

第二届中科大中法班第一学期分析作业题集

Xavier Ye, Léonard Wang 等整理

2020-2021 年

目 录

I	作业题	1
1	10 月 9 日作业	2
2	10 月 16 日作业	3
3	10 月 23 日作业	4
4	10 月 30 日作业	5
5	11 月 6 日作业	6
6	11 月 13 日作业	7
7	11 月 20 日作业	8
8	12 月 2 日期中考试	9
9	12 月 4 日作业	10
10	12 月 11 日作业	11
11	12 月 18 日作业	12
12	12 月 25 日作业	13
13	3 月 6 日期末考试	14

II 参考答案	15
14 10月9日作业答案	16
15 10月16日作业答案	19
16 10月23日作业答案	23
17 10月30日作业答案	26
18 11月6日作业答案	29
19 11月13日作业答案	31
20 11月20日作业答案	34
21 12月2日期中考试答案	37
22 12月4日作业答案	40
23 12月11日作业答案	41
24 12月18日作业答案	44
25 12月25日作业答案	48
26 3月6日期末考试答案	52

Part I

作业题

Chapter 1

10 月 9 日作业

一、设 $I = [0, 1]$, A, B 为 I 的非空子集, $\Sigma = \{[0, a]\}_{a \in A} \cup \{(b, 1]\}_{b \in B}$ 是 I 的一个覆盖.
求证: Σ 必有有限子覆盖.

二、求下列和式的极限:

$$\begin{aligned} a) S_n &= \sum_{k=1}^n \sqrt{k}; & b) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}; & c) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}; & d) S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}; \\ e) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}; & f) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}; & g) S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k!. \end{aligned}$$

三、 $A = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$,

a) 求证: A 有上确界; b) 求出其上确界.

四、设实数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 分别收敛到 a, b , 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{n+1} = ab.$$

Chapter 2

10 月 16 日作业

一、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 一致连续, 求证: $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq a + b|x|.$$

二、 A 为 \mathbb{R} 的非空子集, 定义 $f(x) = \inf\{|y - x| : y \in A\}$, 求证: f 是 \mathbb{R} 上的连续函数.

三、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\exists a > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|$, 求证: f 是双射.

四、 I 为有界区间, f 为 I 上的一致连续函数, 求证: $f(I)$ 为有界区间.

五、 f 在 $[a, b]$ 连续, 令 $\omega : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\}$,

求证: ω 连续, 且 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

六、 a) f 在 0 处可导, $f(0) = 0$, 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ 存在并求其值.

b) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Chapter 3

10 月 23 日作业

一、 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(b) = g(a) = 0, \forall x \in (a, b), f(x)g(x) \neq 0$.

求证: $\exists \xi \in (a, b), \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.

二、 $f \in D([a, b], \mathbb{R}), f'(a) = f'(b)$. 求证: $\exists c \in (a, b)$, 满足

$$f(c) - f(a) = (c - a)f'(c).$$

三、 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 f 可导且 $f(0) = f'(0) = 0, \exists a > 0, f(a) = 0$.

求证: 在 f 图像上存在不同于原点的点, 使得其在该点处切线过原点.

四、 f 在 $(0, 1]$ 上可导且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f'(x) = l \in \mathbb{R}$. 求证: f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

五、 f 在 $(a, +\infty)$ 上可导且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + xf'(x)) = l \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

六、 f 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}, f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Chapter 4

10 月 30 日作业

一、设 $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为凹函数. 求证:

- a) 关于 x 的函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减;
b) $\forall x \geq 0, y \geq 0, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

二、设 u, v 均是 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数, $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \neq v(x), \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = a > 0$.

a) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^v - v^v}{u - v}$; b) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^v - v^u}{u^u - v^v}$.

三、设 $f \in C^1([-2, 2], \mathbb{R})$ 是凸函数, $g \in C^2([-2, 2], \mathbb{R})$, 满足

$$\exists M > 1, |g''| \leq M, \exists \epsilon < \frac{1}{10}, |f - g| \leq \epsilon.$$

求证: $\forall x \in [-1, 1], |f'(x) - g'(x)| \leq 2\sqrt{M\epsilon}$.

四、 $u \in C([-2, 2], \mathbb{R}), \forall x \in (-2, 2), \exists l_x(z) = az + b, \forall z \in (-2, 2), |u(z) - l_x(z)| \leq |z - x|^{1+\alpha}$.

求证: $u \in C^1((-1, 1), \mathbb{R})$, 且 $\forall x \in (-1, 1), y \in (-1, 1), |u'(x) - u'(y)| \leq 2|x - y|^\alpha$.

Chapter 5

11 月 6 日作业

一、对于给定实数 x_0 , 给出实数对 (a, b) , 使得 f 在 x_0 处可导, 其中,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq x_0 \\ ax + b, & x < x_0 \end{cases}.$$

二、开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 包含 0, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 处连续且

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A \in \mathbb{R}.$$

求证: f 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = A$.

三、 $f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 求证: $f^{(k)}(0)(k = 1, 2, \dots, n)$ 存在, $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

四、区间 $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是可导函数, 计算 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x + 3h) - f^2(x - h)}{h}$.

五、求证: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ 与 $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}}, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上均属 C^∞ 类.

Chapter 6

11 月 13 日作业

一、求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n}$.

二、求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + 8k^3}$.

三、求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n \sin \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

四、设 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 问 $|f|, f^2$ 在 $[a, b]$ 上是否 Riemann 可积?

五、设 $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ 及 $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ 均 Riemann 可积, 问 $g \circ f$ 是否 Riemann 可积?

六、设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Riemann 可积的. 求证: f 的所有连续点构成的集合在 $[a, b]$ 中稠密.

Chapter 7

11 月 20 日作业

一、设 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调减. 设 $0 < \alpha < \beta < 1$. 求证: $\int_0^\alpha f(x)dx \geq \frac{\alpha}{\beta} \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

二、设 $f \in C^1([0, 1])$, 求证: $\int_0^1 |f(x)|dx \leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)|dx, \left| \int_0^1 f(x)dx \right| \right\}$.

三、计算: (1) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$; (2) $\int_0^\pi \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin^2 x}$; (3) $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$.

四、设 $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. 且 $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M|\beta - \alpha|^{\frac{4}{3}}$. 求 f .

五、 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F(x) = \int_a^b f(x+t) \cos t dt$, $x \in [a, b]$. 求证 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 可导并求 $F'(x)$.

六、设 $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$. 求证: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)dx = \pi f(0)$.

七、求证: 当 $\lambda < 1$ 时, $\lim_{R \rightarrow +\infty} R^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta = 0$.

Chapter 8

12 月 2 日期中考试

一、计算极限: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+2)}{\ln x} \right)^x$; (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k+1) \right)^{\frac{1}{n}}$.

二、数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, a 是无理数.

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty$.

三、 $f(x)$ 在 $[a, b](a < b)$ 上可导, 且 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup_{[a,b]} f'(x)$.

求证: f 是仿射函数, 即 $\exists c, d \in \mathbb{R}, f(x) = cx + d$.

四、实数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n + x_{2020n} = \frac{2021}{2020n}$,

是否有 $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$?

五、 f 定义在 $[-1, 1]$ 上, 且在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2020x) - f(x)}{x} = 0$.

求证: f 在 $x = 0$ 处可导, 并求其导数.

六、 $f \in C^2([0, 1]), f(0) = 0, f(1) = 2020, F$ 是 f 的原函数.

(1) 求证: $\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) \right);$

(2) 求极限: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right).$

Chapter 9

12月4日作业

一、设 $r = a(1 + \cos \theta)$ 是极坐标下的曲线, 其中 $a > 0$, 求:

- (1) 曲线围成的面积;
- (2) 曲线的周长;
- (3) 曲线绕极轴旋转一周所转形成的旋转体的体积;
- (4) 曲线绕极轴旋转一周所转形成的旋转体的表面积.

二、求: (1) 半圆 $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ 的重心; (2) 半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ 的重心.

三、求半球 $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的重心.

Chapter 10

12 月 11 日作业

一、计算极限

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cdot x e^{\frac{1}{1-\sin x}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow e^-} (\ln x)^{\ln(e-x)}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x - x^2) + x - \ln x}.$

二、极限展开

1. $\frac{1}{1 - x^2 - x^3}$ 在 0 处展开到 7 阶.

2. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ 在 1 处展开到 3 阶.

3. $\arctan(\cos x)$ 在 0 处展开到 5 阶.

4. $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ 在 0 处展开到 10 阶.

5. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ 在 0 处展开到 100 阶.

三、求函数在 0 附近的简单等价量 (形如 $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$)

1. $(\sin x)^{x-x^2} - (x - x^2)^{\sin x}.$

2. $\tan(\sin x) - \sin(\tan x).$

Chapter 11

12 月 18 日作业

一、根据通项公式判断相应级数的敛散性

$$1. \quad u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}. \quad 2. \quad u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$3. \quad u_n = \sqrt[4]{n^4 + 2n^2} - \sqrt[3]{p(n)}. \text{ 其中 } p \text{ 是一多项式.}$$

二、根据通项公式判断相应级数的敛散性并求和（如果收敛）

通项为 $u_n = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$, 其中 $n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

三、根据通项公式判断相应级数的敛散性

通项为 $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

四、计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$1. \quad \text{求 } a, b \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt.$$

$$2. \quad \text{若 } \frac{t}{2\pi} \notin \mathbb{Z}. \text{ 求证: } \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

$$3. \quad \text{求证: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0. \text{ 其中 } g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

$$4. \quad \text{计算 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Chapter 12

12 月 25 日作业

一、数列 $(u_n)_{n \geq 3}$ 的通项为 $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n}$.

1. 求 $n \rightarrow +\infty$ 时 u_n 的简单等价量. 2. 记 $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$. 求证: $(v_n)_{n \geq 3}$ 收敛.

3. 记 $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. 求 $n \rightarrow +\infty$ 时 $v_n - l$ 的等价量.

二、设级数 $\sum_{n \geq 1} n u_n$ 收敛. 求证: $\sum_{n \geq 1} u_n$ 收敛.

三、设 $(u_n)_{n \geq 1}$ 是一个非负的递减序列, 且 $\sum_{n \geq 1} u_n$ 收敛.

1. 求证: $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛且等于 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

四、求证: $n! = \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

五、设 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 为复值序列, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = l \in \mathbb{C}$.

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right) = l$.

六、对 $n \in \mathbb{N}_{>1}$, 定义 $p(n) = \max\{p : p \text{是素数且 } p|n\}$. 求证: $\sum_{n>1} \frac{1}{np(n)}$ 收敛.

Chapter 13

3 月 6 日期末考试

一、 1. 给定实数 $a > 1, b > 1$, 计算积分 $\int_0^\pi \frac{a - \cos x}{b - \cos x} dx$.

2. 设 $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}} dt$, 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

二、设 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 黎曼可积, 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$. 是否有 $\int_0^1 f(x)x^n dx = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$?

请给出证明或者反例.

三、设 $a > 0, f \in C([0, a], \mathbb{R})$, 是否有以下不等式成立: $|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)| dx + \int_0^1 |f'(x)| dx$?

请给出证明或者反例.

四、求 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使得 $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

五、判断敛散性 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos \ln n + \sin \ln n}{n}$. 2. $\sum_{n \geq 1} a_n^{\frac{n-3}{n}}$. 其中 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 是收敛的正项级数.

六、 \mathbb{R} 上常微分方程求解 1. $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$. 2. $y'' - 2y' + y = xe^x$.

七、设 $f \in C([0, +\infty), \mathbb{R}), L \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = L$. 求 f 在 $+\infty$ 处等价量.

Part II

参考答案

Chapter 14

10 月 9 日作业答案

一、证明: 记 $\alpha = \sup A, \beta = \inf B,$

i) 若 $\alpha \leq \beta$, 取 c 使

$$\alpha \leq c \leq \beta,$$

则 c 不被 Σ 覆盖到, 矛盾!

ii) 若 $\alpha > \beta$, 则

$$\exists a \in A, b \in B, a > b,$$

那么 $\{[0, a), (b, 1]\}$ 即为 Σ 的有限子覆盖.

二、解答: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty;$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty;$

c) $\frac{1}{2n} = \frac{n}{n^2 + n^2} < S_n < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0;$

d) $\frac{1}{4n} = \frac{n}{(2n)^2} < S_n < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0;$

e) $\frac{n}{n+1} = \frac{n \cdot n}{n^2 + n} < S_n < \frac{n \cdot n}{n^2} = 1$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$;

f) $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < S_n < \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$;

g) 由 S_n 表达式知

$$S_{n+1} + S_n = (n+1)!, S_{n+2} + S_{n+1} = (n+2)!,$$

故

$$S_{n+2} = S_n + (n+1) \cdot (n+1)!,$$

由此易推知

$$S_{2n+1} = \sum_{i=0}^n 2i \cdot (2i)!,$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = +\infty$, 同理 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

三、解答: a) $\forall x \in A$, 存在 $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, 使得

$$x = \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \leq \frac{mn}{2mn + 1} < \frac{1}{2},$$

从而 $\frac{1}{2}$ 是 A 的一个上界, 由 A 是 \mathbb{R} 子集, 由确界原理知 A 有上确界.

b) 记 $a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}, a_n \in A$,

$\forall l < \frac{1}{2}$, 记 $l = \frac{1}{2} - \epsilon$, 取 n 使

$$2n^2 + 1 > \frac{1}{2\epsilon},$$

得 $a_n > l$, 从而 l 不是 A 上界, 而 $\frac{1}{2}$ 是 A 的一个上界, 故 $\sup A = \frac{1}{2}$.

四、证明: 由于 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 分别收敛到 a, b ,

得 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n - b)_{n \in \mathbb{N}}$ 均有界, 故存在 $M > 0$, 满足

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < M, |b_n| < M, |a_n - a| < M, |b_n - b| < M, |a| < M, |b| < M,$$

考虑 $\forall \epsilon > 0$, 记 $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{4M}$, 有

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, n > N_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon_0, |b_n - b| < \epsilon_0,$$

则 $0 \leq k \leq N_0, n - k > N_0$ 时,

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leq |a_k| |b_{n-k} - b| + |b| |a_k - a| < M(M + \epsilon_0),$$

同理, $0 \leq n - k \leq N_0, k > N_0$ 时,

$$|a_k b_{n-k} - ab| < M(M + \epsilon_0),$$

此外, $k > N_0, n - k > N_0$ 时,

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leq |a_k| |b_{n-k} - b| + |b| |a_k - a| < 2M\epsilon_0,$$

则 $n > 2N_0 + 1$ 时,

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{n+1} - ab \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k} - ab| \leq 2M\epsilon_0 \cdot \frac{n-N_0}{n+1} + \frac{2M^2(N_0+1)}{n+1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M^2(N_0+1)}{n+1},$$

取 $N = \max\{2N_0 + 1, \left\lceil \frac{4M^2(N_0+1)}{\epsilon} \right\rceil\}$, 有 $\forall n > N$ 时,

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{n+1} - ab \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M^2(N_0+1)}{n+1} < \epsilon,$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{n+1} = ab.$$

注记: 将题中“实数列”改为“复数列”, 结论仍然正确.

Chapter 15

10 月 16 日作业答案

一、证明：由于 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 一致连续，

$$\exists \delta > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1,$$

记 $\alpha = \sup_{x \in (-\delta, \delta)} \{|f(x) - f(0)|\}$, 则 $\alpha \geq 0$, 取

$$a = |f(0)| + \alpha, b = \frac{1}{\delta},$$

对 $x \in \mathbb{R}$, 若 $|f(x)| \leq |f(0)|$, 则 $|f(x)| \leq a + b|x|$,

若 $|f(x)| > |f(0)|$, 则 $x \neq 0$, 记 $n = \left[\frac{|x|}{\delta} \right] \leq \frac{|x|}{\delta}$,

则 $|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)|$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^t \left| f\left(x - (i-1)\frac{x}{|x|}\delta\right) - f\left(x - (i)\frac{x}{|x|}\delta\right) \right| + \left| f\left(x - n\frac{x}{|x|}\delta\right) - f(0) \right| \\ &\leq n + \alpha \leq \frac{|x|}{\delta} + \alpha \end{aligned}$$

即 $|f(x)| \leq a + b|x|$, 原题得证.

二、证明: $\forall \epsilon > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall y \in A, |x_1 - x_2| < \epsilon \Rightarrow ||y - x_1| - |y - x_2|| \leq |x_1 - x_2| < \epsilon$,
故

$$|y - x_1| - \epsilon < |y - x_2| < |y - x_1| + \epsilon,$$

如果 $\inf\{|y - x_1| : y \in A\} - \epsilon < \inf\{|y - x_2| : y \in A\}$,

取

$$\delta = \inf\{|y - x_1| : y \in A\} - \epsilon - \inf\{|y - x_2| : y \in A\},$$

则 $\exists y_1 \in A, y_2 \in A,$

$$\begin{aligned}\inf\{|y - x_1| : y \in A\} &\leq |y_1 - x_1| \leq |y_2 - x_2| + \epsilon \\ &< \inf\{|y - x_2| : y \in A\} + \epsilon + \delta \\ &< \inf\{|y - x_1| : y \in A\},\end{aligned}$$

矛盾!

如果 $\inf\{|y - x_2| : y \in A\} > \inf\{|y - x_1| : y \in A\} + \epsilon$, 类似得矛盾!

故

$$\inf\{|y - x_1| : y \in A\} - \epsilon \leq \inf\{|y - x_2| : y \in A\} \leq \inf\{|y - x_1| : y \in A\} + \epsilon,$$

即 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$, 故 f 在 \mathbb{R} 上一致连续, 自然是连续的.

三、证明: 先证明 f 是单射, 用反证法, 假设

$$\exists x \neq y, f(x) = f(y),$$

则

$$0 = |f(x) - f(y)| \geq a|x - y| > 0,$$

矛盾! 故 f 是单射.

由于 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续单射必然严格单调, 不妨设 f 是严格增的,

若 f 有上界, 取严格增的序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty,$$

则序列 $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 严格单调增且有上界, 故其收敛, 为柯西列,

即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_{n+p})| < \epsilon,$$

由

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \exists p \in \mathbb{N}, x_{N+p} - x_N \geq \frac{\epsilon}{a},$$

有

$$\epsilon > |f(x_N) - f(x_{N+p})| \geq a|x_N - x_{N+p}| \geq \epsilon,$$

矛盾!

若 f 有下界, 取严格减的序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$, 与上类似得矛盾!
故 f 既无上界又无下界, 即

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, f(x) < -|m| \leq m \leq |m| < f(y),$$

由 f 连续性应用介值定理知, $m \in f(\mathbb{R})$, 故 f 是满射, 从而 f 是双射.

四、证明: 由 I 是区间,

$$\forall x \in I, y \in I, x < y, x < z < y \Rightarrow z \in I,$$

设 $m \in f(I), n \in f(I), m < n, m = f(x), n = f(y)$,

$\forall m < p < n$, 由介值定理, $\exists z, x < z < y$ 或 $x > z > y, p = f(z) \in f(I)$, 故 $f(I)$ 是区间,

设 $\inf I = \alpha, \sup I = \beta$, 任取 $\epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in I, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$,
取 $a \in I, b \in I, a \leq b$ 满足

$$\alpha + \delta > a > \alpha, \beta - \delta < b < \beta,$$

则由于 f 在 $[a, b]$ 上是一致连续函数, 其必然在 $[a, b]$ 上有界,

又由 $\alpha + \delta > a > \alpha, x \in I \cap (-\infty, a) \Rightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$,

故 f 在 $I \cap (-\infty, a)$ 上有界, 同理其在 $I \cap (b, +\infty)$ 上有界, 因此 f 在 I 上有界,

综上, $f(I)$ 是有界区间.

五、证明: 由 f 为闭区间上的连续函数, f 一致连续,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \Delta > 0, |x - y| \leq \Delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon,$$

故

$$\forall \delta_1 > \delta_2, |\delta_1 - \delta_2| < \Delta, \forall x < y, |x - y| \leq \delta_1, \exists z, x < z < y, |x - z| \leq \delta_2, |y - z| \leq \Delta,$$

有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + \epsilon,$$

故 $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) + \epsilon$, 而由 $\delta_1 > \delta_2$ 易知 $\omega(\delta_1) \geq \omega(\delta_2)$, 故 $|\omega(\delta_1) - \omega(\delta_2)| < \epsilon$, 故 ω 右半连续,
同理其左半连续.

$$\forall \epsilon' > 0, \exists d > 0, |x - y| \leq d \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon', \text{ 则 } \delta \leq d \Rightarrow \omega(\delta) \leq \epsilon', \text{ 故 } \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0.$$

六、解答: a) 设 $f'(0) = t \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = t,$$

从而

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x < \delta \Rightarrow x(t - \epsilon) < f(x) < x(t + \epsilon),$$

取

$$N = \frac{1}{\delta}, n > N \Rightarrow \forall k \in [0, n], \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \delta,$$

此时

$$\frac{n+1}{2n}(t - \epsilon) \leq S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n+1}{2n}(t + \epsilon),$$

取极限,

$$\frac{1}{2}(t - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{1}{2}(t + \epsilon),$$

由 ϵ 任意性,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}f'(0).$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} (\ln(1+x))' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}.$$

Chapter 16

10 月 23 日作业答案

一、证明：由于 f, g 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，
有 $h(x) = f(x)g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，
又由于

$$f(a)g(a) = f(b)g(b) = 0,$$

由 Rolle 定理，

$$\exists \xi \in (a, b), h'(\xi) = 0,$$

即

$$f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0,$$

由于 $f(\xi)g(\xi) \neq 0$, $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.

二、证明：对于 $x \in [a, b]$, 定义

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, x \neq a; g(a) = f'(a),$$

则 g 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，原题即要证明 $\exists c \in (a, b), g'(c) = 0$, 用反证法，结合导数的 Darboux 性质，不妨假设

$$g'(x) > 0, \forall x \in (a, b),$$

则

$$\forall c \in (a, b), \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

且

$$g(a) < g(b),$$

由于

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f(c) - f(a)}{c-a} \cdot \frac{c-a}{b-a} + \frac{f(b) - f(c)}{b-c} \cdot \frac{b-c}{b-a},$$

有

$$\forall c \in (a, b), \frac{f(b) - f(c)}{b-c} > \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

则

$$f'(a) = g(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \lim_{c \rightarrow b} \frac{f(b) - f(c)}{b-c} = f'(b) = f'(a),$$

矛盾! 此矛盾表明原题得证.

三、证明: 记 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$,

则 g 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 上可导, $g(0) = g(a) = 0$,

由 Rolle 定理,

$$\exists b \in (0, a), g'(b) = 0,$$

得

$$f(b) = bf'(b),$$

故 f 图像在 $(b, f(b))$ 处切线过原点.

四、证明: 由已知得, $\exists \delta_0, 0 < x < \delta_0 \implies \sqrt{x}f'(x) \in (l-1, l+1)$,

任取 $0 < n < m < \delta_0$, 由 Cauchy 中值定理得:

$$\exists x \in (n, m), \frac{f(m) - f(n)}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} = 2\sqrt{x}f'(x) \in (2l-2, 2l+2),$$

由此得

$$|f(m) - f(n)| < 2\sqrt{m}(|l|+1),$$

$\forall \epsilon > 0$, 设 δ' 满足 $2\sqrt{\delta'}(|l|+1) < \frac{\epsilon}{2}$, 取 $\delta_1 = \min\{\delta_0, \delta'\}$,

则

$$x \in (0, \delta_1], y \in (0, \delta_1] \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\epsilon,$$

由于 f 在 $[\delta_1, 1]$ 上一致连续,

$$\exists \delta_2, \forall x \in [\delta_1, 1], y \in [\delta_1, 1], |x-y| < \delta_2 \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\epsilon,$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则

$$x \in (0, 1], y \in (0, 1], |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

故 f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

五、证明: 条件即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x))' = l$,

故

$$\forall \epsilon > 0, \text{记 } \epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}, \exists M > 0, x \geq M \implies (xf(x))' \in (l - \epsilon_0, l + \epsilon_0),$$

利用 Lagrange 中值定理, 取 $M < y$, 知:

$$\exists x \in (M, y), \frac{yf(y) - Mf(M)}{y - M} = (xf(x))' \in (l - \epsilon_0, l + \epsilon_0),$$

整理得:

$$\frac{M(f(M) - l + \epsilon_0)}{y} - \epsilon_0 < f(y) - l < \frac{M(f(M) - l - \epsilon_0)}{y} + \epsilon_0,$$

记

$$P = -\frac{M(f(M) - l + \epsilon_0)}{\epsilon_0}, Q = \frac{M(f(M) - l - \epsilon_0)}{\epsilon_0},$$

则

$$y > \max\{M, P, Q\} \implies |f(x) - l| < \epsilon,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

六、证明: 用反证法, 不妨假设

$$\exists a > 0, \forall N > 0, \exists x > N, f'(x) > a,$$

设 $M > 0$ 满足 $\forall x \in \mathbb{R}, |f''(x)| < M$, 取数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

且

$$f'(x_n) > a,$$

则在区间 $[x_n, x_n + \frac{a}{2M}]$ 上, $f'(x) > \frac{a}{2}$, 由 Lagrange 中值定理,

$$\exists y_n \in [x_n, x_n + \frac{a}{2M}], \frac{a}{2} < f'(y_n) = \frac{2M}{a} \left(f(x_n + \frac{a}{2M}) - f(x_n) \right),$$

但由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R},$$

有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(x_n + \frac{a}{2M}) - f(x_n) \right) = 0,$$

这便导出了矛盾.

Chapter 17

10 月 30 日作业答案

一、证明: a) 设 $0 < x < y$, 记 $\lambda = \frac{x}{y} \in (0, 1)$, 则

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) \cdot 0,$$

由于 f 是凹函数,

$$yf(x) - xf(y) \geq y\lambda f(y) + (1 - \lambda)yf(0) - \lambda yf(y) = (1 - \lambda)yf(0) \geq 0,$$

从而

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(y)}{y},$$

故函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减.

b) 若 $xy = 0$, 该式显然成立, 下考虑 $x > 0, y > 0$ 的情形,

即证:

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{x+y} + \frac{f(y)}{y} \cdot \frac{y}{x+y},$$

由

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x}, \quad \frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y}$$

即得.

二、解答: a) 任取 $x_n \rightarrow 0$, 有

$$u_n = u(x_n) \rightarrow a, v_n = v(x_n) \rightarrow a,$$

故 $\exists N \in \mathbb{N}_{>0}, n > N \implies v_n > 0$, 记 $f_n(t) = t^{v_n}, n > N$,

由于 f_n 在 \mathbb{R} 上可导, 用 Lagrange 中值定理:

$$\exists w_n, (u_n - w_n)(v_n - w_n) < 0, v_n \cdot w_n^{v_n-1} = f'(w_n) = \frac{u_n^{v_n} - v_n^{v_n}}{u_n - v_n},$$

由于 $w_n \rightarrow a, \frac{u_n^{v_n} - v_n^{v_n}}{u_n - v_n} \rightarrow a^a$, 由 x_n 任意性,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^v - v^u}{u - v} = a^a.$$

b) 用与 a) 完全类似的方法, 可以证明

$$\lim \frac{v^v - u^u}{u - v} = -a^a \ln a,$$

$$\lim \frac{u^u - v^v}{u - v} = a^a(1 + \ln a),$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^v - v^u}{u^u - v^v} = \frac{1 - \ln a}{1 + \ln a}.$$

三、证明: 若 $\exists x \in [-1, 1], f'(x) - g'(x) > 2\sqrt{M\epsilon}$, 由 $|g''| \leq M$, 且 f 为凸函数, 有

$$\forall y > x, y \in [-2, 2], f'(y) - g'(y) > h'(x) - M(y - x),$$

记 $h(x) = f(x) - g(x)$, 任取 $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

由 Lagrange 中值定理, 对 $i = 1, 2, \dots, n, \exists \xi_i \in (x + \frac{i-1}{n} \cdot \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}, x + \frac{i}{n} \cdot \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M})$, 满足;

$$h'(\xi_i) \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{nM} = h(x + \frac{i}{n} \cdot \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}) - h(x + \frac{i-1}{n} \cdot \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}),$$

而 $h'(\xi_i) > h'(x) - M \frac{i \cdot 2\sqrt{M\epsilon}}{nM}$, 故可得

$$h(x + \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}) - h(x) > \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M} h'(x) - 2\epsilon \cdot \frac{n+1}{n},$$

由 n 的任意性,

$$h(x + \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}) - h(x) \geq \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M} h'(x) - 2\epsilon > 2\epsilon,$$

与 $|f - g| \leq \epsilon$ 矛盾! 若 $\exists x \in [-1, 1], g'(x) - f'(x) > 2\sqrt{M\epsilon}$, 可类似得矛盾,
故 $\forall x \in [-1, 1], |f'(x) - g'(x)| \leq 2\sqrt{M\epsilon}$.

四、证明: 首先, 我们证明 u 可导: 这是因为

$$\frac{u(z) - u(x)}{z - x} = \frac{u(z) - l_x(z)}{z - x} + \frac{l_x(z) - u(x)}{z - x},$$

故

$$0 \leq \left| \frac{u(z) - u(x)}{z - x} - a \right| = \left| \frac{u(z) - l_x(z)}{z - x} \right| \leq |z - x|^\alpha,$$

由此可得 $u'(x) = a$.

此外, 我们还得到了 l_x 的刻画, 有

$$l_x(z) = u'(x)z + u(x) - xu'(x),$$

带入条件化简得:

$$\left| \frac{u(z) - u(x)}{z - x} - u'(x) \right| \leq |z - x|^\alpha, \forall x \in (-2, 2), z \in (-2, 2),$$

交换 x, z 顺序, 得

$$\left| \frac{u(z) - u(x)}{z - x} - u'(z) \right| \leq |z - x|^\alpha,$$

故有

$$|u'(x) - u'(z)| \leq 2|x - z|^\alpha,$$

由此便可推出 u' 的连续性, 于是 $u \in C^1((-1, 1), \mathbb{R})$.

Chapter 18

11 月 6 日作业答案

一、解答: 列方程 $\begin{cases} x_0^2 = ax_0 + b \\ 2x_0 = a \end{cases}$, 解得 $(a, b) = (2x_0, -x_0^2)$.

二、证明: 由已知得

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x| < \delta, n \in \mathbb{N} \implies \frac{f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{|x|}{2^{n+1}}} \in (A - \epsilon, A + \epsilon).$$

对 $x > 0, f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}}) \in ((A - \epsilon)\frac{x}{2^{n+1}}, (A + \epsilon)\frac{x}{2^{n+1}})$,

由此得

$$f(x) - f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})) \in [(A - \epsilon)x, (A + \epsilon)x],$$

从而由 ϵ 任意性得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$, 对 $x < 0$ 类似得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$,
故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$, 证毕.

三、证明: 我们用数学归纳法证明:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 与 } g_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 均满足本题结论.}$$

$$n = 1 \text{ 时, } f'_1(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 存在, 在 } 0 \text{ 处不连续,}$$

故 $f''(0)$ 不存在. g 类似.

下面假设命题对 $n (\geq 1)$ 成立, 则对 $n + 1$: $f'_{n+1}(x) = 2(n+1)x f_n(x) - g_n(x)$,

$f^{(k)}(0)(k=1, 2, \dots, n)$ 存在, 由 Lebniz 公式得 $(2nx f_n(x))^{(k)}(0)(k=1, 2, \dots, n+1)$ 存在, 对 $g_n(x)$ 用归纳假设即得 $f_{n+1}^{(k)}(0)(k=1, 2, \dots, n+1)$ 存在, $f_{n+1}^{(n+2)}(0)$ 不存在. g_{n+1} 类似. 综上所述, 原题得证.

四、解答:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+3h) - f(x-h))(f(x+3h) + f(x-h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+3h) + f(x-h)) \\ &= 2f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h} = f'(x), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x),$$

我们有:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h} = 4f'(x),$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h} = 8f(x)f'(x).$$

五、证明: 注意 f 是偶函数, 我们给出两个命题, 由这两个命题可证明原题关于 f 的部分. 对于关于 g 的部分的证明是类似的.

- (一) 对 $x \in \mathbb{R}, |x| < 1, n \in \mathbb{N}^+$, $(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)$ 存在且连续, 且在 1 处极限为 0,
- (二) $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)}{x-1} = 0$.

注意到 (二) 可由 (一) 及 L'Hospital 法则得到, 我们证明 (一) 即可.

记 $h_1 = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, 有 $h_1 \in C^1(-1, 1)$, 定义

$$h_{n+1} = h'_n + h_1 h_n,$$

可用归纳法证明: h_n 均可写为有限个 $\frac{kx^s}{(x^2-1)^t}$ 之和, 其中 $k \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$,

故 $h_n \in C^1(-1, 1)$, 且有 $(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x) = h_n(x) \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

由于

$$\forall t \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^t} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u \cdot u^t = 0,$$

故对 $x \in \mathbb{R}, |x| < 1, n \in \mathbb{N}^+$, $(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)$ 存在且连续, 且在 1 处极限为 0, 原题得证!

Chapter 19

11 月 13 日作业答案

一、解答:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin \frac{k\pi}{n} = \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx \\ &= \left(\frac{(2 - \pi^2 x^2) \cos(\pi x) + 2\pi x \sin(\pi x)}{\pi^3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

二、解答:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + 8k^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + 8\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \int_0^1 \frac{x^2}{1 + 8x^3} dx = \left(\frac{1}{24} \ln(1 + 8x^3) \right) \Big|_0^1 = \frac{\ln 3}{12}.$$

三、解答:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n \sin \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sin \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = e^{-\frac{1}{x}} \Big|_0^1 = \frac{1}{e}.$$

四、解答: $|f|$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, f^2 在 $[a, b]$ 也 Riemann 可积.

引理: f 及 g 在 $[a, b]$ 上均 Riemann 可积, 则 $f \cdot g$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

引理的证明: f 及 g 在 $[a, b]$ 上均 Riemann 可积 $\implies \exists M > 0, |f| < M, |g| < M$.

此外, $\forall \epsilon > 0, \exists$ 阶梯函数 $F, G, I, J, |f - F| < I, |g - G| < J, |F| < 2M$, 且

$$\int_a^b I < \frac{\epsilon}{4M}, \int_a^b J < \frac{\epsilon}{4M}.$$

(对满足上述除 $|F| < 2M$ 但满足其他条件的 (F, I) ,

考虑 $\hat{F}(x) = F(x)$, 当 $I(x) \leq M$, 否则 $\hat{F}(x) = 0$, 以 \hat{F} 代替 F 即可.)

则 $|fg - FG| \leq |g||f - F| + |F||g - G| < MI + 2MJ$, 且

$$\int_a^b (MI + 2MJ) < \epsilon,$$

故 $f \cdot g$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

回到原题, 由引理, $f^2 = f \cdot f$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

而 f 是 Riemann 可积的 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists$ 阶梯函数 I, J ,

$$|f(x) - I(x)| \leq J(x), \int_a^b J(x) \leq \epsilon.$$

则

$$||f(x)| - |I(x)|| \leq |f(x) - I(x)| \leq J(x), \int_a^b J(x) \leq \epsilon,$$

故 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上仍 Riemann 可积.

五、解答: 答案是否定的. 令 $a = c = 1, b = d = 0$.

$$\text{取 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \neq 0, x = \frac{m}{n}, \gcd(m, n) = 1, (m, n) \in \mathbb{N}_+^2 \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

则有

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

再取 $g(x) = 1, x > 0; g(0) = 0$, 则

$$\int_0^1 g(x) dx = 1.$$

但

$$g \circ f = \begin{cases} 1, & x \neq 0, x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

不是 Riemann 可积的 (由于其是处处不连续的, 见第 6 题),

这便构造出了反例.

六、证明: 用反证法, 假设结论不成立, 则存在 $a \leq c < d \leq b, f$ 在 $[c, d]$ 上处处不连续.

由于 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 有 f 在 $[c, d]$ 上 Riemann 可积, 且 f 有界.

我们知: 存在闭区间 $I_1 \subset [c, d]$, $\sup_{x \in I_1} f(x) - \inf_{x \in I_1} f(x) < 1$,

(否则 f 对任意划分的达布上和与达布下和相差至少为 $d - c$, 与其 Riemann 可积矛盾!)

下设已有闭区间 $I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1$, $\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) < \frac{1}{k}$,

取 $I_{n+1} \subset I_n$, $\sup_{x \in I_{n+1}} f(x) - \inf_{x \in I_{n+1}} f(x) < \frac{1}{n+1}$ (存在性的证明与 I_1 类似),

这便得到一个闭区间套, 由闭区间套定理, $\exists x, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n$,

则 f 在 $x \in [c, d]$ 处连续, 矛盾! 于是 f 的所有连续点构成的集合在 $[a, b]$ 中稠密.

Chapter 20

11 月 20 日作业答案

一、证明: $\int_0^\alpha f(x)dx \geq \int_0^\alpha f(\alpha)dx \geq f(\alpha)\alpha \geq \frac{\alpha}{\beta}(\alpha - \beta)f(\alpha) \geq \frac{\alpha}{\beta} \int_\alpha^\beta f(\alpha)dx \geq \frac{\alpha}{\beta} \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

二、证明: 若 f 在 $[0, 1]$ 上恒非负或恒非正, 则有

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \left| \int_0^1 f(x)dx \right|.$$

若不然, 则 $\exists t \in [0, 1], f(t) = 0$,

$$|f(x)| = \left| \int_t^x f'(s)ds \right| \leq \left| \int_t^x |f'(s)|ds \right| \leq \int_0^1 |f'(x)|dx,$$

故

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx.$$

综上

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)|dx, \left| \int_0^1 f(x)dx \right| \right\}.$$

三、解答:

$$\begin{aligned} (1) \text{ 原式} &= \int_0^{\ln 2} \frac{\sqrt{1 - e^{-2x}}}{e^x} de^x = \int_1^2 \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^2} dt = \sqrt{t^2 - 1} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \\ &= \sqrt{t^2 - 1} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 + \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \Big|_1^2 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \text{ 原式} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin x(1+\cos^2 x)} d\cos x = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}(1+t^2)} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)(1+u)}} du (\text{令 } u=t^2) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{v^2+2} dv (\text{令 } v=\sqrt{\frac{1-u}{u}}) \\
&= \sqrt{2} \arctan \frac{v}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$(3) \text{ 原式} = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} \sqrt{2x-1} d\sqrt{2x-1} = \int_0^1 e^t t dt = (t-1)e^t \Big|_0^1 = 1.$$

$$\begin{aligned}
(4) \text{ 原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d\tan x = \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\
&= \frac{1}{2} (x \tan x + \ln \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi - 2 \ln 2}{8}.
\end{aligned}$$

四、解答: 记 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 得

$$\left| \frac{F(x) - F(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|^{\frac{1}{3}},$$

故 $f(x) = F'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

五、证明: 有

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(y)}{x - y} &= \frac{1}{x - y} \left(\int_{a+x}^{b+x} f(s) (\cos(s-x) - \cos(s-y)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{a+x}^{a+y} f(s) \cos(s-y) ds - \int_{b+x}^{b+y} f(s) \cos(s-y) ds \right).
\end{aligned}$$

由于 f 在 $[a+x, b+x]$ 连续, 其自然是有限的. 故

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{x - y} \left(\int_{a+x}^{b+x} f(s) (\cos(s-x) - \cos(s-y)) ds \right) = \int_{a+x}^{b+x} f(s) \sin(s-x) ds.$$

同时有:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{x - y} \left(\int_{a+x}^{a+y} f(s) \cos(s-y) ds - \int_{b+x}^{b+y} f(s) \cos(s-y) ds \right) = -f(a+x) \cos a + f(b+x) \cos b.$$

于是 F 可导, $F'(x) = \int_a^b f(x+t) \sin t dt + f(b+x) \cos b - f(a+x) \cos a$.

六、证明: 由于

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-1}^1 = \pi,$$

不妨 $f(0) = 0$. $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$, 故 $\exists M \in \mathbb{R}, |f| \leq M$, 考虑 $0 < h < 1$.

$$\left| \int_{-1}^{-\sqrt{h}} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx \right| \leq M \int_{-1}^{-\sqrt{h}} \frac{h}{h^2 + x^2} dx = M \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-1}^{-\sqrt{h}} = M \arctan \frac{\sqrt{h} - h}{1 + h^{\frac{3}{2}}} \leq M\sqrt{h}.$$

同理,

$$\left| \int_{\sqrt{h}}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx \right| \leq M\sqrt{h}.$$

由积分第一中值定理:

$$\exists \xi \in (-\sqrt{h}, \sqrt{h}), \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = f(\xi) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = 2f(\xi) \arctan \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

因此,

$$\left| \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx \right| \leq \pi |f(\xi)|,$$

于是,

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx \right| \leq 2M\sqrt{h} + \pi |f(\xi)|.$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 则 $\xi \rightarrow 0^+$, 利用 f 连续性即得

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = 0,$$

七、证明: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, e^{-R \sin \theta} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}).$$

故 $R > 0$ 时, $0 < R^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{2R^{1-\lambda}} (1 - e^{-R})$. 故 $\lim_{R \rightarrow +\infty} R^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta = 0$.

Chapter 21

12 月 2 日期中考试答案

一、解答: (1) 由于

$$\frac{\ln(x+2)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \frac{2}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right),$$

有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^{x \ln\left(1 + \frac{2}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right)} = e^{x\left(\frac{2}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right)} \\ &= 1 + x\left(\frac{2}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right) + o\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1 + o(1). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+2)}{\ln x} \right)^x = 1.$$

(2) 原式 $=(n+1)^{\frac{1}{n}}, n \geq 4$ 时, 由 AM-GM 不等式,

$$1 < (n+1)^{\frac{1}{n}} < \frac{2\sqrt{n+1} + n - 2}{n}.$$

而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n+1} + n - 2}{n} = 1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k+1) \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

二、证明: 不妨 $q_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 先证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$, 用反证法, 设

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |q_n| < M.$$

则存在递增正整数列 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\forall k \in \mathbb{N}, |q_{n_i}| < M$. 记

$$\|x\| = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\}, \epsilon = \frac{1}{2M} \min_{1 \leq i \leq M} \{\|ia\|\}.$$

知

$$\exists L \in \mathbb{N}, k > L \implies \left| \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} - a \right| < \epsilon \implies |p_{n_k} - aq_{n_k}| < M\epsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq M} \{\|ia\|\}.$$

但

$$|p_{n_k} - aq_{n_k}| > \min_{1 \leq i \leq M} \{\|ia\|\},$$

矛盾! 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty$.

$$\text{取 } \epsilon' = \left| \frac{a}{2} \right|, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n > N \implies \left| \frac{p_n}{q_n} - a \right| < \left| \frac{a}{2} \right| \implies \frac{|a|q_n}{2} \leq |p_n| \leq \frac{3|a|q_n}{2}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_n| = +\infty$.

三、证明: 记 $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$, 则 g 在 $[a, b]$ 可导. $g(a) = g(b) = 0$.

由已知得 $\forall x \in [a, b], g'(x) \leq 0$.

$\forall x \in (a, b)$, 由 Lagrange 中值定理,

$$\exists \xi_1 \in (a, x), \xi_2 \in (x, b), \frac{g(x)}{x - a} = g'(\xi_1) \leq 0, \frac{-g(x)}{b - x} = g'(\xi_2) \leq 0.$$

这表明 $g(x) = 0$, 令 $c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, d = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$, 则有 $f(x) = cx + d$, 证毕.

四、解答: 记 $y_n = x_n - \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, 且 $y_n + y_{2020n} = 0$.

于是易用反证法证明:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = 0.$$

故

$$x_n = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

注记: 将条件

$$x_n + x_{2020n} = \frac{2021}{2020n}$$

弱化为

$$x_n + x_{2020n} = \frac{2021}{2020n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

仍有

$$x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

五、证明：见 11 月 6 日作业第 2 题.

六、解答：(1) $LHS = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) \right).$

(2) 由 Taylor 公式, 对于 $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t - \frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$,
故

$$n \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{2n} f'\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$n \left(\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) + o(1),$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) - f(0)) = 1010.$$

Chapter 22

12月4日作业答案

一、解答: (1) $S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \left(\sin \theta + \frac{1}{8} \sin 2\theta + \frac{3}{4}\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{2}$.

(2) $C = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} |\cos \frac{\theta}{2}| d\theta = 8a.$

(3) $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi r^3 \sin \theta d\theta = -\frac{2a^3\pi}{3} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^3 d\cos \theta = \frac{8a^3\pi}{3}.$

(4) $S_2 = 2\pi \int_0^\pi r |\sin \theta| \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 16a^2\pi \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{32a^2\pi}{5}.$

二、答案: (1) 重心坐标 $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

(2) 重心坐标为 $\left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$.

三、答案: 重心坐标为 $\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.

Chapter 23

12 月 11 日作业答案

一、计算极限

1. 解答: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{2} \ln(\frac{1}{x^2}-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \ln(\frac{1}{x^2}-1)} = e^0 = 1.$

2. 解答: 左极限 = $\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x \cdot e^{\frac{1}{1-\sin x}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} e^{\frac{1}{1-x}},$

$$\sqrt{1-x^2} e^{\frac{1}{1-x}} > \sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{1-x} + 1 \right) = \frac{(2-x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2-x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = +\infty,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x \cdot x e^{\frac{1}{1-\sin x}} = +\infty,$$

类似得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x \cdot x e^{\frac{1}{1-\sin x}} = -\infty,$$

故该极限不存在.

3. 解答: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(e-x))^{\ln x}$, 考虑 $\ln \ln(e-x) \cdot \ln x$, 有

$$\ln \ln(e-x) = -\frac{x}{e} + o(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \ln(e - x) \cdot \ln x = 0,$$

从而原式 = 1.

4. 解答: $\ln(\sin x) = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$, 故

$$(\sin x)^x = 1 + x \ln x + \frac{x^2 \ln^2 x}{2} + \frac{x^3}{6}(-1 + \ln^3 x) + o(x^3),$$

同时,

$$x^{\sin x} = 1 + x \ln x + \frac{x^2 \ln^2 x}{2} + \frac{x^3}{6}(-\ln x + \ln^3 x) + o(x^3),$$

$$\ln(x - x^2) + x - \ln x = \ln(1 - x) + x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

故原式 = 0.

二、极限展开

1. 解答: 原式 = $\sum_{k=0}^3 (x^2 + x^3)^k + o(x^7) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7)$.

2. 解答: 计算得

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)^{(1)} = \frac{-2(x+1)\ln(1+x)+x}{x^3(x+1)},$$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)^{(2)} = \frac{6\ln(1+x)(x+1)^2 - 5x^2 - 4x}{x^4(x+1)^2},$$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)^{(3)} = \frac{-24\ln(1+x)(x+1)^3 + 26x^3 + 42x^2 + 18x}{x^4(x+1)^3},$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2 \right) (x-1) \\ &\quad + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8} \right) (x-1)^2 + \left(\frac{43}{24} - 4\ln 2 \right) (x-1)^3 + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

3. 解答: $\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o((x-1)^3)$, 且

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6),$$

代入得: 原式 = $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$.

4. 解答: 记原式 = $f(x)$, 则

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = -1 + 2x + \frac{x^4}{2} - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^{10}),$$

故原式 = $-x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$.

5. 解答: $\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \ln \left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) = x + \ln \left(1 - \frac{x^{100}}{100!e^x} + o(x^{100}) \right) \\ &= x - \frac{1}{100!e^x} x^{100} + o(x^{100}). \end{aligned}$$

从而原式 = $x - \frac{1}{100!} x^{100} + o(x^{100})$.

三、求函数在 0 附近的简单等价量 (形如 $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$)

1. 解答: $\ln(\sin x) = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$, 故

$$(\sin x)^{x-x^2} = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}(-2 \ln x + \ln^2 x)x^2 + o(x^2),$$

而

$$(x - x^2)^{\sin x} = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}(-2 + \ln^2 x)x^2 + o(x^2),$$

从而

$$(\sin x)^{x-x^2} - (x - x^2)^{\sin x} = (1 - \ln x)x^2 + o(x^2),$$

故原式 $\sim -x^2 \ln x$.

2. 解答: $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^8)$,

则有

$$\tan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{107x^7}{5040} + o(x^8),$$

$$\sin(\tan x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{55x^7}{1008} + o(x^8),$$

故原式 $\sim \frac{x^7}{30}$.

Chapter 24

12 月 18 日作业答案

一、根据通项公式判断相应级数的敛散性

1. 解答: 我们有 $u_n > \frac{1}{2^{\ln n}}$, 而

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{\ln k}} > 2^n \frac{1}{2^{\ln 2^{n+1}}} = \frac{1}{2} (2^{n+1})^{1-\ln 2} > \frac{1}{2},$$

故 $\sum u_n$ 发散.

2. 解答: $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

从而有

$$\ln \cos \frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故

$$\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n = e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{12\sqrt{en}} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$u_n \sim -\frac{1}{12\sqrt{en}},$$

故 $\sum u_n$ 发散.

3. 解答: (i) 若 $\deg p \neq 3$ 或 p 的首项系数不是 1, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0,$$

此时 $\sum u_n$ 发散;

(ii) 假设 $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, 则

$$\sqrt[3]{p(n)} = n + \frac{a}{3} + o(1),$$

但

$$\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} = n + o(1),$$

此时 $\sum u_n$ 发散;

(iii) 假设 $p(x) = x^3 + bx + c$, 其中 $b, c \in \mathbb{R}$, 则

$$\sqrt[3]{p(n)} = n + \frac{b}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

而

$$\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

这便得到 $\sum u_n$ 收敛 $\iff b = \frac{3}{2}$.

综上, $\sum u_n$ 收敛 $\iff p(x) = x^3 + \frac{3}{2}x + c, c \in \mathbb{R}$.

二、根据通项公式判断相应级数的敛散性并求和（如果收敛）

解答: 当 $\alpha \in (0, 1]$ 时, $u_n \geq \frac{1}{n+1}$, 此时 $\sum u_n$ 发散;

下考虑 $\alpha > 1$, 由 Raabe 判别法知此时 $\sum u_n$ 收敛. 记 $S = \sum u_n$.

我们有

$$(n+1)(u_n - u_{n+1}) = \alpha u_{n+1},$$

由于 u_n 是递减的正项数列且 $\sum u_n$ 收敛, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0.$$

(见 12 月 25 日作业第三题第 (1) 小问.)

结合这两个结论, 就得到

$$S = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

三、根据通项公式判断相应级数的敛散性

解答: 注意到 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z},$$

有

$$|u_n| = |\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)| = |\sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)| \leq \pi(2 - \sqrt{3})^n.$$

由 $\sum(2 - \sqrt{3})^n$ 收敛, 得 $\sum u_n$ 绝对收敛, 自然是收敛的.

四、级数计算

1. 解答: 由分部积分公式得

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b) \sin(nt) dt = \frac{2at + b}{n^2} \cos(nt) \Big|_0^\pi,$$

分别考虑 n 为奇数、偶数的情形, 有

$$\begin{cases} 2a\pi = 1 \\ -2a\pi - 2b = 1 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2\pi} \\ b = -1 \end{cases}.$$

2. 证明: $2 \sin \frac{t}{2} \cos(kt) = \sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$,

于是

$$\sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{t}{2} \cos(kt) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\frac{t}{2},$$

故

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

3. 证明: $g(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = g(t) \cos \frac{t}{2} \sin(nt) + g(t) \sin \frac{t}{2} \cos(nt)$,

我们只需证明如下结论:

引理: f 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

引理的证明: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin(nx) dx \right| = \left| \frac{\cos n\alpha - \cos n\beta}{n} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

记 $M = \sup |f|, \forall \epsilon > 0, \exists$ 划分 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$,

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) < \frac{\epsilon}{2},$$

其中, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f, m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

令 $n > \frac{4mM}{\epsilon}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| &\leq \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) \sin(nx) dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) \sin(nx) dx \right| \\ &\leq \frac{2mM}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0,$$

同理

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

原题得证.

4. 解答: 由 2,

$$\int_0^{\pi} g(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} \frac{t^2 - 2\pi}{4\pi} dt.$$

结合 1, 3, 有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Chapter 25

12月25日作业答案

一、研究一个级数

1. 解答: 记 $f(x) = \frac{\ln x}{x} > 0, x \geq 3$, 则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0,$$

故 f 是 $[3, +\infty)$ 上的正值减函数.

我们有

$$\frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \int_2^n \frac{\ln t}{t} dt.$$

即

$$\frac{\ln 2 - \ln^2 3}{2} + \frac{\ln^2(n+1)}{2} \leq u_n \leq \frac{\ln^2 n}{2}.$$

故

$$u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}.$$

这便是 $n \rightarrow +\infty$ 时 u_n 的简单等价量.

2. 证明: 由于

$$\frac{\ln 2 - \ln^2 3}{2} + \frac{\ln^2 n}{2} \leq u_n,$$

有

$$\frac{\ln 2 - \ln^2 3}{2} \leq v_n.$$

又

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq 0,$$

知 $(v_n)_{n \geq 3}$ 是单调递减有下界的数列, 自然收敛.

3. 解答: $v_n - v_{n+1} = -\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \sim \frac{\ln n}{2n^2}$,

故

$$v_n - l = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{2k^2}.$$

记 $g(x) = \frac{\ln x}{2x^2} > 0, x \geq 3$, 则 $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{2x^3} < 0$.

有

$$\frac{1+\ln n}{2n} = \int_n^{+\infty} g(x) dx < \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{2k^2} < \int_{n-1}^{+\infty} g(x) dx = \frac{1+\ln(n-1)}{2(n-1)}.$$

于是

$$v_n - l \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

二、证明: 记 $a_n = nu_n, b_n = \frac{1}{n}, S_n = \sum_{k=1}^n a_n$. 则 b_n 单调且 $\{S_n\}$ 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

由 Dirichlet 判别法知: $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 收敛, 即 $\sum_{n \geq 1} u_n$ 收敛.

三、Abel 变换的应用

1. 证明: 若 $\exists n_0, u_{n_0} = 0$, 则 $\forall n > n_0, u_n = 0$, 此时结论显然成立.

下面假设 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. 由已知,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \implies \frac{\epsilon}{2} > u_{N+1} + \cdots + u_n > (n-N)u_n.$$

则有

$$n > 2N \implies nu_n < \epsilon.$$

于时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$, 即 $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. 证明: 记 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k, T_n = \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1}) = S_n - nu_{n+1}$.

由 1 知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{n+1} = 0,$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

即 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛且等于 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

四、证明: 记 $w_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$, 则有

$$\ln w_{n+1} - \ln w_n = -\frac{1}{12n^2} + O_n,$$

其中, $O_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

我们有

$$\ln w_{n+1} = \ln w_1 + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{12k^2} + O_k \right).$$

由 Stirling 公式,

$$\ln \sqrt{2\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln w_n = \ln w_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{12k^2} + O_k \right).$$

从而

$$\ln \frac{w_n}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{12k^2} - O_k \right) = \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而

$$\frac{w_n}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

即

$$n! = \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

五、证明: 记 $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow l$, 则

$$\frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \dots + \frac{u_n}{n} \right) = \frac{1}{\ln n} \left(\frac{v_1}{2} + \dots + \frac{v_{n-1}}{n} \right) + \frac{v_n}{\ln n}.$$

只需证

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{v_1}{2} + \dots + \frac{v_{n-1}}{n} \right) = l.$$

由于

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n,$$

我们只需考虑 $l = 0$ 的情形. 此时, $\forall \epsilon > 0$, 不妨 $\epsilon < 1$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |v_n| < \frac{\epsilon}{3}$.
 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{v_1}{2} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{n} \right| \leq \frac{|v_1|}{2} + \cdots + \frac{|v_{N-1}|}{N} + \frac{\epsilon}{3} \sum_{k=N}^n \frac{1}{k+1},$$

记 $M = \frac{|v_1|}{2} + \cdots + \frac{|v_{N-1}|}{N}$, 有

$$\exists P_1, n > P_1 \implies \frac{M}{\ln n} < \frac{\epsilon}{3}, \exists P_2, n > P_2 \implies \frac{1}{\ln n} \sum_{k=N}^n \frac{1}{k+1} < 1 + \frac{\epsilon}{3},$$

令 $P = \max\{P_1, P_2\}$, 有

$$n > P \implies \left| \frac{v_1}{2} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{n} \right| < \frac{\epsilon^2}{9} + \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

这就表明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{v_1}{2} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{n} \right) = l.$$

证毕.

六、证明: 设 $(p_k)_{k \geq 1}$ 是所有素数的递增排列, $P_k = \{n : p(n) = p_k\}$.

则有

$$\sum_{n \in P_k} \frac{1}{np(n)} = \frac{1}{p_k} \sum_{n \in P_k} \frac{1}{n} = \frac{1}{p_k^2} \left(1 + \sum_{p(n) \leq p_k} \frac{1}{n} \right).$$

可用数学归纳法证明:

$$\sum_{p(n) \leq p_k} \frac{1}{n} = \prod_{l=1}^k \frac{p_l}{p_l - 1} < 2 \prod_{l=2}^k \frac{2l-1}{2l-2}.$$

结合 Stirling 公式, 便可得到

$$\sum_{p(n) \leq p_k} \frac{1}{n} = O(\sqrt{k}),$$

于是

$$\sum_{n \in P_k} \frac{1}{np(n)} = O\left(\frac{\sqrt{k}}{p_k^2}\right) = O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right).$$

而 $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum_{n>1} \frac{1}{np(n)}$ 收敛.

Chapter 26

3 月 6 日期末考试答案

一、1. 解答: 原式 = $\pi + (a - b) \int_0^\pi \frac{dx}{b - \cos x}$.

$$\int_0^\pi \frac{dx}{b - \cos x} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 1}} \int_0^{+\infty} \frac{d\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}u}{\left(\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}u\right)^2 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}. \quad (\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}.)$$

故原式 = $\pi \left(1 + \frac{a-b}{\sqrt{b^2 - 1}}\right)$.

2. 解答: $nI_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1).$

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \implies \epsilon^{\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$, 于是有

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx > \int_{\epsilon}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx > (1 - \epsilon) \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(1 - \epsilon)(\sqrt{2} - \sqrt{1+\epsilon}).$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$ 得 $nI_n \rightarrow 2(\sqrt{2} - 1)$, 于是 $I_n \rightarrow 0$.

二、解答: 该式成立. 证明如下: 由 f 黎曼可积, f 有界. 设 $|f| \leq M$.

由已知, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 1 - \delta < x < 1 \implies 1 - \epsilon < f(x) < 1 + \epsilon$.

$$\left| \int_0^{1-\delta} f(x)x^n dx \right| \leq M \int_0^{1-\delta} x^n dx = \frac{M(1-\delta)^n}{n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\int_{1-\delta}^1 (1-\epsilon)x^n dx = \frac{1-\epsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) < \int_{1-\delta}^1 f(x)x^n dx < \int_{1-\delta}^1 (1+\epsilon)x^n dx = \frac{1+\epsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

由 ϵ 任意性, 原式得证.

三、解答: 此不等式成立, 证明如下: 由已知, $|f|$ 连续, 由积分第一中值定理,

$$\exists \xi \in [0, a], |f(\xi)| = \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)| dt.$$

$$\text{于是 } |f(0)| - \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)| dt \leq |f(0) - f(\xi)| = \left| \int_0^\xi f'(t) dt \right| \leq \int_0^a |f'(t)| dt.$$

不等式得证.

四、解答: $\sin \frac{k}{n^2} = \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 故

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

又 $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, 而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}.$$

于是 $a = b = c = \frac{1}{2}$.

五、1. 解答: 发散. 设 $u_n = \frac{\cos \ln n + \sin \ln n}{n} = \frac{\sqrt{2} \sin(\ln n + \frac{\pi}{4})}{n}$.

则当 $n \in (e^{2k\pi}, e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}})$ 时, $u_n > \frac{1}{2e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}}$. 故 $\sum_{[e^{2k\pi}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}]} u_n \geq \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} + o(1)$, 从而级数发散.

2. 解答: 收敛. 若 $a_n \geq \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}}$, 则 $a_n^{\frac{n-3}{n}} \leq 2a_n$; 否则, $a_n^{\frac{n-3}{n}} \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$, 故 $a_n^{\frac{n-3}{n}} \leq 2a_n + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$.

级数 $\sum a_n$ 与 $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$ 均收敛, 故 $\sum a_n^{\frac{n-3}{n}}$ 收敛.

六、1. 解答: 分别在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 上解此方程.

考虑 $(1+x)y' + y = 0$, 它的解形如 $y = \frac{c}{1+x}$, $c \in \mathbb{R}$, 且原方程有特解 $y = -\cos x - \frac{\sin x}{1+x}$. 于是原方程解恰为具有如下形式的所有函数:

$$y = \begin{cases} \frac{c_1 - \sin x}{1+x} - \cos x, & x > -1 \\ \frac{c_2 - \sin x}{1+x} - \cos x, & x < -1 \end{cases}$$

2. 解答: 方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解形如 $y = (ax + b)e^x, a, b \in \mathbb{R}$, 原方程有特解 $y = \frac{x^3 e^x}{6}$. 故原方程解集为 $\{y = \left(\frac{x^3}{6} + ax + b\right) e^x : a, b \in \mathbb{R}\}$.

七、解答: 不妨设 $L > 0$, 则 x 充分大时 $f(x) > 0$.

记 $F(x) = \int_0^x f(t)^2 dt$, 则有 $F(x)\sqrt{F'(x)} \sim L \implies F(x)^2 F'(x) \sim L^2$.

即 $\left(\frac{F(x)^3}{3}\right)' \sim L^2$, 于是 $F(x) \sim (3L^2 x)^{\frac{1}{3}}$. 又 $F(x)f(x) \sim L$, 于是 $f(x) \sim \left(\frac{L}{3x}\right)^{\frac{1}{3}}$.