代数拓扑作业

林晓烁 2024 秋

https://xiaoshuo-lin.github.io

习题 1 证明: $F_k(K;R)\xrightarrow{\partial_k}F_{k-1}(K;R)\xrightarrow{\partial_{k-1}}F_{k-2}(K;R)$ 满足 $\partial_{k-1}\circ\partial_k=0$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}
&\partial_{k-1}\circ\partial_k(\langle x_0,\cdots,x_k\rangle)\\
=&\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\partial_{k-1}(\langle x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_k\rangle)\\
=&\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(\sum_{j<i}(-1)^j\langle x_0,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_k\rangle+\sum_{j>i}(-1)^{j+1}\langle x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_k\rangle\right)\\
=&\sum_{i=0}^{k}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\langle x_0,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_k\rangle+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\langle x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_k\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\langle x_0,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_k\rangle-\sum_{j=1}^{k}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\langle x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_k\rangle\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

习题 2 证明: $\{A\subset|K|:\forall\sigma\in K,A\cap\sigma$ 在 σ 中闭$\}$ 作为一族闭集给出了 $|K|$ 的一个拓扑, 称为多面体拓扑.

证明 (1) 由定义, $\varnothing,|K|$ 是 $|K|$ 中闭集.

(2) 若 A_1,A_2 均为 $|K|$ 中闭集, 则对任意 $\sigma\in K$, $A_1\cap\sigma,A_2\cap\sigma$ 均在 σ 中闭, 从而 $(A_1\cup A_2)\cap\sigma=(A_1\cap\sigma)\cup(A_2\cap\sigma)$ 在 σ 中闭, 即 $A_1\cap A_2$ 在 $|K|$ 中闭.

(3) 若 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 $|K|$ 中的闭集族, 则由 $\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cap\sigma=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap\sigma)$ 可知 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 在 $|K|$ 中闭. □

习题 3 证明: $|K|$ 的多面体拓扑比 $|K|\subset R^N$ $(N\gg1)$ 的子空间拓扑更细.

证明 任取 $|K|$ 在 $\mathbb{R}^N$ 子空间拓扑下的闭集 A, 即 $A=|K|\cap B$, 其中 B 是 $\mathbb{R}^N$ 中的闭集. 对任意 $\sigma\in K$,

$$A\cap\sigma=(|K|\cap B)\cap\sigma=B\cap\sigma$$

是 σ 中的闭集, 从而 A 在 $|K|$ 的多面体拓扑下闭. 故 $|K|$ 的多面体拓扑比 $|K|\subset\mathbb{R}^N$ 的子空间拓扑更细.□

习题 4 证明: 当 K 是有限单纯复形时, $|K|$ 的多面体拓扑与子空间拓扑一致.

证明 由习题 3, 只需证明当 K 是有限单纯复形时, $|K|\subset\mathbb{R}^N$ $(N\gg1)$ 的子空间拓扑比 $|K|$ 的多面体拓扑更细. 任取 $|K|$ 的多面体拓扑下的闭集 A, 则对任意 $\sigma\in K$, $A\cap\sigma$ 在 σ 中闭, 再有 σ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的闭集可得 $A\cap\sigma$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中闭, 从而 $A=\bigcup\limits_{\sigma\in K}(A\cap\sigma)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中闭集的有限并, 仍为闭集. 故 $|K|\subset\mathbb{R}^N$ 的子空间拓扑比 $|K|$ 的多面体拓扑更细, 进而两者一致. □

习题 5 设 $K=\left\{\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\frac{1}{n}:n\in\mathbb{Z}_{\geqslant1}\right\}$, 则作为集合 $|K|=(0,1]$.

(1) 作为拓扑空间, $(|K|,\text{多面体拓扑})=((0,1],\mathbb{R}\text{ 的子空间拓扑})$.

(2) 计算同调 $H(K;R)$.

证明　(1) 由习题 3, 只需证 $|K|$ 的多面体拓扑比 $(0,1]\subset\mathbb{R}$ 的子空间拓扑更细. 任取 $|K|$ 在多面体拓扑下的闭集 A, 下证 $A\cup\{0\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中闭集. 只需证对任意点列 $\{x_n\}\subset A\cup\{0\}$, 若有 $x_n\to x_0\in[0,1]$, 则 $x_0\in A\cup\{0\}$. 不妨设 $x_0>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $|x_n-x_0|<\frac{x_0}{2}$. 取 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n_0}<\frac{x_0}{2}$, 则 $\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}\subset\left[\frac{1}{n_0},1\right]\cap A$. 而由多面体拓扑的定义,

$$\left[\frac{1}{n_0},1\right]\cap A=\bigcup_{n=1}^{n_0-1}\left(\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\cap A\right)$$

为 $\mathbb{R}$ 中有限个闭集之并, 仍为闭集, 从而 $x_0\in\left[\frac{1}{n_0},1\right]\cap A\subset A$. 故 $A\cup\{0\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中闭集, 进而 $A=(A\cup\{0\})\cap(0,1]$ 为 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 的子空间拓扑下的闭集, 即 $(|K|,\text{多面体拓扑})=((0,1],\mathbb{R}\text{ 的子空间拓扑})$.

(2) 考虑增广链复形

$$0\longrightarrow C_1(K;R)\xrightarrow{\partial_1}C_0(K;R)\xrightarrow{\varphi}R$$

① 先求 $\ker\partial_1$. 若

$$\partial_1\left(\sum_{n_1\leqslant n\leqslant n_2}a_n\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\right)=0,\quad a_n\in R,$$

则

$$\begin{aligned}0&=\sum_{n_1\leqslant n\leqslant n_2}a_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=a_{n_1}\frac{1}{n_1}+(a_{n_1+1}-a_{n_1})\frac{1}{n_1+1}+\cdots+(a_{n_2}-a_{n_2-1})\frac{1}{n_2}-a_{n_2}\frac{1}{n_2+1}.\end{aligned}$$

因此

$$a_{n_1}=0,\quad a_{n_1+1}-a_{n_1}=0,\quad\cdots,\quad a_{n_2}-a_{n_2-1}=0,\quad a_{n_2}=0,$$

即

$$a_{n_1}=a_{n_1+1}=\cdots=a_{n_2}=0.$$

故 $H_1(K;R)=\ker\partial_1=0$.

② 再证 $\ker\varphi\subset\operatorname{im}\partial_1$. 若

$$\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2}a_n\frac{1}{n}\in\ker\varphi,$$

即

$$\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2}a_n=0,$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2}a_n\frac{1}{n}&=\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2-1}a_n\frac{1}{n}-\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2-1}a_n\frac{1}{m_2}\\&=\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2-1}a_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m_2}\right)\\&=\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2-1}a_n\partial_1\left(\left[\frac{1}{m_2},\frac{1}{m_2+1}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\right)\\&=\partial_1\sum_{m_1\leqslant n\leqslant m_2-1}a_n\left(\left[\frac{1}{m_2},\frac{1}{m_2+1}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\right)\end{aligned}$$

$$\in \operatorname{im}\partial_1.$$

故 $\ker\varphi \subset \operatorname{im}\partial_1$, 进而 $\ker\varphi = \operatorname{im}\partial_1$. 因此

$$H_0(K;R) = C_0(K;R)/\operatorname{im}\partial_1 = C_0(K;R)/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi = R. \qquad \square$$

习题 6 映射 $f : |K| \to X$ 连续当且仅当对任意 $\sigma \in K$, $f|_\sigma$ 连续.

证明 $(\Rightarrow)$ 连续映射 f 限制在子空间 $\sigma \subset |K|$ 仍为连续映射.

$(\Leftarrow)$ 任取 X 中闭集 A, 则对任意 $\sigma \in |K|$, 由 $f|_\sigma$ 的连续性, $f^{-1}(A)\cap\sigma = (f|_\sigma)^{-1}(A)$ 为 σ 中闭集, 再由多面体拓扑的定义知 $f^{-1}(A)$ 为 $|K|$ 中闭集, 故 f 连续. $\square$

习题 7 设 $f : |K| \to |L|$ 连续. 证明: 若 s 单纯逼近 f, 则 s 与 f 同伦.

证明 考虑映射

$$F : |K|\times[0,1] \to |L|, \quad (x,t) \mapsto (1-t)s(x) + tf(x).$$

此映射是良定的, 因为 s 单纯逼近 f 确保了 $s(x)$ 在 $f(x)$ 的承载单形中, 二者可进行凸组合. 由于 $F(x,0) = s(x)$, $F(x,1) = f(x)$, 为证 s 与 f 同伦, 只需证 F 连续. 为此, 只需证对任意 $\sigma \in K$ 均有 $F|_{\sigma\times[0,1]}$ 连续 (理同习题 6 之 $(\Leftarrow)$).

任取 $\sigma \in K$, 对任意 $x \in \sigma$, 记 $f(x)$ 的承载单形为 τ_x, 则 $\{(\tau_x)^\circ : x \in \sigma\}$ 构成 $f(\sigma)$ 的一个开覆盖. 由于 $f(\sigma)$ 为紧集, 必存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$f(\sigma) \subset \bigcup_{i=1}^k {\tau_{x_i}}^\circ.$$

记 $\widetilde{L}$ 为由单形 $\{\tau_{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 及其面构成的 L 的子复形, 则 $\widetilde{L}$ 为有限单纯复形. 由习题 4, $|L|$ 的多面体拓扑与 $\mathbb{R}^N$ $(N \gg 1)$ 的子空间拓扑一致, 因此 $F|_{\sigma\times[0,1]} : \sigma\times[0,1] \to |L_1|$ 两个分量均连续, 从而连续. 将其与嵌入映射 $|L_1| \hookrightarrow |L|$ (自然是连续的) 复合即得 $F|_{\sigma\times[0,1]} : \sigma\times[0,1] \to |L|$ 连续, 结论得证. $\square$

习题 8 令 $|K| = |L| = [0,1]$, $K^{(0)} = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$, $L^{(0)} = \{0, \frac{2}{3}, 1\}$. 定义映射 $f : |K| \to |L|, x \mapsto x^2$. 证明: 不存在 f 的单纯逼近.

证明 假设存在 f 的单纯逼近 s, 则由单纯逼近的定义, s 与 f 在 $f^{-1}\left(L^{(0)}\right) = \left\{0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right\}$ 上取值一致:

$$s(0) = 0, \quad s\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \tfrac{2}{3}, \quad s(1) = 1.$$

由于 $s\left(\frac{1}{3}\right) \in L^{(0)}$ 需在 $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ 的承载单形 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 中, 因此 $s\left(\frac{1}{3}\right) \in L^{(0)} \cap \left[0, \frac{2}{3}\right] = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$. 若 $s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, 则由 $\sqrt{\frac{2}{3}} \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 且 $s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, s(1) > \frac{2}{3}$ 可知 $s\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > \frac{2}{3}$, 矛盾, 因此 $s\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. 设 $\lambda \in (0,1)$ 使得

$$s\left(\lambda\tfrac{1}{3} + (1-\lambda)1\right) = \lambda s\left(\tfrac{1}{3}\right) + (1-\lambda)s(1) = \frac{2}{3},$$

则 $\lambda = \frac{1}{3}$, 从而 $\lambda\frac{1}{3} + (1-\lambda)1 = \frac{7}{9}$, $s\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{2}{3}$. 由 $s\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, $s\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{2}{3}$, $s(1) = 1$ 即知

$$s(x) > \frac{2}{3}, \quad \forall x \in \left(\frac{7}{9}, 1\right).$$

但这与 $\sqrt{\frac{2}{3}} \in \left(\frac{7}{9}, 1\right)$ 而 $s\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}$ 矛盾. 故不存在 f 的单纯逼近. $\square$

习题 9 利用以下引理, 重新证明习题 8 的结论.

映射 $s: K^{(0)} \to L^{(0)}$ 为 $f: |K| \to |L|$ 的一个单纯逼近当且仅当

$$f(\mathrm{star}(v,k)) \subset \mathrm{star}(s(v),L), \quad \forall v \in K^{(0)}.$$

证明 假设 s 是 f 的单纯逼近, 则 $s(1) = 1$. 由 $\mathrm{star}(1,K) = \left(\frac{1}{3},1\right]$ 得 $f(\mathrm{star}(1,K)) = \left(\frac{1}{9},1\right]$. 但 $\mathrm{star}(s(1),L) = \mathrm{star}(1,L) = \left(\frac{2}{3},1\right] \not\supset \left(\frac{1}{9},1\right]$, 这与 s 是 f 的单纯逼近矛盾. □

习题 10 若 $s: K \to L$ 是 $f: |K| \to |L|$ 的单纯逼近, $t: L \to M$ 是 $g: |L| \to |M|$ 的单纯逼近, 证明: $t \circ s: K \to M$ 是 $g \circ f: |K| \to |M|$ 的单纯逼近.

证明 对任意 $v \in K^{(0)}$, 有

$$g \circ f(\mathrm{star}(v,K)) \subset g(\mathrm{star}(s(v),L)) \subset \mathrm{star}(t \circ s(v),M),$$

因此 $t \circ s$ 是 $g \circ f$ 的单纯逼近. □

习题 11 定义映射

$$T: F_q(v*K;R) \to F_{q+1}(v*K;R), \quad \langle v_0,\cdots,v_q\rangle \mapsto \begin{cases} \langle v,v_0,\cdots,v_q\rangle, & \text{若 } v \neq v_i, 0 \leqslant i \leqslant q, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 T 诱导了映射 (仍记为 T)

$$T: C_q(v*K;R) \to C_{q+1}(v*K;R), \quad [v_0,\cdots,v_q] \mapsto [v,v_0,\cdots,v_q].$$

证明: 当 $q>0$ 时, $\partial T + T\partial = \mathrm{id}_{C_q(v*K;R)}$.

证明 当 $q>0$ 时, 对任意 $[v_0,\cdots,v_q] \in C_q(v*K;R)$, 有

$$\begin{aligned}(\partial T + T\partial)[v_0,\cdots,v_q] &= \partial[v,v_0,\cdots,v_q] + T\sum_{i=0}^{q}(-1)^i[v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_q] \\ &= [v_0,\cdots,v_q] + \sum_{i=0}^{q}(-1)^{i+1}[v,v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_q] + \sum_{i=0}^{q}(-1)^i[v,v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_q] \\ &= [v_0,\cdots,v_q].\end{aligned}$$ □

习题 12 设 K 是单纯复形. 称 $p+1$ 元数组 $(v_0,\cdots,v_p)$ 为 K 的一个有序 p-单形, 若 $v_0,\cdots,v_p$ 张成 K 中某个单形 (这些 v_i 不必两两不同). 记 $C_p^{\mathrm{ord}}(K;R)$ 为由 K 中有序 p-单形生成的自由模, 并定义 $\partial_p^{\mathrm{ord}}: C_p^{\mathrm{ord}}(K;R) \to C_{p-1}^{\mathrm{ord}}(K;R)$ 如下:

$$\partial_p^{\mathrm{ord}}(v_0,\cdots,v_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_p).$$

(1) 证明: $\partial_p^{\mathrm{ord}} \circ \partial_{p+1}^{\mathrm{ord}} = 0$.

(2) 为 K 的顶点选取一个偏序, 使其诱导 K 的每个单形的顶点的全序. 定义

$$\phi: C_p(K;R) \to C_p^{\mathrm{ord}}(K;R), \quad [v_0,\cdots,v_p] \mapsto (v_0,\cdots,v_p),$$

这里 $v_0 < v_1 < \cdots < v_p$ 是对 K 中某个单形取定的顺序. 再定义

$$\psi : C_p^{\mathrm{ord}}(K;R) \to C_p(K;R), \quad (w_0,\cdots,w_p) \mapsto \begin{cases} [w_0,\cdots,w_p], & \text{若 } w_i \text{ 两两不同}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明: ϕ 与 ψ 是保持增广映射的链映射, 且 $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{C_p(K;R)}$.

(3) 证明: 存在

$$D_p : C_p^{\mathrm{ord}}(K;R) \to C_{p+1}^{\mathrm{ord}}(K;R)$$

使得

$$\phi \circ \psi - \mathrm{id}_{C_p^{\mathrm{ord}}(K;R)} = \partial_{p+1}^{\mathrm{ord}} \circ D_p + D_{p-1} \circ \partial_p^{\mathrm{ord}}.$$

证明 (1) 我们有

$$\begin{aligned}
&\partial_p^{\mathrm{ord}} \circ \partial_{p+1}^{\mathrm{ord}}((v_0,\cdots,v_p)) \\
=&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \partial_p^{\mathrm{ord}}((v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_p)) \\
=&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \left(\sum_{j<i}(-1)^j(x_0,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_p) + \sum_{j>i}(-1)^{j+1}(x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_p)\right) \\
=&\sum_{i=0}^{p}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}(x_0,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_p) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}(x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_p) \\
=&\sum_{i=1}^{p}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}(x_0,\cdots,\widehat{x_j},\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_p) - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_p) \\
=&0.
\end{aligned}$$

(2) 由

$$\begin{aligned}
\phi \circ \partial_p([v_0,\cdots,v_p]) &= \phi\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_p]\right) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_p) \\
&= \partial_p^{\mathrm{ord}}(v_0,\cdots,v_p) = \partial_p^{\mathrm{ord}} \circ \phi([v_0,\cdots,v_p])
\end{aligned}$$

及

$$\varphi \circ \phi\left(\sum_i a_i[v_i]\right) = \varphi\left(\sum_i a_i(v_i)\right) = \sum_i a_i = \varphi\left(\sum_i a_i[v_i]\right)$$

知 ϕ 是保持增广映射的链映射. 当 $w_0,\cdots,w_p$ 两两不同时,

$$\begin{aligned}
\psi \circ \partial_p^{\mathrm{ord}}((w_0,\cdots,w_p)) &= \psi\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(w_0,\cdots,\widehat{w_i},\cdots,w_p)\right) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[w_0,\cdots,\widehat{w_i},\cdots,w_p] \\
&= \partial_p[w_0,\cdots,w_p] = \partial_p \circ \psi((w_0,\cdots,w_p)),
\end{aligned}$$

而当 $w_0,\cdots,w_p$ 中有相同元素 (不妨设 $w_0 = w_1$) 时,

$$\partial_p^{\mathrm{ord}}((w_0,\cdots,w_p)) = (w_1,w_2,\cdots,w_p) - (w_0,w_2,\cdots,w_p) + \sum_{i=2}^{p}(-1)^i(w_0,\cdots,\widehat{w_i},\cdots,w_p)$$

$$= \sum_{i=2}^{p} (-1)^i (w_0, \cdots, \widehat{w_i}, \cdots, w_p),$$

求和式中每项均有重复元素 ($w_0 = w_1$), 因此

$$\psi \circ \partial_p^{\text{ord}}((w_0, \cdots, w_p)) = 0 = \partial_p(0) = \partial_p \circ \psi((w_0, \cdots, w_p)).$$

再结合

$$\varphi \circ \psi\left(\sum_i a_i(w_i)\right) = \varphi\left(\sum_i a_i[w_i]\right) = \sum_i a_i = \varphi\left(\sum_i a_i(w_i)\right)$$

即知 ψ 是保持增广映射的链映射. 最后, 由

$$\psi \circ \phi([v_0, \cdots, v_p]) = \psi((v_0, \cdots, v_p)) = [v_0, \cdots, v_p]$$

知 $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{C_p(K;R)}$.

(3) 先证明锥复形 $w * K$ 在有序同调中是零调的:

引理 $\widetilde{H}_p^{\text{ord}}(w * K; R) = 0, \forall p \geqslant 0.$

证明 定义映射

$$T : C_p^{\text{ord}}(w * K; R) \to C_{p+1}^{\text{ord}}(w * K; R), \quad (w_0, \cdots, w_p) \mapsto (w, w_0, \cdots, w_p).$$

对任意 $c_p \coloneqq \sum\limits_i a_i\big(w_{i_0}, \cdots, w_{i_p}\big) \in C_p^{\text{ord}}(w * K; R)$, 当 $p = 0$ 时,

$$\partial_1^{\text{ord}} \circ T(c_0) = \partial_1^{\text{ord}}\left(\sum_i a_i(w, w_{i_0})\right) = \sum_i a_i(w_{i_0}) - \sum_i a_i(w) = c_0 - \varphi(c_0)(w),$$

当 $p > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\partial_{p+1}^{\text{ord}} \circ T(c_p) &= \partial_{p+1}^{\text{ord}}\left(\sum_i a_i\big(w, w_{i_0}, \cdots, w_{i_p}\big)\right) \\
&= \sum_i a_i\left(\big(w_{i_0}, \cdots, w_{i_p}\big) - \sum_{j=0}^{p}\big(w, w_{i_0}, \cdots, \widehat{w_{i_j}}, \cdots, w_{i_p}\big)\right) \\
&= c_p - T \circ \partial_p^{\text{ord}}(c_p).
\end{aligned}$$

由此可见, 若 $c_p \in \ker \partial_p^{\text{ord}}$ ($p > 0$), 则

$$c_p = \partial_{p+1}^{\text{ord}} \circ T(c_p) \in \operatorname{im} \partial_{p+1}^{\text{ord}}.$$

若 $c_0 \in \ker \varphi$, 则

$$c_0 = \partial_1^{\text{ord}} \circ T(c_0) \in \operatorname{im} \partial_1^{\text{ord}}.$$

故 $\ker \partial_p^{\text{ord}} = \operatorname{im} \partial_{p+1}^{\text{ord}}$ ($\forall p > 0$) 且 $\ker \varphi = \operatorname{im} \partial_1^{\text{ord}}$, 从而 $\widetilde{H}_p^{\text{ord}}(w * K; R) = 0, \forall p \geqslant 0$.

下面通过对 p 归纳证明原问题. 当 $p = 0$ 时, 对 $\sigma = (v) \in C_0^{\text{ord}}(K; R)$, 令 $D_0(v) = (v, v)$, 则

$$\partial_1^{\text{ord}} \circ D_0((v)) = \partial_1^{\text{ord}}((v, v)) = 0 = \phi \circ \psi((v)) - \mathrm{id}_{C_0^{\text{ord}}(K;R)}((v)),$$

即 D_0 满足 $p=0$ 时的构造. 下面假设已对每个 $0\leqslant i\leqslant p-1$ ($p\geqslant 1$) 构造了一系列同态

$$D_i: C_i^{\mathrm{ord}}(K;R)\to C_{i+1}^{\mathrm{ord}}(K;R)$$

使得

① $\phi\circ\psi-\mathrm{id}_{C_i^{\mathrm{ord}}(K;R)}=\partial_{i+1}^{\mathrm{ord}}\circ D_i+D_{i-1}\circ\partial_i^{\mathrm{ord}}$.

② $D_i(\sigma)$ 是 σ 的承载复形上的链.

则对任意有序 p-单形 τ, 由 (2) ϕ 与 ψ 是链映射, (1) $\partial_{p-1}^{\mathrm{ord}}\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}=0$, 以及归纳假设, 有

$$\begin{aligned}
&\partial_p^{\mathrm{ord}}\Big(\phi\circ\psi(\tau)-\mathrm{id}_{C_p^{\mathrm{ord}}(K;R)}(\tau)-D_{p-1}\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)\Big)\\
=&\phi\circ\psi\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)-\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)-\partial_p^{\mathrm{ord}}\circ D_{p-1}\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)\\
=&\Big(\phi\circ\psi-\mathrm{id}_{C_{p-1}^{\mathrm{ord}}(K;R)}\Big)\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)-\Big(\phi\circ\psi-\mathrm{id}_{C_{p-1}^{\mathrm{ord}}(K;R)}-D_{p-2}\circ\partial_{p-1}^{\mathrm{ord}}\Big)\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)\\
=&\Big(\phi\circ\psi-\mathrm{id}_{C_{p-1}^{\mathrm{ord}}(K;R)}\Big)\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)-\Big(\phi\circ\psi-\mathrm{id}_{C_{p-1}^{\mathrm{ord}}(K;R)}\Big)\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)\\
=&0.
\end{aligned}$$

由于 $\phi\circ\psi(\tau)-\mathrm{id}_{C_p^{\mathrm{ord}}(K;R)}(\tau)-D_{p-1}\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)$ 是 τ 的承载复形上的链, 而承载复形是锥复形, 由引理, 存在 τ 的承载复形上的链 c, 使得

$$\phi\circ\psi(\tau)-\mathrm{id}_{C_p^{\mathrm{ord}}(K;R)}(\tau)-D_{p-1}\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau)=\partial_{p+1}^{\mathrm{ord}}(c).$$

现定义 $D_p(\tau)=c$, 则有

$$\phi\circ\psi(\tau)-\mathrm{id}_{C_p^{\mathrm{ord}}(K;R)}(\tau)=\partial_{p+1}^{\mathrm{ord}}\circ D_p(\tau)+D_{p-1}\circ\partial_p^{\mathrm{ord}}(\tau),$$

即结论对 p 亦成立. 由归纳原理, 结论得证. □

习题 13 设 K,K' 为单纯复形, K' 为 K 的重分. 证明: $|K'|$ 和 $|K|$ 作为拓扑空间相同.

证明 (1) 任取 $|K|$ 中闭集 A, 由于 K' 为 K 的重分, 对任意 $\tau\in K'$, 均存在 $\sigma\in K$ 使得 $\sigma\supset\tau$, 从而

$$A\cap\tau=(A\cap\sigma)\cap\tau$$

为 τ 中闭集 (因 $A\cap\sigma$ 为 σ 中闭集). 因此 A 为 $|K'|$ 中闭集, 即 $|K'|$ 的拓扑比 $|K|$ 的拓扑细.

(2) 任取 $|K'|$ 中闭集 B, 对任意 $\sigma\in K$, 由于 K 的每个单形均为 K' 的有限个单形之并, 可设 $\sigma=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\tau_i$, 其中 $\tau_i\in K'$, 则

$$B\cap\sigma=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap\tau_i).$$

而每个 $B\cap\tau_i$ 均为 τ_i 中闭集, τ_i 又为 σ 中闭集, 因此 $B\cap\tau_i$ 为 σ 中闭集, 从而 $B\cap\sigma$ 为 σ 中闭集. 故 B 为 $|K|$ 中闭集, $|K|$ 的拓扑比 $|K'|$ 的拓扑细.

由 (1) 与 (2) 即知 $|K|$ 和 $|K'|$ 作为拓扑空间相同. □

习题 14 令 $|K|=|L|=[0,1]$, $K^{(0)}=\left\{0,\frac{1}{3},1\right\}$, $L^{(0)}=\left\{0,\frac{2}{3},1\right\}$. 定义映射 $f:|K|\to|L|, x\mapsto x^2$.

(1) 证明: $f:|\mathrm{sd}\,K|\to|L|$ 不存在单纯逼近.

(2) 构造 $f:\left|\mathrm{sd}^2 K\right| \to |L|$ 的单纯逼近.

解答 (1) $(\mathrm{sd}\, K)^{(0)} = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. 假设 f 存在单纯逼近 s, 则

$$\mathrm{star}(1, \mathrm{sd}\, K) = \left(\tfrac{2}{3}, 1\right], \quad f(\mathrm{star}(1, \mathrm{sd}\, K)) = \left(\tfrac{4}{9}, 1\right],$$

而

$$\mathrm{star}(s(1), L) = \mathrm{star}(1, L) = \left(\tfrac{2}{3}, 1\right] \not\supset \left(\tfrac{4}{9}, 1\right],$$

这与 s 是 f 的单纯逼近矛盾. 故 $f:|\mathrm{sd}\, K| \to |L|$ 不存在单纯逼近.

(2) $\left(\mathrm{sd}^2 K\right)^{(0)} = \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$. 先求出 L 中顶点对应的开星形:

$$\mathrm{star}(0, L) = \left[0, \tfrac{2}{3}\right), \quad \mathrm{star}\left(\tfrac{2}{3}, L\right) = (0, 1), \quad \mathrm{star}(1, L) = \left(\tfrac{2}{3}, 1\right].$$

再求出 $\mathrm{sd}^2 K$ 中顶点对应的开星形:

$$\begin{aligned}
\mathrm{star}\left(0, \mathrm{sd}^2 K\right) &= \left[0, \tfrac{1}{12}\right), \quad \mathrm{star}\left(\tfrac{1}{12}, \mathrm{sd}^2 K\right) = \left(0, \tfrac{1}{6}\right), \quad \mathrm{star}\left(\tfrac{1}{6}, \mathrm{sd}^2 K\right) = \left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{4}\right), \\
\mathrm{star}\left(\tfrac{1}{4}, \mathrm{sd}^2 K\right) &= \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}\right), \quad \mathrm{star}\left(\tfrac{1}{3}, \mathrm{sd}^2 K\right) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right), \quad \mathrm{star}\left(\tfrac{1}{2}, \mathrm{sd}^2 K\right) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \\
\mathrm{star}\left(\tfrac{2}{3}, \mathrm{sd}^2 K\right) &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6}\right), \quad \mathrm{star}\left(\tfrac{5}{6}, \mathrm{sd}^2 K\right) = \left(\tfrac{2}{3}, 1\right), \quad \mathrm{star}\left(1, \mathrm{sd}^2 K\right) = \left(\tfrac{5}{6}, 1\right].
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
f\left(\mathrm{star}\left(1, \mathrm{sd}^2 K\right)\right) &= \left(\tfrac{25}{36}, 1\right] \subset \mathrm{star}(1, L), \quad f\left(\mathrm{star}\left(\tfrac{5}{6}, \mathrm{sd}^2 K\right)\right) = \left(\tfrac{4}{9}, 1\right) \subset \mathrm{star}\left(\tfrac{2}{3}, L\right), \\
f\left(\mathrm{star}\left(\tfrac{2}{3}, \mathrm{sd}^2 K\right)\right) &= \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{25}{36}\right) \subset \mathrm{star}\left(\tfrac{2}{3}, L\right), \quad f\left(\mathrm{star}\left(\tfrac{1}{2}, \mathrm{sd}^2 K\right)\right) = \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{4}{9}\right) \subset \mathrm{star}(0, L),
\end{aligned}$$

故可令

$$s(1) = 1, \quad s\left(\tfrac{5}{6}\right) = \tfrac{2}{3}, \quad s\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3}, \quad s\left(\tfrac{1}{2}\right) = s\left(\tfrac{1}{3}\right) = s\left(\tfrac{1}{4}\right) = s\left(\tfrac{1}{6}\right) = s\left(\tfrac{1}{12}\right) = s(0) = 0.$$

这是 $f:\left|\mathrm{sd}^2 K\right| \to |L|$ 的单纯逼近. □

习题 15 设 K, K' 为单纯复形, K' 为 K 的重分, 则恒等映射 $\mathrm{id}:|K'| \to |K|$ 有一个单纯逼近 $s: K' \to K$. 设 $\tau \in K'$, $\sigma \in K$, 证明: 若 $\tau \subset \sigma$, 则 $s(\tau) \subset \sigma$.

证明 任取 τ 的顶点 v, 由于 $\tau \subset \sigma$, v 在 σ 或 σ 的某个面的内部, 因此 $s(v)$ 为 σ 的顶点, 进而 $s(\tau) \subset \sigma$.□

习题 16 完成代数重分定理证明的⑤: 存在 $\hat{d}_p : C_p(K'; R) \to C_{p+1}(K'; R)$ 使得 $\lambda \circ \mu - \mathrm{id} = \partial \circ \hat{d} + \hat{d} \circ \partial$.

证明 由于 μ 在 $C_0(K'; R)$ 上将 $[v]$ 映为 $\sigma_v \in K$ 的某个顶点, 因此

$$(\lambda \circ \mu - \mathrm{id})[v] = \sigma_{[v]} \text{ 的某个顶点 } - [v] =: \partial c_v.$$

故定义 $\hat{d}_0[v] = c_v \in C_1\left(K'(\sigma_{[v]}); R\right)$. 下面假设对所有的 $j \leqslant p-1$ $(p \geqslant 1)$ 均已定义

$$\hat{d}_j : C_j(K'; R) \to C_{j+1}(K'; R),$$

且对任意 j 单形 $\tau_1 \in K'$, 均有 $\hat{d}_j[\tau_1] \in C_{j+1}(K'(\sigma_{\tau_1}); R)$ 及

$$\lambda \circ \mu - \mathrm{id} = \partial \hat{d}_j + \hat{d}_{j-1}\partial.$$

对任意 p 单形 $\tau \in K'$, 设 $\tau \subset \sigma_\tau$, 由 ④, $\mu[\tau] \in C_p(K(\sigma_\tau); R)$, 进而 $\lambda \circ \mu[\tau] \in C_p(K'(\sigma_\tau); R)$. 由于

$$\partial\Big(\lambda \circ \mu - \mathrm{id} - \hat{d}_{p-1}\partial\Big)[\tau] = \Big(\lambda \circ \mu - \mathrm{id} - \partial \hat{d}_{p-1}\Big)(\partial[\tau]) = \hat{d}_{p-2}(\partial^2[\tau]) = 0,$$

由 $K'(\sigma)$ 零调这一假设, 存在 $c \in C_{p+1}(K'(\sigma_\tau); R)$, 使得

$$\Big(\lambda \circ \mu - \mathrm{id} - \hat{d}_{p-1}\partial\Big)[\tau] = \partial c.$$

由此定义 $\hat{d}_p[\tau] = c \in C_{p+1}(K'(\sigma_\tau); R)$, 则有

$$\lambda \circ \mu - \mathrm{id} = \partial \hat{d}_p + \hat{d}_{p-1}\partial.$$

由归纳原理, 结论得证. □

习题 17 设 K 是单纯复形, K' 和 K'' 是 K 的两个重分, 证明: 存在 K 的一个重分 K''', 它是 K' 和 K'' 的共同加细.

证明 考虑到重分的有限性 (即重分是在 K 的每个单形中增加有限多个点), 总存在 K''' 同时是 K' 和 K'' 的重分. □

习题 18 证明连续映射的函子性质: 设 K, L, M 是单纯复形, 则

(1) 恒等映射 $\mathrm{id} : |K| \to |K|$ 诱导恒等同态 $\mathrm{id}_* : H_p(K; R) \to H_p(K; R)$.

(2) 若 $f : |K| \to |L|$ 和 $g : |L| \to |M|$ 为连续映射, 则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

同样结论对约化同调也成立.

证明 (1) 取 K 的重分 K', 使得 $s : K' \to K$ 为 $\mathrm{id} : |K| \to |K|$ 的单纯逼近, 则

$$\mathrm{id}_* = s_* \circ (s_*)^{-1} = \mathrm{id}_{H_p(K;R)}.$$

(2) 取 L 的重分 L', 使得 $\hat{g} : L' \to M$ 为 $g : |L| \to |M|$ 的单纯逼近. 再取 K 的重分 K', 使得 $\hat{f} : K' \to L'$ 为 $f : |K| \to |L|$ 的单纯逼近.

$$|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$$

$$\begin{tikzcd}
K & L & M \\
 & L' \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "\hat{g}"'] & \\
K' \arrow[uu, "s"] \arrow[ur, "\hat{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

分别选取 $s : K' \to K$ 和 $t : L' \to L$ 作为对 $\mathrm{id}_{|K|}$ 和 $\mathrm{id}_{|L|}$ 的单纯逼近. 由习题 10 结论, $t \circ \hat{f} : K' \to L$ 为 $f : |K| \to |L|$ 的单纯逼近, $\hat{g} \circ \hat{f} : K' \to M$ 为 $g \circ f : |K| \to |M|$ 的单纯逼近. 于是

$$(g \circ f)_* = \Big(\hat{g} \circ \hat{f}\Big)_* \circ (s_*)^{-1} = \hat{g}_* \circ \hat{f}_* \circ (s_*)^{-1}$$

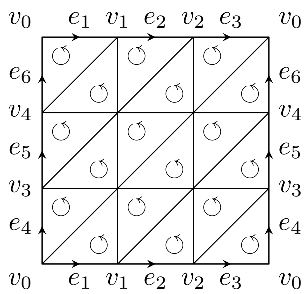
$$
\begin{aligned}
&= \hat{g}_* \circ (t_*)^{-1} \circ t_* \circ \hat{f}_* \circ (s_*)^{-1} \\
&= g_* \circ \left(t \circ \hat{f}\right)_* \circ (s_*)^{-1} = g_* \circ f_*.
\end{aligned}
$$
□

习题 19 设 K 是单纯复形, A 是 $|K|$ 的紧子集, 证明: A 的承载复形有限, 即存在 K 的某个有限子复形 K_0 使得 $A \subset |K_0|$.

证明 设 $X \subset \bigsqcup_{\sigma \in K} \sigma^\circ$. 用反证法, 假设 A 不被 K 的任何有限子复形包含, 则存在无限点列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, 其中 $x_i \in {\sigma_i}^\circ \cap A$. 对任意 $\sigma \in K$, 由于 σ 至多包含有限个 ${\sigma_i}^\circ$, $\{x_i\}_{i=1}^\infty \cap \sigma$ 为一有限集, 因此 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \cap \sigma$ 是 σ 中闭集, 由多面体拓扑的定义, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 为紧集 A 中的闭集, 从而是紧集. 另一方面, 同前面的证明, 对任意 $j \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i=1}^\infty \setminus \{x_j\}$ 是 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 中闭集, 从而 $\{x_j\}$ 是 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 中开集, 因此 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 是一离散空间, 而它又是紧的, 因此只能为有限集, 这与我们的假设矛盾. 故结论得证. □

习题 20 计算 $\mathbb{T}^2$ 的同调.

解答 $\mathbb{T}^2$ 的一个单纯剖分 K 见下图.



(1) 由 K 为连通复形知 $H_0(K;R) = R$.

(2) 设 $\partial_2\left(\sum_{\dim f=2} c_f f\right) = 0$. 由于 $\mathbb{T}^2$ 是可定向的, 对于任意两个 2 维定向单形, 它们在公共棱诱导方向恰好相反, 因此这两个 2 维单形在此 2 维闭链上的系数相同, 从而 $c_f \equiv a$ (常数). 而 $\partial_2\left(\sum_{\dim f=2} f\right) = 0$, 因此 $\ker \partial_2 = R \sum_{\dim f=2} f$, 从而 $H_2(K;R) = R$.

(3) 设 $\partial_1 c_1 = 0$. 采用“挤到边上去”的方法可知, 存在 $c_2 \in C_2(K;R)$ 使得

$$
c_1 = \partial_2 c_2 + \sum_{\text{边界棱 } e} a_e e \coloneqq \partial_2 c_2 + \sum_{i=1}^{6} a_i e_i.
$$

两边作用 ∂_1 即得

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{6} a_i \partial e_i \\
&= a_1(v_1 - v_0) + a_2(v_2 - v_1) + a_3(v_0 - v_2) + a_4(v_3 - v_0) + a_5(v_4 - v_3) + a_6(v_0 - v_4) \\
&= (a_3 - a_1 - a_4 + a_6)v_0 + (a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + (a_4 - a_5)v_3 + (a_5 - a_6)v_4.
\end{aligned}
$$

因此

$$
a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6.
$$

故对任意 $c_1 \in \ker\partial_1$, 存在 $c_2 \in C_2(K;R)$ 与 $\alpha,\beta \in R$, 使得

$$c_1 = \partial_2 c_2 + \alpha(e_1+e_2+e_3) + \beta(e_4+e_5+e_6)$$

下证 c_1 的这种表示中 α,β 是唯一确定的: 若还有另一表示

$$c_1 = \partial_2 c_2' + \alpha'(e_1+e_2+e_3) + \beta'(e_4+e_5+e_6),$$

则

$$0 = \partial_2(c_2-c_2') + (\alpha-\alpha')(e_1+e_2+e_3) + (\beta-\beta')(e_4+e_5+e_6).$$

这要求 $\partial(c_2-c_2')$ 在任意内部棱上的系数为 0, 从而存在 $b \in R$ 使得

$$c_2 - c_2' = b\sum_{\dim f=2} f,$$

这意味着 $\partial(c_2-c_2') = 0$, 因此

$$(\alpha-\alpha')(e_1+e_2+e_3) + (\beta-\beta')(e_4+e_5+e_6) = 0,$$

即 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, 故 c_1 的上述表示唯一. 于是可定义映射

$$\Phi : \ker\partial_1 \to R\oplus R, \quad c_1 \mapsto (\alpha,\beta).$$

由于 $\partial_1(e_1+e_2+e_3) = 0 = \partial_1(e_4+e_5+e_6)$, 因此对任意 $(\alpha,\beta)\in R\oplus R$, 均有 $\alpha(e_1+e_2+e_3)+\beta(e_4+e_5+e_6) \in \ker\partial_1$, 即 Φ 是满射. 又

$$\ker\Phi = \{c_1 = \partial_2 c_2 : c_2 \in C_2(K;R)\} = \operatorname{im}\partial_2,$$

因此

$$H_1(K;R) = \ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2 = \ker\partial_1/\ker\Phi \simeq \operatorname{im}\Phi = R\oplus R.$$

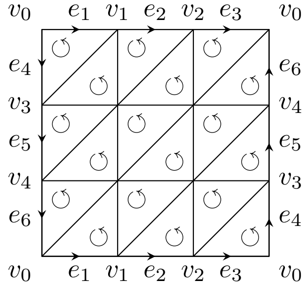
综上所述, $\mathbb{T}^2$ 的同调为

$$H_p(K;R) = \begin{cases} R, & p = 0,2, \\ R\oplus R, & p=1, \\ 0, & p>2. \end{cases}$$

□

习题 21 计算 Klein 瓶的同调.

解答 Klein 瓶的一个单纯剖分 K 见下图.



(1) 由 K 为连通复形知 $H_0(K;R)=R$.

(2) 设 $\partial_2\left(\sum\limits_{\dim f=2} c_f f\right)=0$. 由于图中任意两个 2 维定向单形在公共棱诱导方向恰好相反, 因此这两个 2 维单形在此 2 维闭链上的系数相同, 从而 $c_f\equiv a$ (常数). 于是

$$0=a\partial_2\left(\sum_{\dim f=2} f\right)=2a(e_4+e_5+e_6).$$

故 $2a=0$, $\ker\partial_2=\left\{a\sum\limits_{\dim f=2} f:2a=0\right\}$, 从而 $H_2(K;R)=\{a\in R:2a=0\}$.

(3) 设 $\partial_1 c_1=0$. 采用“挤到边上去”的方法可知, 存在 $c_2\in C_2(K;R)$ 使得

$$\sum_{\dim e=1} c_e e=\partial_2 c_2+\sum_{\text{边界棱 } e} a_e e\coloneqq\partial_2 c_2+\sum_{i=1}^{6} a_i e_i.$$

两边作用 ∂_1 即得

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i=1}^{6} a_i\partial e_i\\&=a_1(v_1-v_0)+a_2(v_2-v_1)+a_3(v_0-v_2)+a_4(v_3-v_0)+a_5(v_4-v_3)+a_6(v_0-v_4)\\&=(a_3-a_1-a_4+a_6)v_0+(a_1-a_2)v_1+(a_2-a_3)v_2+(a_4-a_5)v_3+(a_5-a_6)v_4.\end{aligned}$$

因此

$$a_1=a_2=a_3,\quad a_4=a_5=a_6.$$

故对任意 $c_1\in\ker\partial_1$, 存在 $c_2\in C_2(K;R)$ 与 $\alpha,\beta\in R$, 使得

$$c_1=\partial_2 c_2+\alpha(e_1+e_2+e_3)+\beta(e_4+e_5+e_6)$$

下证 c_1 的这种表示中 α,β 是唯一确定的: 若还有另一表示

$$c_1=\partial_2 c_2'+\alpha'(e_1+e_2+e_3)+\beta'(e_4+e_5+e_6),$$

则

$$0=\partial_2(c_2-c_2')+(\alpha-\alpha')(e_1+e_2+e_3)+(\beta-\beta')(e_4+e_5+e_6).$$

这要求 $\partial(c_2-c_2')$ 在任意内部棱上的系数为 0, 从而存在 $b\in R$ 使得

$$c_2-c_2'=b\sum_{\dim f=2} f,$$

这意味着

$$\partial_2(c_2-c_2')=b\sum_{\dim f=2}\partial f=2b(e_4+e_5+e_6).$$

因此

$$(\alpha-\alpha')(e_1+e_2+e_3)+(\beta-\beta')(e_4+e_5+e_6)=-2b(e_4+e_5+e_6),$$

即 $\alpha = \alpha'$, $\beta' = \beta + 2b$. 注意到在模 $2R$ 意义下 β 的同余类 $[\beta]$ 是唯一确定的, 于是可定义映射

$$\Phi : \ker \partial_1 \to R \oplus R/2R, \quad c \mapsto (\alpha, [\beta]).$$

由于 $\partial_1(e_1+e_2+e_3) = 0 = \partial_1(e_4+e_5+e_6)$, 因此对任意 $\alpha, \beta \in R$, $\alpha(e_1+e_2+e_3)+\beta(e_4+e_5+e_6) \in \ker \partial_1$, 即 Φ 是满射. 又

$$\ker \Phi = \{c_1 = \partial_2 c_2 : c_2 \in C_2(K;R)\} = \operatorname{im} \partial_2,$$

因此

$$H_1(K;R) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 = \ker \partial_1 / \ker \Phi \simeq \operatorname{im} \Phi = R \oplus R/2R.$$

综上所述, Klein 瓶的同调为

$$H_p(K;R) = \begin{cases} R, & p = 0, \\ R \oplus R/2R, & p = 1, \\ \{a \in R : 2a = 0\}, & p = 2, \\ 0, & p > 2. \end{cases}$$

□

习题 22 设 K 为有限单纯复形. 若 $\phi : C_p(K;\mathbb{R}) \to C_p(K;\mathbb{R})$ 为链映射, 它诱导 $\phi_* : H_p(K;\mathbb{R}) \to H_p(K;\mathbb{R})$, 则

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}^{C_p(K;\mathbb{R})}[\phi] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}^{H_p(K;\mathbb{R})}[\phi_*].$$

证明 我们有直和分解

$$C_p \simeq \operatorname{im} \partial_{p+1} \oplus \ker \partial_p / \operatorname{im} \partial_{p+1} \oplus C_p / \ker \partial_p. \tag{22–1}$$

取 H_p 的一组基 $h_p = \left(h_p^1, \cdots, h_p^{k_p}\right)$, 其中 $k_p = \dim H_p$. 记 $Z_p = \ker \partial_p$, $B_p = \operatorname{im} \partial_{p+1}$, 则 $Z_p/B_p \simeq H_p$. 选取基 h_p 在 Z_p 中的代表元 $z_p = \left(z_p^1, \cdots, z_p^{k_p}\right)$. 取 B_p 的一组基 $b_p = \left(b_p^1, \cdots, b_p^{n_p}\right)$, 其中 $n_p = \dim B_p$. 对 ∂_p 运用同态基本定理可得 $C_p/Z_p \simeq B_{p-1}$. 记 C_p 中与 b_{p-1} 相对应的基为 $\tilde{b}_{p-1} = \left(\tilde{b}_{p-1}^1, \cdots, \tilde{b}_{p-1}^{n_{p-1}}\right)$, 它满足 $\partial_p\left(\tilde{b}_{p-1}^i\right) = b_{p-1}^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n_{p-1})$. 由 (22–1), $\left(b_p, z_p, \tilde{b}_{p-1}\right)$ 构成 C_p 的一组基. 设

$$\phi_*(h_p) = (h_p)(\phi_{H_p}),$$

其中 ϕ_{H_p} 为 k_p 阶方阵. 由 z_p 的构造可知, $\phi(z_p) - h_p \phi_{H_p} \in B_p$, 因此

$$\phi(z_p) = \begin{pmatrix} b_p & z_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \phi_{H_p} \end{pmatrix} \tag{22–2}$$

设

$$\phi(b_p) = (b_p)(\phi_{B_p}), \tag{22–3}$$

其中 ϕ_{B_p} 为 n_p 阶方阵. 由 ϕ 为链映射可得

$$\partial \phi\left(\tilde{b}_{p-1}\right) = \phi(\partial) = \phi(b_{p-1}) = (b_{p-1})(\phi_{B_{p-1}}) = \partial\left(\tilde{b}_{p-1}\right)(\phi_{B_{p-1}}).$$

因此

$$\phi\left(\tilde{b}_{p-1}\right) - \left(\tilde{b}_{p-1}\right)\left(\phi_{B_{p-1}}\right) \in \ker \partial_p = Z_p,$$

进而

$$\phi\left(\tilde{b}_{p-1}\right) = \begin{pmatrix} b_p & z_p & \tilde{b}_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ \phi_{B_{p-1}} \end{pmatrix}. \tag{22–4}$$

结合 (22–2) (22–3) (22–4) 可得

$$\phi\begin{pmatrix} b_p & z_p & \tilde{b}_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_p & z_p & \tilde{b}_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{B_p} & * & * \\ 0 & \phi_{H_p} & * \\ 0 & 0 & \phi_{B_{p-1}} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}^{C_p(K;\mathbb{R})}[\phi] &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\operatorname{Tr}[\phi_{B_p}] + \operatorname{Tr}[\phi_{H_p}] + \operatorname{Tr}[\phi_{B_{p-1}}]\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}[\phi_{H_p}] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}^{H_p(K;\mathbb{R})}[\phi_*]. \end{aligned}$$

□

习题 23 证明: 加法群同态序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\times 2]{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

$$1 \pmod 2 \longmapsto 2 \pmod 4$$

$$n \pmod 4 \longmapsto n \pmod 2$$

正合但不可裂.

证明 由于 $g \circ f(n) = 2n \pmod 2 = 0$, f 为单射, g 为满射, 因此序列正合. 若序列可裂, 则存在群同态 $p : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$, 使得 $\mathbb{Z}_4 \simeq f(\mathbb{Z}_2) \oplus p(\mathbb{Z}_2)$, 但后者无 4 阶元, 矛盾. 故序列不可裂. □

习题 24 **(Steenrod 五引理)** 设已给出由 Abel 群和同态构成的交换图表:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\phi_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"] & B_4 \arrow[r, "\psi_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

其中水平序列是正合的. 证明:

(1) 若 f_1 满, f_2 单, f_4 单, 则 f_3 单.

(2) 若 f_5 单, f_2 满, f_4 满, 则 f_3 满.

特别地, 若 f_1, f_2, f_4, f_5 是同构, 则 f_3 也是同构.

证明 (1) 设 $a_3 \in \ker f_3$, 则 $f_4(\phi_3(a_3)) = \psi_3(f_3(a_3)) = 0$. 由 f_4 单得 $\phi_3(a_3) = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d, equal] \\
a_1 \arrow[r, mapsto, "\phi_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[r, mapsto, "\phi_2"] \arrow[d, "f_2"] & a_3 \arrow[r, mapsto, "\phi_3"] \arrow[d, "f_3"] & \phi_3(a_3) \arrow[d, "f_4"] \\
b_1 \arrow[r, mapsto, "\psi_1"] & f_2(a_2) \arrow[r, mapsto, "\psi_2"] & f_3(a_3) \arrow[r, mapsto, "\psi_3"] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

由于 $a_3 \in \ker \phi_3 = \operatorname{im} \phi_2$, 存在 $a_2 \in A_2$ 使得 $a_3 = \phi_2(a_2)$. 于是 $0 = f_3(a_3) = f_3(\phi_2(a_2)) = \psi_2(f_2(a_2))$, 从而 $f_2(a_2) \in \ker \psi_2 = \operatorname{im} \psi_1$. 因此存在 $b_1 \in B_1$ 使得 $f_2(a_2) = \psi_1(b_1)$. 而 f_1 是满射, 存在 $a_1 \in A_1$ 使得 $b_1 = f_1(a_1)$. 由于 $f_2(\phi_1(a_1)) = \psi_1(f_1(a_1)) = \psi_1(b_1) = f_2(a_2)$, 而 f_2 是单射, 因此 $\phi_1(a_1) = a_2$, 进而 $a_3 = \phi_2(a_2) = \phi_2(\phi_1(a_1)) = 0$. 故 f_3 为单射.

(2) 任取 $b_3 \in B_3$, 由于 $\psi_3(b_3) \in B_4$, 而 f_4 满, 因此存在 $a_4 \in A_4$ 使得 $f_4(a_4) = \psi_3(b_3)$. 由于 $0 = \psi_4(\psi_3(b_3)) = \psi_4(f_4(a_4)) = f_5(\phi_4(a_4))$, 而 f_5 单, 因此 $\phi_4(a_4) = 0$. 由于 $a_4 \in \ker \phi_4 = \operatorname{im} \phi_3$, 存在 $a_3 \in A_3$ 使得 $a_4 = \phi_3(a_3)$. 由 $\psi_3(b_3) = f_4(a_4) = f_4(\phi_3(a_3)) = \psi_3(f_3(a_3))$ 可得 $b_3 - f_3(a_3) \in \ker \psi_3 = \operatorname{im} \psi_2$. 因此存在 $b_2 \in B_2$ 使得 $b_3 - f_3(a_3) = \psi_2(b_2)$. 而 f_2 满, 因此存在 $a_2 \in A_2$ 使得 $f_2(a_2) = b_2$. 于是 $b_3 - f_3(a_3) = \psi_2(b_2) = \psi_2(f_2(a_2)) = f_3(\phi_2(a_2))$, 即 $b_3 = f_3(a_3 + \phi_2(a_2)) \in \operatorname{im} f_3$. 故 f_3 为满射.

特别地, 若 f_1, f_2, f_4, f_5 是同构, 则 f_3 既单又满, 为同构. □

习题 25 设 K 为单纯复形, K_1 是 K 的子复形, 证明: $|K_1| \subset |K|$ 的子空间拓扑与 $|K_1|$ 本身的多面体拓扑一致.

证明 (1) 设 A 在 $|K_1|$ 本身的多面体拓扑下闭. 对任意 K 的单形 σ, 由于 $\sigma \cap |K_1|$ 是 σ 的属于 K_1 的面 s_i 的并, 而由假设, $A \cap s_i$ 在 s_i 中闭, 因此在 σ 中闭, 进而 $A \cap \sigma = A \cap \bigcup_i s_i = \bigcup_i (A \cap s_i)$ 是 σ 中闭集的有限并, 它是 σ 中闭集, 从而 A 在 $|K|$ 中闭, 即在 $|K_1| \subset |K|$ 的子空间拓扑下闭.

(2) 设 A 在 $|K_1| \subset |K|$ 的子空间拓扑下闭, 则存在 $|K|$ 中闭集 B 使得 $A = B \cap |K_1|$. 对任意 K_1 的单形 σ, $A \cap \sigma = (B \cap \sigma) \cap |K_1| = B \cap \sigma$ 是 σ 中闭集, 因此 A 在 $|K_1|$ 本身的多面体拓扑下闭. □

习题 26 设连续映射 $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ 无不动点, 直接证明 f 与对径映射 $\operatorname{anti} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$ 同伦.

证明 定义映射

$$F : \mathbb{S}^n \times [0,1] \mapsto \mathbb{S}^n, \quad (x,t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}.$$

这是良定的, 因为若 $(1-t)f(x) - tx = 0$, 则 $t \in (0,1)$, 从而 $f(x) = \frac{t}{1-t}x$, 由于 f 无不动点, $\frac{t}{1-t} = -1$, 无解. 由于 $F(x,0) = f(x)$ 且 $F(x,1) = -x$, 因此 F 给出 f 与 anti 的伦移, $f \simeq \operatorname{anti}$. □

习题 27 设 $(X, X_1), (Y, Y_1)$ 为可剖分空间偶, 满足 $(Y, Y_1) \subset (X, X_1)$, 且 (Y, Y_1) 是紧偶, 令 $i_X : (Y, Y_1) \to (X, X_1)$ 为包含映射. 证明: 若 $\alpha \in H_p(Y, Y_1; R)$, 且 $(i_X)_* \alpha = 0$, 则存在紧偶 (Z, Z_1) 及包含映射 $i_Z : (Y, Y_1) \to (Z, Z_1)$, 使得 $(i_Z)_* \alpha = 0$.

证明 设 (X, X_1) 是一个单纯复形偶 (K, K_1) 的可剖空间:

$$k : (X, X_1) \to (|K|, |K_1|).$$

由于 Y 紧, 它包含在 K 的一个有限子复形 L 的可剖空间中, 即 $Y \subset k^{-1}(|L|)$. 于是 Y_1 包含在 $K_1 \cap L =: L_1$ 的可剖空间中. 记包含映射

$$i_K : (L, L_1) \to (K, K_1).$$

设 $\alpha \in H_p(L, L_1; R)$ 满足 $(i_K)_*\alpha = 0$. 令 $c \in C_p(L; R)$ 是代表 α 的一个链. 由于 $0 = (i_K)_*\alpha = [(i_K)_\#(c)]_{K,K_1}$, 存在 K 的一个链 $d \in C_{p+1}(K; R)$, 使得 $(i_K)_\#(c) - \partial^K d$ 被 K_1 承载:

$$(i_K)_\#(c) - \partial^K d \in C_p(K_1; R).$$

选取 K_1 的承载 $(i_K)_\#(c) - \partial^k d$ 的一个有限子复形 $\widehat{K_1} \subset K_1$. 令 $M = L \cup \widehat{K} \cup \widehat{K_1}$ 与 $M_1 = L_1 \cup \widehat{K_1}$, 则由包含映射

$$i_M : (L, L_1) \to (M, M_1)$$

诱导的同态将 α 映为 0:

$$(i_M)_*\alpha = [(i_M)_\#(c)]_{M,M_1} = \left[(i_M)_\#(c) - \partial^M(d)\right]_{M,M_1} + \left[\partial^M(d)\right]_{M,M_1} = 0. \qquad \square$$

习题 28 奇异同调中 $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

证明 对任意 $T \in S_p(X; R)$, 有

$$\begin{aligned}
&\partial_{p-1} \circ \partial_p(T) \\
=&\partial_{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p)\right) \\
=&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \partial_{p-1} \circ T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p) \\
=&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \left(\sum_{j<i}(-1)^j T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_j}, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p) + \sum_{j>i}(-1)^{j-1} T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, \widehat{e_j}, \cdots, e_p)\right) \\
=&\sum_{i=0}^{p}\sum_{j<i}(-1)^{i+j} T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_j}, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1} T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, \widehat{e_j}, \cdots, e_p) \\
=&\sum_{i=1}^{p}\sum_{j<i}(-1)^{i+j} T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_j}, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p) - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i<j}(-1)^{i+j} T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, \widehat{e_j}, \cdots, e_p) \\
=&0.
\end{aligned}$$

$\square$

习题 29 奇异同调中 $f_\# \circ \partial^X = \partial^Y \circ f_\#$, 其中 $f : X \to Y$ 是连续映射.

证明 对任意 $T \in S_p(X; R)$, 有

$$\begin{aligned}
\partial^Y \circ f_\#(T) &= \sum_{i=0}^{p}(f \circ T) \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p) \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i f \circ (T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p)) \\
&= f\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i T \circ \ell(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_p)\right)
\end{aligned}$$

$$= f\big(\partial^X(T)\big) = f_\# \circ \partial^X(T).$$

□

习题 30 定义

$$\phi_p(\ell(v_0,\cdots,v_p)) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \ell(j_0(v_0),\cdots,j_0(v_i),j_1(v_i),\cdots,j_1(v_p)) \in S_{p+1}(\Delta_p\times I),$$

其中 $j_0,j_1:\Delta_p\to\Delta_p\times I$, $j_0(y)=(y,0)$, $j_1(y)=(y,1)$. 验证:

$$(\partial\circ\phi_p+\phi_{p-1}\circ\partial)\ell(e_0,\cdots,e_p) = \ell(j_1(e_0),\cdots,j_1(e_p)) - \ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_p)).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}
\phi_{p-1}(\partial\ell(e_0,\cdots,e_p)) =& \phi_{p-1}\left(\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\ell(e_0,\cdots,\widehat{e_j},\cdots,e_p)\right)\\
=& \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\phi_{p-1}(\ell(e_0,\cdots,\widehat{e_j},\cdots,e_p))\\
=& \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,\widehat{j_1(e_j)},\cdots,j_1(e_p)\Big)\right.\\
&\left.+\sum_{i=j}^{p-1}(-1)^i\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,\widehat{j_0(e_j)},\cdots,j_0(e_{i+1}),j_1(e_{i+1}),\cdots,j_1(e_p)\Big)\right)\\
=& \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{i+j}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,\widehat{j_1(e_j)},\cdots,j_1(e_p)\Big)\\
&+\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,\widehat{j_0(e_j)},\cdots,j_0(e_{i+1}),j_1(e_{i+1}),\cdots,j_1(e_p)\Big)\\
=& \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{i+j}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,\widehat{j_1(e_j)},\cdots,j_1(e_p)\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j-1}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,\widehat{j_0(e_j)},\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p)\Big)\\
=& \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{i+j}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,\widehat{j_1(e_j)},\cdots,j_1(e_p)\Big)\\
&+\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j-1}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,\widehat{j_0(e_j)},\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p)\Big),
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\partial(\phi_p(\ell(e_0,\cdots,e_0))) =& \partial\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p))\right)\\
=& \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\partial(\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,\widehat{j_0(e_j)},\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p)\Big)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+i}\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_{i-1}),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p))\\
&\quad+\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+i+1}\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_{i+1}),\cdots,j_1(e_p))\\
&\quad+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{j+1}\ell\Big(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_i),\cdots,\widehat{j_1(e_j)},\cdots,j_1(e_p)\Big).
\end{aligned}
$$

两式相加即得

$$
\begin{aligned}
(\partial\circ\phi_p+\phi_{p-1}\circ\partial)\ell(e_0,\cdots,e_p)=&\sum_{i=0}^{p}\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_{i-1}),j_1(e_i),\cdots,j_1(e_p))\\
&-\sum_{i=0}^{p}\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_i),j_1(e_{i+1}),\cdots,j_1(e_p))\\
=&\ell(j_1(e_0),\cdots,j_1(e_p))-\ell(j_0(e_0),\cdots,j_0(e_p)).
\end{aligned}
$$
□

习题 31 考虑包含映射 $j:\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1}\big)\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, 其中 $\mathbb{D}^n$ 为 n 维单位闭球, $\mathbb{S}^{n-1}$ 为 $n-1$ 维单位球面. 易知 $j:\mathbb{D}^n\to\mathbb{R}^n$ 与 $j|_{\mathbb{S}^{n-1}}:\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 均为同伦等价. 然而 j 作为复形偶的映射没有同伦逆.

证明 由于 $\mathbb{D}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的形变收缩核, $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的形变收缩核, 因此映射 j_* 是相对同调中的同构. 假设存在 j 的同伦逆 $g:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1}\big)$. 由于 0 是 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的极限点, 因此 $g(0)\in\mathbb{S}^{n-1}$, 从而映射

$$g\circ j:\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1}\big)\to\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1}\big)$$

将 $\mathbb{D}^n$ 映入 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中. 于是 $g\circ j$ 在同调中诱导平凡同态. 而根据假设, $g\circ j$ 同伦于恒等映射, 它诱导 $H_n\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)$ 上的恒等同态. 这说明 $H_n\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)$ 是平凡群, 但由链复形短正合列

$$0\to\Big(S\big(\mathbb{S}^{n-1}\big),\partial^{\mathbb{S}^{n-1}}\Big)\to\Big(S(\mathbb{D}^n),\partial^{\mathbb{D}^n}\Big)\to\Big(S\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big),\partial^{\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1}}\Big)\to 0$$

可得长正合列

$$
\begin{tikzcd}
\cdots\widetilde{H}_q\big(\mathbb{S}^{n-1};R\big) \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n;R)}_{=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_q\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big) \arrow[dll, dashed] \\
\widetilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{S}^{n-1};R\big) \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n;R)}_{=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)\cdots
\end{tikzcd}
$$

由此及习题 33 可得

$$H_n\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)\simeq\widetilde{H}_n\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)\simeq\widetilde{H}_{n-1}\big(\mathbb{S}^{n-1};R\big)=R,$$

矛盾. □

习题 32 证明: $\mathrm{O}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的强形变收缩核.

证明 对任意 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 作 Gram-Schmidt 标准正交化:

$$\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}({\gamma_i}^{\mathsf{T}}\alpha_k)\gamma_i=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{{\beta_i}^{\mathsf{T}}\alpha_k}{{\beta_i}^{\mathsf{T}}\beta_i}\beta_i,\quad \gamma_k=\frac{1}{\|\beta_k\|}\beta_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

A 的可逆性保证了 $\beta_k\neq 0$. 由此可得 QR 分解

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}}_{\text{记作 } Q_A\in\mathrm{O}(n)}\underbrace{\begin{pmatrix}\|\beta_1\| & {\gamma_1}^{\mathsf{T}}\alpha_2 & \cdots {\gamma_1}^{\mathsf{T}}\alpha_n & \\ & \|\beta_2\| & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & {\gamma_{n-1}}^{\mathsf{T}}\alpha_n \\ & & & \|\beta_n\|\end{pmatrix}}_{\text{记作 } R_A}.$$

令

$$F(A,t)=Q_A[(1-t)R_A+tI_n],$$

则 $F(A,0)=Q_AR_A=A$, $F(A,1)=Q_A\in\mathrm{O}(n)$, 且 $F(\cdot,t)_{\mathrm{O}(n)}=\mathrm{id}_{\mathrm{O}(n)}$, $\forall t\in[0,1]$. 故 $\mathrm{O}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的强形变收缩核. □

习题 33 计算 $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n;R)$.

解答 分别用 $\mathbb{S}^n_+$ 与 $\mathbb{S}^n_-$ 表示上下半球面 (含赤道), 则 $\mathbb{S}^n_+$ 与 $\mathbb{S}^n_-$ 均为 $\mathbb{S}^n$ 中闭集, 且 $\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{S}^n_-=\mathbb{S}^{n-1}$ 是它的一个 (带状) 开邻域的强形变收缩核, 因此 $\{\mathbb{S}^n_+,\mathbb{S}^n_-\}$ 是一个 M–V 偶, 从而有 Mayer–Vietoris 长正合列

$$\cdots\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{S}^n_-;R)\longrightarrow\underbrace{\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n_+;R)\oplus\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n_-;R)}_{=0}\longrightarrow\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n_+\cup\mathbb{S}^n_-;R)$$

$$\longrightarrow\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{S}^n_-;R)\longrightarrow\underbrace{\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^n_+;R)\oplus\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^n_-;R)}_{=0}\longrightarrow\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^n_+\cup\mathbb{S}^n_-;R)\cdots$$

由此可得 $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n;R)\simeq\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R)$. 因此

- ◇ 当 $q=n$ 时, $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n;R)\simeq\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^0;R)\simeq R$.
- ◇ 当 $q>n$ 时, $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n;R)\simeq\widetilde{H}_{q-n}(\mathbb{S}^0;R)\simeq 0$.
- ◇ 当 $q<n$ 时, $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n;R)\simeq\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^{n-q};R)=0$.

故

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n;R)=\begin{cases}R, & q=n;\\ 0, & q\neq n.\end{cases}$$

□

习题 34 计算 $H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)$.

解答 考虑包含映射 $j:\mathbb{D}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ 与收缩映射

$$r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{D}^n,\quad x\mapsto\begin{cases}x, & \|x\|\leqslant 1,\\ \frac{x}{\|x\|}, & \|x\|>1.\end{cases}$$

由 $r\circ j=\mathrm{id}_{\mathbb{D}^n}$ 及 $j\circ r\sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ 可知 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{D}^n$ 同伦等价, 且还有 $r|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\circ j|_{\mathbb{S}^n}=1$ 与 $j|_{\mathbb{D}^n-\{0\}}\circ r|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$, 因此 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)\simeq \widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R)$. 由正合性公理, 链复形短正合列

$$0\to\Big(S\big(\mathbb{D}^n\setminus\{0\},\partial^{\mathbb{D}^n\setminus\{0\}}\big)\Big)\to\Big(S(\mathbb{D}^n;R),\partial^{\mathbb{D}^n}\Big)\to\Big(S(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R),\partial^{\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\}}\Big)\to 0$$

诱导长正合列

$$\begin{tikzcd}
\cdots\widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n;R)}_{=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R) \arrow[dll, dashed] \\
\underbrace{\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R)}_{\simeq\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R)} \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n;R)}_{=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R)\cdots
\end{tikzcd}$$

由此及习题 33 结论可知

$$\begin{aligned}H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)&\simeq\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)\simeq\widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^n\setminus\{0\};R)\simeq\widetilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{S}^{n-1};R\big)\\&=\begin{cases}R, & q=n;\\ 0, & q\neq n.\end{cases}\end{aligned}$$

或者更直接地, 由 $\mathbb{D}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的强形变收缩核及 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的强形变收缩核, 可得

$$\begin{tikzcd}
\cdots\widetilde{H}_q\big(\mathbb{S}^{n-1};R\big) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \widetilde{H}_q(\mathbb{D}^n;R) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \widetilde{H}_q\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)\cdots \arrow[d, "\Phi"] \\
\cdots\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R) \arrow[r] & \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n;R) \arrow[r] & \widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)\cdots
\end{tikzcd}$$

其中每行均为正合列, 从而由五引理可知 Φ 是同构, 结合习题 31 证明中所得即知

$$\begin{aligned}H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)&\simeq\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\};R)\simeq\widetilde{H}_q\big(\mathbb{D}^n,\mathbb{S}^{n-1};R\big)\simeq\widetilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{S}^{n-1};R\big)\\&=\begin{cases}R, & q=n;\\ 0, & q\neq n.\end{cases}\end{aligned}$$

□

习题 35 计算 $H_q(\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^n\setminus\{0\};R)$, 其中上半空间 $\mathbb{H}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n\geqslant 0\}$.

解答 由链复形短正合列

$$0\to\Big(\mathbb{H}^n\setminus\{0\},\partial^{\mathbb{H}^n\setminus\{0\}}\Big)\to\Big(\mathbb{H}^n,\partial^{\mathbb{H}^n}\Big)\to\Big(\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^n\setminus\{0\},\partial^{\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^n\setminus\{0\}}\Big)\to 0$$

可得长正合列

$$\begin{tikzcd}
\cdots\widetilde{H}_q(\mathbb{H}^n\setminus\{0\};R) \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_q(\mathbb{H}^n;R)}_{=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_q(\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^n\setminus\{0\};R) \arrow[dll, dashed] \\
\underbrace{\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{H}^n\setminus\{0\};R)}_{\simeq\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^{n-1};R)} \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{H}^n;R)}_{=0} \arrow[r] & \widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^n\setminus\{0\};R)\cdots
\end{tikzcd}$$

因此

$$H_q(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n \setminus \{0\}; R) \simeq \widetilde{H}_q(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n \setminus \{0\}; R) \simeq \widetilde{H}_{q-1}\big(\mathbb{D}^{n-1}; R\big) = 0. \qquad \square$$

习题 36 设 X 是 n 维连通无边拓扑流形, $x_1, x_2 \in X$. 证明: 存在同胚 $\Phi : X \to X$, 使得 $\Phi(x_1) = x_2$, 且 $\Phi \sim \mathrm{id}_X$.

证明 (1) 令 $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$. 下证特殊情形: 任意 $x_1, x_2 \in \operatorname{Int} D$, 存在同胚 $\Phi_D : D \to D$, 使得

$$\Phi_D(x_1) = x_2, \quad \Phi_D \sim \mathrm{id}_D, \quad \Phi_D|_{\partial D} = \mathrm{id}_{\partial D}.$$

不妨设 $x_1 \neq x_2$. 由于 X 是连通流形, X 道路连通, 从而可取光滑曲线 $\gamma : [0,1] \to \operatorname{Int} D$, 满足 $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. 取 U 为 $\gamma([0,1])$ 在 $\operatorname{Int} D$ 中的一个邻域, 并构造光滑向量场 $V \in \Gamma(D, TD)$, 使得

$$V|_{D-U} = 0, \quad V|_{\gamma([0,1])} = \dot{\gamma}.$$

用 $\{\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$ 表示 V 生成的单参数微分同胚群, 即

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_t(\gamma(s)) = V(\gamma(s)) = \dot{\gamma}(s), \\ \varphi_0(\gamma(s)) = \gamma(s), \end{cases} \qquad \forall s \in (0,1),$$

且还有

$$\varphi_t(\gamma(s)) = \gamma(s+t), \quad s + t \in (0,1).$$

令 $\Phi_D = \varphi_1$, 则 $\Phi_D(x_1) = \varphi_1(\gamma(0)) = \gamma(1) = x_2$, 且 $\Phi_D \sim \mathrm{id}_D$, $\Phi_D|_{\partial D} = \mathrm{id}_{\partial D}$.

(2) 若 x_1, x_2 位于同一个坐标卡 (U, ψ) 中, 其中 $\psi(U) = \operatorname{Int} D$, 则对 $\psi(x_1), \psi(x_2) \in \operatorname{Int} D$ 用 (1) 构造同胚 Φ_D, 并令

$$\Phi(x) = \begin{cases} x, & x \notin U, \\ \psi^{-1} \circ \Phi_D \circ \psi, & x \in U. \end{cases}$$

(3) 对于一般情形, 令 $\gamma(x_1, x_2)$ 为 X 中连接 $x_1, x_2 \in X$ 的一条曲线, 由紧性可用有限个坐标卡 $\{(U_i, \psi_i) : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 将其覆盖. 由 (2) 可在每个坐标卡内构造同胚, 再将这 m 个同胚复合即得所求. $\square$

习题 37 设 $X_2 \subset X_1$, $Y_2 \subset Y_1$, 且 $\{X_1, Y_1\}$ 与 $\{X_2, Y_2\}$ 均为 M–V 偶. 证明: 有长正合列

$$\cdots H_q(X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2; R) \longrightarrow H_q(X_1, X_2; R) \oplus H_q(Y_1, Y_2; R) \to H_q(X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2; R) \to H_{q-1}(X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2; R) \cdots$$

证明 考虑交换图表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_q(X_2\cap Y_2;R) & \longrightarrow & S_q(X_1\cap Y_1;R) & \longrightarrow & S_q(X_1\cap Y_1, X_2\cap Y_2;R) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & S_q(X_2;R)\oplus S_q(Y_2;R) & \to & S_q(X_1;R)\oplus S_q(Y_1;R) & \to & S_q(X_1,X_2;R)\oplus S_q(Y_1,Y_2;R) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & S_q(X_2;R)+S_q(Y_2;R) & \to & S_q(X_1;R)+S_q(Y_1;R) & \longrightarrow & \dfrac{S_q(X_1;R)+S_q(Y_1;R)}{S_q(X_2;R)+S_q(Y_2;R)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

图中每一行均为正合的, 且由 (绝对同调的) Mayer–Vietoris 序列可知左边两列中间两个箭头的复合均为零映射, 从而左边两列均为正合链复形. 而最右边一列的中间两个箭头由其左边一列对应的箭头诱导, 从而它们的复合也为零映射, 因此这一列构成链复形. 于是这三列是三个链复形, 这个链复形正合列诱导同调群的长正合列, 其中每相邻三项中有两项为 0, 从而其余同调群也为 0, 即图中最右边一列的同调群全部为 0, 这说明这一列也是正合链复形. 这个链复形的短正合列诱导同调群的长正合列

$$
\begin{aligned}
& & & H_q(X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2;R) \\
& & & \|\text{五引理} \\
\cdots H_q(X_1\cap Y_1, X_2\cap Y_2;R) &\longrightarrow H_q(X_1,X_2;R)\oplus H_q(Y_1,Y_2;R) &\to\ & H_q\left(\frac{S(X_1;R)+S(Y_1;R)}{S(X_2;R)+S(Y_2;R)}\right) \dashrightarrow \\
\dashrightarrow H_{q-1}(X_1\cap Y_1, X_2\cap Y_2;R)\cdots
\end{aligned}
$$

□

习题 38 设 X 为 n 维无边流形, $X_R=\{(x,\alpha_x):x\in X,\alpha_x\in H_n(X,X-x;R)\}$. 对任意 X 中开集 U 与 $\alpha_U\in H_n(X,X-U;R)$, 定义

$$\langle U,\alpha_U\rangle=\{(y,\alpha_y):y\in U,\alpha_y=(j_{U,y})_*\alpha_U\}.$$

证明: 所有这些 $\langle U,\alpha_U\rangle$ 构成 X_R 的一个拓扑基.

证明 所有这些 $\langle U,\alpha_U\rangle$ 的并显然是 X_R. 若 $\langle U,\alpha_U\rangle\cap\langle V,\alpha_V\rangle\neq\varnothing$, 取 $(x,\alpha_{})\in\langle U,\alpha_U\rangle\cap\langle V,\alpha_V\rangle$. 由连续延拓性, 存在 x 的开邻域 $U_x\subset U\cap V$, 使得对任意 $y\in U_x$, $(j_{U_x,y})_*:H_n(X,X-U_x;R)\to H_n(X,X-\{y\};R)$ 为同构. 令 $\alpha_{U_x}=(j_{U,U_x})_*\alpha_U$, 由交换图

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\alpha_U}\ (X,X-U) \arrow[dr, "j_{U,U_x}"] \arrow[ddr, "j_{U,x}"'] & \boxed{\alpha_{U_x}} & (X,X-V)\ \boxed{\alpha_V} \arrow[dl, "j_{V,U_x}"'] \arrow[ddl, "j_{V,x}"] \\
& (X,X-U_x) \arrow[d, "j_{U_x,x}"] & \\
& (X,X-\{x\}) & \\
& \boxed{\alpha_x} &
\end{tikzcd}
$$

可知 $\alpha_{U_x}=(j_{U,U_x})_*\alpha_U=(j_{U_x},x)_*^{-1}\alpha_x=(j_{V,U_x})_*\alpha_V$. 因此对任意 $y\in U_x$, 有

$$(j_{U_x,y})_*\alpha_{U_x}=(j_{U,y})_*\alpha_U=(j_{V,y})_*\alpha_V,$$

这说明

$$(j_{U_x,y})_*\alpha_{U_x}=(j_{U,y})_*\alpha_U=(j_{V,y})_*\alpha_V.$$

即 $\langle U_x,\alpha_{U_x}\rangle\subset\langle U,\alpha_U\rangle\cap\langle V,\alpha_V\rangle$. 故所有这些 $\langle U,\alpha_U\rangle$ 构成 X_R 的一个拓扑基. □

习题 39 设 X 为 n 维无边流形, $X_1\subset X$. 固定 $[c]\in H_n(X,X-X_1;R)$, 则

$$(j_{X_1,\cdot})_*[c]:X_1\to X_R,\quad x\mapsto(x,(j_{X_1,x})_*[c])$$

是 $\Gamma(X_1,X_R)$ 中的一个截面.

证明 只需证 $x\mapsto(j_{X_1,x})_*[x]$ 是连续映射. 选取 $[c]$ 的代表元 $c\in S_n(X;R)$, 则 $\partial c\in S_{n-1}(X-X_1;R)$. 由紧支集公理, 存在紧集 $W\subset X-X_1$, 使得 $\partial c\in S_{n-1}(W;R)$. 令 $U=X-W$, 则 U 为 X 中开集, 且 $U\supset X_1$, $\partial c\in S_{n-1}(X-U;R)$. 取 $[c]_U\in H_n(X,X-U;R)$ 使得 $(j_{U,X_1})_*[c]_U=[c]$. 对任意 $x\in X_1$, 选取 x 的开邻域 $U_x\subset U$, 使得对任意 $y\in U_x$, $(j_{U_x,y})_*$ 为同构. 对任意 $y\in U_x\cap X_1$, 有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & (X,X-U_x) \arrow[ddl, "j_{U_x,x}"'] \arrow[ddr, "j_{U_x,y}"] & \\
 & (X,X-U)\ \boxed{[c]_U} \arrow[u, "j_{U,U_x}"'] \arrow[dl, "j_{U,x}"] \arrow[d] & \\
(X,X-x) & (X,X-X_1) \arrow[l, "j_{X_1,x}"'] \arrow[r] & (X,X-y) \arrow[ll, bend left] \\
 & \boxed{[c]} &
\end{tikzcd}$$

由于

$$(j_{X_1,x})_*[c]=(j_{U,x})_*[c]_U=(j_{U_x,x})_*(j_{U,U_x})_*[c]_U.$$

对任意 $y\in U_x\cap X_1$, 有

$$(j_{X_1,y})_*[c]=(j_{U_x,y})_*(j_{U,U_x})_*[c]_U=(j_{U_x,y})_*(j_{U_x,x})_*^{-1}(j_{X_1,x})_*[c],$$

这满足定义中的转移关系, 故映射 $x\mapsto(j_{X_1,x})_*[c]$ 连续. □

习题 40 设 X,Y 是 n 维连通 $\mathbb{Z}$-定向光滑紧无边流形, $f:X\to Y$ 为光滑映射, y 是 f 的正则值, $f^{-1}(y)=\{x_1,\cdots,x_l\}$. 证明:

$$\deg(f)=\sum_{k=1}^{l}\text{loc-deg}_{x_k}(f).$$

证明 取 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)=\bigsqcup_{k=1}^{l}U_k$, 其中 U_k 为 x_k 的邻域, 且这些 U_k 两两不交, $f|_{U_k}$ 为微分同胚. 由于 $\overline{X-\bigsqcup_{k=1}^{l}U_k}=X-\bigsqcup_{k=1}^{l}U_k\subset\mathrm{Int}\big(X-\{f^{-1}(y)\}\big)$, $\overline{X-U_K}=X-U_k\subset\mathrm{Int}(X-\{x_k\})$, 我们

有交换图

$$\begin{tikzcd}
H_n\big(X, X-\{f^{-1}(y)\};\mathbb{Z}\big) \arrow[r, "f_*"] & H_n(Y, Y-\{y\};\mathbb{Z}) \\
H_n\left(\bigsqcup_{k=1}^{l} U_k, \bigsqcup_{k=1}^{l}(U_k-\{x_k\});\mathbb{Z}\right) \arrow[u, "\wr"', "\text{切除}"] & \\
\bigoplus_{k=1}^{l} H_n(U_k, U_k-\{x_k\};\mathbb{Z}) \arrow[u, equal] \arrow[d, "\wr"', "\text{切除}"] & \\
\bigoplus_{k=1}^{l} H_n(X, X-\{x_k\};\mathbb{Z}) \arrow[uuur, bend right, "\bigoplus_{k=1}^{k} f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

由此可得

$$\deg(f) = \sum_{k=1}^{l} \text{loc-deg}_{x_k}(f).$$

□

习题 41 设 X, Y 是 Hausdorff 拓扑空间, $X_1 \subset X$, $f : X_1 \to Y$ 连续. 假设 X_1 是 X 中开邻域 U 的强形变收缩核, 证明: $Y \subset X \cup_f Y$ 也是某个开邻域的强形变收缩核.

证明 由于 $U \sqcup Y$ 是 $X \sqcup Y$ 中开集, 而由 $X_1 \subset U$ 可得 $\pi^{-1}(\pi(U \sqcup Y)) = U \sqcup Y$, 因此 $\pi(U \sqcup Y)$ 是 $X \cup_f Y$ 中开集, 它是 $\pi(Y) \simeq Y$ 的开邻域. 由于 X_1 是 U 的强形变收缩核, 存在连续映射 $H : [0,1] \times U \to U$ 使得

$$H(0,u) = u, \quad H(1,u) \in X_1, \quad H(t,x) = x, \quad \forall u \in U, \forall x \in X_1, \forall t \in [0,1].$$

定义映射

$$\widetilde{H} : [0,1] \times (U \sqcup Y) \to U \sqcup Y,$$

使得

$$\widetilde{H}(t,y) = y, \quad \widetilde{H}(t,u) = H(t,u), \quad \forall y \in Y, \forall u \in U, \forall t \in [0,1].$$

由无交并的拓扑可知 $\widetilde{H}$ 连续. 由于 $\widetilde{H}(t,\cdot)$ 在 X_1 与 Y 上均为恒等映射, 它可诱导伦移

$$\widehat{H} : [0,1] \times \pi(U \sqcup Y) \to \pi(U \sqcup Y),$$

且 $\widehat{H}(t,\cdot)$ 在 $\pi(Y) \simeq Y$ 上为恒等映射, $\widehat{H}(1,\cdot)$ 的像在 $\pi(Y) \simeq Y$ 中. 故 $Y \subset X \cup_f Y$ 是其开邻域 $\pi(U \sqcup Y)$ 的强形变收缩核. □

习题 42 设 X 为 CW 复形, 证明: $f : X \to Y$ 连续当且仅当 f 限制到 X 的每个闭胞腔上是连续的.

证明 利用 X 中开集的刻画可知

$$\begin{aligned}
& f : X \to Y \text{ 连续} \iff f^{-1}(U) \text{ 为 } X \text{ 中开集}, \forall U \text{ 为 } Y \text{ 中开集} \\
\iff & \underbrace{\left(\pi^j\right)^{-1}\left(f^{-1}(U) \cap X^j\right) \cap D_i^j}_{=\left((f\circ\pi^j)|_{D_i^j}\right)^{-1}(U)} \text{ 为 } D_i^j \text{ 中开集}, \forall U \text{ 为 } Y \text{ 中开集}, \forall 1 \leqslant j \leqslant p+1, \forall i \in I_j \\
\iff & \left(f \circ \pi^j\right)|_{D_i^j} \text{ 连续}, \forall 1 \leqslant j \leqslant p+1, \forall i \in I_j.
\end{aligned}$$

□

习题 43 给出 $\mathbb{C}P^n$ 的胞腔分解.

解答 记 $\mathbb{D}^{2n}=\{z=(z_0,\cdots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^n:|z|\leqslant 1\}$ 为 $2n$ 维闭胞腔, $\pi:\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}P^n$ 为商映射. 定义连续映射

$$h:\mathbb{D}^{2n}\to\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\},\quad (z_0,\cdots,z_{n-1})\mapsto\Big(z_0,\cdots,z_{n-1},\sqrt{1-|z|^2}\Big).$$

考虑复合映射

$$f=\pi\circ h:\mathbb{D}^{2n}\to\mathbb{C}P^n,\quad (z_0,\cdots,z_{n-1})\mapsto\Big[z_0:\cdots:z_{n-1}:\sqrt{1-|z|^2}\Big]$$

及其在边界 $\mathbb{S}^{2n-1}\subset\mathbb{D}^{2n}$ 上的限制映射

$$g=f|_{\mathbb{S}^{2n-1}}:\mathbb{S}^{2n-1}\to\iota\big(\mathbb{C}P^{n-1}\big),\quad (z_0,\cdots,z_{n-1})\mapsto[z_0:\cdots:z_{n-1}:0],$$

其中

$$\iota:\mathbb{C}P^{n-1}\to\mathbb{C}P^n,\quad [z_0:\cdots:z_{n-1}]\mapsto[z_0:\cdots:z_{n-1}:0]$$

为典范嵌入. 下证

$$f|_{\operatorname{Int}\mathbb{D}^{2n}}:\operatorname{Int}\mathbb{D}^{2n}\to\mathbb{C}P^n\setminus\iota\big(\mathbb{C}P^{n-1}\big)=\{[w_0:\cdots:w_{n-1}:1]\in\mathbb{C}P^n\}$$

为双射. 事实上, 假设 $f((z_0,\cdots,z_{n-1}))=[w_0:\cdots:w_{n-1}:1]$, 则

$$\Big(z_0,\cdots,z_{n-1},\sqrt{1-|z|^2}\Big)=\sqrt{1-|z|^2}(w_0,\cdots,w_{n-1},1).$$

记 $w=(w_0,\cdots,w_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, 则由上式可解得

$$|z|^2=\big(1-|z|^2\big)|w|^2\implies|z|^2=\frac{|w|^2}{1+|w|^2}<1\implies z_k=\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}w_k,\ k=0,\cdots,n-1.$$

这就说明了 $f|_{\operatorname{Int}\mathbb{D}^{2n}}$ 为双射. 由于 $\mathbb{C}P^n$ 是 Hausdorff 拓扑空间, $\mathbb{D}^{2n}$ 是紧空间, $f|_{\mathbb{D}^{2n}\setminus\mathbb{S}^{2n-1}}:\mathbb{D}^{2n}\setminus\mathbb{S}^{2n-1}\to\mathbb{C}P^n\setminus\iota\big(\mathbb{C}P^{n-1}\big)$ 为双射, 我们得到同胚 $\mathbb{C}P^n\simeq\mathbb{D}^{2n}\cup_g\iota\big(\mathbb{C}P^{n-1}\big)$. 故 $\mathbb{C}P^n$ 有胞腔分解

$$\mathbb{C}P^n=e^{2n}\cup e^{2(n-1)}\cup\cdots\cup e^2\cup e^0.$$

□

习题 44 计算 $\mathbb{C}P^n$ 的同调群.

解答 由习题 43 结果可知 $\mathbb{C}P^n$ 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & W_{2n+1} & & W_{2n} & & W_{2n-1} & & & & W_2 & & W_1 & & W_0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & & & \| & & \| & & \| \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow 0
\end{array}$$

由此可见所有边缘算子为零. 故 $\mathbb{C}P^n$ 的同调群为

$$H_p(\mathbb{C}P^n;R)\simeq\begin{cases}R, & p=0,2,\cdots,2n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

□

习题 45 给出 $\mathbb{R}P^n$ 的胞腔分解.

解答 记 $\mathbb{D}^n=\{x=(x_0,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leqslant 1\}$ 为 n 为闭胞腔, $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}P^n$ 为商映射. 定义连续映射

$$h:\mathbb{D}^n\to\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\quad (x_0,\cdots,x_{n-1})\mapsto\Big(x_0,\cdots,x_{n-1},\sqrt{1-\|x\|^2}\Big).$$

考虑复合映射

$$f=\pi\circ h:\mathbb{D}^n\to\mathbb{R}P^n,\quad (x_0,\cdots,x_{n-1})\mapsto\Big[x_0:\cdots:x_{n-1}:\sqrt{1-\|x\|^2}\Big]$$

及其在边界 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{D}^n$ 上的限制映射

$$g=f|_{\mathbb{S}^{n-1}}:\mathbb{S}^{n-1}\to\iota\big(\mathbb{R}P^{n-1}\big),\quad (x_0,\cdots,x_{n-1})\mapsto[x_0:\cdots:x_{n-1}:0],$$

其中

$$\iota:\mathbb{R}P^{n-1}\to\mathbb{R}P^n,\quad [x_0:\cdots:x_{n-1}]\mapsto[x_0:\cdots:x_{n-1}:0]$$

为典范嵌入. 下证

$$f|_{\mathrm{Int}\,\mathbb{D}^n}:\mathrm{Int}\,\mathbb{D}^n\to\mathbb{R}P^n\setminus\iota\big(\mathbb{R}P^{n-1}\big)=\{[w_0:\cdots:w_{n-1}:1]\in\mathbb{R}P^n\}$$

为双射. 事实上, 假设 $f((x_0,\cdots,x_{n-1}))=[y_0:\cdots:y_{n-1}:1]$, 则

$$\Big(x_0,\cdots,x_{n-1},\sqrt{1-\|x\|^2}\Big)=\sqrt{1-\|x\|^2}(y_0,\cdots,y_{n-1},1).$$

记 $y=(y_0,\cdots,y_{n-1})\in\mathbb{R}^n$, 则由上式可解得

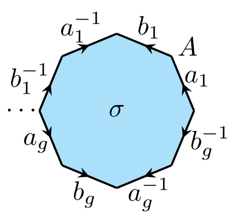
$$\|x\|^2=\big(1-\|x\|^2\big)\|y\|^2\implies\|x\|^2=\frac{\|y\|^2}{1+\|y\|^2}<1\implies x_k=\frac{1}{\sqrt{1+\|y\|^2}}y_k,\ k=0,\cdots,n-1.$$

这就说明了 $f|_{\mathrm{Int}\,\mathbb{D}^n}$ 为双射. 由于 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 拓扑空间, $\mathbb{D}^n$ 是紧空间, $f|_{\mathbb{D}^n\setminus\mathbb{S}^{n-1}}:\mathbb{D}^n\setminus\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}P^n\setminus\iota\big(\mathbb{R}P^{n-1}\big)$ 为双射, 我们得到同胚 $\mathbb{R}P^n\simeq\mathbb{D}^n\cup_g\iota\big(\mathbb{R}P^{n-1}\big)$. 故 $\mathbb{R}P^n$ 有胞腔分解

$$\mathbb{R}P^n=e^n\cup e^{n-1}\cup\cdots\cup e^1\cup e^0.$$

□

习题 46 计算 Σ_g 的同调群.

解答 由 Σ_g 的多边形表示 

可知 Σ 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、$2g$ 个 1 维胞腔和 1

个 0 维胞腔. 因此 Σ_g 的胞腔链复形为

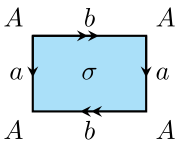
$$
\begin{array}{ccccccc}
W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\
\| & & \| & & \| & & \\
R\sigma & \longrightarrow & Ra_1 \oplus Rb_1 \oplus \cdots \oplus Ra_g \oplus Rb_g & \longrightarrow & RA & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma &\longmapsto 0\\
a_i &\longmapsto 0\\
b_i &\longmapsto 0
\end{aligned}
$$

故 Σ_g 的同调群为

$$H_2(\Sigma_g;R) = R\sigma \simeq R, \quad H_1(\Sigma_g;R) = R^{2g}, \quad H_0(\Sigma_g;R) = RA \simeq R. \qquad \square$$

习题 47 计算 Klein 瓶的同调群.

解答 由 Klein 瓶 K 的多边形表示 

可知 K 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、2 个 1 维胞腔和 1 个 0 维胞腔. 因此 K 的胞腔链复形为

$$
\begin{array}{ccccccc}
W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\
\| & & \| & & \| & & \\
R\sigma & \longrightarrow & Ra \oplus Rb & \longrightarrow & RA & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma &\longmapsto 2b\\
a &\longmapsto 0\\
b &\longmapsto 0
\end{aligned}
$$

故 K 的同调群为

$$
\begin{gathered}
H_2(K;R) = \{r\sigma : r \in R,\, 2r = 0\} \simeq \{r \in R : 2r = 0\},\\
H_1(K;R) = (Ra \oplus Rb)/2Rb \simeq R \oplus (R/2R),\\
H_0(K;R) = RA \simeq R.
\end{gathered} \qquad \square
$$

习题 48 计算透镜空间 $L_m(\ell_1, \ell_2) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_m$ 的同调群.

解答 根据定义, $(\ell_2, m) = 1$, 由 Bézout 定理, 存在 $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $mq_1 + \ell_2 q_2 = 1$. 观察到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m} q_2}.(z_1, z_2) &= \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m} q_2\ell_1} z_1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m} q_2\ell_2} z_2\right) = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m} q_2\ell_1} z_1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}(1-mq_1)} z_2\right)\\
&= \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m} q_2\ell_1} z_1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}} z_2\right),
\end{aligned}
$$

因此

$$L_m(\ell_1, \ell_2) = L_m(\ell_1 q_2, 1).$$

由 $(\ell_1, m) = 1$ 与 $(q_2, m) = 1$ 可得 $(\ell_1 q_2, m) = 1$, 故通过令 $\ell = \ell_1 q_2$ 可将所考虑的轨道空间简化为

$$L_m(\ell, 1), \quad 1 \leqslant \ell \leqslant m,\ (\ell, m) = 1. \tag{48–1}$$

记圆周 $C = \{(0, z_2) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2\}$, 并取 C 上 m 等分点 $v_j = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{m} j}$ (下标 $0 \leqslant j \leqslant m-1$ 在模 m 意义下取), 并将 v_j 与 v_{j+1} 之间的劣弧称为第 j 条边. 对每个 j, 令

$$D_j^2 = \left\{\cos\theta(0, v_j) + \sin\theta(z, 0) : z \in \mathbb{S}^1,\ \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right\} = \left\{(\sin\theta z, \cos\theta v_j) : z \in \mathbb{S}^1,\ \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right\},$$
$$D_j^3 = \left\{(\sin\theta z, \cos\theta v_j) : z \in \mathbb{S}^1,\ \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],\ v \in \text{第 } j \text{ 条边}\right\}.$$

根据 (48–1), $\mathbb{Z}_m$-作用恰将 D_j^2 映为 D_{j+1}^2, 将 D_j^3 映为 D_{j+1}^3, 因此我们可选取其中一个基本区域, 如 D_j^2 与 D_{j+1}^2 所夹区域, 作为代表元 (如图 1 中、右两图所示), 并考察其边界的粘贴情况.

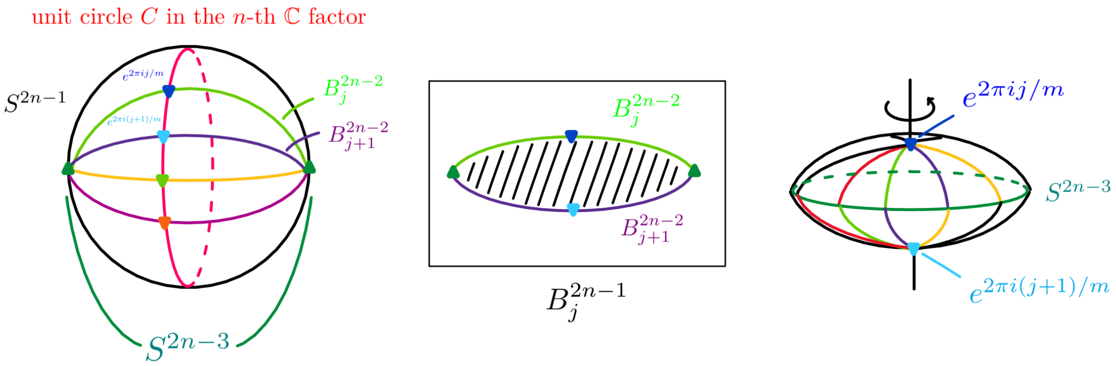


图 1: 透镜空间 (引自 https://math.stackexchange.com/a/3541172/1295235)

再次由 (48–1) 可知, 代表元两个边界圆盘的对应关系由 “水平方向的镜面反射与绕图 1 中轴旋转 $\frac{2\pi\ell}{m}$ 的复合” 给出, 其中 $\ell = \ell_1 q_2$ 如前所述. 由此可知 $L_m(\ell_1, \ell_2) = L_m(\ell, 1)$ 的胞腔分解为 $3, 2, 1, 0$ 维胞腔各 1 个, 且由图 1 可知 $L_m(\ell_1, \ell_2)$ 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccccc} W_3 & & W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \\ Re^3 & \longrightarrow & Re^2 & \longrightarrow & Re^1 & \longrightarrow & Re^0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$e^3 \longmapsto 0$$
$$e^2 \longmapsto me^1$$
$$e^1 \longmapsto 0$$

故 $L_m(\ell_1, \ell_2)$ 的同调群为

$$H_3(L_m(\ell_1, \ell_2)) = Re^3 \simeq R,$$
$$H_2(L_m(\ell_1, \ell_2)) = \left\{re^2 : r \in R,\ mr = 0\right\} = \{r \in R : mr = 0\},$$
$$H_1(L_m(\ell_1, \ell_2)) = Re^1/mRe^1 \simeq R/mR,$$
$$H_0(L_m(\ell_1, \ell_2)) = Re^0 \simeq R. \qquad \square$$

习题 49 验证 Kronecker 映射 k 满足自然性: 设有链映射 $\phi:(C,\partial^C)\to(D,\partial^D)$, 则下图交换:

$$\begin{tikzcd} H^p(D;N) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \mathrm{Hom}_R(H_p(D),N) \arrow[d, "(\phi_*)^\#"] \\ H^p(C;N) \arrow[r, "k"] & \mathrm{Hom}_R(H_p(C),N) \end{tikzcd}$$

证明 对任意 $[z^p]\in H^p(D;N)$, 取代表元 $z^p\in\mathrm{Hom}_R(D_p,N)$, 并取 $\phi^*[z^p]\in H^p(C;N)$ 的代表元 $\phi^\# z^p\in\mathrm{Hom}_R(C_p,N)$. 对任意 $[x_p]\in H_p(C)$, 取代表元 $x_p\in C_p$, 并取 $\phi_*[x_p]\in H_p(D)$ 的代表元 $\phi x_p\in D_p$. 我们有

$$\begin{aligned} \langle k\phi^*[z^p],[x_p]\rangle &= \big\langle \phi^\# z^p, x_p\big\rangle = \langle z^p,\phi x_p\rangle, \\ \big\langle(\phi_*)^\# k[z^p],[x_p]\big\rangle &= \langle k[z^p],\phi_*[x_p]\rangle = \langle z^p,\phi x_p\rangle, \end{aligned}$$

故 $k\circ\phi^*=(\phi_*)^\#\circ k$. □

习题 50 考虑 Moore 空间 $X=M(\mathbb{Z}_m,n)=\mathbb{D}^{n+1}\cup_g\mathbb{S}^n$, 其中粘贴映射 $g:\mathrm{Bd}\,\mathbb{D}^{n+1}\to\mathbb{S}^n$ 满足 $\deg(g)=m$. 设 $f:X\to X/\mathbb{S}^n$ 为商映射.

(1) 计算 $H_p(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$.

(2) 计算 $H_p(X;\mathbb{Z})$.

(3) 验证当 $p=n+1$ 时, 以下万有系数定理的自然性图表不是典范可裂的:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(f_*,\mathbb{Z})"] & H^{n+1}(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "(f_*)^\#"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

解答 (1) 由构造知 $X/\mathbb{S}^n\simeq\mathbb{S}^{n+1}$, 因此由习题 33 结果知

$$H_p(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})\simeq H_p\big(\mathbb{S}^{n+1};\mathbb{Z}\big)\begin{cases}\mathbb{Z}, & p=0\text{ 或 }n+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $\mathbb{D}^{n+1}$ 提供 $n+1$ 维胞腔, $\mathbb{S}^n$ 提供 n 维胞腔和 0 维胞腔, 因此 X 的胞腔分解为 e^{n+1},e^n,e^0. 由 $\deg(g)=m$ 可知 X 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & W_{n+2} & & W_{n+1} & & W_n & & W_{n-1} & & & & W_0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}e^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}e^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}e^0 \longrightarrow 0 \\ & & & & e^{n+1} & \longmapsto & me^n & & & & & & \\ & & & & & & e^n & \longmapsto & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & e^0 \longmapsto 0 \end{array}$$

故 X 的同调群为

$$H_p(X;\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}_m, & p=n,\\ \mathbb{Z}, & p=0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 由 (1)(2) 知

$$H_n(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})=0,\quad H_{n+1}(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\quad H_n(X;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_m,\quad H_{n+1}(X;\mathbb{Z})=0.$$

于是可求得题干中图表的第 $2,4$ 列为

$$\begin{gathered}\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})=\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(0,\mathbb{Z})=0,\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z},\\ \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})=\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_m,\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(0,\mathbb{Z})=0.\end{gathered}$$

由此可知 $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(f_*,\mathbb{Z})$ 为零映射. 此外, 由万有系数定理, 上述图表中两行均为可裂的短正合列, 因此

$$H^{n+1}(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z},\quad H^{n+1}(X;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}_m.$$

由 (2) 知 $H_{n+1}(X,\mathbb{Z})=0$, 因此 f_* 为零映射, 进而 $(f_*)^\#$ 亦为零映射.

另一方面, 由上同调的正合性公理, 有长正合列

$$\begin{tikzcd}\cdots & H^{n+1}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \arrow[l] & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \arrow[l] & H^{n+1}(X,\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]\\ & & & H^{n+1}(X/\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \arrow[ul, "f^*"] \arrow[u, "\wr"'] & \end{tikzcd}$$

也即

$$0\longleftarrow\mathbb{Z}_m\xleftarrow{f^*}\mathbb{Z}$$

故 f^* 为满射. 题干中万有系数定理的自然性图表为:

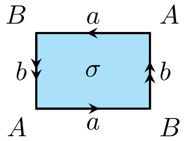
$$\begin{tikzcd}0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "f^*"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[l, dashed, bend right] & 0\\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_m \arrow[r] & \mathbb{Z}_m \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left] & 0\end{tikzcd}$$

这里用虚线画出了由可裂性给出的两个映射. 假如它们是典范的, 则如下方块交换:

$$\begin{tikzcd}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "f^*"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "0"] \arrow[l, dashed, bend right]\\ \mathbb{Z}_m \arrow[r] & 0 \arrow[l, dashed, bend left]\end{tikzcd}$$

但这是不可能的, 因为上方的虚线箭头非平凡且左侧的 f^* 为满射, 而右侧为零映射. $\square$

习题 51 计算 $H^p\big(\mathbb{R}P^2;N\big)$.

解答 由 $\mathbb{R}P^2$ 的多边形表示 

可知 $\mathbb{R}P^2$ 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、2 个 1 维胞腔和 2 个 0 维胞腔. 因此 $\mathbb{R}P^2$ 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccc}
W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\
\| & & \| & & \| & & \\
R\sigma & \longrightarrow & Ra \oplus Rb & \longrightarrow & RA \oplus RB & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\sigma \longmapsto 2(a+b)$$

$$a \longmapsto B - A$$

$$b \longmapsto A - B$$

用 $\mathrm{Hom}_R(\cdot, N)$ 函子作用后, 由

$$\begin{aligned}
\langle \delta\varphi, a\rangle &= \left\langle -\partial^{\#}\varphi, a\right\rangle = -\langle \varphi, \partial a\rangle = \varphi(A-B) = \varphi(A) - \varphi(B), \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(W_0, N),\\
\langle \delta\varphi, b\rangle &= \left\langle -\partial^{\#}\varphi, b\right\rangle = -\langle \varphi, \partial b\rangle = \varphi(B-A) = \varphi(B) - \varphi(A), \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(W_0, N),\\
\langle \delta\psi, \sigma\rangle &= \left\langle \partial^{\#}\psi, \sigma\right\rangle = \langle \psi, \partial \sigma\rangle = \psi(2(a+b)) = 2\psi(a+b), \quad \forall \psi \in \mathrm{Hom}_R(W_1, N)
\end{aligned}$$

可得上链复形

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(W_0, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(W_1, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(W_2, N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & (\varphi(A), \varphi(B)) & \longmapsto & (\varphi(A)-\varphi(B), \varphi(B)-\varphi(A)) & & & & \\
 & & & & (\psi(a), \psi(b)) & \longmapsto & 2\psi(a+b) & &
\end{array}$$

故 $\mathbb{R}P^2$ 的上同调模为

$$\begin{aligned}
H^0\left(\mathbb{R}P^2; N\right) &= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(W_0, N) : \varphi(A) = \varphi(B)\} \simeq N,\\
H^1\left(\mathbb{R}P^2; N\right) &= \frac{\{\psi \in \mathrm{Hom}_R(W_1, N) : 2[\psi(a) + \psi(b)] = 0\}}{\{\psi \in \mathrm{Hom}_R(W_1, N) : \psi(a) + \psi(b) = 0\}} \simeq \{n \in N : 2n = 0\},\\
H^2\left(\mathbb{R}P^2; N\right) &= \mathrm{Hom}_R(W_2, N)/2\,\mathrm{Hom}_R(W_2, N) \simeq N/2N.
\end{aligned}$$

□

习题 52 计算 $H^p(\Sigma_g; N)$.

解答 习题 46 中已经计算出 Σ_g 的胞腔链复形, 用 $\mathrm{Hom}_R(\cdot, N)$ 函子作用后, 由

$$\begin{aligned}
\langle \delta\varphi, a_i\rangle &= \left\langle -\partial^{\#}\varphi, a_i\right\rangle = -\langle \varphi, \partial a_i\rangle = -\varphi(0) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(W_0, N),\ 1 \leqslant i \leqslant g,\\
\langle \delta\varphi, b_i\rangle &= \left\langle -\partial^{\#}\varphi, b_i\right\rangle = -\langle \varphi, \partial b_i\rangle = -\varphi(0) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(W_0, N),\ 1 \leqslant i \leqslant g,\\
\langle \delta\psi, \sigma\rangle &= \left\langle \partial^{\#}\psi, \sigma\right\rangle = \langle \psi, \partial \sigma\rangle = \psi(0) = 0, \quad \forall \psi \in \mathrm{Hom}_R(W_1, N)
\end{aligned}$$

可得上链复形

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(W_0, N) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_R(W_1, N) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_R(W_2, N) \longrightarrow 0$$

故 Σ_g 的上同调模为

$$\begin{aligned} H^0(\Sigma_g;N) &= \mathrm{Hom}_R(W_0,N) \simeq N, \\ H^1(\Sigma_g;N) &= \mathrm{Hom}_R(W_1,N) \simeq \underbrace{N\oplus\cdots\oplus N}_{2g}, \\ H^2(\Sigma_g;N) &= \mathrm{Hom}_R(W_2,N) \simeq N. \end{aligned}$$

□

习题 53 验证奇异上链的上积满足上边缘公式:

$$\delta(\alpha\cup\beta) = (\delta\alpha)\cup\beta + (-1)^p\alpha\cup(\delta\beta), \quad \forall\alpha\in S^p(X;R), \forall\beta\in S^q(X;R).$$

证明 对任意 $p+q+1$ 维奇异单形 $\sigma:\Delta_{p+q+1}\to X$, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle\delta(\alpha\cup\beta),\sigma\rangle =& \big\langle(-1)^{p+q+1}\partial^\#(\alpha\cup\beta),\sigma\big\rangle = (-1)^{p+q+1}\langle\alpha\cup\beta,\partial\sigma\rangle \\
=&(-1)^{p+q+1}\sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i\langle\alpha\cup\beta,\sigma\circ\ell(e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+q+1})\rangle \\
=&(-1)^{p+q+1}\Bigg(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(-1)^{pq}\langle\alpha,\sigma\circ\ell(e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+1})\rangle\langle\beta,\sigma\circ\ell(e_{p+1},\cdots,e_{p+q+1})\rangle \\
&+\sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i(-1)^{pq}\langle\alpha,\sigma\circ\ell(e_0,\cdots,e_p)\rangle\langle\beta,\sigma\circ\ell(e_p,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+q+1})\rangle\Bigg) \\
=&(-1)^{p+q+pq+1}\Bigg(\Bigg\langle\alpha,\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma\circ\ell(e_0,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+1})\Bigg\rangle\langle\beta,\sigma\circ\ell(e_{p+1},\cdots,e_{p+q+1})\rangle \\
&+\langle\alpha,\sigma\circ\ell(e_0,\cdots,e_p)\rangle\Bigg\langle\beta,\sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i\sigma\circ\ell(e_p,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_{p+q+1})\Bigg\rangle\Bigg) \\
=&(-1)^{p+q+pq+1}\big(\langle\alpha,\partial({}_{p+1}\sigma)-(-1)^{p+1}{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle+(-1)^p\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\partial(\sigma_{q+1})-\sigma_q\rangle\big) \\
=&(-1)^{(p+1)(q+1)}\Big(\langle\alpha,\partial({}_{p+1}\sigma)\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle+(-1)^p\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle \\
&+(-1)^p\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\partial(\sigma_{q+1})\rangle-(-1)^p\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle\Big) \\
=&(-1)^{(p+1)(q+1)}[\langle\alpha,\partial({}_{p+1}\sigma)\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle+(-1)^p\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\langle\beta,\partial(\sigma_{q+1})\rangle] \\
=&(-1)^{(p+1)q}(-1)^{p+1}\langle\alpha,\partial({}_{p+1}\sigma)\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle+(-1)^p(-1)^{p(q+1)}\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle(-1)^{q+1}\langle\beta,\partial(\sigma_{q+1})\rangle \\
=&(-1)^{(p+1)q}\big\langle(-1)^{p+1}\partial^\#\alpha,{}_{p+1}\sigma\big\rangle\langle\beta,\sigma_q\rangle+(-1)^p(-1)^{p(q+1)}\langle\alpha,{}_p\sigma\rangle\big\langle(-1)^{q+1}\partial^\#\beta,\sigma_{q+1}\big\rangle \\
=&\langle(\delta\alpha)\cup\beta,\sigma\rangle+(-1)^p\langle\alpha\cup(\delta\beta),\sigma\rangle.
\end{aligned}$$

由 σ 的任意性即得

$$\delta(\alpha\cup\beta) = (\delta\alpha)\cup\beta + (-1)^p\alpha\cup(\delta\beta).$$

□

习题 54 计算 $X=\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^2$ 的上同调模及环结构.

解答 X 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、2 个 1 维胞腔和 1 个 0 维胞腔, 胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\ \| & & \| & & \| & & \\ R & \xrightarrow{0} & R\oplus R & \xrightarrow{0} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

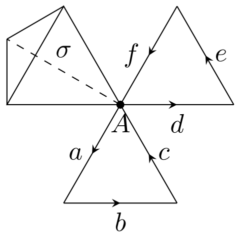
故 X 的同调群为

$$H_2(X;R)=R,\quad H_1(X;R)=R\oplus R,\quad H_0(X;R)=R.$$

它们均是自由的, 因此由万有系数定理可得 X 的上同调模:

$$\begin{aligned}H^2(X;N)&\simeq \mathrm{Hom}_R(R,N)\simeq N,\\ H^1(X;N)&\simeq \mathrm{Hom}_R(R\oplus R,N)\simeq N\oplus N,\\ H^0(X;N)&\simeq \mathrm{Hom}_R(R,N)\simeq N.\end{aligned}$$

当 $N=R$ 时, 为计算 X 的上同调环结构, 考虑其对应的单纯剖分 K:



- 用 σ_i $(i=1,2,3,4)$ 记图中所有 2-单形, 则 $[\sigma_i]^*$ 给出 $C^2(K;R)=Z^2(K;R)$ 的基. 由于任意两个邻接的 2-单形对应的对偶基相差一个上边缘 (即它们的公共边对应的对偶基在 δ 下的像), 因此可取定一个 2-单形 σ, 以其对应的对偶基 $[\sigma]^*$ 作为 $H^2(X;R)$ 的生成元.
- 由于 $[a+b+c]$ 与 $[d+e+f]$ 是 $H_1(X;R)$ 的生成元, 而 $\delta[b]^*=0=\delta[e]^*$, 且有

$$\begin{aligned}\langle[b]^*,a+b+c\rangle=1,\quad \langle[b]^*,d+e+f\rangle=0,\\ \langle[e]^*,a+b+c\rangle=0,\quad \langle[e]^*,d+e+f\rangle=1,\end{aligned}$$

  因此 $[b]^*$ 与 $[e]^*$ 是 $H^1(X;R)$ 的生成元.
- $H^0(X;R)$ 的生成元为 $[\varepsilon_K]\coloneqq\displaystyle\sum_{v\in K:\dim v=0}[v]^*$.

由分次结构, 为确定 X 的上同调环结构, 仅需求一阶元的上积. 由于 2-单形仅在 $\mathbb{S}^2$ 中, 我们得到

$$[b]^*\cup[b]^*=0,\quad [e]^*\cup[e]^*=0,\quad [b]^*\cup[e]^*=0.$$

故

$$H^*(X;R)=R[\varepsilon_K]\oplus R[b]^*\oplus R[e]^*\oplus R[\sigma]^*,$$

且这是平凡环, 即正维数的上同调类的两两上积均为 0. □

习题 55 对 Klein 瓶 K, 证明:

(1) $H^*(K;\mathbb{Z}_2)\simeq\mathbb{Z}_2[x,y]/\langle x^3,y^2,x^2-xy\rangle$.

(2) $H^*(K;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}[y,z]/\langle y^2,2z,z^2,yz\rangle$.

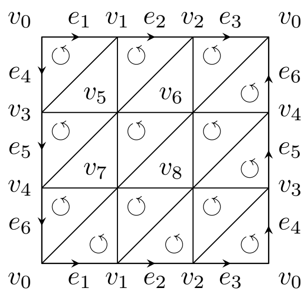
证明 在习题 21 中已求得 K 的同调群

$$H_2(K;R)=\{r\in R:2r=0\},\quad H_1(K;R)=R\oplus R/2R,\quad H_0(K;R)=R.$$

课上已求得 K 的上同调环 (假设 R 为 PID)

$$H^2(K;R)=R/2R,\quad H^1(K;R)=R\oplus\{r\in R:2r=0\},\quad H^0(K;R)=R.$$

为计算其环结构, 考虑 K 的一个单纯剖分:



令

$$\begin{aligned}z^1&=[v_3,v_4]^*+[v_5,v_4]^*+[v_5,v_7]^*+[v_6,v_7]^*+[v_6,v_8]^*+[v_4,v_8]^*,\\ w^1&=[v_1,v_2]^*+[v_5,v_2]^*+[v_5,v_6]^*+[v_7,v_6]^*+[v_7,v_8]^*+[v_1,v_8]^*,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\delta z^1=&[v_5,v_3,v_4]^*+[v_8,v_3,v_4]^*+[v_3,v_5,v_4]^*+[v_7,v_5,v_4]^*+[v_4,v_5,v_7]^*+[v_6,v_5,v_7]^*\\ &+[v_5,v_6,v_7]^*+[v_8,v_6,v_7]^*+[v_7,v_6,v_8]^*+[v_4,v_6,v_8]^*+[v_6,v_4,v_8]^*+[v_3,v_4,v_8]^*\\ =&2[v_8,v_3,v_4]^*\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}\delta w^1=&[v_5,v_1,v_2]^*+[v_8,v_1,v_2]^*+[v_1,v_5,v_2]^*+[v_6,v_5,v_2]^*+[v_2,v_5,v_6]^*+[v_7,v_5,v_6]^*\\ &+[v_5,v_7,v_6]^*+[v_8,v_7,v_6]^*+[v_6,v_7,v_8]^*+[v_1,v_7,v_8]^*+[v_7,v_1,v_8]^*+[v_2,v_1,v_8]^*\\ =&0.\end{aligned}$$

由于 R 是 PID, 存在 $r_0\in R$, 使得 $\{r\in R:2r=0\}=Rr_0$. 于是 $\delta(r_0z^1)=2r_0[v_8,v_3,v_4]^*=0$, 且对 $H_1(K;R)$ 的生成元 $[e_1+e_2+e_3]$ 与 $[e_4+e_5+e_6]$, 有

$$\begin{aligned}\langle r_0z^1,e_1+e_2+e_3\rangle=0,\quad \langle r_0z^1,e_4+e_5+e_6\rangle=r_0,\\ \langle w^1,e_1+e_2+e_3\rangle=1,\quad \langle w^1,e_4+e_5+e_6\rangle=0.\end{aligned}$$

因此

$$H^1(K;R)=R\oplus\{r\in R:2r=0\}\simeq R[w^1]\oplus R[r_0z^1].$$

由于任意两个邻接的 2-单形对应的对偶基相差一个上边缘 (即它们的公共边对应的对偶基在 δ 下的像), 因此

$$H^2(K;R)=R/2R\simeq(R/2R)[[v_0,v_3,v_1]^*].$$

此外, $H^0(K;R)$ 的生成元为 $[\varepsilon_K] \coloneqq \sum\limits_{v\in K:\dim v=0} [v]^*$, 即

$$H^0(K;R) = R[\varepsilon_K].$$

选取 r_0z^1 与 w^1 对应 1-单形 “重叠区域” 中的 2-单形 (按顶点次序排序), 由

$$\begin{aligned}
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup w^1, [v_5,v_6,v_7]\big\rangle &= -\big\langle r_0z^1,[v_5,v_6]\big\rangle\big\langle w^1,[v_6,v_7]\big\rangle = -0\cdot(-1) = 0,\\
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup w^1, [v_6,v_7,v_8]\big\rangle &= -\big\langle r_0z^1,[v_6,v_7]\big\rangle\big\langle w^1,[v_7,v_8]\big\rangle = -r_0\cdot 1 = -r_0
\end{aligned}$$

可知

$$\big(r_0z^1\big)\cup w^1 = -r_0[v_6,v_7,v_8]^* \sim -r_0[v_0,v_3,v_1]^*.$$

同理, 由

$$\begin{aligned}
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big), [v_3,v_4,v_5]\big\rangle &= -\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_3,v_4]\big\rangle\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_4,v_5]\big\rangle = -r_0\cdot(-r_0) = r_0^2,\\
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big), [v_4,v_5,v_7]\big\rangle &= -\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_4,v_5]\big\rangle\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_5,v_7]\big\rangle = -(-r_0)\cdot(r_0) = r_0^2,\\
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big), [v_5,v_6,v_7]\big\rangle &= -\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_5,v_6]\big\rangle\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_6,v_7]\big\rangle = -0\cdot r_0 = 0,\\
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big), [v_6,v_7,v_8]\big\rangle &= -\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_6,v_7]\big\rangle\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_7,v_8]\big\rangle = -r_0\cdot 0 = 0,\\
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big), [v_4,v_6,v_8]\big\rangle &= -\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_4,v_6]\big\rangle\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_6,v_8]\big\rangle = -0\cdot r_0 = 0,\\
\big\langle \big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big), [v_3,v_4,v_8]\big\rangle &= -\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_3,v_4]\big\rangle\big\langle \big(r_0z^1\big),[v_4,v_8]\big\rangle = -r_0\cdot r_0 = -r_0^2
\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}
\big(r_0z^1\big)\cup\big(r_0z^1\big) &= r_0^2([v_3,v_4,v_5]^* + [v_4,v_5,v_7]^* - [v_3,v_4,v_8]^*)\\
&= r_0^2([v_3,v_4,v_5]^* - [v_5,v_4,v_7]^* - [v_3,v_4,v_8]^*)\\
&\sim r_0^2([v_0,v_3,v_1]^* - [v_0,v_3,v_1]^* - [v_0,v_3,v_1]^*)\\
&= -r_0^2[v_0,v_3,v_1]^*.
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
\big\langle w^1\cup w^1, [v_1,v_2,v_5]\big\rangle &= -\big\langle w^1,[v_1,v_2]\big\rangle\big\langle w^1,[v_2,v_5]\big\rangle = -1\cdot(-1) = 1,\\
\big\langle w^1\cup w^1, [v_2,v_5,v_6]\big\rangle &= -\big\langle w^1,[v_2,v_5]\big\rangle\big\langle w^1,[v_5,v_6]\big\rangle = -(-1)\cdot 1 = 1,\\
\big\langle w^1\cup w^1, [v_5,v_6,v_7]\big\rangle &= -\big\langle w^1,[v_5,v_6]\big\rangle\big\langle w^1,[v_6,v_7]\big\rangle = -1\cdot(-1) = 1,\\
\big\langle w^1\cup w^1, [v_6,v_7,v_8]\big\rangle &= -\big\langle w^1,[v_6,v_7]\big\rangle\big\langle w^1,[v_7,v_8]\big\rangle = -(-1)\cdot 1 = 1,\\
\big\langle w^1\cup w^1, [v_1,v_7,v_8]\big\rangle &= -\big\langle w^1,[v_1,v_7]\big\rangle\big\langle w^1,[v_7,v_8]\big\rangle = -0\cdot 1 = 0,\\
\big\langle w^1\cup w^1, [v_1,v_2,v_8]\big\rangle &= -\big\langle w^1,[v_1,v_2]\big\rangle\big\langle w^1,[v_2,v_8]\big\rangle = -1\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}
w^1\cup w^1 &= [v_1,v_2,v_5]^* + [v_2,v_5,v_6]^* + [v_5,v_6,v_7]^* + [v_6,v_7,v_8]^*\\
&= -[v_1,v_5,v_2]^* + [v_2,v_6,v_5]^* - [v_5,v_7,v_6]^* + [v_6,v_8,v_7]^*\\
&\sim -[v_0,v_3,v_1]^* + [v_0,v_3,v_1]^* - [v_0,v_3,v_1]^* + [v_0,v_3,v_1]^*\\
&= 0.
\end{aligned}$$

故

$$H^*(K;R) = R[\varepsilon_K] \oplus R\left[w^1\right] \oplus R\left[r_0 z^1\right] \oplus (R/2R)[[v_0, v_3, v_1]^*],$$

且其乘法表 (省略单位元) 为

$\cup$	$\left[w^1\right]$	$\left[r_0 z^1\right]$	$[[v_0,v_3,v_1]^*]$
$\left[w^1\right]$	0	$r_0^2 \pmod{2R}[[v_0,v_3,v_1]]^*$	0
$\left[r_0 z^1\right]$	$r_0^2 \pmod{2R}[[v_0,v_3,v_1]]^*$	$r_0^2 \pmod{2R}[[v_0,v_3,v_1]]^*$	0
$[[v_0,v_3,v_1]^*]$	0	0	0

(1) 当 $R = \mathbb{Z}_2$ 时,

$$\begin{aligned} H^*(K;\mathbb{Z}_2) &\simeq \mathbb{Z}_2[\varepsilon_K] \oplus \mathbb{Z}_2\left[w^1\right] \oplus \mathbb{Z}_2\left[z^1\right] \oplus \mathbb{Z}_2[[v_0,v_3,v_1]^*] \\ &\simeq \mathbb{Z}_2[x,y]/\langle x^3, y^2, x^2 - xy\rangle, \end{aligned}$$

其中同构关系为

$$x \leftrightsquigarrow \left[z^1\right], \quad y \leftrightsquigarrow \left[w^1\right], \quad x^2 = xy \leftrightsquigarrow [[v_0,v_3,v_1]^*].$$

(2) 当 $R = \mathbb{Z}$ 时, 由于 $\mathbb{Z}$ 是整环, $\{r \in R : 2r = 0\} = \{0\}$, 因此 $r_0 = 0$, 从而

$$\begin{aligned} H^*(K;\mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}[\varepsilon_K] \oplus \mathbb{Z}\left[w^1\right] \oplus \mathbb{Z}_2[[v_0,v_3,v_1]^*] \\ &\simeq \mathbb{Z}[y,z]/\langle y^2, 2z, z^2, yz\rangle, \end{aligned}$$

其中同构关系为

$$y \leftrightsquigarrow \left[w^1\right], \quad z \leftrightsquigarrow [[v_0,v_3,v_1]^*].$$

□

习题 56 验证奇异链水平上的卡积满足边缘公式:

$$\partial(\alpha \cap c) = (\delta\alpha) \cap c + (-1)^p \alpha \cap (\partial c), \quad \forall \alpha \in S^p(X;R), \forall c \in S_n(X;R).$$

证明 对任意 $\beta \in S^{n-p-1}(X;R)$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \beta, \partial(\alpha \cap c)\rangle &= \left\langle \partial^\# \beta, \alpha \cap c\right\rangle = \left\langle \left(\partial^\# \beta\right) \cup \alpha, c\right\rangle = (-1)^{n-p}\langle (\delta\beta) \cup \alpha, c\rangle \\ &= (-1)^{n-p}\left\langle \delta(\beta \cup \alpha) - (-1)^{n-p-1}\beta \cup (\delta\alpha), c\right\rangle \\ &= (-1)^p\left\langle \partial^\#(\beta \cup \alpha), c\right\rangle + \langle \beta \cup (\delta\alpha), c\rangle \\ &= (-1)^p \langle \beta \cup \alpha, \partial c\rangle + \langle \beta, (\delta\alpha) \cap c\rangle \\ &= \langle \beta, (-1)^p \alpha \cap \partial c\rangle + \langle \beta, (\delta\alpha) \cap c\rangle \\ &= \langle \beta, (\delta\alpha) \cap c + (-1)^p \alpha \cap (\partial c)\rangle. \end{aligned}$$

由 β 的任意性即得证. □

习题 57 验证 $H^p(X, X_1; R) \times H_n(X, X_1; R) \xrightarrow{\cap} H_{n-p}(X;R)$ 的良定性.

证明 对任意 $\alpha \in S^p(X, X_1; R)$, $\langle \alpha, S_p(X_1;R)\rangle = 0$. 由卡积的等价定义, 对任意 $\sigma \in S_n(X_1)$ 与 $r \in R$,

$$\alpha \cap (\sigma \otimes r) = (-1)^{p(n-p)}{}_{n-p}\sigma \langle \alpha, \sigma_p\rangle r = 0.$$

因此在链水平上有如下良定映射:

$$S^p(X,X_1;R)\times S_n(X,X_1;R)\xrightarrow{\cap}S_{n-p}(X;R).$$

进一步地, 若 $c\in Z_n(X,X_1;R)$, 即 $\partial c\in S_{n-1}(X_1;R)$, 则有

$$\partial(\alpha\cap c)=(\delta\alpha)\cap c+(-1)^p\underbrace{\alpha\cap(\partial c)}_{=0}=(\delta\alpha)\cap c.$$

于是卡积在以下两个情形下也是良定的:

$$Z^p(X,X_1;R)\times Z_n(X,X_1;R)\xrightarrow{\cap}Z_{n-p}(X;R),$$
$$B^p(X,X_1;R)\times Z_n(X,X_1;R)\xrightarrow{\cap}B_{n-p}(X;R).$$

此外, 还有

$$Z^p(X,X_1;R)\times B_n(X,X_1;R)\xrightarrow{\cap}0.$$

故卡积可定义在相对 (上) 同调水平上:

$$H^p(X,X_1;R)\times H_n(X,X_1;R)\xrightarrow{\cap}H_{n-p}(X;R).$$

□

习题 58 设 $(I,\leqslant)$ 为正向集, $\{M_i,\varphi_{j,i}\}$ 为链复形的正向系统, 其中 $\varphi_{j,i}:M_i\to M_j$ 为链映射, 则有 R-模同构

$$H_p\left(\varinjlim_{i\in I}M_i;R\right)\xrightarrow{\sim}\varinjlim_{i\in I}H_p(M_i;R).$$

证明 根据条件, 有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i,p} \arrow[r, "\partial_{i,p}"] \arrow[d, "\varphi_{j,i}"] & M_{i,p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{j,i}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{j,p} \arrow[r, "\partial_{j,p}"] & M_{j,p-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

记 $M=\varinjlim_{i\in I}M_i$. 对任意 $m\in M_p$, 存在 $i\in I$ 与 $m_i\in M_{i,p}$, 使得 $m=\varphi_i(m_i)$. 定义 $\partial_p(m)=\varphi_i\circ\partial_{i,p}(m_i)$, 这是良定的 (不依赖于 i 的选取), 因为对任意满足 $i\leqslant j$ 的 $j\in I$, 均有

$$\varphi_j\circ\partial_{j,p}\circ\varphi_{j,i}(m_i)=\varphi_j\circ\varphi_{j,i}\circ\partial_{i,p}(m_i)=\varphi_i\circ\partial_{i,p}(m_i).$$

如此定义的 ∂_p 显然是模同态. 对任意 $m\in M_p$, 存在 $i\in I$, 使得 $m=\varphi_i(m_i)$, 从而

$$\partial_{p-1}\circ\partial_p(m)=\partial_{p-1}(\varphi_i\circ\partial_{i,p}(m_i))\xlongequal{\partial_{p-1}\text{ 的定义}}\varphi_i\circ\partial_{i,p-1}\circ\partial_{i,p}(m_i)=\varphi_i(0)=0.$$

故 (M,∂) 也是一个复形. 由于取正向极限保持正合性, 对正合列

$$0\longrightarrow\ker\partial_{i,p}\xrightarrow{\text{包含}}M_{i,p}\xrightarrow{\partial_{i,p}}M_{i,p-1}$$

取正向极限可得正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \varinjlim\limits_{i\in I} \ker \partial_{i,p} \arrow[r, "包含"] \arrow[d, equal] & M_p \arrow[r, "\partial_p"] & M_{p-1} \\ & \ker \partial_p & & \end{tikzcd}$$

同样地, 对正合列

$$M_{i,p+1} \xrightarrow{\partial_{i,p+1}} \operatorname{im} \partial_{i,p+1} \longrightarrow 0$$

取正向极限可得正合列

$$M_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} \varinjlim_{i\in I} \operatorname{im} \partial_{i,p+1} \longrightarrow 0$$

由此可得

$$\operatorname{im} \partial_{p+1} = \varinjlim_{i\in I} \operatorname{im} \partial_{i,p+1}.$$

故我们得到

$$H_p(M;R) = \ker \partial_p / \operatorname{im} \partial_{p+1} = \left(\varinjlim_{i\in I} \ker \partial_{i,p}\right) \Big/ \left(\varinjlim_{i\in I} \operatorname{im} \partial_{i,p+1}\right).$$

另一方面, 对正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{i,p+1} \xrightarrow{包含} \ker \partial_{i,p} \xrightarrow{\pi_p} H_p(M_i) \longrightarrow 0$$

取正向极限可得正合列

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} \operatorname{im} \partial_{i,p+1} \xrightarrow{包含} \varinjlim_{i\in I} \ker \partial_{i,p} \xrightarrow{\pi} \varinjlim_{i\in I} H_p(M_i) \longrightarrow 0$$

于是得到 R-模同构

$$\varinjlim_{i\in I} H_p(M_i;R) \simeq \left(\varinjlim_{i\in I} \ker \partial_{i,p}\right) \Big/ \left(\varinjlim_{i\in I} \operatorname{im} \partial_{i,p+1}\right) \simeq H_p(M;R).$$

□

习题 59 设 M 为紧带边流形, 边界为 $\operatorname{Bd} M$, 内部为 $\operatorname{Int} M = M - \operatorname{Bd} M$. 证明:

$$H_c^q(\operatorname{Int} M;R) = H^q(M, \operatorname{Bd} M;R).$$

证明 用 $\operatorname{Bd} M \times [0,\delta)$ 表示 $\operatorname{Bd} M$ 在 M 中的管状邻域. 对任意 $\operatorname{Int} M$ 中紧集 K, 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $K \subset M - \operatorname{Bd} M \times [0,\varepsilon)$. 由于 $M - \operatorname{Bd} M \times [0,\varepsilon)$ 为 M 中闭集, 而 M 为紧流形, 因此 $M - \operatorname{Bd} M \times [0,\varepsilon)$ 为 M 中紧集, 也即 $\operatorname{Int} M - \operatorname{Bd} M \times (0,\varepsilon)$ 为 $\operatorname{Int} M$ 中紧集. 因此

$$\begin{aligned} H_c^q(\operatorname{Int} M;R) &= \varinjlim_{\varepsilon\to 0^+} H^q(\operatorname{Int} M, \operatorname{Int} M - (\operatorname{Int} M - \operatorname{Bd} M \times (0,\varepsilon));R) \\ &= \varinjlim_{\varepsilon\to 0^+} H^q(\operatorname{Int} M, \operatorname{Bd} M \times (0,\varepsilon);R). \end{aligned}$$

另一方面, 由于 $\overline{\operatorname{Bd} M} \subset \operatorname{Bd} M \times [0,\varepsilon)$, 由切除定理, 我们有

$$H^q(M, \operatorname{Bd} M \times [0,\varepsilon);R) \simeq H^q(\operatorname{Int} M, \operatorname{Bd} M \times (0,\varepsilon);R).$$

而 $\mathrm{Bd}\, M$ 是 $\mathrm{Bd}\, M \times [0, \varepsilon)$ 的强形变收缩核, 因此

$$H^q(M, \mathrm{Bd}\, M \times [0, \varepsilon); R) \simeq H^q(M, \mathrm{Bd}\, M; R).$$

综上所述, 我们有

$$H_c^q(\mathrm{Int}\, M; R) \simeq H^q(M, \mathrm{Bd}\, M; R).$$ □

习题 60 设 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 其中 $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ 为 X 中一族开集. 证明:

$$\varinjlim_i H_c^q(U_i; R) = H_c^q(X; R).$$

证明 由于

$$H_c^q(U_i; R) = \varinjlim_{K \Subset U_i} H^q(U_i, U_i - K; R) \xlongequal{\text{切除}} \varinjlim_{K \Subset U_i} H^q(X, X - K; R),$$

而由 $U_i \subset U_j$ $(\forall i \leqslant j)$ 可知 U_i 中的紧集也是 U_j 中的紧集, 即对 $i \leqslant j$, 有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
H_c^q(U_i; R) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_c^q(U_j; R) \arrow[dl] \\
& H_c^q(X; R) &
\end{tikzcd}$$

因此存在模同态

$$\Phi : \varinjlim_i H_c^q(U_i; R) \to H_c^q(X; R).$$

下证 Φ 既单又满, 从而 Φ 是模同构.

(1) 对任意 $[c] \in H_c^q(X; R)$, 由紧支上同调的定义, 存在 X 中紧集 K 与 $[c_K] \in H^q(X, X - K; R)$, 使得 $\varphi_K[c_K] = [c]$. 而对这个紧集 K, 存在 $i_1 < \cdots < i_N$, 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^{i_N} U_i$, 从而 K 为 U_{i_N} 中紧集. 于是由如下交换图表可知 Φ 为满射.

$$\begin{tikzcd}
& & H^q(X, X - K; R) \arrow[dl, "\varphi_{i_N, K}"'] \arrow[d, "\varphi_K"] & \boxed{[c_K]} \\
\boxed{\varphi_{i_N, K}[c_K]} & H_c^q(U_{i_N}; R) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^q(X; R) & \boxed{[c]} \\
& \varinjlim_i H_c^q(U_i; R) \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

(2) 假设 $[c] \in \varinjlim_i H_c^q(U_i; R)$ 满足 $\Phi[c] = 0$, 则存在 i 与 $[c_i] \in H_c^q(U_i; R)$, 使得 $\varphi_i[c_i] = [c]$. 进而存在 U_i 中紧集 K_i 与 $[c_{K_i}] \in H^q(X, X - K_i; R)$, 使得 $\varphi_{i, K_i}[c_{K_i}] = [c_i]$. 由假设, $\Phi \circ \varphi_i \circ \varphi_{i, K_i}[c_{K_i}] = 0$, 因此存在 X 中包含 K_i 的紧集 K 与 $[c_K] \in H^q(X, X - K; R)$, 使得 $[c_K] = 0$. 取充分大的 i_N 使得 $K \subset U_{i_N}$, 则 $[c_{i_N}] \coloneqq \varphi_{i_N, K}[c_K] = 0$. 于是 $\varphi_i[c_i] = \varphi_{i_N}[c_{i_N}] = 0$, 即 Φ 是单射. □

习题 61 设 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}U_i$, 其中 $U_1\subset U_2\subset\cdots$ 为 X 中一族开集. 证明:

$$\varinjlim_{i} H_{n-q}(U_i;R)=H_{n-q}(X;R).$$

证明 $\{H_{n-q}(U_i;R):i\in\mathbb{N}\}$ 在包含映射下显然构成一个正向系统, 包含映射诱导模同态

$$\phi:\varinjlim_{i} H_{n-q}(U_i;R)\to H_{n-q}(X_i;R).$$

下证 Φ 既单又满, 从而 Φ 是模同构.

(1) 对任意 $[z]\in H_{n-q}(X;R)$, 取其代表元 $z\in S_{n-q}(X;R)$. 存在 X 中紧集 K, 使得 $z\in S_{n-q}(K;R)$. 取充分大的 i_N, 使得 $K\subset I_{i_N}$, 则 $z\in S_{n-q}(U_{i_N};R)$. 取 $[z]_{i_N}\in H_{n-q}(U_{i_N};R)$, 使得 $(j_{i_N,X})_*[z]_{i_N}=[z]$. 于是 $\phi(\varphi_{i_N}[z]_{i_N})=(j_{i_N,X})_*[z]_{i_N}=[z]$, 即 ϕ 为满射.

(2) 假设 $[y]\in\varinjlim\limits_{i} H_{n-q}(U_i;R)$ 满足 $\phi[y]=0$, 则存在充分大的 i 与 $[y_i]\in H_{n-q}(U_i;R)$, 使得 $[y_i]\coloneqq(j_{i,N})_*[y_i]=0$. 因此存在 $z\in S_{n-q+1}(X;R)$, 使得 $y_i=\partial z$. 取充分大的 i_N, 使得 $z\in S_{n-q+1}(U_{i_N};R)$, 则 $(j_{i,i_N})_*[y_i]=0\in H_{n-q}(U_{i_N};R)$, 故 $[y]=0$, ϕ 是单射. $\square$