实分析 (H) 作业

林晓烁 2024 春

https://xiaoshuo-lin.github.io

习题 1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 记 $f_1(x)=f(x)$, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $(n=2,3,\cdots)$. 若存在 n_0, 使得 $f_{n_0}(x)=x$, 则 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射.

证明 设 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1=f_{n_0}(x_1)=f_{n_0}(x_2)=x_2$. 故 $f:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ 是单射. □

习题 2 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f, 它在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 上是一一映射, 而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射.

证明 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f 在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 上是一一映射, 欲证 f 在 $\mathbb{Q}$ 上亦为一一映射, 由 $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\sqcup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, 只需证 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为双射.

(f 是单射) 若存在 $x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 f 在 $[x_1,x_2]$ 上非常值函数. 由闭区间上连续函数的性质, f 必在 (x_1,x_2) 上取到它在 $[x_1,x_2]$ 上的最值, 不妨设 $x_0\in(x_1,x_2)$ 为最大值点. 由介值定理, 对任意 $y\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(f(x_1),f(x_0))$, 其原像集至少含有两个元素, 且其中至多有一个无理数, 进而至少有一个有理数, 现任意取定其一. 注意到不同的无理数对应不同的有理数, 由此即得单射 $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(f(x_1),f(x_0))\to\mathbb{Q}$, 但这与 $(f(x_1),f(x_0))$ 上无理数不可数矛盾.

(f 是满射) 对任意 $y\in\mathbb{R}$, 取 $y_1,y_2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 使得 $y_1<y<y_2$, 则存在 x_1,x_2 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 由介值定理, 存在 x_1 与 x_2 之间的数 x_0 使得 $f(x_0)=y$, 因此 f 是满射. □

习题 3 $f:X\to Y$ 是满射当且仅当对任意 $B\subsetneq Y$, 有 $f\big(f^{-1}(B)\big)=B$.

证明 若 X 是独点集, 结论显然成立. 下设 X 至少含有两个元素.

($\Rightarrow$) 对任意 $y\in Y$, 存在 $x_y\in X$ 使得 $f(x_y)=y$, 于是 $\bigcup\limits_{y\in B}\{x_y\}\subset f^{-1}(B)$, 从而

$$B\supset f\big(f^{-1}(B)\big)\supset f\left(\bigcup_{y\in B}\{x_y\}\right)=\bigcup_{y\in B}\{f(x_y)\}=B\implies f\big(f^{-1}(B)\big)=B.$$

($\Leftarrow$) 对任意 $y\in Y$, 考虑 $\{y\}\subsetneq Y$, 则对任意 $x\in f^{-1}(\{y\})$, 有 $f(x)=y$. 故 $f:X\to Y$ 是满射. □

习题 4 设 $f:X\to Y, A\subset X, B\subset Y$, 试问：下列等式成立吗?

(1) $f^{-1}(Y\setminus B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B)$.

(2) $f(X\setminus A)=f(X)\setminus f(A)$.

解答 (1) 成立. 由 $Y=B\sqcup(Y\setminus B)$ 得 $f^{-1}(Y)=f^{-1}(B)\sqcup f^{-1}(Y\setminus B)$, 因此 $f^{-1}(Y\setminus B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B)$.

(2) 一般不成立. 如取 $X=Y=\mathbb{R}, A=B=\{0\}, f\equiv 0$, 则 $f(X\setminus A)=\{0\}\neq\varnothing=f(X)\setminus f(A)$. □

习题 5 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是非空完全集, 试证明对任意的 $x\in E$, 存在 $y\in E$, 使得 $x-y$ 为无理数.

证明 往证 E 是不可数集, 从而对任意 $x\in E$, 集合 $\{x-y:y\in E\}$ 不可数, 结合 $\mathbb{Q}$ 可数即知, 存在 $y\in E$ 使得 $x-y\notin\mathbb{Q}$.

- 若 E 为有限集, 则 E 中每一点均为孤立点, 与 $E=E'$ 矛盾.

- 若 E 为可数集, $E=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 假设 E 不含孤立点. 任取 $y_1\in E$ 满足 $y_1\neq x_1$, 再取 $\delta_1\in(0,1)$ 使得 $x_1\notin\overline{\mathbb{B}(y_1,\delta_1)}$. 由 y_1 为 E 的极限点, 存在 $y_2\neq x_2$ 满足 $y_2\in\mathbb{B}(y_1,\delta_1)\cap E$. 取 $\delta_2\in\big(0,\frac{1}{2}\big)$, 使得

$\mathbb{B}(y_2,\delta_2)\subset\mathbb{B}(y_1,\delta_1)$, 且 $x_2\notin\overline{\mathbb{B}(y_2,\delta_2)}$. 由 y_2 为 E 的极限点, 存在 $y_3\neq x_3$ 满足 $y_3\in\mathbb{B}(y_2,\delta_2)\cap E$. 如此继续得到 $\{y_n\},\{\delta_n\}$ 满足

$$\begin{gathered}\delta_n\in\left(0,\tfrac{1}{n}\right),\quad \mathbb{B}(y_n,\delta_n)\subset\mathbb{B}(y_{n-1},\delta_{n-1}),\\ x_n\notin\overline{\mathbb{B}(y_n,\delta_n)},\quad y_{n+1}\in\mathbb{B}(y_n,\delta_n)\cap E,\quad y_{n+1}\neq x_{n+1},\quad \forall n\geqslant 2.\end{gathered}$$

由闭球套定理, 存在唯一 $y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\mathbb{B}(y_n,\delta_n)}$. 由 E 为闭集, $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in E$. 但由上述构造, $y\neq x_n,\forall n\in\mathbb{N}$, 即 $y\notin E$, 矛盾. 故 E 是可数集得证. □

习题 6 试证明 $x=\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{13}$ 属于 Cantor 集.

证明 由

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}&=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{2n}}=0.0202\cdots(3),\\ \frac{1}{13}&=\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{27}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{3n}}=0.002002\cdots(3)\end{aligned}$$

即知它们均属于 Cantor 集. □

习题 7 考虑单位区间 $[0,1]$, 固定实数 $\xi\in(0,1)$. 先挖去 $[0,1]$ 中央长度为 ξ 的开区间, 再分别挖去余下两个区间中央相对长度为 ξ 的开区间, 如此继续. 记 $\mathcal{C}_\xi$ 为上述操作余下点集的极限. (Cantor 集 $\mathcal{C}$ 即 $\xi=\frac{1}{3}$ 的情形.)

(1) 证明: $\mathcal{C}_\xi$ 在 $[0,1]$ 中的补集是总长度为 1 的开区间的并集.

(2) 直接说明 $m^*(\mathcal{C}_\xi)=0$.

证明 (1) 第 n 次操作挖去 2^{n-1} 个长度为 $\xi\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1}$ 的区间. 因此, $\mathcal{C}_\xi$ 在 $[0,1]$ 中的补集的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\xi\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1}=\xi\sum_{n=0}^{\infty}(1-\xi)^n=1.$$

(2) 记第 n 次操作后余下集合为 $\mathcal{C}_n$. 由 $|\mathcal{C}_n|=2^n\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^n=(1-\xi)^n\xrightarrow{n\to\infty}0$ 及 $\mathcal{C}_\xi\subset\mathcal{C}_n\ (\forall n)$ 即知

$$0\leqslant m^*(\mathcal{C}_\xi)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|:\mathcal{C}_\xi\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j,\ Q_j\text{ 为闭区间}\right\}\leqslant\inf_{n\geqslant1}\{|\mathcal{C}_n|\}=0\implies m^*(\mathcal{C}_\xi)=0.$$ □

习题 8 构造闭集 $\hat{\mathcal{C}}$, 在构造的第 k 步中, 挖去 2^{k-1} 个居于各区间中央的长度为 ℓ_k 的开区间, 且满足

$$\ell_1+2\ell_2+\cdots+2^{k-1}\ell_k<1.$$

(1) 选取充分小的 ℓ_j 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\ell_k<1$. 证明 $m(\hat{\mathcal{C}})>0$, 具体言之, $m(\hat{\mathcal{C}})=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\ell_k$.

(2) 证明: 若 $x\in\hat{\mathcal{C}}$, 则存在点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_n\notin\hat{\mathcal{C}}$, 但 $x_n\to x$ 且 $x_n\in I_n$, 这里 I_n 是 $\hat{\mathcal{C}}$ 的余集的子区间且 $|I_n|\to 0$.

(3) 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完全集, 且不含开区间.

(4) 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是不可数集.

证明 (1) 记第 n 次操作后余下集合为 $\mathcal{C}_n$, 则

$$m([0,1]\setminus\mathcal{C}_n)=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\ell_k \implies m(\mathcal{C}_n)=1-\sum_{k=1}^{n}2^{n-1}2^{k-1}\ell_k.$$

由于 $\mathcal{C}_n\downarrow\hat{\mathcal{C}}$, 我们有

$$m\big(\hat{\mathcal{C}}\big)=\lim_{n\to\infty}m(\mathcal{C}_n)=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\ell_k>0.$$

(2) 对取定的 $x\in\hat{\mathcal{C}}$, 用 J_n 表示第 n 次操作后余下集合中包含 x 的闭区间. 令 I_n 为第 n 次操作中 J_{n-1} 挖去的开区间, 并记其中点为 x_n, 则 $x_n\notin\hat{\mathcal{C}}$ 且 $|x_n-x|\leqslant|J_{n-1}|\to0$. 因此 $x_n\to x$ 且 $|I_n|\to0$.

(3) ① 由于闭集对任意交封闭, $\hat{\mathcal{C}}$ 是闭集, 因此为证 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完全集, 只需证 $\hat{\mathcal{C}}$ 无孤立点. 沿用 (2) 中记号 J_n 与 I_n, 并令 x_n 为 I_n 的一个端点, 则 $x_n\in\hat{\mathcal{C}}$ 且 $|x_n-x|\leqslant|J_{n-1}|\to0$, 因此 $x_n\to x$, 这说明 x 不是孤立点. 故 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完全集.

② 假设 $\hat{\mathcal{C}}$ 含开区间 I, 则对任意 $x\in I\subset\hat{\mathcal{C}}$, 存在包含 x 的闭区间 $J\subset I$, 此时 $d\Big(x,\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{c}}\Big)\geqslant d\Big(\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{c}},J\Big)\geqslant d(I^{\mathrm{c}},J)>0$, 因此不存在满足 (2) 中性质的点列, 矛盾. 故 $\hat{\mathcal{C}}$ 不含开区间.

(4) 习题 5 已证 $\mathbb{R}$ 中非空完全集为不可数集. □

习题 9 试证明全体超越数 (即不是整系数方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根) 的基数是 $\mathfrak{c}$.

证明 由于 $\operatorname{card}(\mathbb{C})=\operatorname{card}\big(\mathbb{R}^2\big)=\mathfrak{c}$, 由 Cantor 连续统假设, 只需证 $\mathbb{C}$ 中超越数全体不可数. 记 $\mathbb{C}$ 中代数数全体为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, 则由 $\pi\notin\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 知 $\pi+\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 中元素均为超越数, 因此 $\operatorname{card}(\mathbb{C}\setminus\mathcal{O}_{\mathbb{C}})\geqslant\operatorname{card}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$. 又若超越数全体可数, 则 $\mathbb{C}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\sqcup(\mathbb{C}\setminus\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ 亦可数, 矛盾. 故 $\operatorname{card}(\mathbb{C}\setminus\mathcal{O}_{\mathbb{C}})=\mathfrak{c}$. □

习题 10 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F\subset\mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

证明 由 Cauchy 收敛原理, $x_0\in F$ 是函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点当且仅当对任意 $k\geqslant1$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得对任意的 $n\geqslant m$, 均有 $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leqslant\frac{1}{k}$, 也即

$$\Big\{x_0\in F:\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)\text{ 存在}\Big\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\Big\{x\in F:|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\frac{1}{k}\Big\}.$$

由 $f_n(x)\in\mathcal{C}(F)$ 知 $|f_n(x)-f_m(x)|\in\mathcal{C}(F)$, 进而

$$\bigcap_{n=m}^{\infty}\Big\{x\in F:|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\frac{1}{k}\Big\}$$

是可列个闭集之交, 仍为闭集, 进而 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集. □

习题 11 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性. 若对任意的 $r\in\mathbb{Q}$, 点集 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=r\}$ 为闭集, 试证明 $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

证明 用反证法, 设 $x_0\in\mathbb{R}$ 是 $f(x)$ 的不连续点, 则存在 $\varepsilon>0$ 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, 均存在 $x_n\in\mathbb{B}\big(x_0,\frac{1}{n}\big)$ 满足 $|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$. 现取定此 ε 与数列 $\{x_n\}$, 并选取

$$r_+\in(f(x_0),f(x_0)+\varepsilon)\cap\mathbb{Q},\quad r_-\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0))\cap\mathbb{Q}.$$

由 $f(x)$ 的介值性, 存在 x_n 与 x 之间的数 y_n, 使得 $f(y_n)=r_+$ 或 r_-. 不妨设有无穷个 y_n 使得 $f(y_n)=r_+$, 则 $\{y_n\}$ 中有含于 $f^{-1}(r_+)$ 的子列. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x_0$, 而 $f^{-1}(r_+)$ 为闭集, 因此 $x_0\in f^{-1}(r_+)$, 但这与 $f(x_0)<r_+$ 矛盾. 故 $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$. □

习题 12 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 点集 $\{x\in\mathbb{R}:f'(x)=t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

证明 由 Darboux 定理, $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性. 由习题 11 即知 $f'(x)\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$. □

习题 13 设 $E\subset\mathbb{R}$, 且存在 $q\in(0,1)$, 使得对任一区间 (a,b), 都有开区间列 $\{I_n\}$:

$$E\cap(a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}m(I_k)<(b-a)q,$$

试证明 $m(E)=0$.

证明 由已知条件, $m^*(E\cap(a,b))\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|<(b-a)q$. 设 $\left\{\widetilde{I}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 的一个开区间覆盖, 则

$$m^*(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*\left(E\cap\widetilde{I}_n\right)\leqslant q\sum_{n=1}^{\infty}\left|\widetilde{I}_n\right|,$$

进而由外测度定义知

$$m^*(E)\leqslant qm^*(E).$$

再由 $q\in(0,1)$ 即得 $m^*(E)=0$. 因此对任意 $A\subset\mathbb{R}$, $m^*(A\cap E)=0$ 且 $m^*(A\cap E^{\mathrm{c}})\leqslant m^*(A)$, 从而

$$m^*(A)\geqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^{\mathrm{c}}),$$

即满足 Carathéodory 条件 (另一半不等式由外测度的 σ-次可加性可得), 故 E 可测, 进而 $m(E)=0$. □

习题 14 设 $A_1,A_2\subset\mathbb{R}^n$, $A_1\subset A_2$, A_1 是可测集, 且 $m(A_1)=m^*(A_2)<+\infty$, 试证明 A_2 是可测集.

证明 由于 A_1 是可测集, 由 Carathéodory 条件,

$$m^*(A_2)=m^*(A_2\cap A_1)+m^*(A_2\cap A_1^{\mathrm{c}})=m^*(A_1)+m^*(A_2\setminus A_1).$$

而 $m(A_1)=m^*(A_2)<+\infty$, 因此 $m^*(A_2\setminus A_1)=0$, 同习题 13 最后的讨论即知 $m(A_2\setminus A_1)=0$. 于是 $A_2=A_1\cup(A_2\setminus A_1)$ 亦可测. □

习题 15 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)<+\infty$, 试证明

$$m\left(\limsup_{k\to\infty}E_k\right)\geqslant\limsup_{k\to\infty}m(E_k).$$

证明 由于 $\limsup\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}E_j$, 而 $\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}E_j$ 关于 k 构成递减的可测集列, 因此由递减可测集列的测度

与极限换序得

$$m\left(\limsup_{k\to\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \geqslant \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geqslant k} m(E_j) = \limsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

□

习题 16 设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集列, $m(E_k)=1$ $(k=1,2,\cdots)$, 试证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

证明 由 $m(E_k)=1$ 得 $m([0,1]\setminus E_k)=0$. 因此由测度的 σ-次可加性,

$$1 \geqslant m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1 - m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1]\setminus E_k)\right) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{\infty} m([0,1]\setminus E_k) = 1,$$

得所欲证. □

习题 17 设 $E\subset[0,1]$. 若 $m(E)=1$, 试证明 $\overline{E}=[0,1]$; 若 $m(E)=0$, 试证明 $E^\circ=\varnothing$.

证明 由 $E\subset[0,1]$ 可知 $\overline{E}\subset[0,1]$. 若 $m(E)=1$, 假设 $\overline{E}\neq[0,1]$, 则存在 $x_0\in(0,1)\setminus\overline{E}$, 而后者为开集, 从而存在 $\delta>0$, 使得 $\mathbb{B}(x_0,\delta)\subset(0,1)\setminus\overline{E}$. 于是 $m(E)\leqslant m(\overline{E})\leqslant 1-m(\mathbb{B}(x_0,\delta))=1-2\delta<1$, 矛盾. 若 $m(E)=0$, 则 $m(E^{\mathsf{c}})=1-m(E)=1$, 由前述知 $\overline{E^{\mathsf{c}}}=[0,1]$, 进而 $E^\circ=\left(\overline{E^{\mathsf{c}}}\right)^{\mathsf{c}}=\varnothing$. □

习题 18 设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n\subset A_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

证明 由外测度的 σ-次可加性, 只需证 LHS $\geqslant$ RHS. 由于

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &\xlongequal[\text{Carathéodory 条件}]{A_1\text{ 可测}} m^*(B_1) + m^*\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) = \cdots \\ &\xlongequal[\text{Carathéodory 条件}]{A_k\text{ 可测}} \sum_{n=1}^{k} m^*(B_n) + m^*\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} B_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{k} m^*(B_n), \end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 即得 LHS $\geqslant$ RHS, 进而结论得证. □

习题 19 设 $E\subset\mathbb{R}$, 且 $0<\alpha<m(E)$, 试证明存在 E 中的有界闭集 F, 使得 $m(F)=\alpha$.

证明 考虑函数

$$f:[0,+\infty]\to[0,+\infty], \quad x\mapsto m(E\cap[-x,x]).$$

对 $0\leqslant x_1<x_2<+\infty$, 有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2|x_2-x_1|$, 即 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 连续. 再由递增可测集列的测度与极限换序可知 $f(x)$ 在 $x=+\infty$ 处也连续, 因此 $f(x)$ 是 $[0,+\infty]$ 上的连续函数, 它将连通集 $[0,+\infty]$ 映为连通集. 由于 $f(0)=0$, $f(+\infty)=m(E)$, 必存在 $x_0\in[0,+\infty]$ (进一步地, $x_0\in[0,+\infty)$), 使得 $f(x_0)=\alpha$, 此时 $F\coloneqq E\cap[-x_0,x_0]$ 为 E 中的有界闭集且 $m(F)=\alpha$, 即为所求. □

习题 20 设 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集, 且有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m(E_i)>k-1$, 试证明 $m\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right)>0$.

证明 由

$$m\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right)^{\mathrm{c}}\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^{\mathrm{c}}\right)\leqslant \sum_{i=1}^{k} m(E_i^{\mathrm{c}})=k-\sum_{i=1}^{k} m(E_i)<k-(k-1)=1$$

即得 $m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right)=1-m\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right)^{\mathrm{c}}\right)>0.$ □

习题 21 设 $A\in\mathcal{M}$, $B\subset\mathbb{R}^n$, 试证明

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=m^*(A)+m^*(B).$$

证明 由欲证形式可不妨设 $m(A)<+\infty$ 且 $m^*(B)<+\infty$. 由于 A 可测, 由 Carathéodory 条件,

$$\begin{gathered}m^*(B)=m^*(B\cap A)+m^*(B\cap A^{\mathrm{c}}),\\ m^*(A\cup B)=m^*((A\cup B)\cap A)+m^*((A\cup B)\cap A^{\mathrm{c}})=m(A)+m^*(B\cap A^{\mathrm{c}}).\end{gathered}$$

由于上面出现的 (外) 测度均有限, 将两式作差后移项即得证. □

习题 22 设 $\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集列, $m^*(A)<+\infty$. 令 $E_k=A\cap B_k$ $(k=1,2,\cdots)$, $E=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k)=m^*(E).$$

证明 由于 B_k 可测, 由 Carathéodory 条件,

$$m^*(A)=m^*(E_k)+m^*(A\cap B_k^{\mathrm{c}}).$$

注意到 $\{A\cap B_k^{\mathrm{c}}\}$ 为递增集合列, 由于递增集合列的外测度与极限可换序, 在上式中令 $k\to\infty$ 就得到

$$m^*(A)=\lim_{k\to\infty} m^*(E_k)+m^*\left(A\cap\left(\lim_{k\to\infty} B_k\right)^{\mathrm{c}}\right).$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} B_k=\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ 可测, 由 Carathéodory 条件,

$$m^*(A)=m^*\left(A\cap\lim_{k\to\infty} B_k\right)+m^*\left(A\cap\left(\lim_{k\to\infty} B_k\right)^{\mathrm{c}}\right).$$

由于 $m^*\left(A\cap\left(\lim\limits_{k\to\infty} B_k\right)^{\mathrm{c}}\right)\leqslant m^*(A)<+\infty$, 联立以上两式即得

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k)=m^*\left(A\cap\lim_{k\to\infty} B_k\right)=m^*(E).$$

□

习题 23 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $H\supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H\setminus E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问 H 是 E 的等测包吗?

解答 $m(H)=m^*(E)$, 但可能无法取成 G_δ 型等测包.

(1) 设 G 为 E 的等测包, 由于 $(H \setminus G) \subset (H \setminus E)$ 且 $H \setminus G$ 可测, 由题设即得 $m(H \setminus G) = 0$, 于是

$$m^*(E) \leqslant m(H) \leqslant m(H \cup G) = m(G) + m(H \setminus G) = m(G) = m^*(E) \implies m(H) = m^*(E).$$

(2) **(一个反例)** 记 $\mathcal{N} = \{Z \in \mathcal{M} : Z \subset [0,1] \text{ 且 } m(Z) = 0\}$. 注意到

$$2^{\mathfrak{c}} = \mathrm{card}\left(2^{\mathcal{C}}\right) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{card}\left(2^{[0,1]}\right) = 2^{\mathfrak{c}} \quad (\mathcal{C} \text{ 表示 Cantor 集}),$$

由 Cantor-Bernstein 定理即得 $\mathrm{card}(\mathcal{N}) = 2^{\mathfrak{c}}$. 又

$$\mathrm{card}(\{[0,1] \text{ 中的 } G_\delta \text{ 集}\}) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathfrak{c},$$

因此存在非 G_δ 集 $Z \in \mathcal{N}$. 令 $E = [2,3]$, $H = E \sqcup Z$, 则由 Lebesgue 测度的完备性, $H \setminus E = Z$ 的任一子集皆为零测集. 下证 H 不是 G_δ 集. 用反证法, 假设 $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 其中 G_k 为开集, 则 $G_k \setminus E$ 亦为开集, 且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus E) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) \setminus E = H \setminus E = Z,$$

但这与 Z 不是 G_δ 集矛盾. 故 H 不是 E 的 G_δ 型等测包. □

习题 24 点集 E 可测 $\iff$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^{\mathrm{c}}$, 使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

证明 **($\Rightarrow$)** 若 E 可测, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1 \supset E$ 与闭集 $F \subset E$, 使得

$$m(G_1 \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$m(G_1 \setminus F) = m((G_1 \setminus E) \cup (E \setminus F)) \leqslant m(G_1 \setminus E) + m(E \setminus F) < \varepsilon.$$

取 $G_2 = F^{\mathrm{c}}$ 为开集, 则 $G_2 \supset E^{\mathrm{c}}$, 且 $m(G_1 \cap G_2) = m(G_1 \setminus F) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1 \supset E, G_2 \supset E^{\mathrm{c}}$, 使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$, 令 $F = G_2^{\mathrm{c}}$, 则 $F \subset (E^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = E$, 且 $m(G_1 \setminus F) = m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$, 进而 $m^*(G_1 \setminus E) \leqslant m(G_1 \setminus F) < \varepsilon$, 即 E 可测. □

习题 25 设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且 $\{x \in E : f(x) > 0\}$ 是可测集, 证明 $f(x)$ 在 E 上可测.

证明 往证对任意 $a \in \mathbb{R}$, 右半开直线 $(a, +\infty)$ 的原像可测.

(1) 若 $a \geqslant 0$, 则

$$f^{-1}((a,+\infty)) = \left(f^2\right)^{-1}\left((a^2,+\infty)\right) \cap f^{-1}((0,+\infty))$$

为 E 中可测集之交, 故 $f^{-1}((a,+\infty))$ 可测.

(2) 若 $a < 0$, 则

$$f^{-1}((a,+\infty)) = f^{-1}((a,0]) \cup f^{-1}((0,+\infty)) = \left(\left(f^2\right)^{-1}\left([0,a^2)\right) \cap f^{-1}((-\infty,0])\right) \cup f^{-1}((0,+\infty))$$

由 $f^{-1}((-\infty,0]) = E \setminus f^{-1}((0,+\infty))$ 知上式 RHS 可测, 即 $f^{-1}((a,+\infty))$ 可测. □

习题 26 设 $f \in \mathcal{C}([a,b])$. 若有定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x): g(x)=f(x)$, a.e. $x \in [a,b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

解答 不一定, 考虑 $[a,b]$ 上的 Dirichlet 函数 $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$, 有 $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 0$, 但 $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ 无处连续. □

习题 27 设 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明 $F(x)=f(g_1(x), g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明 记 $G(x)=(g_1(x), g_2(x))$, 则 $G^{-1}([a_1,b_1)\times[a_2,b_2)) = g_1^{-1}([a_1,b_1)) \cap g_2^{-1}([a_2,b_2))$ 可测, 而 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, 因此 $\mathbb{R}^2$ 中任意开集关于 $F=f\circ G$ 的原像均可测, 即 F 是可测函数. □

习题 28 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数.

证明 对任意 $x \in [a,b)$, $f'_+(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}} = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$. 由右导数存在可知 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上右连续, 下证 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的不连续点集可数. 对正整数 n, 定义

$$E_n = \left\{x \in [a,b): \text{存在 } \delta>0, \text{使得只要 } x_1, x_2 \in \mathbb{B}(x,\delta), \text{就有 } |f(x_1)-f(x_2)|<\tfrac{1}{n}\right\}.$$

则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 为 $f(x)$ 的连续点集, 从而只需证 $f(x)$ 的不连续点集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^{\mathrm{c}}$ 可数, 即证每个 E_n^{c} 可数. 对取定的 n, 任取 $x \in E_n^{\mathrm{c}}$, 由于 $f(x)$ 在 x 处右连续, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\left|f(y)-f\left(x^+\right)\right| < \frac{1}{2n}, \quad \forall y \in (x, x+\delta).$$

进而

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \left|f(x_1)-f\left(x^+\right)\right| + \left|f(x_2)-f\left(x^+\right)\right| < \frac{1}{n}, \quad \forall x_1, x_2 \in (x, x+\delta),$$

即 $(x,x+\delta) \subset E_n$. 这说明对任意 $x \in E_n^{\mathrm{c}}$, 均存在以 x 为左端点开区间 $I_x \subset E_n$, 于是存在 E_n^{c} 到 $\mathbb{Q}$ 的单射, 从而 E_n^{c} 可数. 故 $f(x)$ 与 $f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ 几乎处处连续, 从而二者均可测, $n\left[f(x)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ 可测, 再由可测函数列的极限仍可测即得 f'_+ 可测. □

习题 29 设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上, $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 且 $f_n(x) \xrightarrow{\text{m}} g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x)=f(x), \quad \text{a.e.}\, x \in E?$$

解答 由于 $f_n(x) \xrightarrow{\text{m}} g(x)$, 根据 Riesz 定理, 存在子列 $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(x)$, 设除去零测集 Z_1 后 $f_{n_k}(x) \to g(x)$. 又 $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 设除去零测集 Z_2 后 $f_{n_k}(x) \to f(x)$. 于是在 $E \setminus (Z_1 \cup Z_2)$ 上有 $f(x)=g(x)$, 而 $m(Z_1 \cup Z_2)=0$, 故 $f(x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} g(x), x \in E$. □

习题 30 试问: $f_n(x)=\cos^n x\ (n=1,2,\cdots)$ 是 $[0,\pi]$ 上依测度收敛列吗?

解答 对任意 $\varepsilon \in (0,1)$, $\{x \in [0,\pi]: |\cos^n x| \geqslant \varepsilon\} = \left[0, \arccos \sqrt[n]{\varepsilon}\right) \cup \left(\pi - \arccos \sqrt[n]{\varepsilon}, \pi\right]$, 其测度为 $2\arccos \sqrt[n]{\varepsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 故 $f_n(x) \xrightarrow{\text{m}} 0$. □

习题 31 设在 E 上 $f_k(x) \xrightarrow{\text{m}} 0$, $g_k(x) \xrightarrow{\text{m}} 0$, 证明 $f_k(x)g_k(x) \xrightarrow{\text{m}} 0$.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 记 $F_k(\varepsilon)=\{x \in E: |f_k(x)| \geqslant \varepsilon\}$, $G_k(\varepsilon)=\{x \in E: |g_k(x)| \geqslant \varepsilon\}$, 则

$$\lim_{k\to\infty} m\left(F_k(\sqrt{\varepsilon})\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(G_k(\sqrt{\varepsilon})\right) = 0.$$

再记 $H_k(\varepsilon)=\{x\in E:|f_k(x)g_k(x)|\geqslant\varepsilon\}$, 注意到 $H_k(\varepsilon)\subset\big(F_k(\sqrt{\varepsilon})\cup G_k(\sqrt{\varepsilon})\big)$, 因此

$$m(H_k(\varepsilon))\leqslant m\big(F_k(\sqrt{\varepsilon})\big)+m\big(G_k(\sqrt{\varepsilon})\big)\to 0,\quad k\to\infty.$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} m(H_k(\varepsilon))=0$, 即 $f_k(x)g_k(x)\xrightarrow{\text{m}}0$. □

习题 32 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}?$$

解答 不一定存在, 考虑 $f(x)=\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$, 则 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处不连续, 但不存在 $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 使得 $g(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x)$. 这是因为, 若存在这样的 g, 由 $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$,

- ◇ 若 $g(0)\neq 0$, 则存在 $\delta>0$, 使得在 $(-\delta,0]$ 上 $g(x)\neq 0$, 与 $g(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x)$ 矛盾.
- ◇ 若 $f(0)\neq 1$, 则存在 $\delta>0$, 使得在 $[0,\delta)$ 上 $g(x)\neq 1$, 与 $g(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x)$ 矛盾. □

习题 33 若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $E\subset\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x)\equiv 0$, 试问: 是否有

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x\in E:|f_n(x)|>0\})=0?$$

解答 否. 取 $f_n(x)=\frac{1}{n}$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 当 $n>\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$ 时, $m([|f_k-f|\geqslant\varepsilon])=m(\varnothing)=0$, 即 $f_n\xrightarrow{\text{m}}f$. 但对每个 n, 均有 $m(\{x\in E:|f_n(x)|>0\})=m(\mathbb{R})=+\infty$. □

习题 34 设 $E\subset\mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x)\geqslant f_{k+1}(x)\quad(k=1,2,\cdots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0, 试问: $f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

解答 是. 由 Riesz 定理, 可取定子列 $f_{k_n}(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$. 对于充分大的正整数 i, 总存在唯一正整数 n 使得 $k_n\leqslant i<k_{n+1}$, 从而 $f_{k_n}(x)\geqslant f_i(x)\geqslant f_{k_{n+1}}(x)$. 由于所选的 n 随 i 单调递增, 夹逼即得 $f_i(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$. □

习题 35 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试问: 是否存在 $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$, 使得

$$m(\{x\in\mathbb{R}:|f(x)-g(x)|>0\})=0?$$

解答 否. 习题 32 的阶梯函数 $f(x)=\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ 即为反例. □

习题 36 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测, 试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明 记 $E=[a,b]$. 由于 $f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, 由 Lusin 定理, 存在闭集 $F_1\subset E$, 使得 $m(E\setminus F_1)<1$ 且 $f\in\mathcal{C}(F_1)$. 再由 $f\in\mathcal{L}(E\setminus F_1,\mathbb{R})$, 存在闭集 $\widetilde{F}_2\subset E\setminus F_1$, 使得 $m\Big((E\setminus F_1)\setminus\widetilde{F}_2\Big)<\frac{1}{2}$ 且 $f\in\mathcal{C}\Big(\widetilde{F}_2\Big)$, 从而闭集 $F_2:=F_1\cup\widetilde{F}_2$ 使得 $m(E\setminus F_2)<\frac{1}{2}$ 且 $f\in\mathcal{C}(F_2)$. 重复此步骤即可构造 E 中递增闭集列 $\{F_n\}$, 使得 $m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$ 且 $f\in\mathcal{C}(F_n)$. 由 Tietze 扩张定理, 存在 $g\in\mathcal{C}(E)$ 使得在 F_n 上有 $g(x)=f(x)$. 由

Weierstrass 逼近定理, 存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得

$$|g(x)-P_n(x)|<\frac{1}{n},\quad x\in E,$$

从而

$$|f(x)-P_n(x)|<\frac{1}{n},\quad x\in F_n.$$

令 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 则 $m(E\setminus F)=0$. 对任意 $x_0\in F$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $x_0\in F_n$, 从而

$$|f(x_0)-P_n(x_0)|<\frac{1}{n},\quad \forall n>N \implies \lim_{n\to\infty}P_n(x_0)=f(x_0).$$

故在 F 上 $P_n(x)\to f(x)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

□

习题 37 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 试证明 $m(E)=0$.

证明 记 $E_n=\left\{x\in E: f(x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$, 则 $E=Z\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 其中 $Z=\{x\in E: f(x)=0\}$ 为零测集. 由于

$$0=\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}m(E_n)\implies m(E_n)=0,\quad \forall n\geqslant 1,$$

由测度的 σ-次可加性即得 $m(E)\leqslant 0$, 从而 $m(E)=0$. □

习题 38 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列. 若有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad f_k(x)\leqslant f(x)\quad (x\in E; k=1,2,\cdots),$$

则对 E 的任一可测子集 e, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_e f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对 $\{f_k(x)\}$ 运用 Fatou 引理可得

$$\liminf_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_e f(x)\,\mathrm{d}x,$$

对 $\{f(x)-f_k(x)\}$ 运用 Fatou 引理可得

$$\liminf_{k\to\infty}\int_e[f(x)-f_k(x)]\,\mathrm{d}x\geqslant 0\implies \int_e f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\limsup_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\liminf_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_e f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\limsup_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\liminf_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

每个不等号只能为等号, 得所欲证. □

习题 39 若 $f \in \mathcal{L}^1(E)$, 则

$$m(\{x \in E : |f(x)| > k\}) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \to \infty).$$

证明 由 $|f| \in \mathcal{L}^1(E)$ 即知

$$km(\{x \in E : |f(x)| > k\}) = \int_E k\mathbb{1}_{\{x\in E:|f(x)|>k\}} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

□

习题 40 设 $f \in \mathcal{L}^1(E)$, 记 $E_k = \left\{x \in E : |f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)| \,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 记 $g_k(x) = |f(x)|\mathbb{1}_{E_k}$, 则 $g_k(x)$ 可测, $g_k(x) \to 0$, 且 $|g_k(x)| \leqslant |f(x)| \in \mathcal{L}^1(E)$. 由 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x) \,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

□

习题 41 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E \subset [0,1]$, $m(E) = t$, 有 $\displaystyle\int_{[0,t]} f(x) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x) \,\mathrm{d}x$.

证明 由于

$$[0,t] = ([0,t] \setminus E) \sqcup ([0,t] \cap E), \quad E = ([0,t] \cap E) \sqcup ([t,1] \cap E),$$

其中 $m([0,t] \setminus E) = m([t,1] \cap E)$, 且

$$f(a) \leqslant f(b), \quad \forall a \in [0,t] \setminus E, \forall b \in [t,1] \cap E.$$

因此由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增可得

$$\int_{[0,t]\setminus E} f(x) \,\mathrm{d}x \leqslant f(t) \cdot m([0,t] \setminus E) = f(t) \cdot m([t,1] \cap E) \leqslant \int_{[t,1]\cap E} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_{[0,t]} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{[0,t]\setminus E} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{[0,t]\cap E} f(x) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[t,1]\cap E} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{[0,t]\cap E} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_E f(x) \,\mathrm{d}x.$$

□

习题 42 设 $f \in \mathcal{L}^1((0,+\infty))$, 试证明函数 $g(x) = \displaystyle\int_{[0,+\infty)} \frac{f(t)}{x+t} \,\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

证明 对任意 $x \in (0,+\infty)$ 与 $h \in \mathbb{B}\left(x, \frac{x}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x+h)| &= \left|\int_{[0,+\infty)} \frac{hf(t)}{(x+t)(x+h+t)} \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[0,+\infty)} \frac{|h| \cdot |f(t)|}{x \cdot \frac{x}{2}} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2|h|}{x^2} \int_{[0,+\infty)} |f(t)| \,\mathrm{d}t \to 0, \quad h \to 0,\end{aligned}$$

故 $g(x) \in \mathcal{C}((0,+\infty))$. □

习题 43 设 $f_k \in \mathcal{L}^1(E)\ (k=1,2,\cdots)$, 且 $f_k(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E)<+\infty$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于 $f_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $k>N$ 时, $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon, \forall x\in E$. 此时

$$\left|\int_E [f_k(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon m(E),$$

得所欲证. □

习题 44 设 $f\in\mathcal{L}^1(()\mathbb{R}^n)$, $E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集, 试证明 $\lim\limits_{|y|\to+\infty}\displaystyle\int_{E+\{y\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x=0$.

证明 设 $d=\operatorname{diam}E$, 则当 $|y|$ 充分大时, $E+\{y\}\subset\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)$, 此时

$$\int_{E+\{y\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\lim\limits_{|y|\to+\infty}|f(x)|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)}=0$, $|f(x)|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)}\leqslant|f(x)|\in\mathcal{L}^1(()\mathbb{R}^n)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{|y|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{|y|\to+\infty}|f(x)|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}(\mathbf{0},|y|-d)}\,\mathrm{d}x=0,$$

得所欲证. □

习题 45 设 $f\in\mathcal{L}^1(R)$, $a>0$, 试证明级数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 其和函数 $S(x)$ 以 a 为周期, 且 $S\in\mathcal{L}^1([0,a])$.

证明 由于 $f\big(\frac{x}{a}+n\big)\in\mathcal{L}^1(R),\forall n$, 由 Levi 单调收敛定理,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{[0,a]}\left|f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\right|\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{[0,a]}\sum_{n=-k}^{k}\left|f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\right|\mathrm{d}x=\int_{[0,a]}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\right|\mathrm{d}x.$$

而由非负可积函数积分关于积分限的 σ-可加性,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{[0,a]}\left|f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\right|\mathrm{d}x=a\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{[n,n+1]}|f(x)|\,\mathrm{d}x=a\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_{[0,a]}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\right|\mathrm{d}x=a\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

从而 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\right|$ 几乎处处有限, 也即 $S(x)\coloneqq\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 且以 a 为周期. 又 $a\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{[n,n+1]}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$, 由逐项积分定理,

$$\int_{[0,a]}S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{[0,a]}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{[0,a]}f\big(\tfrac{x}{a}+n\big)\,\mathrm{d}x=a\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathbb{1}_{[n,n+1]}\,\mathrm{d}x$$

$$= a \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_{[n,n+1]} \,\mathrm{d}x = a \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_{[-k,k+1]} \,\mathrm{d}x,$$

而 $f(x)\mathbb{1}_{[-k,k+1]} \to f(x)$, $\left|f(x)\mathbb{1}_{[-k,k+1]}\right| \leqslant |f(x)| \in \mathcal{L}^1(R)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_{[0,a]} S(x) \,\mathrm{d}x = a \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f(x)\mathbb{1}_{[-k,k+1]} \,\mathrm{d}x = a \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}x,$$

故 $S(x) \in \mathcal{L}^1([0,a])$. □

习题 46 设 $f \in \mathcal{L}^1(R)$, $p > 0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad \text{a.e.}\, x \in \mathbb{R}.$$

证明 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-p} f(nx)|$, 则由非负可测函数的逐项积分定理,

$$\int_{\mathbb{R}} S(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-p} f(nx)| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\mathbb{R}} |f(nx)| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty,$$

由此可知 $S(x) \in \mathcal{L}^1(R)$, 从而 $S(x)$ 几乎处处有限, $|n^{-p} f(nx)| \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$, 明所欲证. □

习题 47 设 $x^s f(x), x^t f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积, 其中 $s < t$, 试证明积分

$$\int_{[0,+\infty)} x^u f(x) \,\mathrm{d}x, \quad u \in (s,t)$$

存在且是 $u \in (s,t)$ 的连续函数.

证明 记 $g(x) = |x^s f(x)|\mathbb{1}_{[0,1]}$, $h(x) = \left|x^t f(x)\right|\mathbb{1}_{(1,+\infty)}$, 则 $g(x), h(x) \in \mathcal{L}^1([0,+\infty))$, 从而 $g(x)+h(x) \in \mathcal{L}^1([0,+\infty))$. 对于 $x \in [0,+\infty)$, 有 $|x^u f(x)| \leqslant g(x) + h(x)$, 因此 $|x^u f(x)| \in \mathcal{L}^1([0,+\infty))$ 即 $x^u f(x) \in \mathcal{L}^1([0,+\infty))$. 对任意固定的 $x \in (0,+\infty)$, $x^u f(x) \in \mathcal{C}((s,t))$, 因此 $\int_{[0,+\infty)} x^u f(x) \,\mathrm{d}x \in \mathcal{C}((s,t))$. □

习题 48 设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的正值可测函数. 若存在常数 c, 使得

$$\int_{[0,1]} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x = c \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

试证明存在可测集 $E \subset (0,1)$, 使得 $f(x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \mathbb{1}_E(x)$. 再问：若 $f(x)$ 不是非负的又如何?

证明 (1) 由 f 正值且可测, 只需证 $m([f > 1]) = m([0 < f < 1]) = 0$.

① 记 $A_k = \left[f \geqslant 1 + \frac{1}{k}\right]$ $(k \geqslant 1)$, 则

$$c = \int_{[0,1]} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x \geqslant \int_{A_k} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x \geqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n m(A_k),$$

其中 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^n = +\infty$, 因此只能有 $m(A_k) = 0$, 进而 $m([f > 1]) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$.

② 在 $[0 < f \leqslant 1]$ 上, 由 $|f|^n \leqslant 1$, 运用 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$c = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}[f(x)]^n\,\mathrm{d}x \xlongequal{①} \lim_{n\to\infty}\int_{[0<f\leqslant 1]}[f(x)]^n\,\mathrm{d}x = \int_{[0<f\leqslant 1]}\lim_{n\to\infty}[f(x)]^n\,\mathrm{d}x = m([f=1]).$$

因此

$$c = \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = m([f=1]) + \int_{[0<f<1]} f(x)\,\mathrm{d}x \implies \int_{[0<f<1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

由习题 37 即得 $m([0<f<1]) = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 不是非负的, 由于 $f^2(x)$ 非负可测, 且满足

$$\int_{[0,1]}\left[f^2(x)\right]^n\mathrm{d}x = c \quad (n = 1,2,\cdots),$$

与 (1) 同样处理可知存在可测集 $E \subset (0,1)$, 使得 $f^2(x) \xlongequal{\text{a.e.}} \mathbb{1}_E(x)$. 于是

$$0 = \int_{[0,1]} f(x)[f(x)-1]\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)[f(x)-1]\,\mathrm{d}x = \int_{[f=-1]} f(x)[f(x)-1]\,\mathrm{d}x = 2m([f=-1]),$$

因此仍有 $f(x) = \mathbb{1}_E(x)$. □

习题 49 设 $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

证明 设 $g(x) = \ln(1+x^2) - x$, 由 $g'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0$ 及 $g(0) = 0$ 知对 $x \in [0,1]$ 有 $g(x) \leqslant 0$ 即 $\ln(1+x^2) \leqslant x$. 因此 $\left|n\ln\left(1+\dfrac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\right| \leqslant |f(x)| \in \mathcal{L}^1([0,1])$. 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x.$$

由熟知的不等式 $\ln(1+t) \leqslant t$ 可得

$$0 \leqslant n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant \frac{|f(x)|^2}{n},$$

而 $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, $f(x)$ 几乎处处有限, 因此由上式可得

$$n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0, \quad x \in [0,1].$$

由于零测集上积分值为 0,

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

得所欲证. □

习题 50 设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$, $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $f \in \mathcal{L}^1(E_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于 $f(x)\mathbb{1}_{E_k}(x) \downarrow f(x)\mathbb{1}_E(x)$, 且 $(f(x)\mathbb{1}_{E_1}(x))^+ = f^+(x)\mathbb{1}_{E_1}(x) \in \mathcal{L}^+(E_1) \cap \mathcal{L}^1(E_1)$, 由推广的 Levi 单调收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_1} f(x)\mathbb{1}_{E_k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\mathbb{1}_E(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

习题 51 设 $f \in \mathcal{L}^1(E)$, 且 $f(x) > 0$ $(x \in E)$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E [f(x)]^{\frac{1}{k}}\,\mathrm{d}x = m(E)$.

证明 不妨设 f 只取有限值. 设 $g_k(x) = [f(x)]^k \mathbb{1}_{[f<1]}$, $h_k(x) = [f(x)]^k \mathbb{1}_{[f\geqslant 1]}$, 则 $[f(x)]^k = g_k(x) + h_k(x)$, 且 $g_k \uparrow \mathbb{1}_{[f<1]}$, $h_k \downarrow \mathbb{1}_{[f\geqslant 1]}$, $|h_k| \leqslant |f| \in \mathcal{L}^1(E)$, 由 Levi 单调收敛定理及 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E [f(x)]^{\frac{1}{k}}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty} \int_E h_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \mathbb{1}_{[f<1]}\,\mathrm{d}x + \int_E \mathbb{1}_{[f\geqslant 1]}\,\mathrm{d}x = m(E).$$

□

习题 52 设 $f(x), f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数. 若 $f_n(x) \xrightarrow{\mathrm{m}} f(x)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

试证明对 $[0,1]$ 的任一可测子集 E, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 用反证法, 假设结论不成立, 则存在可测子集 $E \subset [0,1]$, $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 与 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\left| \int_E f_{n_k}(x) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \right| \geqslant \varepsilon, \quad \forall k.$$

由于 $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\mathrm{m}} f(x)$, 由 Riesz 定理, 存在子列 $\left\{ f_{n_{k_j}}(x) \right\}$, 使得 $f_{n_{k_j}}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 又

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[0,1]} f_{n_{k_j}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

由交换次序的充要条件即得 $\left\{ f_{n_{k_j}}(x) \right\}$ 在 $[0,1]$ 上一致可积, 从而在 E 上一致可积, 因此又有

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_{n_{k_j}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x,$$

但这与 $\{f_{n_k}(x)\}$ 的选取矛盾. 故原命题得证. □

习题 53 设 $f_k(x)$ 是 E 上的非负可积函数列, 且 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x) \equiv 0$. 若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}\,\mathrm{d}x \leqslant M \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明 记 $g_k(x)=\max\{f_1(x),\cdots,f_k(x)\}$, 则 $0\leqslant g_k(x)\uparrow \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=:g(x)$. 由 Levi 单调收敛定理,

$$\int_E g(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M \implies g(x)\in\mathcal{L}^1(E).$$

而 $f_k(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$ 且 $|f_k(x)|\leqslant g(x)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

□

习题 54 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设 $m(E)>0$. 由积分的绝对连续性, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意可测集 $A\subset E$, 只要 $m(A)<\delta$, 就有 $\displaystyle\int_A f(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon$. 记 $E_k=\left[|f_k-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{m(E)}\right]$, 由 $f_k\xrightarrow{\text{m}}f$ 知存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $k>N$ 时 $m(E_k)<\delta$, 此时

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E\setminus E_k}f(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon+\int_{E\setminus E_k}\left(f_k(x)+\frac{\varepsilon}{m(E)}\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant 2\varepsilon+\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 并取下极限即得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\varepsilon+\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得欲证. □

习题 55 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f(x)\in\mathcal{L}^+(E)$. 若存在 $E_k\subset E$, $m(E\setminus E_k)<\dfrac{1}{k}$ $(k=1,2,\cdots)$, 使得极限 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 试证明 $f(x)\in\mathcal{L}^1(E)$.

证明 取 $\{E_k\}$ 的子列 $\{E_{k_n}\}$, 使得 $m(E\setminus E_{k_n})<\dfrac{1}{2^n}$. 由 Borel-Cantelli 引理, $\limsup\limits_{n\to\infty}(E\setminus E_{k_n})$ 为零测集, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{1}_{E_{k_n}}\overset{\text{a.e.}}{=\!=}\mathbb{1}_E$. 由 Fatou 引理,

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_{E_{k_n}}(x)f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{E_{k_n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

即 $f\in\mathcal{L}^1(E)$. □

习题 56 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可积函数, 令

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]}f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

若 $F\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 试证明 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

证明 $F(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbb{1}_{(-\infty,x]}(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)\mathbb{1}_{(-\infty,x]}(t)\to f(t)=|f(t)|\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 由连续版本的 Lebesgue 控制收敛定理, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$. 假设 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t\neq 0$ (即 >0), 则存在 N, 当 $x>N$ 时 $F(x)>\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{N}F(x)\,\mathrm{d}x+\int_{N}^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\infty}^{N}F(x)\,\mathrm{d}x+\frac{M-N}{2}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t,\quad\forall M>N.$$

令 $M\to+\infty$ 即得 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, 与 $F\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ 矛盾. 故 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$. □

习题 57 设 $f_k(x)\ (k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可积函数列. 若对任一可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 都有

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 $F_k=[f_k(x)>f_{k+1}(x)]$, 则由

$$\int_{F_k} f_k(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{F_k} f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

可知 $m(F_k)=0$. 令 $F=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 $m(F)=0$. 在 $E\setminus F$ 上运用 Levi 单调收敛定理即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E\setminus F} f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_{E\setminus F}\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty}f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

习题 58 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbb{1}_{E_k}(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0,$$

试证明存在可测集 E, 使得 $f(x)=\mathbb{1}_E(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.

证明 由 $\mathbb{1}_{E_k}\xrightarrow{L^1}f$ 即知 $\mathbb{1}_{E_k}\xrightarrow{\mathrm{m}}f$, 由 Riesz 定理, 存在子列 $\mathbb{1}_{E_{k_j}}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$, 而特征函数仅取值 $0,1$, 其极限函数的仍仅取值 $0,1$, 因此也是一个特征函数, 即存在可测集 E, 使得 $f(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}\mathbb{1}_E(x)$. □

习题 59 设 $f(x,y)\in\mathcal{L}^1([0,1]\times[0,1])$, 试证明

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

证明 令 $E=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$, 则 $f\mathbb{1}_E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$, 由 Fubini 定理, 欲证 LHS $=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}f\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ RHS. □

习题 60 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A-\{x\})\cap B)\,\mathrm{d}x = m(A)\cdot m(B).$$

证明 由于 $\mathbb{1}_{A-\{x\}}(y)\mathbb{1}_B(y)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{A-\{x\}}(y)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{A-\{x\}}(y)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{A-\{x\}}(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}y \overset{\star}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{A-\{y\}}(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}y = m(A)\cdot m(B),\end{aligned}$$

其中 $\star$ 处用到了 $y\in A-\{x\} \iff x+y\in A \iff x\in A-\{y\}$. □

习题 61 设 $f(x), g(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的可测函数且 $m(E)<+\infty$, 若 $f(x)+g(y)\in\mathcal{L}^1(E\times E)$, 试证明 $f(x), g(x)\in\mathcal{L}^1(E)$.

证明 (1) 先说明 $m(\{y\in E: |f(y)|=+\infty\})=0$. 若否, 设 $A=\{x\in E: |g(x)|<+\infty\}$, 则 $m(A)>0$, 令 $B=A\times\{y\in E: |f(y)|=+\infty\}$, 则 $m(B)=m(A)\times m(\{y\in E: |f(y)|=+\infty\})>0$, 而在 B 上 $|f(x)+g(y)|=+\infty$, 这与 $f(x)+g(y)\in\mathcal{L}^1(E\times E)$ 几乎处处有限矛盾.

(2) 由于 $f(x)+g(y)\in\mathcal{L}^1(E\times E)$, 由 Fubini 定理, 对几乎处处的 $y\in E$, $f(x)+g(y)\in\mathcal{L}^1(E)$. 而 $m(E)<+\infty$, 且由 (1) 可不妨设 $|g(y)|<+\infty$, 因此 $g(y)$ 对 x 在 E 上可积, 从而 $f(x)=[f(x)+g(y)]-g(y)\in\mathcal{L}^1(E)$. 同理可得 $g(x)\in\mathcal{L}^1(E)$. □

习题 62 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

解答 (1) 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{1+y}\\ =&\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(\sqrt{y}x)\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \xlongequal{y=t^2} \pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}\right)\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+y}-\frac{x^2}{1+x^2y}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+y}{1+x^2y}\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty}\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

再由 (1) 知所求积分为 $\dfrac{\pi^2}{4}$. □

习题 63 设 $E \subset \mathbb{R}$, $m(E) > 0$, $f(x) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R})$. 若函数 $F(x) = \int_E f(x-t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 试证明 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

证明 由 Fubini 定理,

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = m(E) \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

而 $m(E) > 0$, 因此 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$. 由于 $f(x) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R})$, 因此 $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. □

习题 64 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积, $E \subset (0,+\infty)$, $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 试证明 $\int_E f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \neq 1$.

证明 用反证法, 假设 $\int_E f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 1$, 则 $\int_E f(x)(1-\cos x)\,\mathrm{d}x = 0$, 但 $f(x)(1-\cos x) \geqslant 0$, 因此在 E 上 $f(x)(1-\cos x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 0$. 而 $m(\{x > 0 : \cos x = 0\}) = 0$, 因此在 E 上 $f(x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 0$, 与 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ 矛盾. □

习题 65 设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $(n = 1,2,\cdots)$, 且

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

试证明 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$.

证明 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|$. 由逐项积分定理,

$$+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} S(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此 $S(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 从而 $S(x)$ 几乎处处有限, 余项 $|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$, 即 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$. □

习题 66 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| < \ln n$ $(n = 2,3,\cdots)$, 试证明

$$\int_{[2,+\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

证明 设 $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \ln n \in \mathcal{L}^+([2,+\infty))$, 由 Levi 单调收敛定理,

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \int_2^{+\infty} n^{-x} \ln n\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \Big|_2^{+\infty} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

因此 $f(x) \in \mathcal{L}^1([2,+\infty))$. 由 $|a_n| < \ln n$ 可知 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} < f(x)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_{[2,+\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \int_{[2,+\infty)} n^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

□

习题 67 设定义在 $E \times \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(1) 对每一个 $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x,y) \in \mathcal{L}(E)$.

(2) 对每一个 $x \in E$, $f(x,y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

若存在 $g \in \mathcal{L}^1(E)$, 使得 $|f(x,y)| \leqslant g(x)$, a.e. $x \in E$, 则函数 $F(y) = \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

证明 对任意点列 $y_k \to y_0 \in \mathbb{R}^n$, 由于 $|f(x,y_k)| \leqslant g(x) \in \mathcal{L}^1(E)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f(x,y_k)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f(x,y_k)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x,y_0)\,\mathrm{d}x.$$

再由 Heine 归结原理即知 $F(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. □

习题 68 设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 且 $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 令 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 若 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 试证明 $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

证明 由 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 可知, 当 $x \geqslant 0$ 时,

$$|F(x)| = \left|\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\mathbb{1}_{[x,+\infty)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\mathbb{1}_{[x,+\infty)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |F(x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathbb{1}_{[x,+\infty)}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathbb{1}_{[0,t]}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{t} |f(t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty.\end{aligned}$$

而当 $x < 0$ 时,

$$|F(x)| = \left|\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^0 |f(t)|\mathbb{1}_{(-\infty,x]}(t)\,\mathrm{d}t,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 |F(x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 |f(t)|\mathbb{1}_{(-\infty,x]}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 |f(t)|\mathbb{1}_{[t,+\infty)}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^0\int_t^0 |f(t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 |tf(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,\end{aligned}$$

故 $\int_{\mathbb{R}} |F(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, 即 $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. □

习题 69 求 $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(nx)\,\mathrm{d}x$ 的值.

解答 由于 $|\cos x| \leqslant 1$, $|\arctan(nx)| \leqslant \frac{\pi}{2}$, 且当 $x > 0$ 时, $\cos x \arctan(nx) \to \frac{\pi}{2}\cos x$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. □

习题 70 设 $f \in \mathcal{L}^1((0,a))$, $g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ $(0 < x < a)$, 试证明 $g \in \mathcal{L}^1((0,a))$, 且

$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 通过正负部分解, 可不妨设 $f(x) \geqslant 0$. 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^a \int_0^a \frac{f(t)}{t}\mathbb{1}_{[x,a]}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \int_0^t \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t < +\infty \implies g \in \mathcal{L}^1((0,a)).\end{aligned}$$

□

习题 71 试证明: $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$.

证明 记 $f(t) = \displaystyle\int_{[0,+\infty)} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^{+\infty}\left\{\left(\int_p^t -2x\sin(2xs)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}s\right) + \cos(2px)\mathrm{e}^{-x^2}\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_p^t \int_0^{+\infty} -2x\sin(2xs)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^{+\infty}\cos(2px)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal[\text{Riemann-Lebesgue 引理}]{p\to-\infty} \int_{-\infty}^t\left\{\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xs)\right)'\mathrm{d}x - 2s\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xs)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^t -2sf(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

两边求导即得 $f'(t) = -2tf(t)$, 结合 $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 解得 $f(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$. □

习题 72 设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 且对于任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots),$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x,$$

试证明 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$.

证明 由题设, 存在零测集 $Z \subset \mathbb{R}^n$, 使得在 $\mathbb{R}^n \setminus Z$ 上 $\{f_k(x)\}$ 为单调递增函数列, 设 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(x)$. 由推广的 Levi 单调收敛定理,

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x,$$

由可测集 E 的任意性, $m([f < g]) = m([f > g]) = 0$, 即 $f(x) \xlongequal{\text{a.e.}} g(x)$. 故 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$. □

习题 73 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(x)| \leqslant g_k(x), x \in E$. 若

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x),$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

试证明 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 由 $|f_k(x)| \leqslant g_k(x)$ 取极限即得 $|f(x)| \leqslant g(x)$, 从而 $|f_k(x) - f(x)| \leqslant |f_k(x)| + |f(x)| \leqslant g_k(x) + g(x)$. 由 Fatou 引理,

$$\int_E \liminf_{k\to\infty}[g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|]\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|]\,\mathrm{d}x,$$

也即

$$2\int_E g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_E g(x)\,\mathrm{d}x - \limsup_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \implies \limsup_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

因此 $f_k(x) \xrightarrow{L^1} f(x)$, 从而

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \limsup_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

习题 74 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D. 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x) \in \mathcal{R}([a,b])$.

证明 由于 D 是 F_σ-集 (见 PPT 5), 可设 $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 其中 $F_k \subset [a,b]$ 为闭集. 为证 $m(D) = 0$, 只需证 $m(F_k) = 0, \forall k$. 若不然, 不妨设 $m(F_1) > 0$, 由于 $F_1 \subset D$ 只有可列个极限点, $m(F_1') = 0$, 从而 $m(F_1 \setminus F_1') > 0$, 但这与 F_1 的孤立点集 $F_1 \setminus F_1'$ 为可数集矛盾. 故 $m(D) = 0$, 结合 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界即得 $f(x) \in \mathcal{R}([a,b])$. □

习题 75 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 极限 $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)$ 存在, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.

证明 记 $f(x)$ 的不连续点集为 D, 由题设知 D 中的点均为可去间断点, 从而 $m(D) = 0$. 结合 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界即知 $f(x) \in \mathcal{R}([a,b])$. □

习题 76 设 $E \subset [0,1]$, 试证明 $\mathbb{1}_E(x) \in \mathcal{R}([0,1]) \iff m\big(\overline{E} \setminus E^\circ\big) = 0$.

证明 由定义知 $\mathbb{1}_E$ 的不连续点集恰为 $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$, 而 $\mathbb{1}_E(x)$ 有界, 因此结论得证. □

习题 77 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin \mathcal{L}^1([a,b])$, 试问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数吗?

解答 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则由 $F' = f$ 非负知 F 在 $[a,b]$ 上单调递增, 由 Lebesgue 定理, $F \in \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$ 且 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant F(b) - F(a) < +\infty$, 这与 $f \notin \mathcal{L}^1([a,b])$ 矛盾. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无原函数. □

习题 78 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F'(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 试证明 $h(x) = F(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

证明 令 $H(x) = F(x)G(x) - \int_a^x G(t)F'(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$\frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \frac{F(x+h)G(x+h) - F(x)G(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} G(t)F'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{F(x+h)[G(x+h)-G(x)]+G(x)[F(x+h)-F(x)]}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} G(t)F'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F(x+h)\cdot\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[G(t)-G(x)]\cdot F'(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

而

$$
\lim_{h\to 0} F(x+h)\cdot\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = F(x)g(x),
$$

且由 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|h|<\delta$ 时, $|G(t)-G(x)|<\varepsilon, \forall t\in [x,x+h]$, 因此由 $F'(t)\geqslant 0$ 可得

$$
\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[G(t)-G(x)]\cdot F'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon F'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| \xrightarrow{h\to 0} \varepsilon F'(x),
$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即知当 $h\to 0$ 时上式 $\to 0$. 故 $H'(x)=F(x)g(x), x\in[a,b]$. □

习题 79 设 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 试作 $[a,b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

解答 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mathbb{1}_{[x_n,b]}(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且在 x_n 处左右极限相差 $\dfrac{1}{2^n}$. □

习题 80 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数, $E\subset(a,b)$. 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $(a_i,b_i)\subset(a,b)$ $(i=1,2,\cdots)$, 使得

$$
\bigcup_i (a_i,b_i)\supset E, \quad \sum_i [f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon,
$$

试证明 $f'(x)=0$, a.e. $x\in E$.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 由 Lebesgue 微分定理, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在且有限, 从而 $f'\overset{\text{a.e.}}{\geqslant}0$. 由 Lebesgue 定理,

$$
0\leqslant\int_E f'(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\bigcup_i(a_i,b_i)} f'(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_i\int_{a_i}^{b_i} f'(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_i[f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon,
$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即知 $\displaystyle\int_E f'(x)\,\mathrm{d}x=0$, 故 $f'(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$. □

习题 81 若 $f(x)\in\mathrm{AC}([a,b])$, 且有

$$
|f'(x)|\leqslant M, \quad \text{a.e. } x\in[a,b],
$$

则

$$
|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|, \quad x,y\in[a,b].
$$

证明 $|f(x)-f(y)|=\left|\displaystyle\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\displaystyle\int_x^y|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-y|$. □

习题 82 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 存在正整数 N 使得

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(a)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(b)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $f_n(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$, 存在 $\delta_n>0$, 使得只要 $[a,b]$ 中的不交区间列 $\{(a_i,b_i)\}$ 满足 $\sum_i(b_i-a_i)<\delta_n$, 就有

$$\sum_i|f(b_i)-f(a_i)|=\sum_i[f(b_i)-f(a_i)]<\frac{\varepsilon}{3N}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_N\}$, 则只要 $[a,b]$ 中的不交区间列 $\{(a_i,b_i)\}$ 满足 $\sum_i(b_i-a_i)<\delta$, 就有

$$\begin{aligned}\sum_i\left|\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b_i)-\sum_{n=1}^{\infty}f_n(a_i)\right|&=\sum_i\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b_i)-\sum_{n=1}^{\infty}f_n(a_i)\right]\\&=\sum_i\left(\sum_{n=1}^{N}[f_n(b_i)-f_n(a_i)]+\sum_{n=N+1}^{\infty}[f_n(b_i)-f_n(a_i)]\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\sum_i[f_n(b_i)-f_n(a_i)]+\sum_{n=N+1}^{\infty}[f_n(b_i)-f_n(a_i)]\\&\leqslant N\cdot\frac{\varepsilon}{3N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}[f_n(b)-f_n(a)]\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(a)\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(b)\right|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\in\mathrm{AC}([a,b])$. □

习题 83 试证明 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant F(x'')-F(x')\quad(a\leqslant x'<x''\leqslant b).$$

证明 **(⇒)** 若 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, 则存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $f_1(x),f_2(x)$ 使 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的递增函数, 且对 $a\leqslant x'<x''\leqslant b$, 有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|f_1(x')-f_1(x'')-[f_2(x')-f_2(x'')]|\leqslant|f_1(x')-f_1(x'')|+|f_2(x')-f_2(x'')|\\&=F(x'')-F(x').\end{aligned}$$

(⇐) 对任意分点 $a=x_0<x_1<\cdot<x_n=b$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=F(b)-F(a)<+\infty\implies f\in\mathrm{BV}([a,b]).$$

□

习题 84 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. 若有 $\bigvee\limits_a^b f = f(b)-f(a)$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

证明 对任意分点 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, 有

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) = \bigvee_a^b f &\geqslant |f(b)-f(x_2)| + |f(x_2)-f(x_1)| + |f(x_1)-f(a)| \\ &\geqslant [f(b)-f(x_2)+f(x_1)-f(a)] + |f(x_2)-f(x_1)| \\ &= f(b)-f(a) + |f(x_2)-f(x_1)| + [f(x_1)-f(x_2)] \\ &\geqslant f(b)-f(a). \end{aligned}$$

因此上面每一步均取等, 从而

$$f(b)-f(a)+|f(x_2)-f(x_1)|+[f(x_1)-f(x_2)] = f(b)-f(a) \iff f(x_2)-f(x_1) = |f(x_1)-f(x_2)|,$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增. □

习题 85 设 $E \subset [0,1]$. 若存在 $l \in (0,1)$, 使得对 $[0,1]$ 中的任一子区间 $[a,b]$, 均有 $m(E \cap [a,b]) \geqslant l(b-a)$, 试证明 $m(E) = 1$.

证明 任取 $a \in (0,1)$, 由题设知, 对任意 $x \in [0,1] \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x \mathbb{1}_E(t)\,\mathrm{d}t \geqslant l.$$

而由微积分基本定理, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x \mathbb{1}_E(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \mathbb{1}_E(x)$, 因此在上式中令 $x \to a^+$ 就有 $\mathbb{1}_E(x) \geqslant l > 0$, a.e. $x \in E$, 也即 $\mathbb{1}_E(x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 1$, 故 $m(E) = 1$. □

习题 86 对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, 试问: $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

解答 由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t)-\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)|\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{m([x,x+h]\setminus\mathbb{Q})}{h} = 1, & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{m([x,x+h]\cap\mathbb{Q})}{h} = 0, & x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

即 $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ 在有理点的平均消没振荡为 1, 在无理点的平均消没振荡为 0, 因此 $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点为 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

习题 87 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上. 若有

$$|f(y)-f(x)| \leqslant M|y-x|, \quad x,y \in [a,b],$$

则

$$|f'(x)| \leqslant M, \quad \text{a.e.}\, x \in [a,b].$$

证明 由条件, 只需证 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在, 这得自 $\mathrm{Lip}([a,b]) \subset \mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$. □

习题 88 设 $f \in \mathrm{BV}([0,1])$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, $f(x) \in \mathrm{AC}([\varepsilon,1])$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x) \in \mathrm{AC}([0,1])$.

证明 取点列 $\varepsilon_n \downarrow 0$, 由微积分基本定理,

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}[f(x)-f(\varepsilon_n)] = f(x)-f(0),$$

因此 $f'(x)\in\mathcal{L}^1([0,1])$, 从而 $f(x)\in\mathrm{AC}([0,1])$. □

习题 89 设 $f(x)\in\mathrm{BV}([0,a])$, 试证明函数

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad F(0)=0$$

是 $[0,a]$ 上的有界变差函数.

证明 由于 $f(x)\in\mathrm{BV}([0,a])$, 存在 $[0,a]$ 上的递增函数 $f_1(x), f_2(x)$, 使得 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. 令

$$F_1(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t,\quad F_2(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

则对 $0<x<y\leqslant a$, 有

$$\begin{aligned}F_1(y)-F_1(x)&=\frac{1}{y}\int_x^y f_1(t)\,\mathrm{d}t+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\\&\geqslant\frac{(y-x)f_1(x)}{y}+xf_1(x)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0,\end{aligned}$$

即 $F_1(x)$ 是 $[0,a]$ 上的递增函数. 同理可证 $F_2(x)$ 是 $[0,a]$ 上的递增函数. 故 $F(x)=F_1(x)-F_2(x)\in\mathrm{BV}([0,a])$. □

习题 90 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列, 且有

$$\bigvee_a^b f_k\leqslant M\quad(k=1,2,\cdots),$$
$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad x\in[a,b],$$

试证明 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, 且满足 $\bigvee\limits_a^b f\leqslant M$.

证明 任取 $[a,b]$ 的分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 有

$$\sum_{i=1}^n|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_a^b f_k\leqslant M,$$

在上式中令 $k\to\infty$, 就得到

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant M,$$

因此 $\bigvee\limits_a^b f\leqslant M$, $f\in\mathrm{BV}([a,b])$. □

习题 91 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, 且点 $x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 试证明 $\bigvee\limits_a^x f$ 在点 x_0 处连续.

证明 由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta) \subset [a, b].$$

由全变差的定义, 存在 $[x_0, x_0 + \delta]$ 的分划 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x_0 + \delta$, 使得

$$\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} f < \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\bigvee_{x_0}^{x_1} f = \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} f - \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta} f &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= |f(x_1) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\bigvee_{x_0}^{x} f \leqslant \bigvee_{x_0}^{x_1} f < \varepsilon, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

即 $\bigvee\limits_{a}^{x}$ 在 x_0 处右连续, 同理可证它在 x_0 处左连续. 故 $\bigvee\limits_{a}^{x} f$ 在点 x_0 处连续. □

习题 92 设 $m(E) < +\infty$, $f(x) \in \mathcal{L}(E)$, $0 < p_0 < +\infty$, 则

$$\lim_{p \uparrow p_0} \int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_E |f(x)|^{p_0} \, \mathrm{d}x.$$

证明 由 Levi 单调收敛定理及 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned}\lim_{p \uparrow p_0} \|f\|_p^p &= \underbrace{\lim_{p \uparrow p_0} \int_{[f(x)>1]} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x}_{\text{Levi 单调收敛定理}} + \underbrace{\lim_{p \uparrow p_0} \int_{[f(x)\leqslant 1]} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x}_{\text{Lebesgue 控制收敛定理}} \\ &= \int_{[f(x)>1]} |f(x)|^{p_0} \, \mathrm{d}x + \int_{[f(x)\leqslant 1]} |f(x)|^{p_0} \, \mathrm{d}x = \|f\|_{p_0}^{p_0}.\end{aligned}$$

□

习题 93 设 $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(E)$, 且有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

试证明 $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

证明 此时 $\frac{p}{r}$ 与 $\frac{q}{r}$ 为共轭指数, 由 Hölder 不等式,

$$\||f|^r |g|^r\|_1 \leqslant \||f|^r\|_{\frac{p}{r}} \||g|^r\|_{\frac{q}{r}} \implies \|fg\|_r^r \leqslant \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r \xRightarrow{r \geqslant 1} \|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

□

习题 94 设 $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$, $w(x) > 0$, 且 $\int_E w(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 试证明

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$

证明 一方面,

$$\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E \|f\|_\infty^p w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty,$$

令 $p \to \infty$ 即知 LHS $\leqslant$ RHS. 另一方面, 由本性上确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正测度子集 $F \subset E$, 使得

$$|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon, \quad \forall x \in F.$$

于是

$$\text{LHS} \geqslant \left(\int_F |f(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)\left(\int_F w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \overset{p\geqslant 1}{\geqslant} \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

令 $p \to \infty$, 再令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得 LHS $\geqslant$ RHS. 故结论得证. □

习题 95 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $g(x) \in \mathcal{L}(E)$. 若对任意的 $f \in \mathcal{L}^2(E)$, 有 $\|gf\|_2 \leqslant M\|f\|_2$, 试证明 $|g(x)| \leqslant M$, a.e. $x \in E$.

证明 不妨设 $M > 0$. 令 $F_k = \left\{x \in E : |g(x)| > M + \frac{1}{k}\right\}$ $(k \geqslant 1)$, 取 $f_k(x) = \mathbb{1}_{F_k}(x) \in \mathcal{L}^2(E)$, 若 $M(F_k) > 0$, 则

$$\|gf_k\|_2^2 = \int_{F_k} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \left(M + \tfrac{1}{k}\right)^2 m(F_k) > (M\|f_k\|_2)^2,$$

与题设矛盾. 故 $m(F_k) = 0$ $(\forall k \geqslant 1)$, 从而

$$m(\{x \in E : |g(x)| > M\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^\infty F_k\right) = 0.$$

□

习题 96 设 $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$, 令

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t, \quad 0 < x < 1,$$

试证明

$$\left(\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}\right) \overset{\star}{\leqslant} 2\sqrt{2},$$

这里 $\star$ 处用到了凸函数 $\sqrt{x}$ 的 Jensen 不等式. 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$g^2(x) = \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \mathrm{d}t \int_0^1 \left(\frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1 \left(\frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \mathrm{d}t,$$

进而

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|t-x|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x\right)f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(2\sqrt{2}\right)^2\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

欲证已明. □

习题 97 试证明下列两个不等式是不能同时成立的:

(1) $\displaystyle\int_0^\pi [f(x)-\sin x]^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}$.

(2) $\displaystyle\int_0^\pi [f(x)-\cos x]^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{9}$.

证明 用反证法, 假设上述两个不等式均成立, 由 Minkowski 不等式,

$$\sqrt{\pi} = \left(\int_0^\pi (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \|\sin x - \cos x\|_2 \leqslant \|f(x)-\sin x\|_2 + \|f(x)-\cos x\|_2 \leqslant \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1,$$

矛盾. □

习题 98 设 $f,g\in\mathcal{L}^3(E)$, 且有

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int_E f^2(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

试证明 $g(x)=|f(x)|$, a.e. $x\in E$.

证明 由 Hölder 不等式,

$$1 = \int_E f^2(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \|f^2g\|_1 \leqslant \|f^2\|_{\frac{3}{2}}\cdot\|g\|_3 = \|f\|_3^2\cdot\|g\|_3 = 1,$$

由于此时不等号均取等, 且由条件知 $g(x)$ 不几乎处处为 0, 因此存在常数 $\lambda\geqslant 0$, 使得

$$\left[f^2(x)\right]^{\frac{3}{2}} \xlongequal{\text{a.e.}} \lambda|g(x)|^3 \quad 即 \quad |f(x)|^3 \xlongequal{\text{a.e.}} \lambda|g(x)|^3,$$

由 $\|f\|_3=\|g\|_3$ 即知 $\lambda=1$, 进而 $|f(x)| \xlongequal{\text{a.e.}} |g(x)|$. 由于

$$\int_E f^2(x)[|g(x)|-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_E f^2(x)|g(x)|\,\mathrm{d}x - \int_E f^2(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|^3\,\mathrm{d}x - 1 = 0,$$

其中被积函数在 E 上非负, 因此 $f^2(x)[|g(x)|-g(x)] \xlongequal{\text{a.e.}} 0$ 即 $g^2(x)[|g(x)|-g(x)] \xlongequal{\text{a.e.}} 0$. 由此可见 $|g(x)| \xlongequal{\text{a.e.}} g(x)$, 进而 $g(x) \xlongequal{\text{a.e.}} |f(x)|$. □

习题 99 设 $\{\varphi_k\}\subset\mathcal{L}^2(E)$ 是完全标准正交系, 试证明对 $f,g\in\mathcal{L}^2(E)$, 有

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f,\varphi_k\rangle\langle g,\varphi_k\rangle.$$

证明 令 $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^n\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k(x)$, 则 $S_n(x)\xrightarrow{L^2} f(x)$, 因此对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,

$\|S_n - f\|_2 < \varepsilon$. 由 $\langle S_n - f, g\rangle \leqslant \|S_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2 \leqslant \varepsilon\|g\|_2$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle S_n - f, g\rangle = 0$, 即

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k, g\right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\langle\varphi_k, g\rangle.$$

□

练习 1 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集, 则 $\lim\limits_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) = m(E)$.

证明 (1) 若 $m(E) < +\infty$, 则 $\mathbb{1}_E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, 从而

$$\begin{aligned}|m(E\cap(h+E)) - m(E)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{E\cap(h+E)}\,\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|\mathbb{1}_E\mathbb{1}_{h+E} - \mathbb{1}_E\mathbb{1}_E|\,\mathrm{d}m \\ &\leqslant \|\mathbb{1}_{h+E} - \mathbb{1}_E\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\text{积分平均连续性}]{h\to 0} 0.\end{aligned}$$

(2) 若 $m(E) = +\infty$, 令 $E_k = E\cap\mathbb{B}(0,k)$, 则 $E_k\uparrow E$, 由测度的从下方连续性即知 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k) = m(E)$. 由 (1) 有

$$\liminf_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) \geqslant \liminf_{h\to 0} m(E_k\cap(h+E_k)) = m(E_k) \xrightarrow{k\to\infty} m(E) = +\infty,$$

因此 $\lim\limits_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) = +\infty = m(E)$.

□

练习 2 设 $\mathbb{R}\ni\lambda_n\to+\infty$, $A = \left\{x\in\mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty}\sin\lambda_n x \text{ 存在且有限}\right\}$. 证明: $m(A) = 0$.

证明 由习题 10 可知 A 可测. 将极限函数零扩充为 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{1}_A(x)\sin\lambda_n x$. 对任意有界可测集 E, 由于 $|f(x)|\leqslant\mathbb{1}_E(x)\in\mathcal{L}^1(E)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E\mathbb{1}_A(x)\sin\lambda_n x\,\mathrm{d}x \xlongequal[\text{PPT 20}]{\text{Riemann-Lebesgue 引理}} 0.$$

由 Lebesgue 点定理 (PPT 25) 可得

$$f(x) \xlongequal{\text{a.e.}} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

对任意有界可测集 E, 再次运用 Lebesgue 控制收敛定理与 Riemann-Lebesgue 引理, 有

$$0 = \int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E\cap A}\sin^2\lambda_n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap A}[1-\cos(2\lambda_n x)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m(E\cap A).$$

于是

$$m(A) = m\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]\right) = 0.$$

□

练习 3 设 $f_k, f\in\mathcal{L}^1(E)$, $f_k\xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $f_k\xrightarrow{L^1} f$ 当且仅当 $\|f_k\|_{\mathcal{L}^1(E)}\to\|f\|_{\mathcal{L}^1(E)}$.

证明 **(⇒)** 由 $\left|\|f_k\|_{\mathcal{L}^1(E)} - \|f\|_{\mathcal{L}^1(E)}\right| \leqslant \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)}$ 即得.

(⇐) 由于 $f \in \mathcal{L}^1(E)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A \subset E$ 与 $\delta > 0$, 使得

$$m(A) < +\infty, \quad \int_{A^c} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_C |f(x)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}, \forall C \subset E : m(C) < \delta.$$

由 Egorov 定理, 在 A 上 $f_k \xrightarrow{\text{a.un.}} f$, 即存在 $B_0 \subset A$, 使得 $m(A \setminus B_0) < \delta$, 且在 B_0 上 $f_k \rightrightarrows f$. 于是

$$\int_E |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{A^c} |f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{A \setminus B_0} |f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{B_0} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \int_{B_0} |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

结合 $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon + \int_{B_0} |f(x)| \, \mathrm{d}x &\leqslant \varepsilon + \liminf_{k \to \infty} \int_{B_0} |f_k(x)| \, \mathrm{d}x \\
&= \varepsilon + \liminf_{k \to \infty} \left(\int_E |f_k(x)| \, \mathrm{d}x - \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \varepsilon + \int_E |f(x)| \, \mathrm{d}x - \limsup_{k \to \infty} \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\limsup_{k \to \infty} \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

故

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)} &\leqslant \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{E \setminus B_0} |f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{B_0} |f_k(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_{A^c} |f(x)| \, \mathrm{d}x}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_{A \setminus B_0} |f(x)| \, \mathrm{d}x}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \int_{B_0} |f_k(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

两边同取上极限得

$$\limsup_{k \to \infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)} \leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 0 = 2\varepsilon,$$

因此 $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)} \to 0$ 即 $f_k \xrightarrow{L^1} f$. □

练习 4 设 $a_n > 0, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 则 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(a_n x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 0$.

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)| \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty,$$

由逐项积分定理, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, 进而 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(a_n x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 0$. □

练习 5 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $m(E) < +\infty$, $f_n \in \mathcal{L}^1(E)$, $f_n \rightrightarrows f$, 则 $f \in \mathcal{L}^1(E)$ 且 $\displaystyle\int_E f_n(x) \, \mathrm{d}x \to \int_E f(x) \, \mathrm{d}x$. 若 $m(E) = +\infty$, 结论是否成立?

证明 由于 $f_n \rightrightarrows f$, 不妨设 $|f_1(x) - f(x)| < 1, \forall x \in E$, 则 $|f(x)| < |f_1(x)| + 1 \in \mathcal{L}^1(E)$, 由 Lebesgue 控

制收敛定理知 $f \in \mathcal{L}^1(E)$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{m(E)}, \forall x \in E$, 因此

$$\left|\int_E [f(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

因此 $\displaystyle\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$. 若 $m(E) = +\infty$, 有反例 $f_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\mathbb{1}_{(0,2^n]}(x)$. □

练习 6 设 $f \in \mathcal{L}^+(E)$, $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 单调递增且内闭绝对连续, $\varphi(0) = 0$, 则

$$\int_E \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E : f(x) > t\})\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 先说明 RHS 中被积函数可积：$m([f(x) > t])$ 关于 t 单调递减, 是有界变差函数; $\varphi(t)$ 是单调递增函数, 也是有界变差函数. 有界变差函数在 Sobolev 空间中, 因此 $m([f(x) > t])\varphi'(t) \in \mathcal{L}^+(E)$, 其积分有意义 (可能为 $+\infty$).

由于 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上内闭绝对连续, 由微积分基本定理,

$$\varphi(a) = \int_0^a \varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall a \in [0, +\infty).$$

因此

$$\varphi(f(x)) = \int_0^{f(x)} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

由非负可测函数的 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\int_E \varphi(f(x)) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x)\left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi'(t)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x)\mathbb{1}_{[f(x)>t]}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} m(\{x \in E : f(x) > t\})\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

练习 7 设 $E \subset [a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 E 上可导, $|f'(x)| \leqslant M, \forall x \in E$, 则 $m^*(f(E)) \leqslant Mm^*(E)$.

证明 固定 $\varepsilon > 0$, 考虑集合

$$E_n = \left\{x \in E : |f(y) - f(x)| \leqslant (M + \varepsilon)|y - x|, \forall y \in [a, b] \cap \mathbb{B}\big(x, \tfrac{1}{n}\big)\right\},$$

则 $E_n \uparrow E$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} m^*(E_n) = m^*(E)$. 利用边长一致有界的开矩体构造的外测度 (PPT 6), 可设

$$E_n \setminus \{a, b\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_{n,k}, \quad \text{开区间 } I_{n,k} \subset (a, b),$$

其中

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k}) < m^*(E_n) + \varepsilon, \quad m(I_{n,k}) < \frac{1}{n}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

对任意 $s, t \in E_n \cap I_{n,k}$, 有

$$|f(s) - f(t)| \leqslant (M + \varepsilon)|s - t| \leqslant (M + \varepsilon)m(I_{n,k}).$$

因此

$$m^*(f(E_n)) = m^*\left(f\left(E_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} I_{n,k}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f(E_n \cap I_{n,k})) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(f(E_n \cap I_{n,k}))$$
$$\leqslant (M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k}) \leqslant (M+\varepsilon)[m^*(E_n)+\varepsilon],$$

令 $n \to \infty$ 即得

$$m(f(E)) \leqslant (M+\varepsilon)[m(E)+\varepsilon],$$

再令 $\varepsilon \to 0^+$ 即完成证明. □

练习 8 设 $f \in \mathcal{L}([a,b])$, $E \subset [a,b]$ 可测, f 在 E 上可导, 则 $m^*(f(E)) \leqslant \int_E |f'(x)|\,\mathrm{d}x$.

证明 固定 $\varepsilon > 0$, 考虑集合

$$E_n = \{x \in E : (n-1)\varepsilon \leqslant |f'(x)| < n\varepsilon\},$$

则 E_n 是可测集, 由练习 7 结论 (导数是伸缩率),

$$m^*(f(E_n)) \leqslant n\varepsilon m^*(E_n) = (n-1)\varepsilon m^*(E_n) + \varepsilon m^*(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f'(x)|\,\mathrm{d}x + \varepsilon m^*(E_n).$$

由

$$f(E) = f\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$$

可得

$$m^*(f(E)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(E_n)) = \int_E |f'(x)|\,\mathrm{d}x + \varepsilon m(E),$$

注意到 $m(E) \leqslant |b-a| < +\infty$, 令 $\varepsilon \to 0^+$ 即完成证明. □

练习 9 设 $f \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$, 除了一个至多可数集外 f' 存在且有限, 则 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. 若仅要求 A 是零测集结论是否成立?

证明 令 $A = \{x \in [a,b] : f'(x) \text{ 不存在}\}$, 则 A 为至多可数集. 对任意 $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, 由连续函数的保连通性质 (介值定理) 及练习 8 结论,

$$|f(\beta)-f(\alpha)| \leqslant m(f([\alpha,\beta])) = m(f((\alpha,\beta))) \xlongequal{A\text{ 至多可数}} m(f((\alpha,\beta)\setminus A))$$
$$\leqslant \int_{(\alpha,\beta)\setminus A} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{(\alpha,\beta)} |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

由于 $f \in \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$, 由积分的绝对连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $m\left(\bigsqcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right) < \delta$, 就有

$$\int_{\bigsqcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon \implies \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)-f(a_i)| < \varepsilon.$$

这说明 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. 若仅要求 A 是零测集, Cantor 函数即为反例, 它是单调递增的连续函数, 但不是绝

对连续函数 (因为微积分基本定理不成立). $\square$

练习 10 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, 则微积分基本定理成立:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 注意到 f 满足练习 9 中的条件, 因此 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, 微积分基本定理成立. $\square$

练习 11 设 $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$, 则分部积分公式成立:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由于 $f, g \in \mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b])$, 可设 $|f(x)|, |g(x)| \leqslant M, \forall x \in [a,b]$. 因此对任意 $x, y \in [a,b]$, 有

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |f(x)[g(x) - g(y)]| + |g(y)[f(x) - f(y)]| \leqslant M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|),$$

进而由 $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$ 可知 $fg \in \mathrm{AC}([a,b])$. 又 $f \in \mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$, 因此 $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, 结合 g 在 $[a,b]$ 上有界可知 $f'g \in \mathcal{L}^1([a,b])$. 同理 $fg' \in \mathcal{L}^1([a,b])$. 余下来自绝对连续函数的微积分基本定理. $\square$

练习 12 设 $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $g \in \mathcal{L}^1([a,b]) \cap \mathcal{L}^+([a,b])$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 设 f 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M, 最小值为 m, 由 $g(x) \geqslant 0$ 可得

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

进而

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则上式中不等号均取等, 结论成立. 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, 则

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant M,$$

由连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \implies \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

练习 13 设 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, 则对任意零测集 $Z \subset [a,b]$, 有 $m(f(Z)) = 0$.

证明 由于 $Z \subset [a,b]$ 为零测集, 对任意 $\delta > 0$, 存在开集 G, 使得

$$Z \setminus \{a,b\} \subset G \subset (a,b), \quad m(G) < \delta.$$

由一维开集结构定理, 可设 $G = \bigsqcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. 对每个 i, 由于 $f \in \mathcal{C}([a_i, b_i])$, 存在 $c_i, d_i \in [a_i, b_i]$, 使得 $f([a_i, b_i]) = [f(c_i), f(d_i)]$. 于是

$$\begin{aligned} m^*(f(Z)) = m^*(f(Z \setminus \{a,b\})) &\leqslant m^*\left(f\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(f([a_i, b_i])) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*([f(c_i), f(d_i)]) = \sum_{i=1}^{\infty}|f(d_i) - f(c_i)| = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{c_i}^{d_i} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\int_{c_i}^{d_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_i}^{b_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_G |f'(x)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由积分的绝对连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 δ 充分小时, 由于 $m(G) < \delta$, 有

$$m^*(f(Z)) \leqslant \int_G |f'(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得 $m(f(Z)) = 0$. $\square$

PPT 索引

PPT 2

- ◇ Zorn 引理.
- ◇ 集合的势.

PPT 3

- ◇ Cantor-Bernstein 定理.
- ◇ 无最大势定理.
- ◇ 几个势运算结论.
- ◇ (a, b) 上的凸函数除去一个可数集外可微.
- ◇ 存在不可测集.
- ◇ 任意正测集包含不可测子集.

PPT 4

- ◇ 三等分 Cantor 集.
- ◇ Cantor 函数.
- ◇ 推广的 Cantor 集.

PPT 5

- ◇ Baire 纲定理.
- ◇ Borel σ-代数的势.
- ◇ Lebesgue σ-代数的势.
- ◇ 全体 Lebesgue 不可测集的势.
- ◇ 函数连续点的结构.
- ◇ 连续函数可微点的结构.
- ◇ 有理数集不是 G_δ-集.
- ◇ 下半连续函数在某个非空开集上有上界.

PPT 6

- ◇ Lebesgue 外测度的定义.
- ◇ 抽象外测度的定义.
- ◇ 抽象测度的定义.
- ◇ Carathéodory 测度扩张定理.
- ◇ 由边长一致有界开矩体构造的外测度.
- ◇ 距离外测度.
- ◇ Lindelöf 可数覆盖定理.
- ◇ Borel 集是 Lebesgue 可测集.

PPT 7

- ◇ 抽象测度的性质 (积分观点).
- ◇ Borel-Cantelli 引理.
- ◇ Lebesgue 测度的正则性.
- ◇ 等测核和等测包 (完备化定理).
- ◇ 测度空间完备化.
- ◇ Lebesgue 可测集的唯一刻画.

PPT 8

- ◇ Lebesgue 可测集与开集、闭集的关系.
- ◇ 测度的平移不变性.
- ◇ 外测度等测包.
- ◇ 外测度的性质 (由外测度等测包导出).
- ◇ 密度定理.
- ◇ Steinhaus 定理.
- ◇ $\mathcal{C} - \mathcal{C} = [-1, 1]$.

PPT 9

- ◇ $[0,1]$ 同胚但可测集的原像不可测.
- ◇ 零测的非 Borel 集.
- ◇ 函数可测性关于代数、极限运算封闭.
- ◇ 广义实值可测函数类关于几乎处处收敛封闭.
- ◇ 可测性是局部性质.
- ◇ 绝对可测但不可测.
- ◇ 可测函数关于不可数取上确界不封闭.
- ◇ 可测函数的复合不可测.

PPT 10

- ◇ 非负可测函数结构.
- ◇ 可测函数结构.
- ◇ 简单函数一致逼近非负有界可测函数.
- ◇ 三种收敛及其等价刻画.
- ◇ Egorov 定理.
- ◇ Riesz 定理.
- ◇ 依测度收敛当且仅当存在子列几乎一致收敛.
- ◇ 依测度收敛但不几乎处处收敛.

PPT 11

- ◇ 依测度 Cauchy 等价于依测度收敛.
- ◇ Lusin 定理 (四步走).
- ◇ 可测函数 = 连续函数在几乎处处意义下的极限.

PPT 12

- ◇ 积分的良定性.
- ◇ 积分的等价定义.

PPT 13

- ◇ 零测集不影响积分存在性、可积性、积分值.
- ◇ 可积函数几乎处处有限.
- ◇ Levi 单调收敛定理 (正反向).
- ◇ Fatou 引理.
- ◇ Lebesgue 控制收敛定理.

PPT 14

- ◇ 逐项积分定理.
- ◇ 关于积分限的 σ-可加性.
- ◇ 含参变量积分连续性.
- ◇ 含参变量积分可导性.
- ◇ 连续版本的 Lebesgue 控制收敛定理.
- ◇ Borel-Cantelli 引理新视角.

PPT 15

- ◇ 推广的 Levi 单调收敛定理 (递增)：$f_1^- \in \mathcal{L}^+(E)\cap\mathcal{L}^1(E)$ (证明时要对 f_1^+ 是否可积分类讨论).
- ◇ 推广的 Levi 单调收敛定理 (递降)：$f_1^+ \in \mathcal{L}^+(E)\cap\mathcal{L}^1(E)$.
- ◇ 推广的 Fatou 引理 (下极限)：$\left(\inf\limits_n f_n\right)^- \in \mathcal{L}^+(E)\cap\mathcal{L}^1(E)$ (要用到推广的 Levi 单调收敛定理).
- ◇ 推广的 Fatou 引理 (上极限)：$\left(\sup\limits_n f_n\right)^- \in \mathcal{L}^+(E)\cap\mathcal{L}^1(E)$.
- ◇ (一定条件下) L^1 收敛与交换积分次序的等价性 (用 Fatou 引理的不等式产生等式).
- ◇ 推广的 Lebesgue 控制收敛定理：$f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$.
- ◇ 控制条件下依测度收敛蕴含 L^1 收敛 (反证法, 结合 Riesz 定理与 DCT).
- ◇ 利用函数列控制的 Lebesgue 控制收敛定理 (比较判别法).

PPT 16

- ◇ 在 ∞ 的充分小邻域上积分值亦充分小.
- ◇ 在充分小测度集上积分值亦充分小 (常用其 ε-δ 语言) (反证法 + Borel-Cantelli 引理).
- ◇ Chebyshev 不等式.
- ◇ 一致可积的定义及其等价定义 (总在有限测度集上谈论).
- ◇ 控制可积蕴含一致可积.
- ◇ 具有一致可积条件的推广的 Fatou 引理.
- ◇ 推广的 Lebesgue 控制收敛定理：L^1 收敛当且仅当依测度收敛且一致可积 (用 Chebyshev 不等式证明 L^1 收敛蕴含依测度收敛).
- ◇ Vitali 收敛定理.

PPT 17

- ◇ Radon 测度/正则 Borel 测度.
- ◇ Lusin 定理与 Egorov 定理.
- ◇ Dirac 测度的积分：$\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\delta_x = f(x), \forall f \in \mathcal{L}(X)$.

PPT 18

- ◇ 测度的绝对连续性的定义与判别法.
- ◇ Radon-Nikodym 定理.
- ◇ 加权计数测度.
- ◇ 凸函数积分刻画与 Jensen 不等式.
- ◇ 函数蛋糕表示 $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{f^{-1}(t,+\infty)}\,\mathrm{d}t$ 及其与积分蛋糕表示的关系.
- ◇ 非负可测函数的重整：将函数蛋糕表示中的特征函数 (集合) 进行对称重整.
- ◇ 函数重整的单调性 (源自集合重整特性)、保序性、保范性 (Fubini 定理)、距离不增性.

PPT 19

- ◇ 函数的 Hahn-Jordan 分解.
- ◇ 符号测度.
- ◇ 全变差测度：$|\nu|(E)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|:E=\bigsqcup_{k=1}^{n}E_k\right\}$.
- ◇ ν 是符号测度, m 是正测度, 则 $\nu\ll m\iff|\nu|\ll m$.
- ◇ 复测度、复测度的全变差测度.
- ◇ 奇异测度, 例子：Lebesgue 测度 $\perp$ Dirac 测度.
- ◇ 测度 ν 关于测度 m 的 Radon-Nikodym 导数 $h=\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$.
- ◇ Lebesgue 分解定理.
- ◇ σ-有限测度的分解.

PPT 20

- ◇ 紧支光滑函数在 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密 $\iff$ 若 $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, 则存在紧支光滑函数列 $f_k\xrightarrow[\text{a.e.}]{L^1}f$.
- ◇ L^1 可积函数的“好 + 小”分解.
- ◇ 积分的平均连续性：设 $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim\limits_{h\to0}\|f(x+h)-f(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}=0$ (利用“好 + 小”分解).
- ◇ 紧支阶梯函数在 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.
- ◇ Riemann-Lebesgue 引理 (利用阶梯函数 +“小”).
- ◇ Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广.
- ◇ 绝对收敛的广义 Riemann 积分可视为 Lebesgue 积分：设 $f\in\mathcal{R}([0,b]),\forall b>0$, 则

$$f\in\mathcal{L}^1([0,+\infty))\iff|f|\in\mathcal{R}([0,+\infty))\iff\begin{cases}f\in\mathcal{R}([0,+\infty)),\\|f|\in\mathcal{R}([0,+\infty))\end{cases}.$$

- ◇ 广义 Riemann 可积但不 Lebesgue 可积的例子 (条件收敛但不绝对收敛级数).

PPT 21

- ◇ Fubini-Tonelli 定理.
- ◇ Tonelli 定理验证可积性, Fubini 定理计算积分值.

PPT 22

- ◇ 抽象积分的 Fubini-Tonelli 定理.
- ◇ 乘积测度空间：$\Gamma_{X\times Y}$ 是 $\Gamma_X \times \Gamma_Y$ 生成的最小 σ-代数.
- ◇ 抽象积分是高维测度.
- ◇ Vitali 覆盖定理.

PPT 23

- ◇ 分布函数的积分表示：$f_*(t) = \displaystyle\int_E \mathbb{1}_{U(f)}(x,t)\,\mathrm{d}x$, 其中 $U(f)$ 表示 $|f|$ 的图形下方.
- ◇ L^p 积分的蛋糕表示：$\displaystyle\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t)\,\mathrm{d}t$.
- ◇ Lebesgue 微分定理：单调函数几乎处处可导.
- ◇ Lebesgue 定理 (微积分基本定理变成不等式).

PPT 24

- ◇ Fubini 逐项微分定理：每个 f_n 都是增函数.
- ◇ 严格单调递增但导函数几乎处处为 0 的例子.
- ◇ 有界变差函数类.
- ◇ $\mathrm{AC}([a,b]) \subsetneq \mathrm{BV}([a,b]) \subsetneq \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$ 的证明及例子.
- ◇ 单调递增函数的全变差.
- ◇ $\displaystyle\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f, \forall c \in (a,b)$.
- ◇ 有界变差函数的 Jordan 分解定理.
- ◇ 设 $f \in \mathcal{C}([a,b])$, 则 $\displaystyle\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b |f|$.
- ◇ Stieltjes 测度.
- ◇ 经过规则化的有界变差函数可视为测度：$\mathcal{C}([0,1])^* = \mathrm{BV}_0([a,b])$.

PPT 25

- ◇ Lebesgue 积分框架下微积分基本定理 (重点：$0 \mapsto 0$ 情形的证明).
- ◇ 已知积分可恢复函数：若 $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$, 则 $f(x) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- ◇ Lebesgue 点定理 (freezing 技巧).
- ◇ 设 $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ 与任意多项式正交, 则 $f \overset{\text{a.e.}}{=\!=} 0$.

PPT 26

- ◇ 设 $f \in \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$, 则 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ 当且仅当 $\displaystyle\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.
- ◇ $\mathcal{L}^\infty([a,b])$ 框架下的微积分基本定理 (注意 $\mathrm{Lip}([a,b]) \subset \mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathcal{W}^{1,1}([a,b])$).
- ◇ $x^\alpha \sin \dfrac{1}{x^\beta}$ 系列.
- ◇ “绝对连续函数 $\circ$ 连续可微函数 $\neq$ 绝对连续函数” 的例子.
- ◇ Lipscitz 函数 $\circ$ 绝对连续函数 $=$ 绝对连续函数.
- ◇ 逐项微分 Fuibini 定理 (3 个条件).

PPT 27

- ◇ 若干习题.

PPT 28

- ◇ L^∞ 空间的范数是本性上确界：

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} &= \inf_{m(Z)=0} \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)| = \inf\left\{M>0 : |f(x)| \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} M\right\} \\ &= \sup\{M>0 : m\{x\in E : |f(x)|>M\}>0\}.\end{aligned}$$

- ◇ Hölder 不等式.
- ◇ Minkowski 不等式.
- ◇ Chebyshev 不等式.
- ◇ 四种收敛.
- ◇ L^p 空间 ($p \in [1,\infty]$) 是完备赋范线性空间 (Banach 空间).
- ◇ 另一个 Minikowski 不等式.
- ◇ 几个不等式例题.

PPT 29

- ⋄ L^p 空间 ($p \in [1, \infty)$) 的可分性 (有可数稠密子集).
- ⋄ L^∞ 空间不可分.
- ⋄ 赋范空间 $(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_2)$ 不完备, 其完备化即 $\mathcal{L}^2([a,b])$.
- ⋄ 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则 $\mathcal{L}^2(E)$ 是 Hilbert 空间.
- ⋄ Fourier 分析.
- ⋄ 对偶空间.