 = c_2 = 0$, 即该边值问题只有零解.

② 若 $\lambda=0$, 上述方程的通解为

$$y=c_1x+c_2,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 由边值条件知 $c_1=0$. 于是该边值问题有非零解 $\phi_0(x)\equiv 1$.[17]

③ 若 $\lambda=a^2>0$ $(a>0)$, 上述方程的通解为

$$y=c_1\cos(ax)+c_2\sin(ax),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 由边值条件知

$$ac_2=0,\quad -ac_1\sin(al)+ac_2\cos(al)=0,$$

因此 $c_2=0$. 若要求 y 不恒为零, 则 $\sin(al)=0$, 于是 $a=\dfrac{k\pi}{l}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. 故非零解为

$$\phi_k(x)=\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right),\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

综上, 特征值为

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\quad k\in\mathbb{N},$$

相应的特征函数为

$$\phi_k(x)=\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right),\quad k\in\mathbb{N}.$$

□

注 1.7.3 当 $k\to\infty$ 时, 上述特征值 $\lambda_k\to+\infty$, 且特征函数系 $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 在区间 $[0,l]$ 上组成一个完备正交函数系. 更高的观点: Fourier 展开总是由某个算子 (这里为 $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$) 及边值条件决定的.

对 Sturm–Liouville 边值问题 (1.57) (1.58) **形式的整理**

我们希望将方程 (1.57) 中最复杂的二阶项变换为 $\widetilde{y}''$ 的形式. 由 $p(x)>0$ 可设 $\widetilde{x}=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_a^x\frac{1}{p(s)}\,\mathrm{d}s$, 其中 $c=\displaystyle\int_a^b\frac{1}{p(x)}\,\mathrm{d}x$, 则 $\widetilde{x}\in[0,1]$. 令 $\widetilde{y}(\widetilde{x})=y(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{c}\frac{1}{p(x)}\implies p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{x}},$$

于是方程 (1.57) 暂时整理为

$$\frac{1}{p(x)}p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+(\lambda r(x)+q(x))\,y=0,$$

[17] 由于所考虑的是齐次线性微分方程, 只需给出线性无关的解.

也即

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{p(x)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\widetilde{x}^2}\widetilde{y}+\left(\lambda r(x)+q(x)\right)\widetilde{y}=0.$$

再令 $\widetilde{r}\,(\widetilde{x})=c^2p(x)r(x), \widetilde{q}\,(\widetilde{x})=c^2p(x)q(x)$, 则方程 (1.57) 最终整理为

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{y}}{\mathrm{d}\widetilde{x}^2}+\left(\lambda\widetilde{r}\,(\widetilde{x})+\widetilde{q}\,(\widetilde{x})\right)\widetilde{y}=0.$$

由 $c, p(x), r(x)>0$ 知 $\widetilde{r}\,(\widetilde{x})>0$. 边值条件 (1.58) 转化为

$$K\widetilde{y}(0)+\frac{L}{cp(a)}\widetilde{y}'(0)=0, \quad M\widetilde{y}(1)+\frac{N}{cp(b)}\widetilde{y}'(1)=0.$$

令

$$\cos\alpha=\frac{K}{\sqrt{K^2+\left(\frac{L}{cp(a)}\right)^2}}, \quad \sin\alpha=-\frac{\frac{L}{cp(a)}}{\sqrt{K^2+\left(\frac{L}{cp(a)}\right)^2}},$$

由于在边值条件 (1.58) 中总可以要求 L 满足 $\dfrac{L}{cp(a)}\leqslant 0$, 因此可设 $\alpha\in[0,\pi)$. 同样地, 令

$$\cos\beta=\frac{M}{\sqrt{M^2+\left(\frac{N}{cp(b)}\right)^2}}, \quad \sin\beta=-\frac{\frac{N}{cp(b)}}{\sqrt{M^2+\left(\frac{N}{cp(b)}\right)^2}},$$

并设 $\beta\in(0,\pi]$ (如此要求的原因将于第 78 页明晰).

这样, 我们将 Sturm–Liouville 边值问题 (1.57) (1.58) 改写为

$$y''+\left(\lambda r(x)+q(x)\right)y=0, \tag{1.59}$$

$$\begin{cases}\cos\alpha y(0)-\sin\alpha y'(0)=0, & (1.60\text{a})\\ \cos\beta y(1)-\sin\beta y'(1)=0. & (1.60\text{b})\end{cases}$$

其中函数 $r(x), q(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, $r(x)>0$, $\alpha\in[0,\pi)$, $\beta\in(0,\pi]$.

下面的定理是本节的主要结果.

定理 1.7.4 Sturm–Liouville 边值问题 (1.59) (1.60) 有可数无穷多个特征值:

$$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots, \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty.$$

并且对应于特征值 λ_n 的特征函数 $\phi(x,\lambda_n)$ 在 $(0,1)$ 中恰好有 n 个零点.

证明定理 1.7.4 的准备 令 $y=\phi(x,\lambda)$ 是方程 (1.59) 满足初始条件

$$\phi(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad \phi'(0,\lambda)=\cos\alpha$$

的解, 则 $\phi(x,\lambda)\not\equiv 0$. 引入 ϕ'-ϕ 相平面上的极坐标

$$\phi'(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda),\quad \phi(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda),$$

其中 $\rho(x,\lambda)\neq 0$. 由第二式对 x 求导等于第一式得

$$\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta\cdot\theta'=\rho\cos\theta.$$

再由 $y=\phi(x,\lambda)$ 是方程 (1.59) 的解可得

$$\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta\cdot\theta'+(\lambda r+q)\rho\sin\theta=0.$$

联立以上二式 (第一式 $\cdot\cos\theta$ 减第二式 $\cdot\sin\theta$) 可得

$$\rho\theta'-\rho(\lambda r+q)\sin^2\theta=\rho\cos^2\theta.$$

消去 ρ 就转化成初值问题

$$\begin{cases}\theta'(x,\lambda)=\cos^2\theta(x,\lambda)+(\lambda r(x)+q(x))\sin^2\theta(x,\lambda), & (1.61)\\ \theta(0,\lambda)=\alpha. & (1.62)\end{cases}$$

记 $f(x,\theta,\lambda)=\cos^2\theta(x,\lambda)+(\lambda r(x)+q(x))\sin^2\theta(x,\lambda)$, 则有

$$|f(x,\theta,\lambda)|\leqslant 1+|\lambda|r(x)+|q(x)|.$$

由 Picard 存在唯一性定理及延拓定理, **初值问题** (1.61) (1.62) **的解** $\theta(x,\lambda)$ 在 $[0,1]$ 上存在且唯一. 由于 $f(x,\theta,\lambda)$ 关于 λ 是连续可微的, 由解对参数的连续可微性 (定理 1.4.7), $\theta(x,\lambda)$ 关于 λ 是连续可微的.

引理 1.7.5 对任意固定的 $x\in(0,1]$, 函数 $\theta(x,\lambda)$ 关于 λ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的, 且严格单调递增.

证明 结论的前半部分已在上段讨论中得出. 由式 (1.61) 对 λ 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}&=-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+(\lambda r(x)+q(x))\,2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+r(x)\sin^2\theta\\&=\underbrace{(\lambda r(x)+q(x)-1)\sin(2\theta)}_{E(x,\lambda)}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+r(x)\sin^2\theta.\end{aligned}$$

再由式 (1.62) 可知 $\dfrac{\partial\theta}{\partial\lambda}(0,\lambda)=0$. 由一阶线性微分方程解的公式得

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(x,\lambda)=\int_0^x r(t)\sin^2\theta(t,\lambda)\exp\left(\int_t^x E(s,\lambda)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t>0.$$

上式中大于号是由 $x>0, r(x)>0, \sin^2\theta(x,\lambda)\not\equiv 0$ 所得. 故 θ 关于 λ 是严格单调递增的. $\square$

令 $\omega(\lambda)=\theta(1,\lambda)$, 则 $\omega(\lambda)$ 关于 λ 是单调递增的.

引理 1.7.6 对任意固定的 $x_0\in(0,1]$, 有 $\theta(x_0,\lambda)>0$, 且 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta(x_0,\lambda)=0$. 特别地, 有 $\omega(\lambda)>0$, 且 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\omega(\lambda)=0$.

证明 ① 先证明 $\theta(x,\lambda)>0, \forall x\in(0,1]$. 由 $\theta(0,\lambda)=\alpha\in[0,\pi)$, 若 $\alpha>0$, 则由 $\theta(x,\lambda)$ 关于 x 连续可知存在 $\overline{x}\in(0,1)$ 使得 $\theta(x,\lambda)$ 在 $[0,\overline{x}]$ 上恒大于零; 若 $\alpha=0$, 则 $\theta'(0,\lambda)=1>0$, 从而存在 $\overline{x}\in(0,1)$ 使得 $\theta(x,\lambda)$ 在 $(0,\overline{x}]$ 上恒大于零. 下证 $\theta(x,\lambda)>0, \forall x\in(\overline{x},1]$. 否则, 存在 $x_1\in(\overline{x},1)$ 使得 $\theta(x,\lambda)$ 在 $(0,x_1)$ 上恒大于零, 但 $\theta(x_1,\lambda)=0$. 这说明 $\theta'(x_1,\lambda)\leqslant 0$, 但由式 (1.61) 知 $\theta'(x_1,\lambda)=1>0$, 矛盾.

② 再证明对任意固定的 $x_0\in(0,1]$, 有 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta(x_0,\lambda)=0$. 也即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N(\varepsilon)>0$, 使得当 $\lambda<-N(\varepsilon)$ 时 $|\theta(x_0,\lambda)|\overset{①}{=\!=}\theta(x_0,\lambda)<\varepsilon$. 选取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得 $\varepsilon<\min\left\{\dfrac{\pi}{4},\pi-\alpha\right\}$. 由 $\alpha<\pi-\varepsilon$ 及 $\theta(x,\lambda)$ 关于 x 的连续性, 存在 $\overline{x}>0$ 使得在区间 $[0,\overline{x}]$ 上曲线 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 在连接 $(0,\pi-\varepsilon)$ 与 (x_0,ε) 两点的直线 $L\colon \theta=-\dfrac{\pi-2\varepsilon}{x_0}x+(\pi-\varepsilon)$ 的下方. 下证在 $[\overline{x},x_0]$ 上, $\theta(x,\lambda)$ 在 L 的下方. 否则, 存在 $x_1\in(\overline{x},x_0)$, 使得当 $x\in(\overline{x},x_1)$ 时, $\theta=\theta(x,\lambda)$ 在 L 的下方, 但点 $(x_1,\theta(x_1,\lambda))$ 在直线 L 上. 这说明 $\theta'(x_1,\lambda)\geqslant\dfrac{2\varepsilon-\pi}{x_0}$. 令

$$m=\min_{x\in[0,1]}\{r(x)\}>0,\quad M=\max_{x\in[0,1]}\{q(x)\},$$

则对充分接近 $-\infty$ (即使得 $m\lambda+M<0$) 的 λ, 由式 (1.61) ,

$$\theta'(x,\lambda)\leqslant 1+(m\lambda+M)\sin^2\varepsilon,\quad \forall x\in[0,x_1].$$

令 $N(\varepsilon)=-\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{2\varepsilon-\pi}{x_0}-1\right)\dfrac{1}{\sin^2\varepsilon}-M\right]$, 则当 λ 进一步满足 $\lambda<-N(\varepsilon)$ 时, $\theta'(x,\lambda)<\dfrac{2\varepsilon-\pi}{x_0}$, $\forall x\in[0,x_1]$, 矛盾. 故当 $\lambda<-N(\varepsilon)$ 时, 在 $x\in[0,x_0]$ 上, 曲线 $\theta=\theta(x,\lambda)$ 始终在直线 L 的下方, $\theta(x_0,\lambda)<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta(x_0,\lambda)=0$. $\square$

引理 1.7.7 对任意固定的 $x_0\in(0,1]$, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 有 $\theta(x_0,\lambda)\to+\infty$. 特别地, 有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\omega(\lambda)=+\infty$.

证明 由引理 1.7.5 知 $\theta(x_0,\lambda)$ 关于 λ 是严格单调递增的. 假设结论不准确, 则存在正整数 K, 使得

$$0<\theta(x_0,\lambda)\leqslant 2K\pi,\quad \forall\lambda.$$

令

$$m=\min_{x\in[0,1]} r(x)>0,\quad M=\max_{x\in[0,1]}|q(x)|,$$

则对任意正整数 N, 当 λ 充分大时, 有

$$\lambda r(x)+q(x)\geqslant \lambda M-M>N^2.$$

由方程 (1.61) 可知

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\geqslant \cos^2\theta+N^2\sin^2\theta(x,\lambda),$$

于是

$$\begin{aligned}x_0=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x&\leqslant\int_\alpha^{\theta(x_0,\lambda)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\leqslant\int_\alpha^{2K\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\\&\xlongequal{u=N\tan\theta}\frac{4K}{N}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{2K\pi}{N}.\end{aligned}$$

但 x_0 是固定的正数, 上式不可能对任意正整数 N 都成立, 矛盾. □

定理 1.7.4 的证明 回到第 76 页所设的方程 (1.59) 满足给定初始条件的解 $\phi(x,\lambda)$. 为使其还满足边值条件 (1.60b) , 需要

$$\cos\beta\rho(1,\lambda)\sin\theta(1,\lambda)-\sin\beta\rho(1,\lambda)\cos\theta(1,\lambda)=0,$$

消去 $\rho(1,\lambda)$ 后即

$$\sin[\theta(1,\lambda)-\beta]=0\xLeftrightarrow{\beta\in(0,\pi]}\theta(1,\lambda)=\beta+k\pi,\quad k\in\mathbb{N}.$$

而前面已经知道 $\omega(\lambda)\coloneqq\theta(1,\lambda)$ 关于 λ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调递增, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\omega(\lambda)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\omega(\lambda)=+\infty$, 所以对任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $\lambda_k\in\mathbb{R}$ 使得 $\theta(1,\lambda_k)=\beta+k\pi$. 对每一个 λ_k, 都有唯一的非零解 $\phi(x,\lambda_k)$. 下证 $\phi(x,\lambda_k)$ 只有 k 个零点.

注意到 $\theta(0,\lambda_k)=\alpha<\pi,\theta(1,\lambda_k)=\beta+k\pi>k\pi$, 由连续函数的介值定理, 对于 $1\leqslant j\leqslant k$, 存在 $x_j\in(0,1)$, 使得 $\theta(x_j,\lambda_k)=j\pi$, 从而 $\phi(x_j,\lambda_k)=\rho(x_j,\lambda_k)\sin\theta(x_j,\lambda_k)=0$. 再由方程 (1.61) 知 $\theta'(x_j,\lambda_k)=1>0$, 说明 x_j $(j=1,\cdots,k)$ 均为 $\phi(x,\lambda_k)$ 的简单零点.

最后证明 $\phi(x,\lambda_0)$ 在 $(0,1)$ 上无零点. 设 $x_0\in(0,1]$ 是 $\phi(x,\lambda_0)$ 的一个零点, 则 $\theta(x_0,\lambda_0)=j\pi$ $(j=1,2,\cdots)$, 将其代入方程 (1.61) 得到 $\theta'(x_0,\lambda_0)=1>0$. 由于 $\theta(1,\lambda_0)=\beta\in(0,\pi]$, 若

$x_0 < 1$, 必存在 $x_1 \in (x_0, 1]$, 使得 $\theta(x_1, \lambda_0) = \pi$ 且 $\theta'(x_1, \lambda_0) \leqslant 0$, 矛盾. 因此 $\phi(x, \lambda_0)$ 在 $(0, 1)$ 上无零点. □

引理 1.7.8 对应于特征值 λ_n $(n \in \mathbb{N})$, Sturm–Liouville 边值问题 (1.59) (1.60) 有且只有一个线性无关的特征函数.

证明 设 $y = \phi(x, \lambda_k)$ 与 $y = \psi(x, \lambda_k)$ 是 Sturm–Liouville 边值问题 (1.59) (1.60) 对应于特征值 λ_k 的两个特征函数, 则

$$\begin{cases} \phi(0, \lambda_k)\cos\alpha - \phi'(0, \lambda_k)\sin\alpha = 0, \\ \psi(0, \lambda_k)\cos\alpha - \psi'(0, \lambda_k)\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

这是关于 $\cos\alpha, -\sin\alpha$ 的齐次线性方程组, 由于 $(\cos\alpha, -\sin\alpha) \neq (0, 0)$, 必有

$$\begin{vmatrix} \phi(0, \lambda_k) & \phi'(0, \lambda_k) \\ \psi(0, \lambda_k) & \psi'(0, \lambda_k) \end{vmatrix} = 0.$$

因此 $\phi(x, \lambda_k)$ 与 $\psi(x, \lambda_k)$ 构成的 Wronsky 行列式恒为零, 即它们线性相关. □

引理 1.7.9 Sturm–Liouville 边值问题 (1.59) (1.60) 的特征函数系 $\{\phi(x, \lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足

$$\int_0^1 r(x)\phi(x, \lambda_n)\phi(x, \lambda_m)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \delta_n > 0, & m = n, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明 ① 当 $m = n$ 时, 由 $\phi(x, \lambda_n) \not\equiv 0$ 与 $r(x) > 0$ 知

$$\delta_n = \int_0^1 r(x)\phi^2(x, \lambda_n)\,\mathrm{d}x > 0.$$

② 当 $m \neq n$ 时, 记 $\phi_m = \phi(x, \lambda_m), \phi_n = \phi(x, \lambda_n)$. 则

$$\begin{cases} \phi_m'' + (\lambda_m r + q)\phi_m = 0, \\ \phi_n'' + (\lambda_n r + q)\phi_n = 0. \end{cases}$$

第一个方程乘 ϕ_n 与第二个方程乘 ϕ_m 作差后从 0 到 1 积分, 得

$$\int_0^1 (\phi_m''\phi_n - \phi_n''\phi_m)\,\mathrm{d}x + (\lambda_m - \lambda_n)\int_0^1 r\phi_m\phi_n\,\mathrm{d}x = 0.$$

注意到 $\phi_m''\phi_n - \phi_n''\phi_m = (\phi_m'\phi_n - \phi_n'\phi_m)'$, 从而上式左端第一个积分化为

$$[\phi_m'(1)\phi_n(1) - \phi_n'(1)\phi_m(1)] - [\phi_m'(0)\phi_n(0) - \phi_n'(0)\phi_m(0)].$$

由

$$\begin{cases} \phi_m(1)\cos\beta - \phi_m'(1)\sin\beta = 0, \\ \phi_n(1)\cos\beta - \phi_n'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

可知

$$\begin{vmatrix} \phi_m(1) & \phi_m'(1) \\ \phi_n(1) & \phi'(1) \end{vmatrix} = 0.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} \phi_m(0) & \phi_m'(0) \\ \phi_n(0) & \phi'(0) \end{vmatrix} = 0.$$

故得到

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^1 r\phi_m\phi_n \,\mathrm{d}x = 0.$$

又 $\lambda_m \neq \lambda_n$, 最终得到

$$\int_0^1 r(x)\phi(x,\lambda_m)\phi(x,\lambda_n)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall m \neq n.$$

□

注 1.7.10 特征函数系 $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 构成函数空间 $L^2(r\,\mathrm{d}x)$ 的一组完备正交基, 其中 $r(x) > 0$ 称为权函数. 若通过除以 $\sqrt{\delta_n}$ 进行规范化则得到一组标准完备正交基.

第二部分　课后习题

习题 2.2.2 (2) 求解下列微分方程, 并作出积分曲线的草图:

$y' = y^a$, 其中 $a = \dfrac{1}{5}, 1, 2.$

解 $y \equiv 0$ 是原方程的特解. 当 $y \neq 0$ 时:

① 若 $a = \dfrac{1}{5}$, 原方程可同解变形为

$$y^{-\frac{1}{5}}\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x = 0,$$

通积分为

$$\frac{5}{4}y^{\frac{4}{5}} - x = c,$$

其中 c 为任意常数. 故原方程的解为

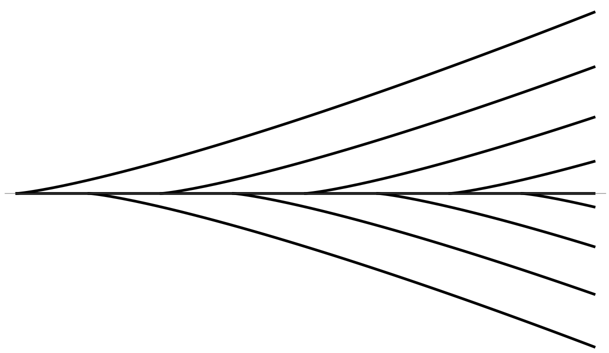
$$y \equiv 0$$

和

$$y = \pm\left[\frac{4}{5}(x+c)\right]^{\frac{5}{4}}, \quad x \geqslant -c,$$

其中 c 为任意常数.

积分曲线草图为:



② 若 $a=1$, 原方程可同解变形为

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0,$$

通积分为

$$\ln|y|-x=c,$$

其中 c 为任意常数. 故原方程的解为

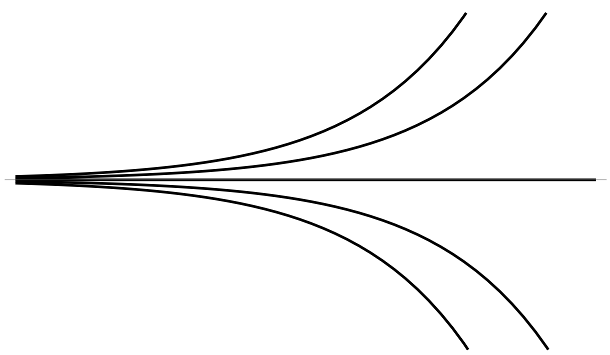
$$y\equiv 0$$

和

$$y=ce^{x},$$

其中 c 为任意非零常数.

积分曲线草图为:



③ 若 $a=2$, 原方程可同解变形为

$$y^{-2}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0,$$

通积分为

$$-\frac{1}{y}-x=c,$$

其中 c 为任意常数. 故原方程的解为

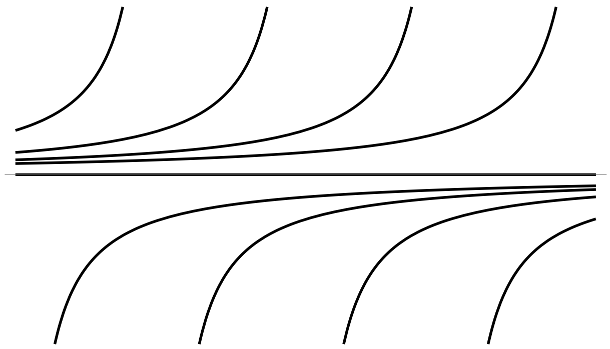
$$y\equiv 0$$

和

$$y=-\frac{1}{x+c},$$

其中 c 为任意常数.

积分曲线草图为:



$\square$

习题 2.2.3 设有微分方程

$$y' = f(y),$$

其中 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某个邻域内连续, 且 $f(y) = 0$ 当且仅当 $y = a$. 证明: 对于直线 $y = a$ 上任一点 (x_0, a), 该方程满足条件 $y(x_0) = a$ 的解存在且唯一的充要条件为

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right| = +\infty,$$

其中 ε 为任意正数.

证明 由 $f(y) = 0$ 当且仅当 $y = a$ 可知 $y \equiv a$ 是原方程的特解, 因此过直线 $y = a$ 的积分曲线必存在. 由 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某个邻域内连续, 且当 $y \neq a$ 时 $f(y) \neq 0$, 可知 $y = a$ 为积分 $\displaystyle\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y$ 唯一的瑕点, 故可不妨固定 ε 使得 $f(y)$ 在 $y \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 上连续.

$\Rightarrow$: 若 $\left|\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right| < +\infty$, 即 $I \coloneqq \displaystyle\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}$. 对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 可作原方程过点 $(x_0, a-\varepsilon)$ 的积分曲线:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x,$$

解得 $x_1 = x_0 + I$. 因此这条曲线与 $y = a$ 是两条过点 $(x_0 + I, a)$ 的积分曲线, 与已知的唯一性矛盾. 故 $\left|\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right| = +\infty$, 同理可证 $\left|\displaystyle\int_{a}^{a+\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right| = +\infty$.

$\Leftarrow$: 对于任意过不在 $y = a$ 上的点的积分曲线, 由 $\left|\displaystyle\int_{a}^{a\pm\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y\right| = +\infty$ 可知该积分曲线与 $y = a$ 不相交, 从而过 $y = a$ 上任一点的积分曲线存在且唯一. $\square$

习题 2.3.2 求出微分方程

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

的当 $x \to \dfrac{\pi}{2}$ 时仍有界的解.

解 当 $\sin 2x \neq 0$ 时, 原方程可改写为

$$y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = \frac{1}{\sin x},$$

其通解为

$$\begin{aligned} y &= c \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sin t \cos t}\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sin s} \exp\left(\int_{s}^{x} \frac{1}{\sin t \cos t}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{c \tan x}{\tan x_0} + \tan x \int_{x_0}^{x} \frac{\cos s}{\sin^2 s}\,\mathrm{d}s = \frac{c \cos x_0 + 1}{\sin x_0} \tan x - \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(\frac{c \cos x_0 + 1}{\sin x_0} \sin x - 1\right) \frac{1}{\cos x} = (c' \sin x - 1)\frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

其中 c, c' 为任意常数. 若 $c' \neq 1$, 则当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时, $y \sim \frac{c'-1}{\cos x} \to \infty$. 若 $c' = 1$, 则由 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0,$$

故 $c' = 1$ 时满足要求. 即原方程的当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时仍有界的解为

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x}.$$

□

习题 2.3.4 求出微分方程 $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$ 的周期解.

解 原方程的通解为

$$y = ce^{x + \frac{1}{2}\sin 2x} - \int_0^x \sin s e^{s + \frac{1}{2}\sin 2s - x - \frac{1}{2}\sin 2x}\,\mathrm{d}s,$$

其中 c 为任意常数.

先说明若 $y(x)$ 是原方程的一个 T-周期解, 则 $T = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. 由

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x)\cos^2 x - \sin x \\ y'(x+T) = 2y(x+T)\cos^2(x+T) - \sin(x+T) \\ y(x) = y(x+T) \end{cases}$$

可得恒等式

$$2y(x)\left[\cos^2(x+T) - \cos^2 x\right] = \sin(x+T) - \sin x.$$

若 $\cos^2(x+T)-\cos^2 x \not\equiv 0$, 则所得 $y(x)$ 不满足以上通解的形式, 因此 $\cos^2(x+T)\equiv\cos^2 x$, 进而 $\sin(x+T)\equiv\sin x$, 即 T 同时为 $\sin x$ 与 $\cos^2 x$ 的周期. 于是 $T=2k\pi$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

下面对任意给定的 $T=2k\pi$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, 选择常数 c 使得解 $y(x)$ 是 T-周期函数.

对原方程的任一解 $y(x)$, 设 $u(x)=y(x+T)-y(x)$, 则由 $\sin(x+T)=\sin x$ 及 $\cos^2(x+T)=\cos^2 x$ 得

$$\begin{cases} y'(x)=2y(x)\cos^2 x-\sin x \\ y'(x+T)=2y(x+T)\cos^2 x-\sin x \end{cases}.$$

从而 $u(x)$ 满足一阶齐次线性微分方程

$$u'-2\cos^2 xu=0.$$

由于该方程的解恒为零或者恒不为零, 所以为使 $y(x)$ 是 T-周期函数, 只需使 $u(0)=0$, 即

$$c=y(T)=ce^{T+\frac{1}{2}\sin 2T}-\int_0^T \sin se^{s+\frac{1}{2}\sin 2s-T-\frac{1}{2}\sin 2T}\,\mathrm{d}s,$$

结合 $\sin 2T=0$ 可解得

$$c=\frac{\displaystyle\int_0^T \sin se^{s+\frac{1}{2}\sin 2s-T}\,\mathrm{d}s}{e^T-1}.$$

故原方程的周期解为

$$y=ce^{x+\frac{1}{2}\sin 2x}-\int_0^x \sin se^{s+\frac{1}{2}\sin 2s-x-\frac{1}{2}\sin 2x}\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$c=\frac{\displaystyle\int_0^{2k\pi} \sin se^{s+\frac{1}{2}\sin 2s}\,\mathrm{d}s}{e^{2k\pi}(e^{2k\pi}-1)},\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

□

习题 2.3.5 假设连续函数 $f(t)$ 满足 $|f(t)|\leqslant M, t\in\mathbb{R}$. 证明: 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=f(t)$$

在 $-\infty<t<+\infty$ 上只有一个有界解; 进一步, 如果 $f(t)$ 是周期函数, 那么这个有界解也是周期的.

证明 原方程的通解为

$$x=ce^{-t}+\int_0^t f(s)e^{s-t}\,\mathrm{d}s=\left[c+\int_0^t f(s)e^s\,\mathrm{d}s\right]e^{-t}.$$

因为当 $t \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}|x(t)| &= \frac{\left|c+\int_0^t f(s)e^s\,\mathrm{d}s\right|}{e^t} \leqslant \frac{|c|+\int_0^t |f(s)|e^s\,\mathrm{d}s}{e^t} \\ &\leqslant \frac{|c|+M(e^t-1)}{e^t} \leqslant |c|+M,\end{aligned}$$

所以解在 $t \geqslant 0$ 上有界. 而当 $t \to -\infty$ 时, $e^t \to 0$, 因此解 $x(t)$ 有界当且仅当

$$\lim_{t\to-\infty}\left(c+\int_0^t f(s)e^s\,\mathrm{d}s\right)=0,$$

也即

$$c=\int_{-\infty}^0 f(s)e^s\,\mathrm{d}s.$$

故原方程在 $-\infty < t < +\infty$ 上只有一个有界解

$$x=e^{-t}\int_{-\infty}^t f(s)e^s\,\mathrm{d}s.$$

若 $f(t)$ 是 T-周期函数, 即 $f(t+T)=f(t)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 则对上述周期解 $x(t)$, 也有

$$\begin{aligned}x(t+T) &= e^{-t-T}\int_{-\infty}^{t+T} f(s)e^s\,\mathrm{d}s \xlongequal{r=s-T} e^{-t-T}\int_{-\infty}^{t} f(r+T)e^{r+T}\,\mathrm{d}r \\ &= e^{-t}\int_{-\infty}^t f(r)e^r\,\mathrm{d}r = x(t),\end{aligned}$$

即 $x(t)$ 也是 T-周期函数. □

习题 3.2.2 求初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y+1,\quad y(0)=0$$

的 Picard 序列, 并由此取极限求解.

解 $f(x,y)=x+y+1$ 显然在 $\mathbb{R}^2$ 上连续且对 y 满足 Lipschitz 条件. 将原 Cauchy 问题转化为积分方程

$$y(x)=\int_0^x [s+y(s)+1]\,\mathrm{d}s.$$

由此可得 Picard 序列:

$$\begin{aligned}y_0(x) &= 0,\\ y_1(x) &= \int_0^x [s+y_0(s)+1]\,\mathrm{d}s,\\ y_2(x) &= \int_0^x [s+y_1(s)+1]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = \int_0^x [s + y_{n-1}(s) + 1] \, \mathrm{d}s.$$

下面归纳证明

$$y_n(x) = x + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k!}x^k, \quad n \geqslant 1.$$

当 $n = 1$ 时直接计算可知成立. 下设结论对 $n-1$ $(n \geqslant 2)$ 成立, 则

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \int_0^x \left(2x + 1 + \frac{1}{n!}x^n + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{k!}x^k\right) \mathrm{d}x = x^2 + x + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{(k+1)!}x^{k+1} \\ &= x + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{2}{k!}x^k = x + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k!}x^k. \end{aligned}$$

故结论对 n 也成立, 进而结论对任意 $n \geqslant 1$ 成立.

于是原 Cauchy 问题的解为

$$\begin{aligned} y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left[x + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k!}x^k\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - x - 2\right] \\ &= 2e^x - x - 2. \end{aligned}$$

□

习题 3.2.3 在定理 3.1 中, 将函数 $f(x, y)$ 的条件用下面的条件替代:

$$|f(x, y)| \leqslant k(x)(1 + |y|),$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k(x)|y_1 - y_2|,$$

其中 $k(x)$ 是可积函数. 假设 $f(x, y)$ 是连续函数. 证明: 存在区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha$, 使得 Picard 序列一致收敛到 Cauchy 问题 (3.1), (3.2) 的解.

证明 对于定理 3.1 证明中构造的 Picard 序列, 我们有

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= \left|\int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) \, \mathrm{d}s\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x k(s)(1 + |y_0|) \, \mathrm{d}s\right| = (1 + |y_0|)\left|\int_{x_0}^x k(s) \, \mathrm{d}s\right|, \\ |y_2(x) - y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^x [f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))] \, \mathrm{d}s\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| \, \mathrm{d}s\right| \end{aligned}$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} k(s)|y_1(s)-y_0(s)|\,\mathrm{d}s\right| \leqslant (1+|y_0|)\left|\int_{x_0}^{x} k(s)\,\mathrm{d}s\right|^2.$$

归纳可得

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant (1+|y_0|)\left|\int_{x_0}^{x} k(s)\,\mathrm{d}s\right|^n.$$

取 $\alpha>0$ 使得 $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\alpha}|k(s)|\,\mathrm{d}s<1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant (1+|y_0|)\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{x_0}^{x} k(s)\,\mathrm{d}s\right|^n \leqslant (1+|y_0|)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x_0+\alpha}|k(s)|\,\mathrm{d}s\right)^n < +\infty.$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ 在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上一致收敛, 进而 $y_n(x)$ 在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上一致收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x).$$

由于

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s,$$

两边同时令 $n\to\infty$ 得

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s.$$

再由积分方程与原 Cauchy 问题 (3.1), (3.2) 的等价性知在区间 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上 Picard 序列一致收敛到 Cauchy 问题 (3.1), (3.2) 的解. □

习题 3.4.2 证明: 初值问题

$$\begin{cases} y'=x^3-y^3, \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解在区间 $[x_0,+\infty)$ 上存在.

证明 $f(x,y)=x^3-y^3$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, $f'_y=-3y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 因此 f 对 y 是局部 Lipschitz 的. 由延拓定理, 经过 (x_0,y_0) 的解曲线存在且唯一, 并且可以延拓到 $\mathbb{R}^2$ 的边界.

设右行解为 $y=\phi(x)$, 则当 $\phi(x)>x$ 时, $\phi'(x)=x^3-(\phi(x))^3<0$, $\phi(x)$ 单调递减; 当 $\phi(x)<x$ 时, $\phi'(x)=x^3-(\phi(x))^3>0$, $\phi(x)$ 单调递增. 由此可知 $y=\phi(x)$ 不可能在有限区间内延伸至 y 方向的无穷处. 故 $y=\phi(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上存在. □

习题 3.4.3 考虑初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(0)=y_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $0\leqslant x\leqslant a, -\infty<y<+\infty$ 上连续, 且满足

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqslant \frac{q}{x}|y-z|,$$

这里 q $(0<q<1)$ 为常数. 证明: 该初值问题的解在区间 $[0,a]$ 上是存在且唯一的.

证明 因为 $f(x,y)$ 在条形区域

$$D\colon 0\leqslant x\leqslant a, -\infty<y<+\infty$$

上连续, 由 Peano 存在性定理, 经过 $(0,y_0)$ 的解曲线存在. 先证这个右行解是唯一的.

设 $\phi_1(x),\phi_2(x)$ 是该初值问题的两个右行解, 令 $r(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$, 则当 $x>0$ 时,

$$|r'(x)|=|\phi_1'(x)-\phi_2'(x)|=|f(x,\phi_1(x))-f(x,\phi_2(x))|\leqslant \frac{q}{x}\left|\phi_1(x)-\phi_2(x)\right|=\frac{q}{x}|r(x)|,$$

也即

$$|xr'(x)|\leqslant q\left|r(x)\right|.$$

令 $g(x)=\dfrac{(r(x))^2}{x^2}$, 则

$$r'(x)=\frac{2\left[xr(x)r'(x)-(r(x))^2\right]}{x^3}.$$

而 $|xr(x)r'(x)|\leqslant q\left(r(x)\right)^2\leqslant (r(x))^2$, 故 $r'(x)\leqslant 0$, 从而

$$g(x)\leqslant \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{r(x)}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0^+}\left(r'(x)\right)^2=\left(r'(0)\right)^2=0,$$

故当 $x\geqslant 0$ 时 $g(x)\leqslant 0$, 从而 $g(x)=0$ 即 $r(x)=0$, $\phi_1(x)=\phi_2(x)$.

由延拓定理, 经过 $(0,y_0)$ 的解曲线存在且唯一, 并且可以延伸到 D 的边界. 设这个解为 $y=\phi(x)$, 下证 $y=\phi(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上存在. 由已证的解的存在性, 可设 $y=\phi(x)$ 在 $[0,h)$ 上存在. 记 $x_1=\dfrac{h}{2}$, $y_1=\phi(x_1)$, 只需证经过 (x_1,y_1) 的解曲线在 $[x_1,a]$ 上存在. 用反证法, 假设 $y=\phi(x)$ 的最大右行区间为 $[x_1,b)$, $b<a$. 对 $x\in[x_1,b)$,

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqslant \frac{q}{x_1}|y-z|,\quad \forall y,z\in\mathbb{R}.$$

记 $M\coloneqq \max\limits_{x\in[x_1,b]}|f(x,y_1)|$, 则对 $x\in[x_1,b)$ 与 $y\in\mathbb{R}$ 有

$$|f(x,y)|\leqslant |f(x,y_1)|+|f(x,y)-f(x,y_1)|\leqslant M+\frac{q}{x_1}|y-y_1|,$$

从而

$$|\phi(x)-y_1|=\left|\int_{x_1}^{x} f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant \int_{x_1}^{x}|f(s,\phi(s))|\,\mathrm{d}s\leqslant \int_{x_1}^{x}\left(M+\frac{q}{x_1}\left|\phi(s)-y_1\right|\right)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant M(b-x_1)+\int_{x_1}^{x}\frac{q}{x_1}\left|\phi(s)-y_1\right|\,\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 不等式即得

$$|\phi(x)-y_1|\leqslant M(b-x_1)\exp\left(\int_{x_1}^{x}\frac{q}{x_1}\,\mathrm{d}s\right)\leqslant M(b-x_1)e^{\frac{q(b-x_1)}{x_1}}.$$

故当 $x\in[x_1,b)$ 时,

$$|\phi(x)|\leqslant|y_1|+|\phi(x)-y_1|\leqslant|y_1|+M(b-x_1)e^{\frac{q(b-x_1)}{x_1}}.$$

由于 $\phi(x)$ 在 $[x_1,b)$ 上有界, 它必定可以延伸到 $x=b$ 处, 即假设不成立.

综上, 该初值问题的解在区间 $[0,a]$ 上是存在且唯一的. □

习题 3.4.4 假设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $0\leqslant x\leqslant a,-\infty<y<+\infty$ 上连续. 记 $\phi(x,\xi)$ 是微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $\phi(0,\xi)=\xi$ 的解. 进一步, 假设 $\phi(x,\xi)$ 在区间 $[0,\overline{x})$ 上存在, $\overline{x}<a$. 证明下列三个结论之一成立.

(1) $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-}\phi(x,\xi)$ 有限, 此时解 $y=\phi(x,\xi)$ 可以延伸至 $x=\overline{x}$;
(2) $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-}\phi(x,\xi)=+\infty$;
(3) $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-}\phi(x,\xi)=-\infty$.

证明 因为 $f(x,y)$ 在条形区域

$$D\colon 0\leqslant x\leqslant a,-\infty<y<+\infty$$

上连续, 所以由延拓定理, 解曲线 $y=\phi(x,\xi)$ 可以延伸到 D 的边界. 若 (1) 不成立, 为了说明 (2) 和 (3) 必有一个成立, 只需排除 $\phi(x,\xi)$ 在 $x\to\overline{x}$ 时剧烈振荡 ($|\phi(x,\xi)|\to+\infty$) 而无极限的情形. 若如此, 考虑点 $(\overline{x},0)$ 的一个左邻域 $R=\{(x,y)\mid\overline{x}-\delta\leqslant x\leqslant\overline{x},-\delta\leqslant y\leqslant\delta\}$, 其中 δ 为任意取定的正数. 现构造单调增数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $z_k\in(\overline{x}-\delta,\overline{x})$, $\forall k$,

$$\phi(z_k,\xi)=\begin{cases}\delta, & k\equiv 0 \text{ 或 } 1 \mod 4,\\ -\delta, & k\equiv 2 \text{ 或 } 3 \mod 4,\end{cases}$$

且连接 $(z_{2k+1},\phi(z_{2k+1},\xi))$ 与 $(z_{2k+2},\phi(x_{2k+2},\xi))$ 的曲线 (点集) 含于 R 中.

由 Lagrange 中值定理, 存在单调增数列 $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $z_k'\in(z_{2k-1},z_{2k})$, $\phi(z_k',\xi)\in(-\delta,\delta)$, 且

$$\phi'(z_k',\xi)=\frac{\phi(z_{2k},\xi)-\phi(z_{2k-1},\xi)}{z_{2k}-z_{2k-1}}=\begin{cases}\dfrac{-2\delta}{z_{2k}-z_{2k-1}}, & k\text{为奇数},\\[2mm] \dfrac{2\delta}{z_{2k}-z_{2k-1}}, & k\text{为偶数}.\end{cases}$$

当 $n\to\infty$ 时, $z_n\to\overline{x}$, $z_{2n}-z_{2n-1}\to 0^+$, 从而 $\phi'(z'_{2n+1},\xi)\to-\infty$ 而 $\phi'(z'_{2n},\xi)\to+\infty$, 也即 $f(z'_{2n+1},\phi(z'_{2n+1}))\to-\infty$ 而 $f(z'_{2n},\phi(z'_{2n}))\to+\infty$. 但 $(z'_{2n+1},\phi(z'_{2n+1})),(z'_{2n},\phi(z'_{2n}))\in R$, 由 $\delta>0$ 的任意性知 f 在 $(\overline{x},0)$ 处振幅为 $+\infty$, 即不连续, 这与题设矛盾. 故若 (1) 不成立, 则 (2) 和 (3) 必有一个成立. 结论得证. □

补充题 1 证明第二比较定理: 设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在区域 G 内连续, 且

$$f(x,y)\leqslant F(x,y),\quad (x,y)\in G,$$

又设函数 $y=\phi(x)$ 和 $y=\varPhi(x)$ 在区间 (a,b) 上分别是初值问题

$$\mathrm{E}_1:\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

和

$$\mathrm{E}_2:\begin{cases}y'=F(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解 ($(x_0,y_0)\in G$), 并且 $y=\phi(x)$ 是初值问题 (E_1) 的右侧最小解和左侧最大解 (或 $y=\varPhi(x)$ 是初值问题 (E_2) 的右侧最大解和左侧最小解), 则

$$\begin{cases}\phi(x)\leqslant\varPhi(x),\quad x_0\leqslant x<b,\\ \phi(x)\geqslant\varPhi(x),\quad a<x\leqslant x_0.\end{cases}$$

证明 设 $y=\phi(x)$ 是初值问题 E_1 的右侧最小解和左侧最大解. 考虑初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y)-\varepsilon_n,\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

其中 $\varepsilon_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 同定理 3.7 的证明可知, 存在该初值问题的解序列 $\{\phi_n(x)\}$ 的一个子列 $\left\{\phi_{n_j}(x)\right\}$ 一致收敛到 $\phi(x)$. 因为 $f(x,y)-\varepsilon_{n_j}<f(x,y)\leqslant F(x,y)$, 由第一比较定理得

$$\begin{cases}\phi_{n_j}(x)<\varPhi(x),\quad x>x_0,\\ \phi_{n_j}(x)>\varPhi(x),\quad x<x_0,\end{cases}$$

令 $j\to\infty$ 即得证. □

习题 3.5.1 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

设函数 $f(x,y)$ 在矩形闭区域 $D = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\}$ 上连续, 令

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

证明; 该初值问题的最大解 $y = Z(x)$ 与最小解 $y = W(x)$ 之间充满了其他解, 即对于任一满足

$$|x_1 - x_0| \leqslant h, \quad W(x_1) \leqslant y_1 \leqslant Z(x_1)$$

的点 (x_1, y_1), 该初值问题在 $|x-x_0| \leqslant h$ 上至少有一个解 $y = \phi(x)$, 满足 $\phi(x_1) = y_1$.

证明 不妨设 $x_1 > x_0$. 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_1) = y_1, \end{cases}$$

由于 f 在 D 上连续, 由延拓定理, 经过 (x_1, y_1) 的解曲线存在, 且可以延伸到 D 的边界. 考虑其向左延伸的解 $y = \phi(x)$, 在区间 $[x_0, x_1]$ 上, $W(x) \leqslant \phi(x) \leqslant Z(x)$, 又 $y = Z(x)$ 与 $y = W(x)$ 相交于 (x_0, y_0), 因此解曲线 $y = \phi(x)$ 必经过 (x_0, y_0). 因此 $y = \phi(x)$ 也是初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解. 由 Peano 存在性定理, 这个解在 $|x-x_0| \leqslant h$ 上存在. □

习题 4.3.1 设函数 $y = y(x,\eta)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin xy, \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

的解. 证明:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta) > 0.$$

证明 $f(x,y) = \sin xy$ 在 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 上连续, 在任意闭矩形上关于 y 有连续偏导数, 由定理 4.7, 解 $y = y(x,\eta)$ 关于 x, η 是可微的.

由积分方程

$$y(x,\eta)=\eta+\int_0^x \sin sy\,\mathrm{d}s$$

两边对 η 求导可得

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)=1+\int_0^x s\cos(sy)\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,\eta)\,\mathrm{d}s.$$

令 $z(x,\eta)=\dfrac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=x\cos(xy)\cdot z,\\ z(0,\eta)=1.\end{cases}$$

解这个变量分离方程可得

$$\ln z=\int_0^x x\cos(yx)\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)=z(x,\eta)=\exp\left(\int_0^x x\cos(yx)\,\mathrm{d}x\right)>0.$$

□

习题 4.3.4 (1) 求给定微分方程初值问题的解对初值或参数的导数:

$$\begin{cases}y'=2x+\mu y^2,\\ y(0)=\mu-1,\end{cases}\qquad 求\ \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

解 $f(x,y,\mu)=2x+\mu y^2$ 在 $(x,y,\mu)\in\mathbb{R}^3$ 上连续, 在任意闭矩形上关于 y,μ 都有连续的偏导数, 由定理 4.7, 解 $y=y(x,\mu)$ 关于 x,μ 是可微的.

由积分方程

$$y(x,\mu)=\mu-1+\int_0^x\left(2s+\mu\left(y(s,\mu)\right)^2\right)\,\mathrm{d}s$$

两边对 μ 求导可得

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}(x,\mu)=1+\int_0^x\left[\left(y(s,\mu)\right)^2+2\mu y(s,\mu)\frac{\partial y}{\partial \mu}(s,\mu)\right]\,\mathrm{d}s.$$

令 $z(x,\mu)=\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(x,\mu)$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2\mu yz+y^2,\\ z(0)=1.\end{cases}$$

解这个一阶线性微分方程可得

$$z(x,\mu)=\exp\left(\int_0^x 2\mu y(t,\mu)\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^x (y(s,\mu))^2\exp\left(\int_s^x 2\mu y(t,\mu)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.$$

因为 $y(x,0)$ 是

$$\begin{cases} y'=2x, \\ y(0)=-1 \end{cases}$$

的解, 所以 $y(x,0)=x^2-1$. 在前式中取 $\mu=0$ 则有

$$z(x,0)=1+\int_0^x \left(s^2-1\right)^2\,\mathrm{d}s,$$

即

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+1.$$

□

习题 5.1.2 设当 $x\in(a,b)$ 时, n 阶线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 中的函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为零, 证明: 该方程组有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

证明 取齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}$ 的 n 个线性无关解 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$, 再取非齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 的一个特解 $\boldsymbol{\phi}^*$. 显然 $\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{\phi}^*,\cdots,\boldsymbol{y}_n+\boldsymbol{\phi}^*,\boldsymbol{\phi}^*(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 的解, 下证这 $n+1$ 个解向量线性无关.

用反证法, 设它们线性相关, 则存在不全为零的 $c_1,\cdots,c_{n+1}$, 使得

$$c_1(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{\phi}^*)+\cdots+c_n(\boldsymbol{y}_n+\boldsymbol{\phi}^*)+c_{n+1}\boldsymbol{\phi}^*=0,$$

也即

$$c_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{y}_n+(c_1+\cdots+c_{n+1})\boldsymbol{\phi}^*=0.$$

若 $c_1+\cdots+c_{n+1}=0$, 则由 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 线性无关可知 $c_1=\cdots=c_n=0$, 进而 $c_{n+1}=0$, 这与 $c_1,\cdots,c_{n+1}$ 的选取矛盾. 故 $c_1+\cdots+c_{n+1}\neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{\phi}^*=-\frac{1}{c_1+\cdots+c_{n+1}}\left(c_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+c_{n+1}\boldsymbol{y}_n\right).$$

这说明 $\boldsymbol{\phi}^*$ 也是 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}$ 的解, 但这与 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为零矛盾. 这就证明了 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 有 $n+1$ 个线性无关解.

对于任意选定的方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 的 $n+1$ 个线性无关解 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_{n+1}$, 再任取它的一个特解 $\boldsymbol{\phi}^*(x)$, 则 $\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\phi}^*,\cdots,\boldsymbol{y}_{n+1}-\boldsymbol{\phi}^*$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}$ 的 $n+1$ 个解向量. 于是这 $n+1$ 个解向量线性相关, 即存在不全为零的 $c_1,\cdots,c_{n+1}$, 使得

$$c_1(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\phi}^*)+\cdots+c_{n+1}(\boldsymbol{y}_{n+1}-\boldsymbol{\phi}^*)=0,$$

也即

$$(c_1+\cdots+c_{n+1})\boldsymbol{\phi}^*=c_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+c_{n+1}\boldsymbol{y}_{n+1}.$$

由 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_{n+1}$ 线性无关可知 $c_1+\cdots+c_{n+1}\neq 0$. 故

$$\boldsymbol{\phi}^*=\frac{1}{c_1+\cdots+c_{n+1}}\left(c_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+c_{n+1}\boldsymbol{y}_{n+1}\right).$$

这说明 $\boldsymbol{\phi}^*$ 可由 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_{n+1}$ 线性表出. 由 $\boldsymbol{\phi}^*$ 的任意性即知 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 至多有 $n+1$ 个线性无关解. □

习题 5.1.3 证明: 向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}$$

不可能同时满足任何一个三阶齐次线性微分方程组.

证明 用反证法, 假设所给 3 个解向量是某一个三阶齐次线性微分方程组的解, 则由 Wronsky 行列式 $\det\begin{pmatrix}1&x&x^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\equiv 0$ 可知这 3 个解向量在任意区间 (a,b) 上线性相关, 也即存在不全为零的 c_1,c_2,c_3, 使得

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad\forall x\in(a,b).$$

但 $c_1+c_2x+c_3x^2$ 是次数至多为 2 的非零多项式, 它在 (a,b) 上至多有 2 个零点, 矛盾. 故所给向量组不可能同时满足任何一个三阶齐次线性微分方程组. □

习题 5.1.4 求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{t}x+1,\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}x+y.$$

解 方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{t}x$ 过 $(t_0,0)$ $(t_0\neq 0)$ 的一个特解为 $x=0$; 过 (t_0,x_0) $(t_0x_0\neq 0)$ 的通解为 $\left|\dfrac{x}{x_0}\right|=\dfrac{t^2}{t_0^2}$, 取 $(t_0,x_0)=(1,1)$ 并取 $x>0$ 就得到一个特解 $x=t^2$.

将 $x=0$ 代入第二个方程得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y$, 其过 (t_0,y_0) 的通解为 $\left|\dfrac{y}{y_0}\right|=e^{t-t_0}$. 取 $(t_0,y_0)=(1,1)$ 并取 $y>0$ 得到一个特解 $y=e^{t-1}$.

将 $x=t^2$ 代入第二个方程得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y+t$, 其过 (t_0,y_0) 的通解为 $y=y_0e^{t-t_0}+(t_0+1)e^{t-t_0}-(t+1)$. 取 $(t_0,y_0)=(1,0)$ 得到一个特解 $y=2e^{t-1}-t-1$.

于是得到原微分方程组的一个解矩阵

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}0 & t^2\\ e^{t-1} & 2e^{t-1}-t-1\end{pmatrix}.$$

当 $t\neq 0$ 时, $\det\Phi(t)=-t^2e^{t-1}\neq 0$, 故 $\Phi(t)$ 是齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{t} & 0\\ \frac{1}{t} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

的基解矩阵. 由

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\ 1\end{pmatrix}$$

是非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{t} & 0\\ \frac{1}{t} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

的一个特解可得该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & t^2\\ e^{t-1} & 2e^{t-1}-t-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2t^2-t\\ (c_1+2c_2)e^{t-1}-c_2t-c_2+1\end{pmatrix}.$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 重新整理可得通解为

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1t^2-t\\ c_2e^t-c_1(t+1)+1\end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

习题 5.2.1 (4) 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

解 计算可得 A 的特征值

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=1+2\,\mathrm{i},\quad \lambda_3=1-2\,\mathrm{i}$$

及其对应的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\,\mathrm{i}\\ 1\\ 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\,\mathrm{i}\\ 1\\ 3\end{pmatrix}.$$

由

$$e^{\lambda_2 x}\boldsymbol{\xi}_2=e^{2x}\begin{pmatrix}-2\sin 2x+2\,\mathrm{i}\cos 2x\\ \cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x\\ 3\cos 2x+3\,\mathrm{i}\sin 2x\end{pmatrix}$$

可得基解矩阵为

$$e^x\begin{pmatrix}0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x\\ 1 & \cos 2x & \sin 2x\\ -1 & 3\cos 2x & 3\sin 2x\end{pmatrix}.$$

故通解为

$$\boldsymbol{y}=c_1e^x\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+c_2e^x\begin{pmatrix}-2\sin 2x\\ \cos 2x\\ 3\cos 2x\end{pmatrix}+c_3e^x\begin{pmatrix}2\cos 2x\\ \sin 2x\\ 3\sin 2x\end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数. □

习题 5.2.1 (8) 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

解 计算可得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$(3 重). 由 $(A-\lambda_1 I)^3=O$ 可得 $(A-\lambda_1 I)^3\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$ 的三个线性无关解

$$\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_{11}^{(1)}&=(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\xi}_{12}^{(1)}&=(A-\lambda_1 I)^2\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)}=\mathbf{0},\\
\boldsymbol{\xi}_{21}^{(1)}&=(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\xi}_{22}^{(1)}&=(A-\lambda_1 I)^2\boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)}=\mathbf{0},\\
\boldsymbol{\xi}_{31}^{(1)}&=(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{\xi}_{32}^{(1)}&=(A-\lambda_1 I)^2\boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)}=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

故基解矩阵

$$\varPhi(x)=e^x\begin{pmatrix}1+x&-x&-x\\2x&1-2x&-2x\\-x&x&1+x\end{pmatrix}.$$

于是所给方程的所有解为

$$\boldsymbol{y}=\varPhi(x)\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意三维常数列向量. □

习题 5.2.2 (1) 求解非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+2e^x,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y+e^x.\end{cases}$$

解 先解相应的齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

计算可得 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 对应的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

故该齐次线性微分方程组的基解矩阵为

$$\varPhi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

因此所给非齐次线性微分方程组的通解为

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= \varPhi(x)\boldsymbol{c} + \int_{x_0}^{x} \varPhi(x)\varPhi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \varPhi(x)\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\varPhi(x)\int_0^x \begin{pmatrix} e^{-s} & e^{-s} \\ e^s & -e^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^s \\ e^s \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x - \frac{1}{4}e^{-x} \\ \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \frac{1}{4}e^{-x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} + c_1\right)e^x - \left(\frac{1}{4} - c_2\right)e^{-x} \\ \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + c_1\right)e^x + \left(\frac{1}{4} - c_2\right)e^{-x} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 重新调整参数可得通解为

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{3}{2}x + c_1 + \dfrac{1}{2}\right)e^x - c_2e^{-x}, \\ z = \left(\dfrac{3}{2}x + c_1\right)e^x + c_2e^{-x}, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

习题 5.2.3 (1) 利用常数变易法求解非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + \tan^2 x - 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -y + \tan x. \end{cases}$$

解 先解相应的齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

计算可得矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = \mathrm{i}, \lambda_2 = -\mathrm{i}$, 对应的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由

$$e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \cos x + \mathrm{i}\sin x \\ -\sin x + \mathrm{i}\cos x \end{pmatrix}$$

可得基解矩阵

$$\varPhi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

下面用常数变易法求所给非齐次线性微分方程组的特解 $\boldsymbol{\phi}^*(x)$.

令 $\boldsymbol{\phi}^*(x) = \varPhi(x)\boldsymbol{c}(x)$, 其中 $\boldsymbol{c}(x)$ 是函数列向量. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varPhi(x)\boldsymbol{c}(x)\right) = A(x)\varPhi(x)\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{f}(x),$$

其中 $\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \tan^2 x - 1 \\ \tan x \end{pmatrix}$. 由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varPhi(x)\boldsymbol{c}(x)\right) = \varPhi'(x)\boldsymbol{c}(x) + \varPhi(x)\boldsymbol{c}'(x) = A(x)\varPhi(x)\boldsymbol{c}(x) + \varPhi(x)\boldsymbol{c}'(x)$$

可将上式化简为

$$\varPhi(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x),$$

也即

$$\boldsymbol{c}'(x) = \varPhi^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tan^2 x - 1 \\ \tan x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{c}(x) = \boldsymbol{c}_0 + \begin{pmatrix} \sin x_0 - \sin x \\ \cos x + \dfrac{1}{\cos x} - \cos x_0 - \dfrac{1}{\cos x_0} \end{pmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{c}_0=\mathbf{0}$ 就得到一个特解

$$\boldsymbol{\phi}^*(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)=\begin{pmatrix}\sin x_0\cos x+\tan x-\cos x_0\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x_0}\\ 2-\sin x_0\sin x-\cos x_0\cos x-\dfrac{\cos x}{\cos x_0}\end{pmatrix}.$$

故所给非齐次线性微分方程组的通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\phi}^*(x)&=\begin{pmatrix}c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x_0\cos x+\tan x-\cos x_0\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x_0}\\ -c_1\sin x+c_2\cos x+2-\sin x_0\sin x-\cos x_0\cos x-\dfrac{\cos x}{\cos x_0}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(c_1+\sin x_0)\cos x+\left(c_2-\cos x_0-\dfrac{1}{\cos x_0}\right)\sin x+\tan x\\ -(c_1+\sin x_0)\sin x+\left(c_2-\cos x_0-\dfrac{1}{\cos x_0}\right)\cos x+2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 重新调整参数可得通解为

$$\begin{cases}y=c_1\cos x+c_2\sin x+\tan x,\\ z=2-c_1\sin x+c_2\cos x,\end{cases}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. □

习题 5.3.1 (4) 求解微分方程

$$y''+y=4\sin x.$$

解 齐次线性微分方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 特征根为 $\lambda_1=\mathrm{i},\lambda_2=-\mathrm{i}$. 因此它的一个基本解组为 $\cos x,\sin x$, 通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$, 其中 c_1,c_2 为任意常数. 设所给非齐次线性微分方程的一个特解 $\phi^*(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$. 则

$$\phi^{*\prime}(x)=-c_1(x)\sin x+c_2(x)\cos(x)+c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x,$$

令

$$c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0,$$

则

$$\phi^{*\prime\prime}(x)=-c_1(x)\cos x-c_2(x)\sin x-c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x.$$

将 ϕ^* 与 $\phi^{*\prime\prime}$ 代入所给方程就有

$$-c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=4\sin x.$$

由此解得

$$c_1(x) = \sin 2x - 2x, \quad c_2(x) = -\cos 2x,$$

即有一个特解

$$\phi^*(x) = \sin x - 2x\cos x.$$

故所给方程的通解为

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin x - 2x\cos x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 重新调整参数可得通解为

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

习题 5.3.1 (6) 求解微分方程

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$

解 齐次线性微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, 特征根为 1(2 重). 因此它的一个基本解组为 e^x, xe^x. 根据经验解法, 可设特解为 $\phi^*(x) = x^2(ax+b)e^x$, 则

$$\phi^{*\prime}(x) = e^x\left[ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx\right], \quad \phi^{*\prime\prime}(x) = e^x\left[ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b\right].$$

代入方程可得

$$\begin{cases} 6a = 6, \\ 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases}$$

故 $\phi^*(x) = x^3e^x$. 从而所给方程的通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^x + x^3e^x,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

习题 5.3.2 (3) 利用常数变易法求解微分方程

$$y'' - y = x^{-1} - 2x^{-3}.$$

解 齐次线性微分方程 $y'' - y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 因此它的一个基本解组为 e^x, e^{-x}. 设所给非齐次线性微分方程的一个特解为

$$\phi^*(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x},$$

则

$$\phi^{*\prime}(x) = c_1(x)e^x - c_2(x)e^{-x} + c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x}.$$

令

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0,$$

则

$$\phi^{*\prime\prime}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} + c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x}.$$

将 ϕ^* 与 $\phi^{*\prime\prime}$ 代入所给方程就有

$$c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = x^{-1} - 2x^{-3}.$$

由此解得

$$c_1(x) = -e^{-x}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2}\right), \quad c_2(x) = -e^{x}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right),$$

即有一个特解

$$\phi^*(x) = -\frac{1}{x}.$$

故所给方程的通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{x},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. □

习题 5.3.5 考虑微分方程 $y'' + y = 0$. 设 $y = c(x)$ 和 $y = s(x)$ 分别是该方程满足初始条件

$$c(0) = 1, \quad c'(0) = 0$$

和

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

的解. 不求解微分方程, 请证明:

(1) $c(x)$ 是偶函数, $s(x)$ 是奇函数;

(2) $s^2(x) + c^2(x) \equiv 1$;

(3) $s(\alpha + \beta) = s(\alpha)c(\beta) + s(\beta)c(\alpha)$;

(4) 如果 τ 是 $c(x)$ 在 $x > 0$ 上的第一个零点, 则 $c(x)$ 和 $s(x)$ 均是以 4τ 为周期的.

证明 (1) 注意到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}c(-x) + c(-x) = c''(-x) + c(-x) = 0$$

以及

$$c(-x)\big|_{x=0}=1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c(-x)\right|_{x=0}=-c'(-x)\big|_{x=0}=0,$$

即 $c(-x)$ 与 $c(x)$ 是所给方程满足相同初始条件的解, 由解的唯一性知 $c(-x)=c(x)$, 即 $c(x)$ 是偶函数. 同理, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(-s(-x)\right)+\left(-s(-x)\right)=-s''(-x)-s(-x)=0$$

以及

$$-s(-x)\big|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-s(-x)\right)\right|_{x=0}=s'(0)=1$$

可知 $-s(-x)$ 与 $s(x)$ 是所给方程满足相同初始条件的解, 从而 $-s(-x)=s(x)$, 即 $s(x)$ 是奇函数.

(2) 注意到

$$(s'(x))''+s'(x)=-s'(x)+s'(x)=0,$$

以及

$$s'(0)=1,\quad s''(0)=-s(0)=0,$$

即 $s'(x)$ 与 $c(x)$ 是所给方程满足相同初始条件的解, 从而 $s'(x)=c(x)$. 同理, 由

$$(-c'(x))''+(-c'(x))=c'(x)-c'(c)=0$$

以及

$$-c'(0)=0,\quad -c''(0)=c(0)=1$$

可知 $-c'(x)$ 与 $s(x)$ 是所给方程满足相同初始条件的解, 从而 $c'(x)=-s(x)$. 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[s^2(x)+c^2(x)\right]=2\left[s(x)s'(x)+c(x)c'(x)\right]=2\left[s(x)c(x)+c(x)(-s(x))\right]=0,$$

即 $s^2(x)+c^2(x)\equiv s^2(0)+c^2(0)=1$.

(3) 对任意取定的 α, 设 $f(\beta)=s(\alpha+\beta)$, $g(\beta)=s(\alpha)c(\beta)+s(\beta)c(\alpha)$, 则有

$$f''+f=0,\quad g''+g=0,$$

$$f(-\alpha)=s(0)=0,\quad f'(-\alpha)=s'(0)=1,$$

$$g(-\alpha)=s(\alpha)c(-\alpha)+s(-\alpha)c(\alpha)\xlongequal{(1)}s(\alpha)c(\alpha)-s(\alpha)c(\alpha)=0,$$

$$g'(-\alpha)=s(\alpha)c'(-\alpha)+s'(-\alpha)c(\alpha)=-s(\alpha)s(-\alpha)+c(-\alpha)c(\alpha)=s^2(\alpha)+c^2(\alpha)=1,$$

故 $f(\beta)$ 与 $g(\beta)$ 是所给方程满足相同初始条件的解, 从而 $f(\beta)=g(\beta)$, 这就证明了恒等式.

(4) 由于 $s(x)=-c'(x)$, 只需证明 $c(x)$ 以 4τ 为周期. 设 $h(x)=-c(2\tau-x)$, 则

$$h'(x)=c'(2\tau-x),\quad h''(x)=-c''(2\tau-x).$$

因此

$$h''+h=-c''(2\tau-x)-c(2\tau-x)=0,$$
$$h(\tau)=-c(\tau)=0,\quad h'(\tau)=c'(\tau),$$

即 $h(x)$ 与 $c(x)$ 是所给方程满足相同初始条件的解, 从而 $h(x)=-c(2\tau-x)=c(x)$. 于是

$$c(x-4\tau)=c(4\tau-x)=c\left(2\tau-(x-2\tau)\right)=-c(x-2\tau)=-c(2\tau-x)=c(x),$$

即 4τ 是 $c(x)$ 的一个周期. □

习题 9.2.4 研究微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-1+x^2\end{cases}$$

的奇点的 Lyapunov 稳定性.

解 方程组的两个奇点为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$.

① 考虑奇点 $(1,0)$. 作换元 $\begin{cases}u=x-1,\\ v=y,\end{cases}$ 则原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v,\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u^2+2u.\end{cases}$$

线性近似系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\pm\sqrt{2}$, 因此零解是不稳定的, 即原方程组的奇点 $(1,0)$ 是不稳定的.

② 考虑奇点 $(-1,0)$. 作换元 $\begin{cases}u=x+1,\\ v=y,\end{cases}$ 则原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v,\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u^2-2u.\end{cases}$$

设

$$V(u,v)=\frac{1}{2}v^2+\int_0^u\left(2s-s^2\right)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}v^2+u^2-\frac{1}{3}u^3,$$

则 V 关于方程组的导数

$$V^*(u,v)=\left(2u-u^2\right)v+v\left(u^2-2u\right)\equiv 0.$$

设 $\Omega=\{(u,v)\mid u<2\}$, 则 V 在 Ω 上是正定的. 因此零解是 Lyapunov 正向稳定的. 而 $V^*(u,v)\equiv 0$ 还说明零解不是 Lyapunov 正向渐近稳定的, 这是因为对任意以 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 为初值的解 $\phi(t)$, $V(\phi(t))\equiv V(\phi(0))\neq 0$, 即 $\phi(t)\not\to(0,0)$. 故原方程组的奇点 $(-1,0)$ 是 Lyapunov 正向稳定但不渐近稳定的. □

习题 9.2.5 (1) 讨论微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-xy^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-x^4y\end{cases}$$

的零解的 Lyapunov 稳定性.

解 设 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则 V 在 $\mathbb{R}^2$ 上正定, 且 V 关于所给方程组的导数

$$V^*(x,y)=2x\left(-y-xy^2\right)+2y\left(x-x^4y\right)=-2x^2y^2\left(1+x^2\right)\leqslant 0.$$

因此零解是 Lyapunov 正向稳定的. 又方程组的解 $(x(t),y(t))$ 满足 $V^*(x(t),y(t))=0$ 当且仅当 $x(t)y(t)\equiv 0$, 由连续性知这样的轨线必过原点, 但原点是平衡点, 因此这样的解只能是零解. 故由 Lasalle 不变集原理, 零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的. □

习题 9.2.6 证明: 如果齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}$ 的每个解当 $t\to+\infty$ 时都有界, 则其零解是 Lyapunov 正向稳定的; 如果每个解在 $t\to+\infty$ 趋向于零, 则其零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的.

证明 设 $\Phi(t)$ 是所给齐次线性微分方程组的一个基解矩阵, 若其每个列向量当 $t\to+\infty$ 时都有界, 则 $\Phi(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时也有界. 因此存在 $M>0$, 使得矩阵 $\Phi(t)$ 的算子范数 $\|\Phi(t)\|<M$, $\forall t\geqslant 0$. 又方程组的任意解可表示为 $\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{c}$, 其中 $\boldsymbol{c}$ 为列向量. 由于

$$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\|\Phi(t)\|\cdot|\boldsymbol{c}|\leqslant M|\boldsymbol{c}|,$$

因此对任意 $\varepsilon>0$, 只需选取满足 $|\boldsymbol{c}|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ 的 $\boldsymbol{c}$, 就有 $|\boldsymbol{x}(t)|<\varepsilon, \forall t\geqslant 0$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M\|\varPhi^{-1}(0)\|}$, 则只要 $|\boldsymbol{x}(0)|<\delta$, 就有

$$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\|\varPhi(t)\|\cdot\|\varPhi^{-1}(0)\|\cdot|\boldsymbol{x}(0)|<\varepsilon,$$

即方程组的零解是 Lyapunov 正向稳定的. 若每个解在 $t\to+\infty$ 时趋向于零, 则由定义知零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的. □

习题 9.2.8 考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x+a_{12}(t)y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}(t)x+a_{22}(t)y.\end{cases}$$

假设

$$\lim_{t\to+\infty}(a_{11}(t)+a_{22}(t))=b>0.$$

证明: 该方程的零解不是 Lyapunov 正向稳定的.

证明 取定 $\varepsilon>0$, 对任意 $\delta>0$, 总存在线性无关的两组解 $(x_1(t),y_1(t))$ 与 $(x_2(t),y_2(t))$, 它们满足 $\sqrt{(x_i(0))^2+(y_i(0))^2}<\delta\ (i=1,2)$. 由 Liouville 公式, 这两组解的 Wronsky 行列式

$$W(t)=W(0)\exp\left(\int_0^t[a_{11}(s)+a_{22}(s)]\,\mathrm{d}s\right).$$

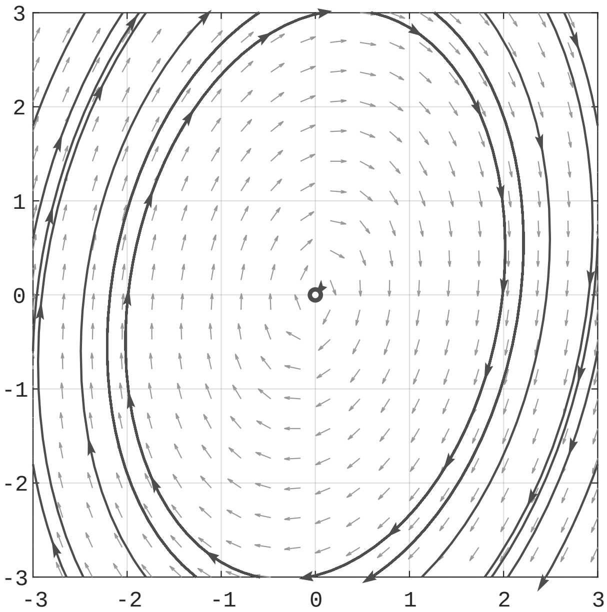
由题设, $\lim\limits_{t\to+\infty}|x_1(t)y_2(t)-x_2(t)y_1(t)|=\lim\limits_{t\to+\infty}|W(t)|\to+\infty$. 这说明必有 $i=1$ 或 2 使得当 t 充分大时, $\sqrt{(x_i(t))^2+(y_i(t))^2}\geqslant\varepsilon$. 故该方程的零解不是 Lyapunov 正向稳定的. □

习题 9.3.1 (1) 判断微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4y-x,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-9x+y\end{cases}$$

的奇点 $(0,0)$ 的类型, 并作出该奇点附近的相图.

解 此线性微分方程组的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -9 & 1\end{pmatrix}$. 由 $\mathrm{tr}(A)=0, \det(A)=35$ 可知奇点 $(0,0)$ 为中心. 相图如下:



□

习题 9.3.1 (3) 判断微分方程组

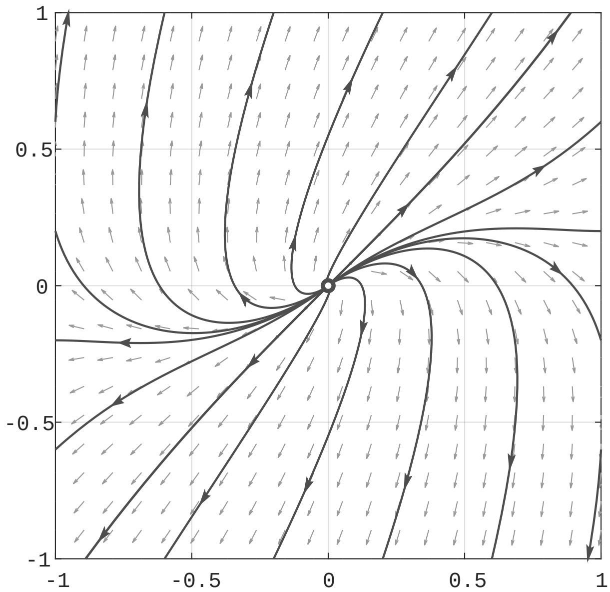
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 5y - 2x + x^3 \end{cases}$$

的奇点 $(0,0)$ 的类型, 并作出该奇点附近的相图.

解 所给非线性微分方程组的线性化方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x + 5y. \end{cases}$$

此线性微分方程组的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. 由 $\operatorname{tr}(A) = 6, \det(A) = 9, (\operatorname{tr}(A))^2 = 4\det(A)$ 可知此线性微分方程组的奇点 $(0,0)$ 是单向结点或星形结点. 进一步由方程 $k = \dfrac{5k-2}{1+2k}$ 的解为 $k = 1$ 可知 $(0,0)$ 为单向结点. 再由当 $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ 时, $x^3 = o\left(x^2+y^2\right)$ 知 $(0,0)$ 也是所给非线性微分方程组的单向奇点. 奇点附近的相图如下:



$\square$

习题 7.2.2 证明: 边值问题

$$\begin{cases} x^2y'' - \lambda xy' + \lambda y = 0, \\ y(1) = 0,\ y(2) = 0 \end{cases}$$

没有非零解, 其中 λ 为实参数.

证明 令 $x = e^t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = e^{-t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 方程化为

$$e^{2t}e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - \lambda e^t e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \lambda y = 0 \iff \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - (1+\lambda)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \lambda y = 0.$$

特征方程为 $x^2 - (1+\lambda)x + \lambda = 0$, 特征根为 λ 与 1.

① 若 $\lambda = 1$, 则为 2 重特征根, 通解为 $y = c_1e^t + c_2te^t$, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 代入边值条件 (分别对应 $t = 0$ 与 $t = \ln 2$) 得

$$c_1 = 0, \quad 2c_1 + 2\ln 2 \cdot c_2 = 0,$$

于是 $c_1 = c_2 = 0$, 即只有零解.

② 若 $\lambda \neq 1$, 通解为 $y = c_1e^t + c_2e^{\lambda t}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 代入边值条件得

$$c_1 + c_2 = 0, \quad 2c_1 + 2^\lambda c_2 = 0,$$

由此得 $\left(2^\lambda - 2\right)c_2 = 0$, 但 $\lambda \neq 1$, 因此 $c_2 = 0$, 进而 $c_1 = 0$. 故同样只有零解. $\square$

习题 7.2.4 讨论非齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题

$$\begin{cases} y'' + (\lambda r(x) + q(x))\, y = f(x), \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0,\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0, \end{cases}$$

其中 $r(x), q(x)$ 均为连续函数, $r(x) > 0$. 证明: 当 λ 不是对应的齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题的特征值时, 它有且仅有一个解; 当 $\lambda = \lambda_m$ 是特征值时, 它有解的充要条件是

$$\int_0^1 f(s)\phi_m(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\phi_m(x)$ 是对应于特征值 λ_m 的特征函数.

证明 ① 若 λ 不是对应的齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题的特征值, 由二阶线性微分方程的常数变易法可知该边值问题解的存在性. 设 $y = \phi_1(x)$ 与 $y = \phi_2(x)$ 是该非齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题的解, 则 $y = \phi_1(x) - \phi_2(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题的解, 又 λ 非其特征值, 只能有 $\phi_1(x) - \phi_2(x) \equiv 0$, 故解是唯一的.

② 若 $\lambda = \lambda_m$ 是对应的齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题的特征值, 不妨设对应于特征值 λ_m 的特征函数 $\phi_m(x)$ 满足

$$\phi_m(0) = \sin\alpha, \quad \phi_m'(0) = \cos\alpha, \quad \phi_m(1) = \sin\beta, \quad \phi_m'(1) = \cos\beta.$$

则所给非齐次线性微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题有解 $y = y(x)$ 当且仅当

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(s)\phi_m(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 \left[y''(s) + (\lambda r(s) + q(s))\, y(s)\right]\phi_m(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 y''(s)\phi_m(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^1 y(s)\left[(\lambda r(s) + q(s))\,\phi_m(s)\right]\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 y''(s)\phi_m(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 y(s)\phi_m''(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \left[y'(s)\phi_m(s) - y(s)\phi_m'(s)\right]'\,\mathrm{d}s \\ &= \left[y'(1)\phi_m(1) - y(1)\phi_m'(1)\right] - \left[y'(0)\phi_m(0) - y(0)\phi_m'(0)\right] \\ &= \left[y'(1)\sin\beta - y(1)\cos\beta\right] - \left[y'(0)\sin\alpha - y(0)\cos\alpha\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

习题 2.6 (1)(3)(4) 若 $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ 满足

$$-\Delta v \leqslant 0, \quad x \in \Omega,$$

则称 v 在 Ω 上是下调和的.

(1) 对于任意球 $\mathbb{B}(x,r) \subset \Omega$, 成立

$$v(x) \leqslant \fint_{\mathbb{B}(x,r)} v(y)\,\mathrm{d}y.$$

(3) 设 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑凸函数, 且 u 是 Ω 上的调和函数. 证明: $v = \phi(u)$ 是 Ω 上的下调和函数.

(4) 设 u 是 Ω 上的调和函数. 证明: $v = |\mathrm{D}u|^2$ 是 Ω 上的下调和函数.

证明 (1) 设

$$\phi(r) := \fint_{\partial\mathbb{B}(x,r)} v(y)\,\mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial\mathbb{B}(0,1)} v(x+rz)\,\mathrm{d}S(z),$$

则

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \fint_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \mathrm{D}v(x+rz)\cdot z\,\mathrm{d}S(z) \\
&= \fint_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \mathrm{D}v(y)\cdot \frac{y-x}{r}\,\mathrm{d}S(y) \\
&= \fint_{\partial\mathbb{B}(x,r)} \frac{\partial v}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S(y) \\
&= \frac{r}{n}\fint_{\mathbb{B}(x,r)} \Delta v(y)\,\mathrm{d}y \geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此

$$\phi(r) \geqslant \phi(\varepsilon), \quad \forall r > \varepsilon > 0.$$

在上式中令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得

$$v(x) \leqslant \fint_{\partial\mathbb{B}(x,r)} v(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}(x,r)} v(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^r \left(\int_{\partial\mathbb{B}(x,s)} v\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}s \geqslant v(x)\int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha(n)r^n v(x),
\end{aligned}$$

即

$$v(x) \leqslant \fint_{\mathbb{B}(x,r)} v(y)\,\mathrm{d}y.$$

(3) 由

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=\phi'(u)u_{x_i},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=\phi''(u)u_{x_i}^2+\phi'(u)u_{x_ix_i}$$

可得

$$\Delta v=\phi''(u)|\mathrm{D}u|^2+\phi'(u)\Delta u.$$

再由 ϕ 是凸函数、u 是 Ω 上的调和函数得 $\phi''(u)\geqslant 0,\Delta u=0$, 从而 $\Delta v\geqslant 0$.

(4) 由

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)=\sum_{i=1}^n 2u_{x_i}u_{x_ix_j},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_ix_j}\right)=2\sum_{i=1}^n\left(u_{x_ix_j}^2+u_{x_ix_jx_j}\right)$$

可得

$$\Delta v=2\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2+\sum_{i=1}^n\Delta u_{x_i}\geqslant\sum_{i=1}^n\Delta u_{x_i}.$$

而 u 是 Ω 上的调和函数, 因此 u_{x_i} 也是 Ω 上的调和函数, 从而 $\Delta v\geqslant 0$. □

习题 2.7 (Harnack 定理) 假设 $\{u_n\}\subset\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数列. 如果 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛, 则 $\{u_n\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛, 且收敛于一个调和函数.

证明 由 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 只要 $n>N(\varepsilon)$, 就有

$$|u_{n+p}(x)-u_{n+1}(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in\partial\Omega,\ \forall p\geqslant 1.$$

注意到 $u_{n+p}-u_{n+1}$ 也是 Ω 上的调和函数, 由极值原理,

$$\max_{\overline{\Omega}}\left(u_{n+p}-u_{n+1}\right)=\max_{\partial\Omega}\left(u_{n+p}-u_{n+1}\right),$$

$$\min_{\overline{\Omega}}\left(u_{n+p}-u_{n+1}\right)=\min_{\partial\Omega}\left(u_{n+p}-u_{n+1}\right).$$

因此当 $n>N(\varepsilon)$ 时,

$$|u_{n+p}(x)-u_{n+1}(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in\overline{\Omega},\ \forall p\geqslant 1.$$

这表明 $\{u_n\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛. 设 $u_n\rightrightarrows u$. 由于对任意 $\mathbb{B}(x,r)\subset\Omega$, 有

$$u_n(x)=\fint_{\partial\mathbb{B}(x,r)}u_n(y)\,\mathrm{d}S(y),$$

令 $n\to\infty$ 就有

$$u(x)=\fint_{\partial\mathbb{B}(x,r)}u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

又由一致连续可知 $u\in\mathcal{C}(\Omega)$, 故 u 是 Ω 上的调和函数. □

习题 2.12 设 $u(x)$ 是球 $\mathbb{B}(0,R_0)$ 上的调和函数, 对于 $R\in(0,R_0]$ 记

$$\omega(R)=\sup_{\mathbb{B}(0,R)}u-\inf_{\mathbb{B}(0,R)}u.$$

(1) 利用 Harnack 不等式证明: 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right)\leqslant\eta\omega(R).$$

(2) 如果 $\sup\limits_{\mathbb{B}(0,R_0)}|u(x)|\leqslant M_0$, 则存在常数 $\alpha\in(0,1)$, $C>0$, 使得

$$\omega(R)\leqslant C(M_0+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha},\quad R\in(0,R_0].$$

证明 (1) 设 $w(x)=u(x)-\inf\limits_{\mathbb{B}(0,R)}u(x)$, 则 w 是 $\mathbb{B}(0,R_0)$ 上的非负调和函数. 对 $R\in(0,R_0]$, 在 $\mathbb{B}\left(0,\dfrac{R}{2}\right)$ 上运用 Harnack 不等式, 有

$$\sup_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}w\leqslant\left(\frac{R+\frac{R}{2}}{R-\frac{R}{2}}\right)^n\inf_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}w=3^n\inf_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}w.$$

即

$$\frac{1}{3^n}\sup_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}u-\inf_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}u\leqslant\left(\frac{1}{3^n}-1\right)\inf_{\mathbb{B}(0,R)}u.$$

因此

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{R}{2}\right)&=\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\sup_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}u+\left(\frac{1}{3^n}\sup_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}u-\inf_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}u\right)\\&\leqslant\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\sup_{\mathbb{B}\left(0,\frac{R}{2}\right)}u+\left(\frac{1}{3^n}-1\right)\inf_{\mathbb{B}(0,R)}u\\&\leqslant\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\sup_{\mathbb{B}(0,R)}u+\left(\frac{1}{3^n}-1\right)\inf_{\mathbb{B}(0,R)}u\\&=\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\omega(R).\end{aligned}$$

(2) 对任意 $R\in(0,R_0)$, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\dfrac{1}{2^k}\leqslant\dfrac{R}{R_0}<\dfrac{1}{2^{k-1}}$. 由 (1),

$$\begin{aligned}\omega(R)&\leqslant\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^{k-1}\omega\left(2^{k-1}R\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^k\omega\left(2^{k-1}R\right)\\&\overset{n\geqslant2}{\leqslant}\frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^k\omega(R_0)\leqslant\frac{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k\log_2\frac{3^n}{3^n-1}}\cdot2M_0\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{9}{4}(M_0+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log_2 \frac{3^n}{3^n-1}}.$$

而当 $R=R_0$ 时,

$$\omega(R_0)\leqslant 2M_0<\frac{9}{4}(M_0+1),$$

因此对任意 $R\in(0,R_0]$ 都有

$$\omega(R)\leqslant \frac{9}{4}(M_0+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha},$$

其中 $\alpha=\log_2\dfrac{3^n}{3^n-1}\in(0,1)$. □

习题 2.18 求边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=g(x,y)\end{cases}$$

的 Green 函数, 其中

(1) Ω 是上半平面.

(2) Ω 是第一象限.

(3) Ω 是带形区域 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R},0<y<l\right\}$, 其中 l 为正常数.

证明 (1) $G(x,y)=\Gamma(y-x)-\Gamma\left(y-\widetilde{x}\right)$, 其中 $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $\widetilde{x}=(x_1,-x_2)$.

(2) $G(x,y)=\Gamma(y-x)-\Gamma\left(y-\widetilde{x}\right)+\Gamma(y+x)-\Gamma\left(y+\widetilde{x}\right)$, 其中 $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $\widetilde{x}=(x_1,-x_2)$.

(3) 记 $x_n^-=\widetilde{x}+(0,2nl), x_n^+=x+(0,2nl), n\in\mathbb{Z}$, 则 $G(x,y)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[\Gamma\left(y-x_n^+\right)-\Gamma\left(y+x_n^-\right)\right]$. □

习题 (定理 2.27) 假设 $u_i\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ $(i=1,2)$ 满足第三边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u_i+c_i(x)u_i=f_i(x),\ x\in\Omega,\\ \left.\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial\nu}+\alpha_i(x)u_i\right]\right|_{\partial\Omega}=g_i(x),\end{cases}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 如果 $c_i(x)\geqslant 0$ 且有界, $\alpha_i(x)\geqslant\alpha_0>0$, 则估计

$$\max_{\overline{\Omega}}|u_1-u_2|\leqslant C\left(\max_{\partial\Omega}|g_1-g_2|+\sup_{\Omega}|f_1-f_2|+\max_{\partial\Omega}|\alpha_1-\alpha_2|+\sup_{\Omega}|c_1-c_2|\right)$$

成立, 其中 C 是仅依赖于维数 n, α_0, Ω 的直径 d 和 G_1,G_2,F_1,F_2 的常数, 这里 $G_i=\max\limits_{x\in\partial\Omega}|g_i(x)|$, $F_i=\sup\limits_{\Omega}|f_i(x)|$, $i=1,2$.

证明 设 $w=u_1-u_2$, 则 w 满足边值问题

$$\begin{cases} -\Delta w+c_1(x)w=f_1-f_2+(c_2-c_1)u_2,\ x\in\Omega, \\ \left[\dfrac{\partial w}{\partial\nu}+\alpha_1(x)w\right]\Bigg|_{\partial\Omega}=g_1-g_2+(\alpha_2-\alpha_1)u_2. \end{cases}$$

由定理 2.26 可得估计

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}}|w| &\leqslant C_1\left(\max_{\partial\Omega}|g_1-g_2|+\max_{\partial\Omega}|(\alpha_2-\alpha_1)u_2|+\sup_{\Omega}|f_1-f_2|+\sup_{\Omega}|(c_1-c_2)u_2|\right) \\ &\leqslant C_1\left(\max_{\partial\Omega}|g_1-g_2|+\max_{\partial\Omega}|\alpha_2-\alpha_1|\max_{\overline{\Omega}}|u_2|+\sup_{\Omega}|f_1-f_2|+\sup_{\Omega}|c_1-c_2|\max_{\overline{\Omega}}|u_2|\right), \end{aligned}$$

其中 C_1 是仅依赖于维数 n, α_0 和 Ω 的直径 d 的常数. 再次运用定理 2.26 可得估计

$$\max_{\overline{\Omega}}|u_i|\leqslant C_1(G_i+F_i),\quad i=1,2,$$

于是成立估计

$$\max_{\overline{\Omega}}|u_1-u_2|\leqslant C\left(\max_{\partial\Omega}|g_1-g_2|+\sup_{\Omega}|f_1-f_2|+\max_{\partial\Omega}|\alpha_1-\alpha_2|+\sup_{\Omega}|c_1-c_2|\right),$$

其中 C 是仅依赖于维数 n, α_0, Ω 的直径 d 和 G_1,G_2,F_1,F_2 的常数. □

习题 2.21 假设 $u(x)\in\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u+c(x)u=f(x),\ x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

的一个解.

(1) 如果 $c(x)\geqslant c_0>0$, 则

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|\leqslant\frac{1}{c_0}\sup_{\Omega}|f(x)|;$$

(2) 如果 $c(x)\geqslant 0$, 则

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|\leqslant M\sup_{\Omega}|f(x)|,$$

其中 M 依赖于 Ω 的直径 d;

(3) 如果 $c(x)<0$, 试举反例说明上述最大模估计一般不成立.

证明 (1) 即证

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) \leqslant \frac{1}{c_0} \sup_{\Omega} |f(x)|, \quad \max_{\overline{\Omega}} (-u(x)) \leqslant \frac{1}{c_0} \sup_{\Omega} |f(x)|.$$

注意到 $-u$ 是所给定解问题中 $f(x)$ 替换成 $-f(x)$ 后的解, 因此只需证上面第一式. 设 u 在 $x_0 \in \overline{\Omega}$ 处达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值. 若 $x_0 \in \partial\Omega$, 则由 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 知 $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x) = u(x_0) = 0$, 结论得证. 若 $x_0 \in \Omega$, 则 $\Delta u(x_0) \leqslant 0$, 从而

$$\sup_{\Omega} |f(x)| \geqslant |f(x_0)| \geqslant f(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geqslant c(x_0)u(x_0) \geqslant c_0 \max_{\overline{\Omega}} u(x).$$

故结论得证.

(2) 不妨设 $0 \in \Omega$. 令 $v(x) = \dfrac{u(x)}{d^2 - |x|^2 + 1}$, 则由 $u(x) = \left(d^2 - |x|^2 + 1\right) v(x)$ 可得在 Ω 上有

$$\Delta u = -2nv - 4x \cdot \nabla v + \left(d^2 - |x|^2 + 1\right) \Delta v,$$

$$f(x) = -\Delta u + c(x)u = 2nv + 4x \cdot \nabla v - \left(d^2 - |x|^2 + 1\right) \Delta v + c(x)v \left(d^2 - |x|^2 + 1\right).$$

故 v 满足边值问题

$$\begin{cases} -\Delta v + \dfrac{4x \cdot \nabla v}{d^2 - |x|^2 + 1} + \left(c(x) + \dfrac{2n}{d^2 - |x|^2 + 1}\right) v = \dfrac{f(x)}{d^2 - |x|^2 + 1}, \ x \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

下证

$$\max_{\overline{\Omega}} v(x) \leqslant \frac{d^2 + 1}{4} \sup_{\Omega} |f(x)|, \quad \max_{\overline{\Omega}} (-v(x)) \leqslant \frac{d^2 + 1}{4} \sup_{\Omega} |f(x)|.$$

注意到 $-v$ 是如上方程 $f(x)$ 替换成 $-f(x)$ 后的解, 因此只需证上面第一式. 设 v 在 $x_0 \in \overline{\Omega}$ 处达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值. 若 $x_0 \in \partial\Omega$, 则由 $v|_{\partial\Omega} = 0$ 知 $\max\limits_{\overline{\Omega}} v(x) = v(x_0) = 0$, 结论得证. 若 $x_0 \in \Omega$, 则 $\nabla v(x_0) = 0, \Delta v(x_0) \leqslant 0$. 不妨设 $v(x_0) \geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |f(x)| \geqslant \frac{\sup\limits_{\Omega} |f(x)|}{d^2 - |x_0|^2 + 1} &\geqslant \frac{|f(x_0)|}{d^2 - |x_0|^2 + 1} \\ &= -\Delta v(x_0) + \left(c(x_0) + \frac{2n}{d^2 - |x_0|^2 + 1}\right) v(x_0) \\ &\geqslant \frac{2nv(x_0)}{d^2 - |x_0|^2 + 1} \geqslant \frac{4}{d^2 + 1} \max_{\overline{\Omega}} v(x). \end{aligned}$$

故

$$\max_{\overline{\Omega}} |v(x)| \leqslant \frac{d^2 + 1}{4} \sup_{\Omega} |f(x)|,$$

进而

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| \leqslant \left(d^2 + 1\right) \max_{\overline{\Omega}} |v(x)| \leqslant \frac{\left(d^2 + 1\right)^2}{4} \sup_{\Omega} |f(x)|.$$

(3) 取 $\Omega=\left(-\sqrt{n}\pi,\sqrt{n}\pi\right)^n$, $c(x)\equiv -1$, $f(x)\equiv 0$, 则 $u(x):=\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x_k}{\sqrt{n}}$ 是边值问题

$$\begin{cases}\Delta u+u=0,\ x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的解, 但 u 在 Ω 上不恒为零, 即不满足上述最大模估计. □

习题 2.25 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开集, $u_i(x)\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ $(i=1,2)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u_i+c_i(x)u_i=0, & x\in\Omega,\\ u_i=g_i, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

如果 $c_2(x)\geqslant c_1(x)\geqslant 0$, $g_1(x)\geqslant g_2(x)\geqslant 0$, 则

$$u_1(x)\geqslant u_2(x).$$

证明 先证明在 $\overline{\Omega}$ 上 $u_2(x)\geqslant 0$. 若不然, 则由 $-u_2$ 满足同样的方程, 且 $c_2(x)\geqslant 0$, 由弱极值原理, 在 $\partial\Omega$ 上 $-u_2$ 达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的正的最大值, 但这与 $-u_2|_{\partial\Omega}=-g_2\leqslant 0$ 矛盾. 令 $w(x)=u_2(x)-u_1(x)$, 则 w 满足边值问题

$$\begin{cases}-\Delta w+c_1(x)w=[c_1(x)-c_2(x)]u_2, & x\in\Omega,\\ w=g_2-g_1, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

因为 $c_1(x)\geqslant 0,[c_1(x)-c_2(x)]\leqslant 0$, 由弱极值原理可知在 $\overline{\Omega}$ 上 $w(x)\leqslant 0$, 否则 w 在 $\overline{\Omega}$ 上存在正的最大值, 进而 w 在 $\partial\Omega$ 上达到此最大值, 这与 $w|_{\partial\Omega}=g_2-g_1\leqslant 0$ 矛盾. 故 $u_1(x)\geqslant u_2(x)$. □

习题 2.28 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开集, $u(x)\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ 是定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u+u^3-u=0,\ x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

的一个解. 证明: 如果 $\max\limits_{\partial\Omega}|g(x)|\leqslant 1$, 则 $\max\limits_{\overline{\Omega}}|u(x)|\leqslant 1$.

证明 若 u 在 $\partial\Omega$ 上达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值, 则由 $\max\limits_{\partial\Omega}|g(x)|\leqslant 1$ 可知 $\max\limits_{\overline{\Omega}}u\leqslant 1$. 若 u 在 Ω 内一点 x_0 处达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值, 则 $\Delta u(x_0)\leqslant 0$. 于是

$$\Delta u(x_0)=u(x_0)\left[(u(x_0))^2-1\right]\leqslant 0,$$

由此可见 $u(x_0) > 1$ 必不成立, 故 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x)| \leqslant 1$. 用 $-u$ 代替 u 重复以上过程可得 $\min\limits_{\overline{\Omega}} u(x) \geqslant -1$. 故 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x)| \leqslant 1$. □

习题 4.15 设函数 $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 且 $|\alpha| = 1$, 则 $\Phi(\alpha \cdot x + at)$ 满足 n 维波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0,$$

这里 $a > 0$ 为常数, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. 波动方程的这种形式的解称为平面波解.

证明 设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 记 $u(x,t) = \Phi(\alpha \cdot x + at)$. 由

$$u_{tt} = a^2 \Phi''(\alpha \cdot x + at), \quad u_{x_i x_i} = \alpha_i^2 \Phi''(\alpha \cdot x + at), \quad i = 1, \cdots, n$$

及 $|\alpha| = 1$ 可得

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = a^2 \Phi''(\alpha \cdot x + at) \left(1 - \alpha_1^2 - \cdots - \alpha_n^2\right) = 0,$$

即 $\Phi(\alpha \cdot x + at)$ 是方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ 的解. □

习题 4.24 试问: 半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t + u_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \geqslant 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

能否直接用对称开拓法求解? 为什么? 试用特征线法求解此半无界问题.

解 因为 $u(x,t)$ 与 $u(-x,t)$ 满足的方程不同, 所以不能直接用对称开拓法求解. 利用 $\partial_t^2 - \partial_x^2 + \partial_t + \partial_x = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x + 1)$ 将原方程分解为两个一阶方程初值问题

$$\begin{cases} u_t + u_x = v, & (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{E1}$$

与

$$\begin{cases} v_t - v_x + x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ v(x,0) = \psi(x) + \varphi'(x), & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{E2}$$

对初值问题 (E2) , 在过 $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 的特征线 $x_1(t)=x_0+t_0-t$ 上, 方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(x_1(t),t)+v(x_1(t),t)=0,\\ v(x_1(0),0)=v(x_0+t_0,0).\end{cases}$$

解得

$$v(x_0,t_0)=\left[\varphi'(x_0+t_0)+\psi(x_0+t_0)\right]e^{-t_0},$$

进而

$$v(x,t)=\left[\varphi'(x+t)+\psi(x+t)\right]e^{-t}.$$

对初值问题 (E1) , 当 $t_0\geqslant x_0$ 时, 过 (x_0,t_0) 的特征线为 $x_2(t)=x_0-t_0+t$, 在该特征线上方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x_2(t),t)=\left[\varphi'(x_0-t_0+2t)+\psi(x_0-t_0+2t)\right]e^{-t},\\ u(0,t_0-x_0)=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned}u(x_0,t_0)&=\int_{t_0-x_0}^{t_0}\left[\varphi'(x_0-t_0+2\tau)+\psi(x_0-t_0+2\tau)\right]e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\int_{t_0-x_0}^{t_0+x_0}\left[\varphi'(\tau)+\psi(\tau)\right]e^{-\frac{\tau+t_0-x_0}{2}}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

当 $t_0<x_0$ 时, 过 (x_0,t_0) 的特征线为 $x_2(t)=x_0-t_0+t$, 在该特征线上方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x_2(t),t)=v(x_2(t),t),\\ u(x_0-t_0,0)=\varphi(x_0-t_0).\end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned}u(x_0,t_0)&=\varphi(x_0-t_0)+\int_0^{t_0}\left[\varphi'(x_0-t_0+2\tau)+\psi(x_0-t_0+2\tau)\right]e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\varphi(x_0-t_0)+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0}\left[\varphi'(\tau)+\psi(\tau)\right]e^{-\frac{\tau+t_0-x_0}{2}}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

故

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{t+x}\left[\varphi'(\tau)+\psi(\tau)\right]e^{-\frac{\tau+t-x}{2}}\,\mathrm{d}\tau, & t\geqslant x\geqslant 0,\\ \varphi(x-t)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\left[\varphi'(\tau)+\psi(\tau)\right]e^{-\frac{\tau+t-x}{2}}\,\mathrm{d}\tau, & 0\leqslant t<x.\end{cases}$$

□

习题 4.27 求解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<t, \\ u|_{x=t}=\varphi(t), & t\geqslant 0, \\ u_x|_{x=0}=\psi(t), & t\geqslant 0. \end{cases}$$

如果 $\varphi(t),\psi(t)$ 都在 $[0,a]$ $(a>0)$ 上给定, 试指出此定解条件的决定区域.

解 设 $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$, 则

$$\begin{cases} F(2t)+G(0)=\varphi(t), \\ F'(t)+G'(-t)=\psi(t). \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} F(t)=\varphi\left(\dfrac{t}{2}\right)-G(0), \\ G(t)=\displaystyle\int_0^t \psi(-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\varphi\left(-\dfrac{t}{2}\right)-\varphi(0)+G(0). \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)-G(0)+\int_0^{x-t}\psi(-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\varphi\left(\frac{t-x}{2}\right)-\varphi(0)+G(0) \\ &=\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{t-x}{2}\right)-\varphi(0)-\int_0^{t-x}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

决定区域为 $\{(x,t)\mid 0\leqslant t-x\leqslant a, t+x\leqslant 2a, 0\leqslant x\leqslant t\}$. □

习题 4.39 设函数 $u\in\mathcal{C}^2\left(\overline{\mathbb{R}}_+^4\right)$ 满足 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0, & (x,t)\in\mathbb{R}_+^4, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 a 为正常数, $\varphi(x),\psi(x)\in\mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$. 证明: 存在常数 C, 使得对于所有的 $(x,t)\in\mathbb{R}_+^4$, 成立

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{C}{t}.$$

证明 因为 $\varphi(x),\psi(x)\in\mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$, 所以存在 $R>0$, 使得当 $|x|>R$ 时 $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$, 从而存在 $M>0$, 使得

$$|\varphi(x)|\leqslant M,\quad |\psi(x)|\leqslant M,\quad |\nabla\varphi(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in\mathbb{R}^3.$$

由 Kirchhoff 公式得

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| \leqslant & \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial \mathbb{B}(x,at)} [|\varphi(y)| + |\nabla\varphi(y)| \cdot |y-x| + t|\psi(y)|] \,\mathrm{d}S(y) \\
\leqslant & \frac{M}{4\pi a^2} \int_{\partial \mathbb{B}(x,at)\cap\mathbb{B}(0,R)} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{a+1}{t}\right) \mathrm{d}S(y) \\
= & \frac{M}{4\pi a^2 t} \left[\int_{\partial \mathbb{B}(x,at)\cap\mathbb{B}(0,R)} \left(\frac{1}{t} + a + 1\right) \mathbb{1}_{t\in[0,R]} \,\mathrm{d}S(y)\right. \\
& \left. + \int_{\partial \mathbb{B}(x,at)\cap\mathbb{B}(0,R)} \left(\frac{1}{t} + a + 1\right) \mathbb{1}_{t\in(R,+\infty)} \,\mathrm{d}S(y)\right] \\
\leqslant & \frac{M}{4\pi a^2 t} \max\left\{\sup_{t\in[0,R]} 4\pi a^2 t^2 \left(\frac{1}{t} + a + 1\right), \sup_{t\in(R,+\infty)} 4\pi R^2 \left(\frac{1}{t} + a + 1\right)\right\} \\
\leqslant & \frac{M}{4\pi a^2 t} \max\left\{4\pi a^2 R\left[1 + (a+1)R\right], 4\pi R^2 \left(\frac{1}{R} + a + 1\right)\right\} \\
= & \frac{MR\left[1 + (a+1)R\right] \max\left\{1, \frac{1}{a^2}\right\}}{t}.
\end{aligned}
$$

□

习题 3.18 (4) 设 A_1, A_2 为常数. 用分离变量法求解以下混合问题:

$$
\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x \leqslant \pi,\ t > 0, \\
u(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\
u_x(0,t) = A_1 t,\ u_x(\pi,t) = A_2 t, & t \geqslant 0.
\end{cases}
$$

解 令 $v(x,t) = u(x,t) - \dfrac{A_2 - A_1}{2\pi} t x^2 - A_1 t x$, 则

$$
\begin{cases}
v_{tt} - v_{xx} = \dfrac{A_2 - A_1}{\pi} t - \dfrac{A_2 - A_1}{2\pi} x^2 - A_1 x, & 0 < x \leqslant \pi,\ t > 0, \\
v(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\
v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0.
\end{cases}
$$

特征值 $\lambda_n = n^2$, 相应的特征函数为 $X_n(x) = \cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 进而 T_n 满足初值问题

$$
\begin{cases}
T_n'(t) + n^2 T_n(t) = \begin{cases} \dfrac{A_2 - A_1}{\pi} t - \dfrac{\pi}{6} A_2 - \dfrac{\pi}{3} A_1, & n = 0, \\ \dfrac{2\left[A_1 - (-1)^n A_2\right]}{\pi n^2}, & n \geqslant 1. \end{cases} \\
T_n(0) = 0.
\end{cases}
$$

解得

$$T_n(t)=\begin{cases}\dfrac{A_2-A_1}{2\pi}t^2-\dfrac{\pi(2A_1+A_2)}{6}t, & n=0,\\ \dfrac{2\left[A_1-(-1)^nA_2\right]}{\pi n^4}\left(1-e^{-n^2t}\right), & n\geqslant 1.\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{A_2-A_1}{2\pi}tx^2+A_1tx+\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)\\=&\frac{A_2-A_1}{2\pi}tx^2+A_1tx+\frac{A_2-A_1}{2\pi}t^2-\frac{\pi(2A_1+A_2)}{6}t\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left[A_1-(-1)^nA_2\right]}{\pi n^4}\left(1-e^{-n^2t}\right)\cos(nx).\end{aligned}$$

□

习题 4.40 (2) 用分离变量法求解以下混合问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<l,t>0,\\ u(x,0)=x(x-2l),\ u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

解 特征值 $\lambda_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{\pi^2}{l^2}$, 相应的特征函数为 $X_n(x)=\sin\dfrac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$, $n=1,2\cdots$. 与 $X_n(x)$ 对应的 $T_n(t)$ 为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi}{l}t,$$

其中

$$A_n=\frac{\displaystyle\int_0^l x(x-2l)X_n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x}=-\frac{4l^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3\pi^3},$$

而 $B_n=0$. 故

$$u(x,t)=-\frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t}{l}\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}.$$

□

习题 4.41 (3) 设 A 为正常数. 用分离变量法求解以下混合问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\dfrac{Ax^2}{l^2},\ u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=A, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

解 令 $v(x,t)=u(x,t)-\dfrac{Ax^2}{l^2}$, 则

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=\dfrac{2A}{l^2}, & 0<x<l,\ t>0, \\ v(x,0)=v_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l, \\ v_x(0,t)=v(l,t)=0, & t\geqslant 0. \end{cases}$$

特征值 $\lambda_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{\pi^2}{l^2}$, 相应的特征函数为 $X_n(x)=\cos\dfrac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$, $n=1,2,\cdots$. 对于 $f(t)=\dfrac{2A}{l^2}$, 有

$$f_n(t)=\frac{2A}{l^2}\frac{\displaystyle\int_0^l X_n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{(-1)^{n+1}8A}{(2n-1)\pi l^2}.$$

因此

$$T_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(t)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)(t-\tau)\pi}{l}\,\mathrm{d}\tau=\frac{(-1)^n 32A}{(2n-1)^3\pi^3}\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t}{l}.$$

故

$$u(x,t)=\frac{Ax^2}{l^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32A(-1)^n}{\pi^3(2n-1)^3}\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t}{l}\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}.$$

□

习题 4.34 利用能量不等式证明一维波动方程带有第二或第三边值问题的混合问题解的唯一性.

证明 即证边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & (x,t)\in(0,l)\times(0,T), \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & x\in[0,l], \\ (-u_x+\alpha u)\left.\right|_{x=0}=(u_x+\beta u)\left.\right|_{x=l}=0, & t\in[0,T] \end{cases}$$

只有零解, 其中 $\alpha,\beta\geqslant 0$. 令

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[u_t^2(x,t)+a^2u_x^2(x,t)\right]\,\mathrm{d}x+\frac{a^2}{2}\left[\alpha u^2(0,t)+\beta u^2(l,t)\right],\quad t\in[0,T].$$

则 $E(0)=0$, 且对 $t\in(0,T)$, 有

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(2u_tu_{tt}+2a^2u_xu_{xt}\right)\,\mathrm{d}x+\frac{a^2}{2}\left[2\alpha u(0,t)u_t(0,t)+2\beta u(l,t)u_t(l,t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^l \left(u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x + a^2 \left[\alpha u(0,t) u_t(0,t) + \beta u(l,t) u_t(l,t)\right] \\
&= a^2 \int_0^l \left(u_t u_{xx} + u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x + a^2 \left[u_x(0,t) u_t(0,t) - u_x(l,t) u_t(l,t)\right] \\
&= a^2 \left[\int_0^l (u_t u_x)_x \, \mathrm{d}x - u_t u_x\Big|_{x=0}^{x=l}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

因此 $E(t) \equiv E(0) = 0,\ t \in [0,T]$. 故 $u_t = u_x \equiv 0$, 此边值问题只有零解. □

习题 4.38 设函数 $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\mathbb{R}}_+^2\right)$ 满足 Cauchy 初值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, \\
u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R},
\end{cases}
$$

其中 a 为正常数, $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. 记其动能和势能分别为

$$
k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t) \, \mathrm{d}x, \quad p(t) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t) \, \mathrm{d}x.
$$

证明:

(1) $k(t) + p(t)$ 是与 t 无关的常数;

(2) 当 t 足够大时, $k(t) = p(t)$.

证明 (1) 令 $E(t) = 2\left[k(t) + p(t)\right] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right] \mathrm{d}x$, 则

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x = 2a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u_t u_{xx} + u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x \\
&= 2a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t u_x)_x \, \mathrm{d}x = 2a^2 u_t u_x\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0,
\end{aligned}
$$

故 $E(t) \equiv E(0)$ 与 t 无关.

(2) 因为 $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, 所以存在 $M > 0$, 使得 $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\psi \subset (-M,M)$. 当 $t \geqslant \dfrac{M}{a}$ 时, 由 $(x+at) - (x-at) = 2at \geqslant 2M$ 可知 $x+at$ 与 $x-at$ 必有一个不在 $(-M,M)$ 中. 由 d'Alembert 公式得

$$
k(t) = \frac{1}{8} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x-at) \, \mathrm{d}x + \int_{\infty}^{+\infty} \psi^2(x+at) \, \mathrm{d}x + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-at)\psi(x+at) \, \mathrm{d}x\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{a^2}{8}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'^2(x-at)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'^2(x+at)\,\mathrm{d}x-2\int_{\infty}^{+\infty}\varphi'(x-at)\varphi'(x+at)\,\mathrm{d}x\right]\\
=&\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi^2(x)+a^2\left|\varphi'(x)\right|^2\right]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}E(t)=\frac{1}{2}k(t)+\frac{1}{2}p(t),
\end{aligned}
$$

因此当 $t\geqslant \dfrac{M}{a}$ 时, $k(t)=p(t)$. □

习题 3.3 (2) 求以下函数的 Fourier 逆变换:

$F(\lambda)=e^{\left(-a^2\lambda^2+\mathrm{i}\,b\lambda+c\right)t}$, 其中 $t>0$ 为参数, $a\in\mathbb{R}_+, b, c\in\mathbb{R}$ 为常数.

解 $F(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换

$$
\begin{aligned}
\check{F}(x)&=\int_{\mathbb{R}}e^{\left(-a^2\lambda^2+\mathrm{i}\,b\lambda+c\right)t}\cdot e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda=e^{ct}\int_{\mathbb{R}}e^{-a^2t\lambda^2+\mathrm{i}(bt+2\pi x)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\\
&=e^{ct-\frac{(bt+2\pi x)^2}{4a^2t}}\int_{\mathbb{R}}e^{-a^2t\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda\xlongequal{u=a\sqrt{t}\lambda}\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{ct-\frac{(bt+2\pi x)^2}{4a^2t}}\int_{\mathbb{R}}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{t}}}{a}e^{ct-\frac{(bt+2\pi x)^2}{4a^2t}}.
\end{aligned}
$$

□

习题 3.4 (1) 利用 Fourier 变换求解以下定解问题:

$$
\begin{cases}
u_t-a^2u_{xx}+bu_x+cu=f(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}^2_+,\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R},
\end{cases}
$$

其中 $a\in\mathbb{R}_+, b, c\in\mathbb{R}$ 是常数.

解 作 Fourier 变换得到

$$
\begin{cases}
\hat{u}_t+4\pi^2a^2\xi^2\hat{u}+2\pi\,\mathrm{i}\,b\xi\hat{u}+c\hat{u}=\hat{f}(\xi,t), & (\xi,t)\in\mathbb{R}^2_+,\\
\hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi), & \xi\in\mathbb{R}.
\end{cases}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(\xi,t)=&\hat{\varphi}(\xi)\exp\left(-\int_0^t\left(4\pi^2a^2\tau^2+2\pi\,\mathrm{i}\,b\tau+c\right)\,\mathrm{d}\tau\right)\\
&+\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)\exp\left(-\int_\tau^t\left(4\pi^2a^2\eta^2+2\pi\,\mathrm{i}\,b\eta+c\right)\,\mathrm{d}\eta\right)\,\mathrm{d}\tau\\
=&\left(\hat{\varphi}(\xi)+\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)e^{\frac{4\pi a^2}{3}\tau^3+\pi\,\mathrm{i}\,b\tau^2+c\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-\frac{4\pi a^2}{3}t^3-\pi\,\mathrm{i}\,bt^2-ct}.
\end{aligned}
$$

再作 Fourier 逆变换, 得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_{\mathbb{R}}\left(\hat{\varphi}(\xi)+\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)e^{\frac{4\pi a^2}{3}\tau^3+\pi\,\mathrm{i}\,b\tau^2+c\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-\frac{4\pi a^2}{3}t^3-\pi\,\mathrm{i}\,bt^2-ct+2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}\xi\\&=e^{-\frac{4\pi a^2}{3}t^3-\pi\,\mathrm{i}\,bt^2-ct}\left(\varphi(x)+\int_0^t f(x,\tau)e^{\frac{4\pi a^2}{3}\tau^3+\pi\,\mathrm{i}\,b\tau^2+c\tau}\,\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

□

习题 3.25 若 $v\in\mathcal{C}^{2,1}(\Omega_T)$ 满足

$$v_t-a^2\Delta v\leqslant 0,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

称 v 在 Ω_T 上是热方程的下解, 其中 $\Omega_T=\Omega\times(0,T]$, $a>0$ 为常数.

(1) 证明:

$$\max_{\overline{\Omega_T}}v(x,t)=\max_{\partial_p\Omega_T}v(x,t).$$

(2) 设 $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是光滑凸函数且 u 在 Ω_T 上满足热方程. 证明: $v=\phi(u)$ 在 Ω_T 上是热方程的下解.

(3) 设 u 在 Ω_T 上满足热方程. 证明: $v=a^2|\mathrm{D}u|^2+u_t^2$ 在 Ω_T 上是热方程的下解.

证明 (1) 令 $M=\max\limits_{\overline{Q_T}}u, m=\max\limits_{\Gamma_T}u$, 则 $M\geqslant m$. 用反证法, 设 $M>m$.

① 若 $v_t-a^2\Delta v<0$, 设存在 $(x_*,t_*)\in Q_T$, 使得 $v(x_*,t_*)=M$, 则 $\nabla v(x_*,t_*)=0, v_t(x_*,t_*)\geqslant 0, \Delta v(x_*,t_*)\leqslant 0$, 故 $\left(v_t-a^2\Delta v\right)(x_*,t_*)\geqslant 0$, 矛盾.

② 若 $v_t-a^2\Delta v\leqslant 0$, 令 $w(x,t)=v(x,t)-\varepsilon t$, 其中 $\varepsilon>0$. 则 $w_t-a^2\Delta v=v_t-a^2\Delta v-\varepsilon<0$, 由 ① 知

$$\max_{\overline{Q_T}}(v-\varepsilon T)\leqslant\max_{\overline{Q_T}}w=\max_{\Gamma_T}w\leqslant\max_{\Gamma_T}v,$$

即

$$\max_{\overline{Q_T}}v\leqslant\max_{\Gamma_T}(v+\varepsilon T).$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 得 $M\leqslant m$, 与假设的 $M>m$ 矛盾.

综上可知 $M=m$.

(2) 由 $u_t-a^2\Delta u=0$ 可得

$$v_t-a^2\Delta v=\phi'(u)u_t-a^2\phi''(u)|\nabla u|^2-a^2\phi'(u)\Delta u=-a^2\phi''(u)|\nabla u|^2\leqslant 0.$$

(3) 由

$$v_t = 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt},$$
$$\Delta v = \Delta\left(a^2|\nabla u|^2 + u_t^2\right)$$

可得

$$\begin{aligned}
v_t - a^2\Delta v &= 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2\Delta\left(a^2|\nabla u|^2 + u_t^2\right)\\
&= 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2\left[\sum_{i=1}^{n}\left(2a^2\left|\nabla u_{x_i}\right|^2 + 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_{x_ix_i}\right) + 2\left|\nabla u_t\right|^2 + 2u_t\Delta u_t\right]\\
&\leqslant 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2\left(\sum_{i=1}^{n}2a^2\nabla u\cdot\nabla u_{x_ix_i} + 2u_t\Delta u_t\right)\\
&= 2a^2\nabla u\cdot\left(\nabla u_t - a^2\sum_{i=1}^{n}\nabla u_{x_ix_i}\right) + 2u_t\left(u_t - a^2\Delta u\right)_t\\
&= 2a^2\nabla u\cdot\nabla\left(u_t - a^2\Delta u\right) + 2u_t\left(u_t - a^2\Delta u\right)_t\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

习题 3.26 设 $Q_T = \{(x,t)\mid 0<x<l, 0<t\leqslant T\}, \Gamma = \partial_pQ_T$ 是抛物边界. 假设 $u\in\mathcal{C}^{2,1}(Q_T)\cap\mathcal{C}\left(\overline{Q_T}\right)$ 是热方程

$$u_t - u_{xx} = u,\quad (x,t)\in Q_T$$

的非负解. 假设存在正数 $M>0$, 使得

$$u|_\Gamma \leqslant M.$$

证明:

$$u(x,t)\leqslant Me^t,\quad (x,t)\in\overline{Q_T}.$$

证明 设 $w = e^{-t}u$, 则由

$$w_t = e^{-t}\left(u_t - u\right) = e^{-t}u_{xx},$$
$$w_{xx} = e^{-t}u_{xx}$$

可得

$$w_t - w_{xx} = 0.$$

由热方程的极值原理,

$$\max_{\overline{Q_T}} w = \max_{\Gamma} w \leqslant M,$$

从而

$$u(x,t) \leqslant Me^t, \quad (x,t) \in \overline{Q_T}.$$

□