

浙江大学理学院

博士学位论文

求解Navier-Stokes方程的几类数值方法

姓名：戴晓霞

申请学位级别：博士

专业：计算数学

指导教师：程晓良

20090601

摘 要

Navier-Stokes方程是从复杂的流体运动中简化出来的一个重要模型问题,通过对这个模型的深入研究,可以帮助我们了解掌握自然规律,从而推动自然科学的进步。但是Navier-Stokes方程是一个非线性偏微分方程组,求解非常困难,到目前为止,也只有极少数非常简单的流动问题才能求得其精确解,大多数还是要通过离散方法求得数值解。所以对Navier-Stokes方程的数值解法的研究还是非常有现实意义的。

本文主要研究了Navier-Stokes方程的几类数值解法,主要包括迭代罚方法,两套网格方法,算子分裂方法等。从数学的角度看Navier-Stokes方程组,它需要求解两个自变量速度和压力,是一个耦合的方程,并且对速度还要求其散度为零,这就使得其成为一个鞍点问题。此外它还带有非线性项,又可以和时间有关,所有这些都给数值求解带来了很大的麻烦,针对其不同的方面,都有一些不同的数值算法。

论文共分四章。第一章我们简要地介绍了一下不可压缩方程组的物理背景。实际上Navier-Stokes方程就是质量守恒定律,动量定理以及牛顿第二定律在流体力学中的表达形式,方程中的每一个量,每一式子都有其具体的物理意义。如 u 就是速度, p 表示所受的壓力,速度满足散度为零,表明该流体是不可压缩的等等。另外也说明Stokes方程是特定情况下Navier-Stokes方程的简化形式。在第一章第二部分我们还简要介绍了有限元方法,这是我们在具体计算数值例子时空间离散采用的方法。相对于差分方法来说,有限元方法具有稳定性好,有比较好的误差估计,可以使用不规则剖分等优点。我们也稍微提及了一点在有限元编程中碰到的问题。

Stokes方程需要求解两个未知量,因而需要用混合有限元解。所以在第二章的开始,我们简单介绍混合有限元方法。为了保证解的唯一性,两个解的空间不是任意取的,而是必须满足所谓的LBB条件。方程离散之后也必须满足离散的LBB条件,这就使得我们在离散的时候必须选择稳定的元,如比较经典的RT元, BDM元, Mini元以及Taylor-Hood元等都是满足离散LBB条件的。从数学角度来看, Stokes方程也可以看作是一个有条件约束的极小化问题。速度项散度为零作为约束条件,这样的话就可以用带积分简化的罚方法去解。相

比Lagrange乘子法而言,罚方法能够使得引入的变量个数达到最少,这样就使得有限元方法实现起来简单很多,但是罚因子 ε 会引进一部分误差,全部误差估计为 $\mathcal{O}(\varepsilon + R_h)$, R_h 为空间离散误差。从这一结果来看显然罚因子 ε 应该取的越小越好,这样我们就可以尽可能逼近方程的解。但是从另一方面来看,方程离散导出的矩阵条件数为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}h^{-2})$,所以当 ε 变小时,相应的矩阵计算将变的不稳定。为了解决这一矛盾,我们利用迭代罚方法,使得可以通过不用减小 ε ,而消除 ε 带来的误差,这样其条件数就不会太差,使得相应的计算比较稳定。在这一过程中,要求解所属于的两个空间满足离散LBB条件,我们常用的一个简单的元, $Q_1 - P_0$ 元,虽然不满足LBB条件,但我们证明了在剔除使得 $(\nabla \cdot v, q) = 0$ 的基底之后,是同样可以达到我们需要的结果。

在第三章我们介绍了两套网格方法和两套网格方法在Navier-Stokes方程上的应用。两套网格方法最先是由许进超教授提出的,用来离散非对称不正定偏微分方程。而后随着研究的深入,也被用于非线性问题的线性化,大型偏微分方程的局部并行算法,求解耦合方程等等。在第三章的开始我们先通过两个具体的例子来说明两套网格的思想。接着将两套网格思想应用于Navier-Stokes方程。首先取两套网格,一粗一细。我们做的工作就是将粗细网格之间的比例在 $H^1(\Omega)$ 范数意义下提高到 $H = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{1-s}})$ (这里 s 是一个跟维数有关的参数, $d=2$, s 为任意小的正数, $d=3$, $s = \frac{1}{2}$), 在 $L^2(\Omega)$ 范数意义下提高到 $H = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$ 。具体算法为先在粗网格上解Navier-Stokes方程得一数值解,因为网格比较粗,所以计算量也不是很大。然后在细网格做一次牛顿迭代,其迭代初值为我们在粗网格求得的解,最后在不重新组合细网格刚度矩阵的前提下,仅仅改变右端项对解做一次修正。我们对算法进行了详细的分析,给出了误差估计,并利用数值例子说明了其计算的高效性。

第四章主要介绍了与时间相关的Navier-Stokes方程的分裂算法。分裂算法经过半个多世纪的发展,已经形成规模。我们首先介绍了几种比较流行的分裂算法,罗列了一些经典分裂格式及其相应的误差分析结果。在分析这些格式的优缺点的基础上,提出了我们的分裂格式,是将不可压缩项和非线性项分开在不同的方程中,每个方程都满足原始的边界条件,这样就不会像投影算法那样引入人工边界层。我们采用半离散的格式进行讨论,在时间上采用Crank-Nicolson公式进行离散,并且我们在计算 t_{n+1} 的时候不仅用到 t_n 的速度和压力值,而且还用到了 t_{n-1} 的压力值,这两个特点使得我们这个格式在时间上具有两阶的精度。我们详细地给出了这个两阶精度的证明过程及其相应的数值

例子。

关键词：Navier-Stokes方程，Stokes方程，有限元方法，误差估计，迭代罚方法，两套网格方法，算子分裂方法

Abstract

The Navier-Stokes equations are the foundation of fluid mechanics. Since they can help us to know the order of nature, so it is important to study the Navier-Stokes equations. However, it's very difficult to solve the Navier-Stokes equations, up to now, there are only a few simple problems getting the exact solutions. Most of them get the approximation solution by discretization. Thus, we pay more attention to discrete methods for the Navier-Stokes equations.

In this thesis we discuss some numerical methods for the Navier-Stokes equations, such as iterative penalty method, two-grid method, operator-splitting method and so on. The unknowns (u, p) of Navier-Stokes equations are coupled together by the incompressibility constraint $\nabla \cdot u = 0$. Additionally, the Navier-Stokes equations have nonlinearity and sometimes dependent on time, all of these make us troubled when solving the Navier-Stokes equations. Many numerical schemes have been developed for dealing with one or more difficulties above.

This thesis has been separated into four chapters. In chapter 1 we briefly introduce some models about the incompressible flows. In fact, the Navier-Stokes equations are the behaviors of conservation of mass, conservation of momentum and the Newton's famous Second Law of Motion in fluid mechanics. Every variable and every relation have realistic meanings, for example, u represents velocity, p is the pressure, $\nabla \cdot u = 0$ means that divergence free. And we also can know that the Stokes equations are the approximation of the Navier-Stokes equations under some assumptions. In the rest of this chapter we also say something about the finite element method, which is our discrete method in this thesis. Compared with finite difference method, the finite element method is stable and can get error estimates easily. At last, we point out some problems that we meet in coding for finite element method.

The Stokes equations should be solved by mixed finite element method, so at the beginning of chapter 2 we get some knowledge of mixed finite element method. In order to guarantee a unique solution to the problem, the spaces we choose must satisfy the LBB condition, so does discrete case. That means we must choose the stable

element, such as RT, BDM, Mini and Taylor-Hood pairs. The Stokes equations are equivalent to a constrained minimization problem. The divergence-free is the constrained condition, thus we apply the penalty method related to reduced integration to the problem. Compared the Lagrange multiplier method, penalty method make the variable least. It is well know that the error estimate of the penalty method to Stokes equations is $\mathcal{O}(\varepsilon + R_h)$, where R_h is obtained by space discretization. Thus, ε must be sufficiently small to yield an accurate approximation of the solution. On the other hand, the condition number of the numerical discretizations of Stokes equations is $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}h^{-2})$, so the scheme becomes unstable due to round-off error, if ε is too small. Thus, an iterative penalty method is proposed for the Stokes equations, which allows us to use a "not very small" penalty parameter to avoid the unstable computation. However, the finite elements which have been chosen are required to satisfy the LBB condition. The simplest finite elements, i.e. $Q_1 - P_0$ element do not satisfy the LBB condition. We discuss the $Q_1 - P_0$ element for the Stokes equations and present the error estimates for the iterative penalty method using this element.

In chapter 3 we introduce two-grid methods and their application to the Navier-Stokes equations. The idea of the two-grid finite element was originally proposed by Jinchao Xu for discretizing nonsymmetric and indefinite partial differential equations, and then has been further investigated for linearization for nonlinear problems, for localization and parallelization for solving a large class of PDEs, for decoupling the systems of PDEs. First we introduce the two-grid method by two examples, and then we apply this idea to solve the Navier-Stokes equations. We improve the scaling for errors in energy norm and L^2 norm, e.g., for energy norm it gets to $h \sim H^{4-s}$ and for L^2 norm it gets to $h \sim H^2$, if $k=1$, where $s = \frac{1}{2}$ of $d = 3$ and $s = \varepsilon > 0$ if $d = 2$. The two-grid method we proposed involves solving one small, nonlinear coarse mesh system, and two linear problems on the fine mesh which have the same stiffness matrix with only different right hand side. Numerical example is given to show the convergence of the method.

In chapter 4 we introduce fractional-step methods for the approximation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations. At first, we state some popular operator-splitting methods and their error estimates, respectively. We also list their advantage and disadvantage, and then we propose our schemes. We use the Crank-

Nicolson time stepping and we not only use the velocity and pressure at t_n but also the pressure at t_{n-1} . Under mild regularity assumptions on the continuous solution, we obtain second order error estimate in the time step size, both for velocity and pressure. Numerical results in agreement with the error analysis are also presented.

Keywords: Navier-Stokes equation, Stokes equation, finite element method, error estimates, iterative penalty method, two-grid method, operator-splitting method

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的
研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含
其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育
机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何
贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：戴晓霞 签字日期：2009.6.4

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有关保留、使用学位论文的规定，有
权保留 并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和
借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库
进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等 复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：戴晓霞 导师签名：程晓良

签字日期：2009.6.4 签字日期：2009.6.4

致 谢

本论文是在导师程晓良教授的悉心指导下完成的。入学五年来，程老师渊博的知识，严谨的治学态度，敏锐的学术眼光以及为人师表的风范都使我受益匪浅。程老师经常教导我在学习上要多思考，多交流，并坚持每个星期主持讨论班，给予我良好的学习环境和机会，使我能顺利完成学业。在求学过程中，程老师也在生活上给予我很多帮助，在这里，我衷心地感谢他对我的培养。

感谢我的父母这么多年来一直默默支持我，他们殷切的期望和无尽的关怀是我不断进取的动力。养育之恩，无以为报，衷心的希望他们永远健康快乐。

借此机会，我要感谢王兴华教授，韩丹夫教授，吴庆标教授，黄正达教授，叶兴德教授等对我的指导和帮助，还要感谢孙洁，胡潇喆，龚荣芳，刘箐，王飞，张郑芳，朱升峰等各位参加讨论班的师兄妹，感谢多年来给予我许多有益的讨论和启发，并为我提供了多方面的帮助。

谨以此文献给所有关心我、支持我、帮助我的亲人和朋友们！

第一章 背景介绍

纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equations), 是一组描述像液体和空气这样的流体物质的运动规律的方程。因1821年由法国科学家纳维(Claude-Louis Navier)和1845年由英国物理学家斯托克斯(George-Gabriel Stokes)分别导出而得名。这些方程建立了流体的粒子动量的改变率(加速度)和作用在液体内部的压力的变化和耗散粘滞力(类似于摩擦力)以及重力之间的关系, 在流体力学中有十分重要的意义。它是一个非线性偏微分方程, 求解非常困难和复杂, 目前只有在某些十分简单的流动问题上能求得精确解, 大多数复杂的流动需通过离散方法求其数值解。在计算机问世和迅速发展以后, N-S方程的数值求解有了很大的发展, 因而使得数值计算在流体力学研究方法中的作用和地位不断提高。目前, 应用各种有效的数值计算方法和高性能计算机已经能迅速准确地确定出飞机外形, 喷气发动机喷嘴, 汽轮机叶片的最优形式, 并且在气象预报, 油田开发的动态模拟, 水利工程各种水流问题, 环境污染预报, 人工脏器的流体力学问题等各个工程领域内发挥着越来越大的作用。有关N-S方程的文献资料相当丰富, 在此不一一例举。我们关心的是其数值解法, 如文献[79, 85, 86]等是比较侧重数值解法的。在介绍算法之前, 我们有必要单独列出一章简要介绍一下N-S方程的物理背景以及我们所使用的求解偏微分方程的数值解法—有限元方法。

1.1 不可压缩流基本方程

在这里, 我们只是介绍几个相关的不可压缩流模型, 如须深入了解可参考[73, 74, 88]。流体运动固然千变万化, 但也有其内在规律。这些规律就是自然科学中通过大量实践和实验归纳出来的质量守恒定律, 动量定理以及牛顿第二定律, 它们在流体力学中有其独特的表达形式, 组成了制约流体运动的基本方程。这一节将根据上述基本定理及流体的性质推导流体力学的基本方程。

考虑在三维空间 Ω 中一密度为 ρ 的流体。在 t 时刻, 假设有一微团位于 \vec{x} 点, 过了 δt 时刻后, 该微团运动到 $\vec{x} + \delta \vec{x}$ 点, 那么在 t 时刻点 \vec{x} 处的速度就可表示为

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) := \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{x}}{\delta t}$$

其中每个速度分量 u_x, u_y 和 u_z 都是有关于 x, y, z 和时间 t 的函数。在流场中任取一体积为 V , 表面积为 S 的控制体, 取外法线方向为法线的正方向, \vec{n} 为外法线的单位矢量。考虑体积 V 内的流体质量的变化。体积 V 的总质量为 $\int_V \rho dV$, 通过表面 S 流出的流体总和为 $\int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$, 根据质量守恒定律, 在体积 V 中质量的变化恒等于流出表面 S 的流体总和, 表示为数学表达式即为:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.1)$$

由散度定理, 对于足够光滑的向量 \vec{v} 和任一区域 R 成立下式:

$$\int_{\partial R} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_R \nabla \cdot \vec{v} dR, \quad (1.2)$$

应用于(1.1), 得到:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0.$$

由于体积 V 是任意取的, 且被积函数连续, 于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

这就是连续性方程。对于不可压缩均质流体来说, 密度是一个常量。所以

$$\nabla \cdot (\vec{u}) := \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}.$$

在说明动量定理之前, 我们来看一下加速度。微团在 t 时刻的速度如上所述为 \vec{u} , 在 $t + \delta t$ 时速度为 $\vec{u} + \delta \vec{u}$ 。因为速度是依赖于位置和时间的, 所以我们写成 $\vec{u} = \vec{q}(\vec{x}, t)$, 那么

$$\vec{u} + \delta \vec{u} = \vec{q}(\vec{x} + \delta \vec{x}, t + \delta t),$$

或者也可以写成

$$\begin{aligned} \delta \vec{u} &= \vec{q}(\vec{x} + \delta \vec{x}, t + \delta t) - \vec{q}(\vec{x}, t) \\ &= \vec{q}(\vec{x} + \delta \vec{x}, t + \delta t) - \vec{q}(\vec{x}, t + \delta t) + \vec{q}(\vec{x}, t + \delta t) - \vec{q}(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

由泰勒展开可得,

$$\vec{q}(\vec{x} + \delta \vec{x}, t + \delta t) - \vec{q}(\vec{x}, t + \delta t) = (\delta \vec{x} \cdot \nabla) \vec{q}(\vec{x}, t + \delta t) + \mathcal{O}(\|\delta \vec{x}\|^2)$$

和

$$\bar{q}(\vec{x}, t + \delta t) - \bar{q}(\vec{x}, t) = \delta t \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}(\vec{x}, t) + \mathcal{O}(\delta t^2).$$

由此我们可以得到加速度为

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{u}}{\delta t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}.$$

值得注意的是, 这个加速度对于速度 \vec{u} 来说是非线性的。

对于给定体积为 V , 表面积为 S 的控制体, 动量的变化率为

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) dV.$$

理想流体是没有黏性, 不可压缩的均质流体。对于这样的流体, 它承受的力仅仅就只有压力 p 和来自外部的力 \vec{f} , 如重力等。所以作用在流体 V 上的力之和为

$$\int_S p(-\vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV.$$

在散度定理(1.2)中令 $\vec{v} = p\vec{c}$, 其中 \vec{c} 为一常数向量指向任意的方向, 得:

$$\int_V \nabla \cdot (p\vec{c}) dV = \int_S p\vec{c} \cdot \vec{n} dS.$$

而

$$\nabla \cdot (p\vec{c}) = p\nabla \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \nabla p = \vec{c} \cdot \nabla p.$$

并且 \vec{c} 可以提到积分号外面来, 这就可以导出:

$$\vec{c} \cdot \left(\int_V \nabla p dV - \int_S p\vec{n} dS \right) = 0$$

因为 \vec{c} 是指向任意方向的, 所以

$$\int_V \nabla p dV = \int_S p\vec{n} dS.$$

根据动量定理, 体积 V 中流体动量的变化率等于作用在该体积上的外力之和, 即:

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) dV = \int_S p(-\vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV.$$

于是,

$$\int_V [\rho(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) + \nabla p - \rho \vec{f}] dV = 0.$$

体积 V 也是任意取的,由此我们可以推出理想流体的欧拉方程:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{aligned}$$

对于一个完整的物理问题来说,适当的初值边值条件还是必须的。比如我们可以在边界上定义 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$,这就表明没有流体经过边界。

而实际流体是有黏性的,所以任意这样的微团所承受的不仅仅只有压力(法向应力),还有切向应力(也称剪应力)。在没有黏性的情况下,法向压力是由压力引起的

$$\int_S p(-\vec{n}) dS.$$

利用单位对角张量

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可写成

$$\int_S -p \vec{I} \vec{n} dS.$$

另一方面切向应力从各个方向作用在边界 S 上,因而需要一个这样的张量

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

那么切向应力就可以表示成

$$\int_S \vec{T} \vec{n} dS.$$

在切向应力张量 \vec{T} 的每一行应用散度定理,可以得到

$$\int_S \vec{T} \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{T} dV,$$

其中 $\nabla \cdot \vec{T}$ 是一个矢量, 等于

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

设应变张量为

$$\vec{\epsilon} := \frac{1}{2}[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

满足应力—应变线性关系的流体我们称之为牛顿流, 反之称为非牛顿流。在本篇论文中我们只是研究牛顿流。常用的流体, 例如水及空气都是牛顿流体。对于一个牛顿流, 我们有

$$\vec{T} = \mu \vec{\epsilon} + \lambda \text{Trace}(\vec{\epsilon}) \vec{I},$$

其中 μ 和 λ 是关于流本身的两个参数。对于不可压缩流来说, 参数 λ 无关紧要, 因为我们有 $\text{Trace}(\vec{\epsilon}) = \nabla \cdot \vec{u} = 0$ 。而参数 μ 则是流体抗拒剪切变形内摩擦的量度。所以我们有

$$\nabla \cdot \vec{T} = \mu \nabla \cdot \vec{\epsilon} = \mu \begin{bmatrix} \nabla^2 u_x + (\frac{\partial}{\partial x})(\nabla \cdot \vec{u}) \\ \nabla^2 u_y + (\frac{\partial}{\partial y})(\nabla \cdot \vec{u}) \\ \nabla^2 u_z + (\frac{\partial}{\partial z})(\nabla \cdot \vec{u}) \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \nabla^2 u_x \\ \nabla^2 u_y \\ \nabla^2 u_z \end{bmatrix} = \mu \nabla^2 \vec{u}.$$

再应用牛顿第二定律于牛顿流上得到,

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) dV = \int_S -p \vec{I} \vec{n} dS + \int_V \mu \nabla^2 \vec{u} dV + \int_V \rho \vec{f} dV.$$

和理想流体处理一样, 我们得到一般化的欧拉方程,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{aligned}$$

这里 $\nu := \mu/\rho$ 称为运动学粘性系数。将密度常数 ρ 吸收到压力项 p 中, 得到与时间有关的Navier-Stokes方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.} \end{aligned}$$

这是论文第四章主要研究的方程。当所研究的是定常流,即相关函数不依赖于时间 t 可得到定常Navier-Stokes方程

$$\begin{aligned} -\nu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.} \end{aligned}$$

这是第三章研究的方程。它们加上相应的初边值条件就组成了一类非常基本的不可压缩流模型。如前所述, Navier-Stokes方程是非线性的。在速度比较小或者流被严格约束时,我们可以通过在Navier-Stokes方程中扔掉非线性项来近似,并且将常数 ν 吸收到速度项 \vec{u} 当中,就可以得到Stokes方程

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.} \end{aligned}$$

它是研究非线性Navier-Stokes方程的一个基础,在第二章我们讨论研究的就是Stokes方程。

1.2 有限元方法及其计算

1.2.1 有限元方法

有限元方法是一种比较重要的微分方程数值解法,也是当今应用数学和工程计算界研究最热门的计算方法之一。有限元方法最先是由工程师们提出并用于求解简单的结构问题。应用数学界关于有限元方法最原始的思想是Courant于1943年提出的在三角形网格上用逐片线性函数去逼近Dirichlet问题[17]。有限元方法作为一种系统的数值方法,并奠定其数学基础,则是在60年代中期,以冯康先生为代表的中国学者与西方学者独立并行地完成的。有限元方法经过半个多世纪的发展已经趋向成熟并仍在不断向前发展,其完整的数学理论可以参考著作[87, 75, 78, 80]等。

变分原理, 泛函分析, 特别是Sobolev空间的理论为有限元方法的理论研究提供了基础。有限元方法基本问题可归纳为6步:

- (1) 将数学物理问题转化为等价的变分问题。
- (2) 选定单元的形状, 对求解域作剖分。
- (3) 构造基函数或单元形状函数, 并构成有限元空间 V_h 。

- (4) 形成有限元离散方程。
- (5) 提供求解有限元离散方程的有效方法。
- (6) 收敛性及误差估计。

在这一节我们用一个简单的模型问题, 来说明有限元方法按以上步骤的具体实现。考虑下述Laplace方程的齐次Dirichlet问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 Ω 是平面 R^2 中的一个有界区域, $\partial\Omega$ 为其边界, f 是 Ω 中给定的光滑函数。该问题是薄膜平衡状态时的微分方程形式的描述, 力学上即为作用力与反作用力平衡的描述, 即牛顿第三定律。力学上描述此问题还有另一种形式, 即势能最小原理。假定薄膜有一位势 v , 其势能可写成

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

记 $H_0^1(\Omega) := \{v : v|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} |v|^2 dx dy < \infty, \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy < \infty\}$ 是标准的Sobolev空间, 则平衡状态位移 u 应满足

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega) \quad (1.4)$$

这是一个泛函 $J(v)$ 的极小问题, 与其相应的变分问题是

$$\begin{cases} \text{求 } u \in V, \text{ 使得} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.5)$$

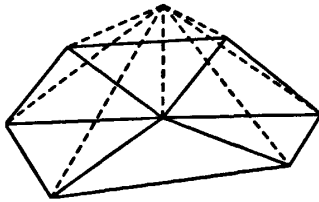


图1.1

可以证明, 问题(1.4)等价于(1.5), 而且在某种意义上等价于问题(1.3)。有限元方法正是基于变分形式(1.5)上的一种数值方法。为简单计, 假定 Ω 是一个多

边形。将 Ω 作三角形剖分 T_h , h 为单元 $\tau \in T_h$ 的最大直径。设 V_h 是由在边界 $\partial\Omega$ 上为0的分片一次多项式所组成的集合。由于剖分固定后, V_h 即为一个有限维空间, 它具有有限个基函数, 例如在某个节点 P 处为1, 而在其余节点处为0的分片一次函数(见图1.1)。

设 $\dim V_h = N$, 其基函数为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$, 则问题(1.5)的有限元逼近为

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \text{ 使得} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.6)$$

它等价于

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \text{ 使得} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1.7)$$

而令

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x),$$

则问题(1.7)可写成

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

或写成

$$Au = F, \quad (1.8)$$

其中 $u = (u_1, \dots, u_N)^T$, $F = (\int_{\Omega} f \varphi_1 dx, \dots, \int_{\Omega} f \varphi_N dx)^T$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx$ 。因此用有限元方法逼近问题(1.5), 最终是求解线性方程组(1.8)。可知, 其系数矩阵 A 是对称正定的, 并且是稀疏的, 即 A 中大量元素为0。方程(1.8)的这些性质给数值求解带来了极大的方便, 这也是有限元方法为广大工程、力学界所欢迎的重要原因。对于有限元解我们有以下定理,

定理 1.1. (Céa引理) 设双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 是连续且 V 椭圆的, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V,$$

其中 u, u_h 分别为原问题(1.5)和有限元离散问题(1.6)的解, $\|\cdot\|_V$ 表示 V 的范数。

这个定理表明 u_h 是在 V_h 的最优解，同时也为有限元解的先验误差估计提供重要的基础，即可以把有限元解的误差估计归结为插值误差估计，因此我们有：设 u 和 u_h 是变分问题(1.5)的真解和有限元解，其中 $u \in H^{k+1}(\Omega)$ ， $u_h \in V_h$ ，那么有如下的先验估计成立[78]：

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^k |u|_{k+1},$$

这里 C 是与网格中的单元尺寸 h 无关的常数。可见，这个估计是最优的。这个误差估计具体是怎么得到，在此就不再赘述了，可见有限元教材[78]。在后面几章中都有相应的关于先验误差估计的推导，都是以此为基础得到的。

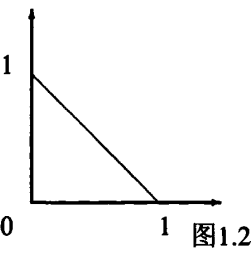
对于有限元解还有一种比较重要的估计是后验误差估计，这是和自适应计算紧密联系在一起。当我们在计算实际问题的时候，会要求某些地方的计算精度可能更高，这就使得仅仅在初始网格上进行一次有限元计算是不够的，而是需要多次有限元计算。至于这一系列算法如何设计，则有许多方法。比较常见有 h 方法、 p 方法和 r 方法。 h 方法就是网格加密方法，比较适合解静态问题。 p 方法就是局部使用高阶元的办法，而 r 方法就是所谓的移动网格方法，是一种比较适合解动态问题的方法。

1.2.2 有关有限元计算的几点

接下来我们简单讨论一下刚度矩阵的计算。它依赖于网格和基函数的选取。在实际编程计算中，网格主要有四边形和三角形两种。在四边形网格中我们一般采用的是 Q_1 元作为基函数，那么其刚度矩阵就比较容易计算，如Laplace算子 Δ 的单元刚度矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

在三角形网格中，我们一般采用 P_2 或者 P_1 元，有时候也可能会用 P_3 元，但一般不太会用，因为高次元需要自由度多了，实现起来比较复杂。对于三角形单元的单元刚度矩阵不需要一个一个写出，所以一般都是先在一个参考元上计算，然后再通过Jacobi矩阵变换到每个单元。计算参考元的单元刚度矩阵，线性元也可直接计算所得，高次元可由数值积分实现，采用高斯积分可以达到最高的精度。



对于标准的参考单元(图1.2)，它要达到的精度和它需要取的点的个数关系如表(1.1)所示。积分点具体的位置和相应的权值都可以通过具体计算得出，如表(1.2)为精度等于4时的积分点和相应的权值。

表 1.1: 精度与所需点的个数关系图.

精度	1	2	3	4	5	6	7
点的个数	1	3	4	6	7	9	13

表 1.2: 精度为4时的积分点(x,y)和权值w

x	0.8168	0.0916	0.0916	0.1081	0.4459	0.4459
y	0.0916	0.8186	0.0916	0.4459	0.1081	0.4459
w	0.1100	0.1100	0.1100	0.2234	0.2234	0.2234

第二章 迭代罚方法解Stokes方程

从前一章可知, Stokes方程是在满足某种条件下Navier- Stokes方程的特例。虽然此时Stokes方程是线性的, 但是相比Laplace方程, 它还是很复杂的。因为它需要求解两个未知函数 u 和 p , 并且函数 u 还需要满足散度为零 ($\operatorname{div} u = 0$)。这就使得我们不能用一般的有限元来解, 而需要用混合有限元来解。所以在这一章的开始我们先简单介绍一下混合有限元的内容。

罚方法 (penalty method) 起源于条件极值理论。相比Lagrange乘子法而言, 罚方法能够使得引入的变量个数达到最少。这样就使得有限元方法实现起来简单很多, 但是其引入的罚因子对误差还是有一定的影响。一方面, 希望这个罚因子对误差影响越小越好, 所以尽可能取小的罚因子。另一方面, 罚因子取的太小会使需求解的方程的条件数很大, 这是非常不好的一件事情。为解决这一矛盾, 我们将在第二节中采用迭代罚方法来解Stokes方程[14]。

为了保证方程解的存在唯一性, 所以我们所选取的两个有限元空间必须满足所谓的LBB条件 (即 $\inf - \sup$ 条件)。但常用的一个简单的元, $Q_1 - P_0$ 元, 它是不满足LBB条件的。在第三节中我们将证明即便这样, $Q_1 - P_0$ 元仍然可以用作迭代罚方法计算Stokes方程的元。

2.1 混合有限元

关于混合有限元的经典之作是F.Brezzi和M.Fortin的“Mixed and Hybrid Finite Element Methods[76]”。对于同一个微分方程边值问题, 存在着不同的变分形式。如Laplace问题基于所谓的Hellinger-Resissner变分原理就可以得到一种混合有限元方法。利用混合有限元方法有很多优点的, 例如在计算多孔介质流时, 通常需要计算速度, 如用通常的有限元方法, 只能先求出压力, 然后求导得到速度。这样做精度将降低, 而利用混合有限元方法求解, 可同时求出压力和速度, 提高了离散解的精度。此外, 许多问题本身的自然的Galerkin逼近就只能采用混合有限法, 如我们所要解的Stokes方程, Navier-Stokes方程。

下面我们给出Stokes问题的混合变分形式。Stokes问题可表示为

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.1)$$

令

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (2.2)$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} v q dx. \quad (2.3)$$

为方便起见, 我们只考虑二维情形。对(2.1)式利用Green格式可得到如下混合变分形式: 求 $u \in (H_0^1(\Omega))^2, p \in L_0^2(\Omega)$, 使得其满足下式

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = (f, v), & \forall v \in V = (H_0^1(\Omega))^2, \\ b(u, q) = 0, & \forall q \in Q = L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.4)$$

这里 $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q dx = 0\}$ 。(2.4)式也称为鞍点问题。由(2.4)所取的 V, Q 是满足以下不等式(参见[7, 2])

$$\beta \|q\|_Q \leq \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V}, \quad \forall q \in Q, \quad (2.5)$$

其中 $\beta > 0$ 是一个常数。这一条件就是我们所谓的LBB条件或者inf-sup条件。这一条件的验证, 在很多相关的书上都有(见[76, 87, 75, 83]等), 最后我们不加证明的给出定理

定理 2.1. 问题(2.4)存在唯一解。

在用混合有限元离散Stokes问题时, 关键是构造两个有限元空间 $V_h \subset (H_0^1(\Omega))^2$ 和 $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$ 满足离散的LBB条件

$$\beta_0 \|q_h\|_{Q_h} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{V_h}}, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.6)$$

β_0 是一个不依赖于网格长度 h 的常数。像比较经典的RT元, BDM元, Mini元以及Taylor-Hood元等都是满足上述离散条件的元[76]。需要指出的是, 在矩形网格

上, V_h 采用双线性有限元, Q_h 采用分片常数的 $Q_1 - P_0$ 元是不满足条件(2.6)。利用这两个离散空间 V_h 和 Q_h , 我们写出其离散形式: 求 $u_h \in V_h, p \in Q_h$, 满足下式

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.7)$$

和Laplace方程一样, 我们可以写出它的线性代数形式。给定一组矢量形式(速度)的基 $\{\phi_j\}$ 和标量形式(压力)的基 $\{\varphi_k\}$, 我们可得

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j, \quad p_h = \sum_{k=1}^{N_p} p_k \varphi_k$$

这样方程(2.7)就可以写成一个线性系统的形式:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

这里 $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, $B = [b_{kj}]$, $b_{kj} = b(\phi_j, \varphi_k)$, 下标分别为 $i, j = 1, \dots, N_u, k = 1, \dots, N_p$ 。右端项向量分别为 $f = [f_i]$, $f_i = (f, \phi_i)$, $g = [g_k]$, $g_k = 0$ 。

鞍点问题(2.8)可以用经典的Uzawa算法求解(可参考文献[76, 79, 9, 15]等), 我们可以这样来描述一般的Uzawa算法: 任意给定 p^0 , 则当 $p^n, n \geq 0$ 已知时, 可以根据下式依次得到 u^{n+1} 和 p^{n+1} :

$$\begin{cases} u^{n+1} = A^{-1}(f - B^T p^n), \\ p^{n+1} = p^n + \alpha(Bu^{n+1} - g), \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

但是一般来说Uzawa算法收敛是比较慢的。因而在实际的计算中, 我们一般采用预处理来解线性系统(2.8), 如预处理MINRES方法等。

利用上述满足条件的元解Stokes问题, 我们可以得到相应的误差估计

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_0 \right\}.$$

此处 $\{u, p\}$ 是方程(2.4)的解, 而 $\{u_h, p_h\}$ 是混合有限元的解。

2.2 迭代罚方法

我们知道问题(2.4)它实际上等价于一个有条件约束的极小值问题: 求 $u \in (H_0^1(\Omega))^2$, 并且满足 $\operatorname{div} u = 0$, 使得

$$\min_{v \in V, \operatorname{div} v = 0} \frac{1}{2} a(u, v) - (f, v).$$

成立。这里 $a(u, v)$ 以及下面的 $b(v, q)$ 如上节(2.2)式, (2.3)式所示。我们考虑用带简化积分的罚方法来解上面这个问题: 求 $u_{\varepsilon, h} \in V_h \subset (H_0^1(\Omega))^2$, 使其满足

$$a(u_{\varepsilon, h}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} I_h(\operatorname{div} u_{\varepsilon, h}, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.9)$$

这里 I_h 是一个数值积分算子, $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$ 表示内积, $\varepsilon > 0$ 是很小的参数, 称为罚因子。在某种假设下, 罚方法(2.9) 等价于下面这个混合有限元方法: 求 $(u_{\varepsilon, h}, p_{\varepsilon, h}) \in V_h \times Q_h$, 使其满足

$$\begin{cases} a(u_{\varepsilon, h}, v_h) + b(v_h, p_{\varepsilon, h}) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(p_{\varepsilon, h}, q_h) - b(u_{\varepsilon, h}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.10)$$

这里 $Q_h \subset Q = L_0^2(\Omega)$ 。我们假定这两个离散空间 V_h 和 Q_h 是满足上节所说LBB条件(2.6)。从[76, 83]中, 我们可以知道用(2.9)式或者(2.10)式去逼近问题(2.4)时误差估计为 $\mathcal{O}(\varepsilon + R_h)$, $R_h = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_0$ 。从一结果来看, 我们显然希望这个参数 ε 越小越好, 这样我们就可以尽可能逼近方程的解。但是从另一方面来看, (2.9) 式离散导出的矩阵条件数为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}h^{-2})$, 所以当 ε 变小时, 相应的矩阵计算将变的不稳定。为了解决这一矛盾, 我们试想通过一个其他方法来消除 ε 带来的误差, 而不用减小 ε 。这样其条件数就不会太差, 使得相应的计算比较稳定。在[46]中, 用一个修正的罚方法, 通过一个外插形式

$$u_{mn, h} = u_{\varepsilon_n, h} - \varepsilon_n \frac{u_{\varepsilon_m, h} - u_{\varepsilon_n, h}}{\varepsilon_m - \varepsilon_n}$$

来实现。这里 $u_{\varepsilon_m, h}, u_{\varepsilon_n, h}$ 分别是方程(2.10)在罚因子为 $\varepsilon_m, \varepsilon_n$ 时的解。这样它的误差估计为 $\mathcal{O}(\varepsilon_m \varepsilon_n + R_h)$, 这就表明 ε 不用取的太小这个想法是可行的。

在这一节中, 我们给出了这样一个迭代过程。首先

$$a(u_{\varepsilon, h}^0, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} I_h(\operatorname{div} u_{\varepsilon, h}^0, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.11)$$

然后, 当 $k = 1, 2, \dots$

$$a(u_{\varepsilon,h}^k, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} I_h(\operatorname{div} u_{\varepsilon,h}^k, \operatorname{div} v_h) = a(u_{\varepsilon,h}^{k-1}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.12)$$

我们可以证明这个迭代过程的误差是 $\mathcal{O}(\varepsilon^{k+1} + R_h)$, 对于任意的整数 k 。由此可以看出, 这个迭代过程是满足我们所期望的, 并且我们还可以看到, 在每一个迭代过程中, 所需要解的刚度矩阵是一样, 不需要重新组装, 仅仅是右端项不一样, 所以这个过程还是很高效的。

2.2.1 误差估计

为了便于分析算法(2.11)和(2.12), 我们先将其变为混合有限元形式: 求 $(u_{\varepsilon,h}^0, p_{\varepsilon,h}^0) \in V_h \times Q_h$, 满足下式

$$\begin{cases} a(u_{\varepsilon,h}^0, v_h) + b(v_h, p_{\varepsilon,h}^0) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^0, q_h) - b(u_{\varepsilon,h}^0, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.13)$$

和当 $k = 1, 2, \dots$, 求 $(u_{\varepsilon,h}^k, p_{\varepsilon,h}^k) \in V_h \times Q_h$, 满足下式

$$\begin{cases} a(u_{\varepsilon,h}^k, v_h) + b(v_h, p_{\varepsilon,h}^k) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^k, q_h) - b(u_{\varepsilon,h}^k, q_h) = \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{k-1}, q_h), & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.14)$$

(2.13)式的误差估计就是标准的罚方法的误差估计, 在此不再累述, 仅列出其结果, 相关证明参见[11, 76, 83, 51, 59]。

定理 2.2. 设 (u, p) 和 $(u_{\varepsilon,h}^0, p_{\varepsilon,h}^0)$ 分别为方程(2.4)和(2.13)的解, 并且所选的有限元空间满足LBB条件(2.6), 那么有下列估计式成立:

$$\|u - u_{\varepsilon,h}^0\|_1 + \|p - p_{\varepsilon,h}^0\|_0 \leq C(h\|u\|_2 + h\|p\|_1 + \varepsilon\|p\|_0),$$

这里 C 是不依赖于网格长度 h 和参数 ε 的。

那么对于(2.14)式, 我们也有如下的定理,

定理 2.3. 设 (u, p) 和 $(u_{\varepsilon,h}^k, p_{\varepsilon,h}^k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)分别为方程(2.4)和(2.14)的解, 并且所选的有限元空间满足LBB条件(2.6), 那么有下列估计式成立:

$$\|u - u_{\varepsilon,h}^k\|_1 + \|p - p_{\varepsilon,h}^k\|_0 \leq C(h\|u\|_2 + h\|p\|_1 + \varepsilon\|p - p_{\varepsilon,h}^{k-1}\|_0), \quad (2.15)$$

这里 C 是不依赖于网格长度 h 和参数 ε 的。

证明 在本篇论文中, 如不特殊说明, C 在不同的地方表示不同的常数。为方便计, 令 $\xi^k = u - u_{\varepsilon,h}^k$ 和 $\eta^k = p - p_{\varepsilon,h}^k$ 。记 u^I, p^I 分别为到空间 V_h, Q_h 上的投影, 由(2.4)式和(2.14)式相减可得

$$\begin{cases} a(\xi^k, v_h) + b(v_h, \eta^k) = 0, & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(\eta^k, q_h) - b(\xi^k, q_h) = \varepsilon(\eta^{k-1}, q_h), & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.16)$$

那么由(2.16)式的第一式, 可得:

$$\begin{aligned} |u^I - u_{\varepsilon,h}^k|_1^2 &= a(u^I - u_{\varepsilon,h}^k, u^I - u_{\varepsilon,h}^k) \\ &= a(u^I - u, u^I - u_{\varepsilon,h}^k) + b(u_{\varepsilon,h}^k - u^I, \eta^k) \\ &\leq C\|u^I - u\|_1 \|u^I - u_{\varepsilon,h}^k\|_1 + b(u_{\varepsilon,h}^k - u^I, \eta^k). \end{aligned} \quad (2.17)$$

对于(2.17)式的第二项, 我们利用(2.16)的第二式可得

$$\begin{aligned} b(u_{\varepsilon,h}^k - u^I, \eta^k) &= b(u_{\varepsilon,h}^k - u^I, p - p^I) \\ &\quad + b(u - u^I, p^I - p_{\varepsilon,h}^k) - b(\xi^k, p^I - p_{\varepsilon,h}^k) \\ &\leq C(\|p - p^I\|_0 \|u_{\varepsilon,h}^k - u^I\|_1 + \|u - u^I\|_1 \|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0) \\ &\quad - \varepsilon(\eta^{k-1}, p^I - p_{\varepsilon,h}^k) - \varepsilon(\eta^k, p^I - p_{\varepsilon,h}^k). \end{aligned}$$

而

$$-\varepsilon(\eta^k, p^I - p_{\varepsilon,h}^k) = -\varepsilon\|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0^2 - \varepsilon(p - p^I, p^I - p_{\varepsilon,h}^k)$$

所以综合上面几个式子, 我们有

$$\begin{aligned} |u^I - u_{\varepsilon,h}^k|_1^2 + \varepsilon\|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0^2 \\ \leq C(\|u^I - u\|_1 + \|p - p^I\|_0)\|u_{\varepsilon,h}^k - u^I\|_1 \\ + (C\|u - u^I\|_1 + \varepsilon\|\eta^{k-1}\|_0 + \varepsilon\|p - p^I\|_0)\|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

然后又有LBB条件(2.6)成立, 再次用到(2.16)式的第一式, 得:

$$\begin{aligned} \|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0 &\leq \frac{1}{\beta_0} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{|b(v_h, p^I - p_{\varepsilon,h}^k)|}{\|v_h\|_1} \\ &\leq \frac{1}{\beta_0} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{|b(v_h, p^I - p) - a(\xi^k, v_h)|}{\|v_h\|_1} \\ &\leq \frac{1}{\beta_0} (\|p^I - p\|_0 + \|\xi^k\|_1). \end{aligned}$$

所以(2.18)式又可以写成

$$\begin{aligned} & |u^I - u_{\varepsilon,h}^k|_1^2 + \varepsilon \|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0^2 \\ & \leq C(\|u^I - u\|_1 + \|p - p^I\|_0) \|u_{\varepsilon,h}^k - u^I\|_1 \\ & + (C\|u - u^I\|_1 + \varepsilon \|\eta^{k-1}\|_0 + \varepsilon \|p - p^I\|_0)(\|p^I - p\|_0 + \|\xi^k\|_1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

我们知道有这样的不等式成立: 对任意的 $C > 0$, $ab \leq Ca^2 + \frac{1}{4C}b^2$. 将这种性质应用于上式, 并且考虑到在 $H_0^1(\Omega)$ 中, 范数和半范数是等价的, 所以有

$$\begin{aligned} |u^I - u_{\varepsilon,h}^k|_1^2 + \varepsilon \|p^I - p_{\varepsilon,h}^k\|_0^2 & \leq C(\|u^I - u\|_1^2 + \|p - p^I\|_0^2 + \varepsilon^2 \|\eta^{k-1}\|_0^2 \\ & + \|\xi^k\|_1^2 + \varepsilon \|p - p^I\|_0^2). \end{aligned}$$

最后我们应用三角不等式 $|u - u_{\varepsilon,h}|_1^2 \leq |u^I - u|_1^2 + |u^I - u_{\varepsilon,h}^k|_1^2$ 和 $|p - p_{\varepsilon,h}|_1^2 \leq |p^I - p|_1^2 + |p^I - p_{\varepsilon,h}^k|_1^2$ 以及插值误差估计得到我们的定理

$$\|u - u_{\varepsilon,h}^k\|_1 + \|p - p_{\varepsilon,h}^k\|_0 \leq C(h\|u\|_2 + h\|p\|_1 + \varepsilon\|p - p_{\varepsilon,h}^{k-1}\|_0),$$

这样我们完成定理的证明。□

注 1. 从定理2.3证明来看, 参数 ε 也不能取的太大。假设我们取 $C\varepsilon < 1$. 这样我们可以类似于定理2.2的结果,

$$\|u - u_{\varepsilon,h}^k\|_1 + \sqrt{\varepsilon}\|p - p_{\varepsilon,h}^k\|_0 \leq \frac{C}{1 - C\varepsilon}(h\|u\|_2 + h\|p\|_1) + (C\varepsilon)^{k+1}\|p\|_0,$$

注 2. 对于Navier-Stokes方程, 我们也可以给出相应的迭代罚方法格式

$$\begin{aligned} a(u_{\varepsilon,h}^0, v_h) & + ((u_{\varepsilon,h}^0 \cdot \nabla)u_{\varepsilon,h}^0, v_h) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u_{\varepsilon,h}^0, u_{\varepsilon,h}^0 \cdot v_h) \\ & + \frac{1}{\varepsilon}I_h(\operatorname{div}u_{\varepsilon,h}^0, \operatorname{div}v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

当 $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & a(u_{\varepsilon,h}^k, v_h) + ((u_{\varepsilon,h}^k \cdot \nabla)u_{\varepsilon,h}^k, v_h) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u_{\varepsilon,h}^k, u_{\varepsilon,h}^k \cdot v_h) + \frac{1}{\varepsilon}I_h(\operatorname{div}u_{\varepsilon,h}^k, \operatorname{div}v_h) \\ & = a(u_{\varepsilon,h}^{k-1}, v_h) + ((u_{\varepsilon,h}^{k-1} \cdot \nabla)u_{\varepsilon,h}^{k-1}, v_h) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u_{\varepsilon,h}^{k-1}, u_{\varepsilon,h}^{k-1} \cdot v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

值得一提的是, 这两个方程还是非线性的, 所以在计算时候需要先线性化, 可以采用牛顿法, Picard方法等。

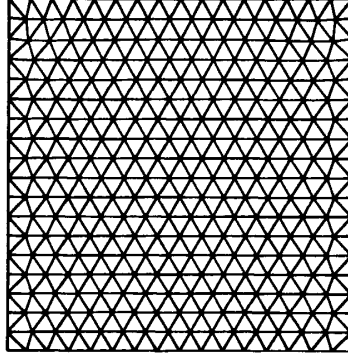


图 2.1: 用于计算的三角形网格, 分成562个单元.

2.2.2 数值例子

在这一小节中我们将通过一个数值例子来说明前面所介绍的迭代罚方法。对于罚方法的数值结果已经有很多结论了[46, 11, 51], 在这里我们只是来考虑一下罚因子带来的影响。考虑单位正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的Stokes方程

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

右端项 f 和Dirichlet边界条件是根据以下的准确解得到的:

$$u = \begin{pmatrix} x^2(1-x)^2(2y-6y^2+4y^3) \\ y^2(1-y)^2(-2x+6x^2-4x^3) \end{pmatrix}$$

和压力 $p = x^2 - y^2$ 。在定理中需要满足离散的LBB条件, 所以在这里我们选用一种Taylor-Hood元, $P_2 - P_1$ 元, 它是满足LBB条件[4, 76]。首先将正方形区域剖分成三角形网格 \mathcal{T}_h , 如图2.1所示, 是一致网格, 即各个三角形之间相差都不是很大, 且每个三角形都比较接近正三角形。然后在其上构造空间 $V_h = \{v : v|_K \in (P_2(K))^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ 和 $Q_h = \{q : q|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ (P_k 表示次数不超过 k 的多项式的集合)。

计算结果如表2.1, 表2.2所示。对于速度 u 和压力 p , 我们分别采用了三种网格长度, 相应的单元个数分别为 $M = 137, M = 562$ 和 $M = 2270$ 。罚因

表2.1: 速度项 u 在 $\varepsilon = 0.01$ 时迭代误差情况

单元个数	M=137	M=562	M=2270
$E_1(0)$	0.0018	0.0018	0.0018
$E_1(1)$	6.51×10^{-5}	5.39×10^{-5}	5.38×10^{-5}
$E_1(2)$	4.46×10^{-5}	6.77×10^{-6}	5.81×10^{-6}
$E_1(3)$	4.44×10^{-5}	6.40×10^{-6}	8.93×10^{-7}
$E_1(4)$	4.44×10^{-5}	5.68×10^{-6}	7.92×10^{-7}
$E_1(5)$	4.44×10^{-5}	5.68×10^{-6}	8.58×10^{-7}

表2.2: 压力项 p 在 $\varepsilon = 0.01$ 时迭代误差情况

单元个数	M=137	M=562	M=2270
$E_2(0)$	0.1313	0.1430	0.1590
$E_2(1)$	0.0107	0.0064	0.0173
$E_2(2)$	0.0050	0.0012	0.0016
$E_2(3)$	0.0051	0.0013	2.6×10^{-4}
$E_2(4)$	0.0051	0.0013	2.5×10^{-4}
$E_2(5)$	0.0046	0.0013	2.5×10^{-4}
$E_2(6)$	0.0039	0.0013	2.5×10^{-4}

子 $\varepsilon = 0.01$, 取了最大范数 $E_1^k = \max |u - u_{\varepsilon,h}^k|$ 和 $E_2^k = \max |p - p_{\varepsilon,h}^k|$ 做为结果。从表中我们可以看出, 只要迭代几步误差就可以趋向于一个值, 这个值一般就是由网格步长引起的。这个结果不仅验证定理的正确性, 并且也说明了这个方法还是很高效。

2.3 用 $Q_1 - P_0$ 元做迭代罚方法

在上一节当中, 用迭代罚方法解Stokes方程, 解决了罚因子不能取的太小的问题。无论是定理2.2还是定理2.3我们都强调离散的LBB 条件一定要满足, 而且在定理证明过程中, 我们也确实用到了这个条件。但是我们经常使用的一个简

单元的, 双线性-常数元, 即 $Q_1 - P_0$ 元是不满足LBB条件 (Q_k 表示每个自变量次数不超过k的多项式的集合)。基于这种元构造简单, 使用频繁, 我们有必要讨论一下这个元是否能应用于迭代罚方法。

从[77, 11, 51, 34, 8, 36, 13]的数值例子和理论分析可以知道, 在罚方法解Stoeke问题时, 用 $Q_1 - P_0$ 元对于速度项 u 来说效果很好, 压力项 p 的话在过滤掉虚假的压力模式后也表现良好。在这一节中, 我们将证明这种情况对于迭代罚方法来说也是一样的。直接应用经典鞍点问题理论[76]会导致速度项收敛阶的退化, 并且对压力项出现不收敛的情况, 这显然不行。为了得到最优收敛阶, 我们将使用[76, 12, 13]的一种方法, 采用稳定条件的一个变形, 即取全局有限元空间的一个子空间。

2.3.1 罚方法使用 $Q_1 - P_0$ 元

为了叙述方便, 我们考虑一个多边形区域 Ω , 比如就正方形区域。令 \mathcal{T}_h 为区域 Ω 的一个正方形剖分, 网格步长为 h 。一般就是通过将粗网格的对边中点连接起来而得到。这样我们就可以定义双线性空间 V_h 和常数空间 Q_h

$$V_h = \{v \in V \mid v|_K \in [Q_1(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.20)$$

$$Q_h = \{q \in Q \mid q|_K \in P_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.21)$$

这样构造的两个空间是不满足LBB条件[76, 8, 36]

$$\beta \|q_h\|_{Q_h} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{V_h}}, \quad \forall q_h \in Q_h$$

所以我们不能直接用经典的鞍点问题理论, 而是采用“局部跳棋盘(local checkerboard pattern)”来得到误差估计。

沿用[12, 13]的记号, 我们构造 V_h 的子空间 \hat{V}_h 和 Q_h 的子空间 \hat{Q}_h 使得 $Q_h = \hat{Q}_h \oplus \tilde{Q}_h$, 并且

$$\beta_0 \|\hat{q}_h\|_0 \leq \sup_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h} \frac{b(\hat{v}_h, \hat{q}_h)}{|\hat{v}_h|_1}, \quad \forall \hat{q}_h \in \hat{Q}_h \quad (2.22)$$

$$b(\hat{v}_h, \tilde{q}_h) = 0, \quad \forall \tilde{q}_h \in \tilde{Q}_h, \hat{v}_h \in \hat{V}_h \quad (2.23)$$

这里 β_0 是一个跟网格长度 h 无关的常数。那么这个空间 \tilde{Q}_h 就是所谓的“local checkerboard pattern”。令 \mathcal{T}^{2h} 是一个粗网格剖分, 网格长度为 $2h$ 。在这个粗网格

中, 我们将一个正方形平均分成四个小正方形, 这样我们就得到了细网格剖分 T^h , 其网格长度正好是 h 。这样 $\tilde{Q}_h = \text{span}\{\phi_M^1 : M \in T^{2h}\}$, ϕ_M^1 由以下定义:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -1 & +1 \\ \hline +1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

ϕ_M^1

而 $\hat{Q}_h = \text{span}\{\phi_M^2, \phi_M^3, \phi_M^4 : M \in T^{2h}\}$, 类似的 $\phi_M^2, \phi_M^3, \phi_M^4$ 有下列定义

$$\begin{array}{|c|c|} \hline +1 & +1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & +1 \\ \hline -1 & +1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & +1 \\ \hline +1 & +1 \\ \hline \end{array}$$

$\phi_M^2 \quad \phi_M^3 \quad \phi_M^4$

容易证明在 $L^2(\Omega)$ 中 \hat{Q}_h 和 \tilde{Q}_h 是正交的。子空间 \hat{V}_h 的具体构造参见[13]。和前面一样, 我们也需要定义两个投影。对任意的 $u \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$ 和 $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, 它们的投影为 $\hat{u}^I \in \hat{V}_h$ 和 $\hat{p}^I \in \hat{Q}_h$ 分别满足 $(\nabla \hat{u}^I, \nabla v_h) = (\nabla u, \nabla v_h)$, $\forall v_h \in \hat{V}_h$ 和 $(\hat{p}^I, q_h) = (p, q_h)$, $\forall q_h \in \hat{Q}_h$ 。相应的插值误差为[51]:

$$|u - \hat{u}^I|_1 \leq C h |\vec{u}|_2, \quad \|p - \hat{p}^I\|_0 \leq C h |p|_1. \quad (2.24)$$

接下来我们给出罚方法时采用 $Q_1 - P_0$ 元解 Stokes 方程的误差估计, 详细证明过程见[13]。

定理 2.4. 设 $(u, p) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ 为方程(2.4)的解, $(u_{\varepsilon,h}, p_{\varepsilon,h}) \in V_h \times Q_h$ 为方程(2.10)的解, 有限元空间 V_h 和 Q_h 如(2.20)式和(2.21)式所示选取。将 $p_{\varepsilon,h}$ 表示为 $p_{\varepsilon,h} = \hat{p}_{\varepsilon,h} + \tilde{p}_{\varepsilon,h}$, 其中 $\hat{p}_{\varepsilon,h} \in \hat{Q}_h$, $\tilde{p}_{\varepsilon,h} \in \tilde{Q}_h$ 。那么有下列误差估计成立:

$$\|u - u_{\varepsilon,h}\|_1 + \|p - \hat{p}_{\varepsilon,h}\|_0 \leq C(h |\vec{u}|_2 + h |p|_1 + \varepsilon \|\hat{p}^I\|_0)$$

这里 $\hat{p}^I \in \hat{Q}_h$, C 为一不依赖于 h 和 ε 的常数。□

值得一提的是, 在这个定理的证明过程中有一个式子在后面还要用到, 为了方便起见, 我们摘录如下:

$$\|u - u_{\varepsilon,h}\|_1^2 + \varepsilon \|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}\|_0^2 \leq C(h^2 |\vec{u}|_2^2 + h^2 |p|_1^2 + \varepsilon^2 \|\hat{p}^I\|_0^2). \quad (2.25)$$

从这个定理我们可以看出, 当我们在处理用 $Q_1 - P_0$ 元解 Stokes 方程时, 最重要的一点就是将 Q_h 分解成两个直交的子空间。因此我们在运用迭代罚方法解 Stokes 问题时, 也基本是按照这种想法来的。

2.3.2 迭代罚方法使用 $Q_1 - P_0$ 元

在这一节中, 我们将 $Q_1 - P_0$ 元应用于迭代罚方法解Stokes方程: 求 $(u_{\varepsilon,h}^{(0)}, p_{\varepsilon,h}^{(0)}) \in V_h \times Q_h$, 满足下式

$$\begin{cases} a(u_{\varepsilon,h}^{(0)}, v_h) + b(v_h, p_{\varepsilon,h}^{(0)}) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(0)}, q_h) - b(u_{\varepsilon,h}^{(0)}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.26)$$

和当 $k = 1, 2, \dots$, 求 $(u_{\varepsilon,h}^{(k)}, p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \in V_h \times Q_h$, 满足下式

$$\begin{cases} a(u_{\varepsilon,h}^{(k)}, v_h) + b(v_h, p_{\varepsilon,h}^{(k)}) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(k)}, q_h) - b(u_{\varepsilon,h}^{(k)}, q_h) = \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, q_h), & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.27)$$

实际上这个算法的初始值的误差估计结果就是我们上一节的定理2.4。那么接下来我们最主要的任务就是讨论方程(2.27)的误差估计, 事实上, 我们有以下定理成立:

定理 2.5. 设 $(u, p) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ 为方程(2.4)的解, $(u_{\varepsilon,h}^{(k)}, p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \in V_h \times Q_h$ 为方程(2.27)的解, 有限元空间 V_h 和 Q_h 如(2.20)式和(2.21)式所示选取。将 $p_{\varepsilon,h}^{(k)}$ 表示为 $p_{\varepsilon,h}^{(k)} = \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} + \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}$, 其中 $\hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} \in \hat{Q}_h$, $\tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} \in \tilde{Q}_h$ 。那么有下列误差估计成立:

$$\|u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_1 \leq C_1 (h|u|_2 + h|p|_1 + \varepsilon\|p - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u - u_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_1), \quad (2.28)$$

$$\|p - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0 \leq C_2 h|p|_1 + \|u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_1, \quad (2.29)$$

这里 C_1, C_2 为不依赖于网格长度 h 和罚因子 ε 的常数。

证明 常数 C 在不同的地方还是表示不同的数。令 (u, p) 为方程(2.4)的解。令 \hat{u}^I 和 \hat{p}^I 分别为在空间 V_h 和 Q_h 上的投影。由方程(2.4)和迭代格式(2.27)相减, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a(u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}, v_h) + b(v_h, p - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) = 0, & \forall v_h \in V_h, \\ \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(k)} - p_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, q_h) - b(u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.30)$$

由范数定义和Cauchy-Schwarz不等式, 我们知道

$$\begin{aligned} |u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1^2 &= a(u - \hat{u}^I, u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}) + a(\hat{u}^I - u_{\varepsilon,h}^{(k)}, u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &\leq |u - \hat{u}^I|_1 |u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1 + a(\hat{u}^I - u_{\varepsilon,h}^{(k)}, u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}). \end{aligned}$$

对于最后一项, 由方程(2.30)的第一式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} a(\hat{u}^I - u_{\varepsilon,h}^{(k)}, u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}) &= b(u_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{u}^I, p - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &= b(u_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{u}^I, p - \hat{p}^I) + b(u_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{u}^I, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

对于这两项, 我们分别记为 I_1 和 I_2 。第一项 I_1 我们利用三角不等式可以直接进行估计:

$$I_1 = b(u_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{u}^I, p - \hat{p}^I) \leq (|\hat{u}^I - u|_1 + |u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1) \|p - \hat{p}^I\|_0,$$

至于 I_2 , 我们则利用(2.23)式和方程(2.27)以及方程(2.4)的第二式, 可得

$$\begin{aligned} I_2 &= b(u_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{u}^I, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) = b(u_{\varepsilon,h}^{(k)}, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) - b(\hat{u}^I, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &= b(u - \hat{u}^I, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) - \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - p_{\varepsilon,h}^{(k)}, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &\leq |\hat{u}^I - u|_1 \|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0 - \varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - p_{\varepsilon,h}^{(k)}, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}). \end{aligned}$$

接下来我们主要处理上式的第二项, 为此我们先做这样一个分解, 注意到这两个空间是正交的,

$$p_{\varepsilon,h}^{(k)} = \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} + \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}, \quad \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} \in \hat{Q}_h, \quad \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} \in \tilde{Q}_h,$$

那么有

$$\begin{aligned} &-\varepsilon(p_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - p_{\varepsilon,h}^{(k)}, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &= -\varepsilon\|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2 + \varepsilon(\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, \hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &= -\varepsilon\|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2 + \varepsilon(\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, \hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)} - \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}) \\ &= -\varepsilon\|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2 + \varepsilon(\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, \hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}) + \varepsilon(\tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}), \end{aligned}$$

进一步, 我们应用不等式 $ab \leq ca^2 + \frac{1}{4c}b^2$ (对任意的 $c > 0$) 和三角不等式来处理上式的第二项,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, \hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}) &\leq \varepsilon\|\hat{p}_h - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0 \|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0 \\ &= C(\varepsilon^2\|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0^2 + \|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2) \\ &= C(\varepsilon^2\|p - \hat{p}^I\|_0^2 + \varepsilon^2\|p - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0^2 + \|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2), \end{aligned}$$

和第三项,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}, \tilde{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}) &\leq \varepsilon \|p_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0 \|p_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0 \\
 &\leq \varepsilon \|p_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0^2 + \frac{1}{4}\varepsilon \|p_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2 \\
 &\leq \varepsilon \|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0^2 + \varepsilon \|p_{\varepsilon,h}^{(k-1)} - \hat{p}^I\|_0^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4}\varepsilon \|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0^2 + \frac{1}{4}\varepsilon \|p_{\varepsilon,h}^{(k)} - \hat{p}^I\|_0^2.
 \end{aligned}$$

另一方面, 从(2.22)式和(2.23)式出发, 我们有

$$\begin{aligned}
 \|\hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0 &\leq \frac{1}{\beta_0} \sup_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h} \frac{|b(\hat{v}_h, \hat{p}^I - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)})|}{|\hat{v}_h|_1} \\
 &= \frac{1}{\beta_0} \sup_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h} \frac{|b(\hat{v}_h, \hat{p}^I - p) + b(\hat{v}_h, p - p_{\varepsilon,h}^{(k)})|}{|\hat{v}_h|_1} \\
 &\leq C \|p - \hat{p}^I\|_0 + \frac{1}{\beta_0} \sup_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h} \frac{|a((u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}), v_h)|}{|\hat{v}_h|_1} \\
 &\leq C (\|p - \hat{p}^I\|_0 + |u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1). \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

最后, 综合上面所有不等式, 然后再次利用不等式 $ab \leq ca^2 + \frac{1}{4c}b^2$ (对任意的 $c > 0$), 我们有结论:

$$\begin{aligned}
 |u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1^2 + \varepsilon \|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k)}\|^2 &\leq C (|u - \hat{u}^I|_1^2 + \|p - \hat{p}^I\|_0^2 + \varepsilon^2 \|p - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0^2 \\
 &\quad + \varepsilon \|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(k-1)}\|_0^2 + \varepsilon |u - u_{\varepsilon,h}^{(k-1)}|_1^2 + \varepsilon |u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1^2), \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

当 $k = 0$ 时, 由不等式(2.25), 我们有下式

$$\varepsilon \|\hat{p}^I - p_{\varepsilon,h}^{(0)}\|_0^2 \leq C (|u - \hat{u}^I|_1^2 + \|p - \hat{p}^I\|_0^2 + \varepsilon^2 \|\hat{p}^I\|_0^2). \tag{2.33}$$

接着应用这个(2.33), 结合(2.32)和插值误差估计式(2.24) 我们就可以得到速度项的误差估计(2.28)。对于压力项, 应用三角不等式和(2.31)我们很容易就得到下式:

$$\|p - \hat{p}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_0 \leq \|p - \hat{p}^I\|_0 + \|\vec{u} - \vec{u}_{\varepsilon,h}^{(k)}\|_1$$

这样我们就完成了定理的证明. \square

注 3. 在(2.32)的右端还有 $|u - u_{\varepsilon,h}^{(k)}|_1^2$ 这么一个项存在, 因此罚因子 ε 不能取的太小, 至少需要满足 $C\varepsilon < 1$.

这个定理说明使用 $Q_1 - P_1$ 元应用迭代罚方法解Stokes方程是可行的。我们只需要取 Q_h 的一个子空间 \hat{Q}_h , 这个实际上就是剔除了那个使得 $b(v_h, q_h) = 0$ 的基。

2.3.3 数值例子

这一小节我们给出一个数值例子来说明我们的理论, 所以我们仍然只关心罚因子 ε 带给误差的影响。我们依旧使用上一节的那个例子。在正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的Stokes方程

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

右端项 f 和Dirichlet边界条件是根据以下的准确解得到的:

$$u = \begin{pmatrix} x^2(1-x)^2(2y-6y^2+4y^3) \\ y^2(1-y)^2(-2x+6x^2-4x^3) \end{pmatrix}$$

和压力 $p = x^2 - y^2$ 。

所不同的是我们不再使用三角形剖分, 而是采用四边形剖分。将正方形分成 $(N+1)^2$ 个小正方形, 其网格步长为 $h = \frac{1}{N+1}$ 。在四边形网格上构造我们所需要的 $Q_1 - P_0$ 元, 令 ε 为一个不是很小的参数, 在我们的例子中取 $\varepsilon = 0.1$ 。方程(2.26)和(2.27)有相同的刚度矩阵。我们定义速度误差 $E_1(k) = \max |\bar{u} - \bar{u}_{\varepsilon,h}^{(k)}|$ 和压力误差 $E_2(k) = \max |p - p_{\varepsilon,h}^k|$ 。从数值结果(见表2.3)知道, 在几步迭代以后这个误差就趋于一个稳定的值, 这个值就是由空间步长 h 引起的误差。直接应用 $Q_1 - P_0$ 元是得不到压力项的收敛阶。在过滤掉了虚假压力部分, 即消除使得 $b(v_h, q_h) = 0$ 的基, 其数值结果如表2.4所示。从中可以看出, 和速度项一样, 几步迭代几步以后这个误差也趋于一个稳定的值。

表2.3: 速度项 u 在 $\varepsilon = 0.1$ 时迭代误差情况

	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$
$E_1(0)$	0.0154295	0.0143399	0.0139865
$E_1(1)$	0.004105	0.0031729	0.0029374
$E_1(2)$	0.001955	0.0010178	0.0007518
$E_1(3)$	0.0015874	0.0005019	0.0002505
$E_1(4)$	0.0015327	0.000388	0.0001241
$E_1(5)$	0.0015296	0.0003522	0.0000949
$E_1(6)$	0.0015275	0.0003377	0.0000865
$E_1(7)$	0.0015255	0.0003366	0.0000863
$E_1(8)$	0.0015244	0.0003356	0.0000868
$E_1(9)$	0.0015239	0.0003347	0.0000868
$E_1(10)$	0.0015236	0.0003339	0.0000866

表2.4: 压力项 p 在 $\varepsilon = 0.1$ 时迭代误差情况

	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$
$E_2(0)$	0.3695323	0.3868788	0.4157785
$E_2(1)$	0.2518413	0.2148464	0.2014674
$E_2(2)$	0.2124139	0.1524278	0.1187397
$E_2(3)$	0.1981833	0.1301315	0.0866178
$E_2(4)$	0.192738	0.1204194	0.0735612
$E_2(5)$	0.190568	0.1158756	0.0678301
$E_2(6)$	0.1896803	0.1134904	0.0650237
$E_2(7)$	0.1893113	0.1121132	0.0634714
$E_2(8)$	0.1891564	0.1112628	0.0624974
$E_2(9)$	0.1890911	0.110715	0.0618373
$E_2(10)$	0.1890634	0.110396	0.0613405

第三章 Navier-Stokes方程的两套网格方法

在前面一章我们主要介绍了用迭代罚方法解Stokes方程。从这一章开始我们着重讨论一下Navier-Stokes方程。Navier-Stokes方程现在研究者众多，非常热门。因而我们也不可能对其每个方面都做详细讨论，我们只是挑选了其中一二。仅仅从数学的角度来看，稳定的Navier-Stokes方程相比Stokes方程，就是多了一个非线性项 $(u \cdot \nabla)u$ 。正是由于这个非线性项的存在，使得方程解起来非常困难，也就是说在离散后计算量很大。因此我们总是千方百计地希望能够减少计算量，当然这是在不减少精度的前提下实现的。在这一章我们讨论的两套网格方法就可以大大减少其计算量。

便于区别两套网格，我们暂且称之粗网格和细网格。因为Navier-Stokes方程是非线性，所以直接计算之前需要先进行线性化，在这里我们采用牛顿法来实现线性化。两套网格方法在Navier-Stokes方程上的直接应用就是先在粗网格进行计算，然后将这个计算所得的离散解投影到细网格上作为牛顿迭代的初始解，接着在细网格上进行一步牛顿迭代，这就是最简单的两套网格方法。在本章第一节我们先通过两个简单的例子来说明两套网格方法，然后在第二节中将这个方法应用到Navier-Stokes方程上。

3.1 两套网格方法

两套网格方法最先是由许进超教授在[65, 66, 67, 68]提出的，用来离散非对称不正定偏微分方程。先在粗网格上解一个非对称问题，因为网格粗，所以计算量少，然后在细网格上解一个对称正定的问题。当然两套网格方法也被应用于其它方面，比如用于非线性问题的线性化[65, 66, 48]，大型偏微分方程的局部并行算法[69, 70, 71]，求解耦合方程[35]，还有的将两套网格作为一个后处理过程，进而提高计算精度[1]。此外，还有很多关于两套网格的文献，如[63]是关于将非协调元应用于两套网格算法的，如[45, 41, 42, 43, 44, 21]等则都是关于两套网格在Navier-Stokes方程中的应用。

接下来拿两个最简单的例子来说明一下两套网格的具体实现，一个是非线性问题的线性化，另一个是求解耦合方程。

例 3.1. 非线性问题的线性化。例子来源于[65]。考虑一个半线性问题：

$$-\Delta u + f(x, u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

这里 Ω 为 R^d ($d = 1, 2, 3$)的一个子空间, $\partial\Omega$ 为其边界, f 为一足够光滑的函数。这是一个非线性问题, 我们采用牛顿法来进行线性化, 为此我们简单推导一下这个方程的牛顿迭代公式。首先我们写出其弱形式：

$$(\nabla u, \nabla v) + (f(u), v) = 0, \quad (3.1)$$

并令 $F(u) := (\nabla u, \nabla v) + (f(u), v) = 0$, 我们知道牛顿迭代公式为

$$u^{n+1} = u^n - \frac{F(u^n)}{F'(u^n)}.$$

关键一步就是求出 $F'(u^n)(u^n - u^{n+1})$ 表达式, 由G-导数定义我们有

$$\begin{aligned} F'(u)e &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + te) - F(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\nabla e, \nabla v) + (f(u + te) - f(u), v)}{t} \\ &= (\nabla e, \nabla v) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(u + te) - f(u), v)}{t} \\ &= (\nabla e, \nabla v) + (f'(u)e, v), \end{aligned}$$

所以该非线性问题的线性化过程即为：

$$((\nabla u^{n+1}, \nabla v) + (f'(u^n)(u^{n+1} - u^n), v)) = -(f(u^n), v).$$

我们要采用两套网格来解方程(3.1), 为此我们先定义两个网格剖分, 网格长度分别为 h 和 H , 并且 $H > h$, $V_H \subset V_h \subset H_0^1(\Omega)$ 。那么基于牛顿法的两套网格描述如下：

1. 求 $u_H \in V_H$ 满足 $(\nabla u_H, \nabla v_H) + (f(u_H), v_H) = 0, \quad \forall v_H \in V_H$.
2. 求 $u_h \in V_h$ 满足 $((\nabla u_h, \nabla v_h) + (f'(u_H)(u_h - u_H), v_h)) = -(f(u_H), v_h), \quad \forall v_h \in V_h$.

在粗网格上我们先解一个非线性问题, 因为 H 比较大, 使得方程的规模不是很大, 这样就使得计算量也不是很大。我们在粗网格上有了数值 u_H , 利用它作为细网格上一步牛顿迭代的初值, 这样就可以得到一个精度比较好的解。如果不然, 直接也在细网格上做多步牛顿迭代, 那样的话在每次牛顿迭代时, 都要重新组合刚度矩阵, 这在大规模计算时是非常费时的。

这个算法的误差估计式为 $\|u - u_h\|_1 \leq C(h + H^4)|u|_2$, 这就说明粗细网格之间的比例可以取为 $h = H^4$, 比如说现在我们需要在 $h = \frac{1}{256}$ 上的解, 那么只要在 $H = \frac{1}{4}$ 上解一个非线性问题, 然后细网格上一步牛顿就可以达到我们所要求的精度了。

当然对于这个算法还有一些改进的办法, 比如做完第二步之后再回到粗网格上做一个修正, 再求一个 $u_h^* \in V_H$ 满足

$$((\nabla(u_h^* - u_h), -\nabla v_H) + (f'(u_h)(u_h^* - u_h), v_H)) = -\frac{1}{2}(f''(u_H)(u_h - u_H)^2, v_H), \quad \forall v_H \in V_H.$$

这样就可以更大的拉开 h, H 之间的比例, 可以达到 $h = H^5$ 。并且这一步是回到粗网格上做的, 计算量非常小。

例 3.2. 求解耦合方程, 例子来源于[35]。主要考虑的是*Schrödinger*型的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ \psi(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

一般来说, $f(x)$ 和 $V(x)$ 以及我们所求的 $\psi(x)$ 都是在复数域范围内的。复数计算时候不是很方便, 所以将实部和虚部分开计算, 如将 f 实部, 虚部分别记为 f_1 和 f_2 , 且令 $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ 。这样方程(3.2)就和下列耦合方程等价

$$\begin{cases} -\Delta\psi_1(x) + V_1(x)\psi_1(x) - V_2(x)\psi_2(x) = f_1(x), & \forall x \in \Omega, \\ -\Delta\psi_2(x) + V_1(x)\psi_2(x) + V_2(x)\psi_1(x) = f_2(x), & \forall x \in \Omega, \\ \psi_j(x) = 0, & j = 1, 2 \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

其相应的变分问题形式为: 求 $\psi \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, 满足

$$a(\psi, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

其中

$$(\mathbf{f}, \mathbf{w}) = (f_1, w_1) + (f_2, w_2), \quad a(\psi, \mathbf{w}) = \hat{a}(\psi, \mathbf{w}) + N(\psi, \mathbf{w})$$

这里

$$\begin{aligned} \hat{a}(\psi, \mathbf{w}) &= (\nabla\psi_1, \nabla w_1) + (\nabla\psi_2, \nabla w_2), \\ N(\psi, \mathbf{w}) &= (V_1\psi_1, w_1) - (V_2\psi_2, w_1) + (V_1\psi_2, w_2) + (V_2\psi_1, w_2) \end{aligned}$$

首先我们也是建立两套网格, 分别为 V_h 和 V_H , $H > h$ 。然后将两套网格思想应用于这个方程组, 我们可以得到以下算法:

1. 求 $\psi_H \in V_H \times V_H$ 满足 $a(\psi_H, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w})$, $\forall \mathbf{w} \in V_H \times V_H$,
2. 求 $\psi_h \in V_h \times V_h$ 满足 $\hat{a}(\psi_h, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}) - N(\psi_H, \mathbf{w})$, $\forall \mathbf{w} \in V_h \times V_h$,

在粗网格上, 我们解的是耦合的方程组。因为网格长度 H 比较大, 所以计算量也不是很大, 可以得到一个解 ψ_H 。在细网格上, 仔细观察之后会发现它实际上已经变成两个独立的Poisson方程了, 不再是耦合的了, 这相当于将方程的规模降为原来的一半, 并且有误差估计 $\|\psi - \psi_h\|_1 \leq C(h + H^2)$ 成立, 这样粗细网格之间的比例可取为 $h = H^2$ 。

从这两个简单的例子我们可以看出, 两套网格方法还是具有一定的优势。能够在获得相同精度的情况下, 大大减少计算过程中的计算量。其实现过程相对来说难度也不是很大, 主要涉及是两套网格间的数据交换, 这个过程只要应用插值就可以实现。需要指出的一点是, 两套网格可以扩展至多重网格, 多重实现起来稍微复杂一点, 但其本质思想还是跟两套网格一致的。

3.2 两套网格方法在NS方程的应用

3.2.1 算法描述

在这一节我们讨论一下两套网格方法在Navier-Stokes方程上的应用。因为Navier-Stokes是非线性的, 所以主要涉及的是两套网格在非线性问题的线性化方面的应用。相比前一节的例子, 这个无论是从理论分析还是数值模拟, 实现起来都相对复杂很多, 这都是由方程本身决定的。Navier-Stokes方程有两种表现形式: 原始变量形式和流函数形式。原始变量形式即我们第一章介绍,

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.3)$$

这里 Ω 可以是二维区域, 也可以是三维区域。一般是用混合有限元来进行求解, 那么跟Stokes方程一样, 它所选取的有限元离散空间也要满足离散的LBB条件

$$\beta_0 \|q_h\|_{Q_h} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot v_h)}{\|v_h\|_{V_h}}, \quad \forall q_h \in Q_h.$$

因为在三维空间中的流函数是不存在的, 所以Navier-Stokes方程的流函数形式只是适合二维的情况。那我们先介绍二维空间中的流函数, 存在这样一个流函数 $\psi(x, y)$ 满足

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

这样的流函数在差一个常数的情况下是被 u 唯一确定的。如果我们以这个流函数作为需要求解的函数, 那么不可压缩条件就自动满足:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

在原始变量形式(3.3)中将变量 p 削去, 可以得到相应的流函数表达形式:

$$\begin{aligned} \nu \Delta^2 \psi - \psi_y \Delta \psi_x + \psi_x \Delta \psi_y &= \text{curl } f \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \varphi &= 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{aligned}$$

其中 n 表 Ω 的单位外法向量。

两套网格方法对于这两种格式都是适用的。在[21, 22]中将两套网格方法应用于流函数形式的Navier-Stokes方程, 给出了相应的理论分析和数值试验。在这里我们主要讨论将两套网格方法应用于原始变量形式的Navier-Stokes方程。在这一方面, 已经有很多结果了, 如Layton的[41, 42, 43, 44]等都是关于这方面的。相信未来还会有很多关于这方面的研究, 因为我们总是在寻求一种平衡, 即希望用尽可能少的计算量, 去尽可能地拉开粗细网格之间的比例关系, 来加快我们的计算速度。我们基本不考虑雷诺数 Re 很大(ν 很小)的情况, 都假设它是比较小的。至少到目前来说, 能够达到比较好的计算效果的雷诺数大概也只能到万的数量级, 计算雷诺数很大的Navier-Stokes方程仍旧还是一个很大的挑战。

令 $Y = X \times Q$, 其中 $X = (H_0^1(\Omega))^d$ (d 为空间维数), $Q = L_0^2(\Omega)$, 与(3.3)式相对应的变分问题为: 求 $(u, p) \in Y$, 满足

$$a(u, v) + b(u, u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u) = (f, v) \quad \forall (v, q) \in Y, \quad (3.4)$$

这里双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 和三线性形式 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 按如下定义

$$a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad b(u, w, v) = \int_{\Omega} u \cdot \nabla w \cdot v dx \quad \forall u, v, w \in X.$$

如此, 离散的变分问题也可表述为: 求 $(u_h, v_h) \in Y^h$, 使得对任意的 $(v, q) \in Y^h$ 满足下式

$$a(u_h, v) + b(u_h, u_h, v) - (p_h, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u_h) = (f, v). \quad (3.5)$$

显然, $Y^h = X^h \times Q^h$ 为 Y 的一个子空间。为了以示区别, 我们将 h 放在下标位置的离散解作为直接在 Y^h 上解非线性方程得到的解, 而下面提到的 h 在上标位置的离散解作为两套网格方法得到的解。

注 4. 对于 $u \cdot \nabla u$ 这项, 其变分形式不止这里提到的 $b(u, v, w)$, 这种形式称为对流形式(convective)。还有另外两种, 分别为对称形式(skew-symmetric), $b_2(u, v, w) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u \cdot \nabla v \cdot w - u \cdot \nabla w \cdot v] dx$, 和守恒形式(conservation), $b(u, v, w) := - \int_{\Omega} u \cdot \nabla w \cdot v dx$ 。这三种形式性质没有太大区别, 因而我们在这里以及后面都将只针对对流形式进行讨论。

下面的这个最优估计是比较熟悉的[76, 83]:

定理 3.1. 假设 $(u, p) \in Y \cap (H^{k+1}(\Omega)^d \times H^k(\Omega))$ 是方程(3.4)的非零解, 有限元空间 Y^h 满足 LBB 条件, 具有逼近性质。设方程(3.3)的线性化对偶问题具有 H^2 的正则性, 网格长度 h 足够小。那么存在一个 Galerkin 方程(3.5)的解 (u_h, p_h) 满足下列最优估计

$$h|u - u_h|_1 + \|u - u_h\|_0 + h\|p - p_h\|_0 \leq Ch^{k+1}(|u|_{k+1} + |p|_k).$$

这里 C 为一不依赖于 h 的常数。

接下来我们还是先定义两个长度分别为 H 和 h 的粗细网格 ($H \gg h > 0$), 然后在此基础上构造协调有限元空间, 分别记为 (X^H, Q^H) , (X^h, Q^h) 。我们可以认为细网格空间 (X^h, Q^h) 是由粗网格空间 (X^H, Q^H) 网格细分而来的[47], 所以它们是嵌套的。我们这样假设并不是算法需要, 也不是收敛性定理成立的需要, 仅仅是因为这样可以使分析过程变的比较简单。因为在这种假设之下, 我们有 $(X^H, Q^H) \subset (X^h, Q^h)$ 。并且我们还假设这个空间具有一般的分片多项式的逼近性质, 即对于任意的 $(u, p) \in Y \cap (H^{k+1}(\Omega)^d \times H^k(\Omega))$ (k 为多项式次数), 我们有

$$\inf_{(v^h, q^h) \in (X^h, Q^h)} \{h|u - v^h|_1 + \|u - v^h\|_0 + h\|p - q^h\|_0\} \leq Ch^{k+1}(|u|_{k+1} + |p|_k), \quad (3.6)$$

对 (X^H, Q^H) 也有类似的结果。此外我们还需要另外一个假设, 对于速度-压力空间 (X^μ, Q^μ) , $\mu = h, H$, 需要满足LBB条件 (inf-sup条件):

$$\inf_{q \in Q^\mu} \sup_{v \in X^\mu} \frac{(q, \nabla \cdot u)}{\|q\|_0 \|\nabla v\|_0} \geq \beta > 0, \quad \mu = H \text{ 和 } h. \quad (3.7)$$

最后我们定义一个能量范数

$$|||(v, q)||| := (|v|_1^2 + \|q\|_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$

W.Layton在[42]中对于求解(3.5)式提出了一个基于Oseen方程的两套网格算法, 即是通过Oseen方法实现线性化的。算法描述如下:

算法 3.1. 两套网格算法, 细网格解Oseen方程及粗网格校正

1. 在粗网格上求解非线性问题: 求 $(u^H, p^H) \in (X^H, Q^H)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^H, Q^H)$ 满足

$$a(u^H, v) + b(u^H, u^H, v) - (p, \nabla \cdot u^H) + (q, \nabla \cdot v) = (f, v).$$

2. 在细网格上解线性Oseen问题: 求 $(u^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^h, Q^h)$ 满足

$$a(u^h, v) + b(u^H, u^h, v) - (p^h, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u^h) = (f, v).$$

3. 回到粗网格进行修正: 求 $(e^H, \epsilon^H) \in (X^H, Q^H)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^H, Q^H)$

$$\begin{aligned} a(e^H, v) + b(u^H, e^H, v) + b(e^H, u^H, v) - (\epsilon^H, \nabla \cdot v) \\ + (q, \nabla \cdot e^H) = b(u^H - u^h, u^H, v). \end{aligned}$$

且令 $u^* = u^h + e^H, p^* = p^h + \epsilon^H$.

这个算法最后得出的 (u^*, p^*) 和直接在细网格上求解非线性问题得到的解 (u_h, p_h) 具有相同的精确度, 但是计算量大大减少。至于如何选取粗细网格之间的比例则由以下定理给出[42]:

定理 3.2. 假设 $(X^H, Q^H) \subset (X^h, Q^h) \subset (X, Q)$, 每一组空间 $(X^H, Q^H), (X^h, Q^h)$ 都满足 LBB 条件 (3.7). 令 $(u, p) \in (H^{k+1}(\Omega))^d \times H^k(\Omega)$ 为 Navier-Stokes 方程 (3.4) 的非零解且足够光滑, (u^h, p^h) 为算法 3.1 第二步的解, (u^*, p^*) 为算法 3.1 第三步的解. 设 $0 < h < H$, H 足够小. 当 $d = 3$ 时, $s = \frac{1}{2}$, 当 $d = 2$ 时, $s = \epsilon > 0$. 有了以上这些假设后, 那么存在一个只依赖于 s, Re, u, p 的常数 C , 使得有下列式子成立:

$$|||(u - u^h, p - p^h)||| \leq C(h^k + H^{k+1}).$$

$$|||(u - u^*, p - p^*)||| \leq C(h^k + H^{k+2} + H^{2k+1-s}).$$

从这个定理中我们可以看出, 当 $k = 1$ 时, 算法 3.1 粗细网格之间的比例可以取为 $h \sim H^{3-\epsilon}$. 而且从定理的两个估计式也可以看出, 第三步对计算结果有很大的改进, 如当 $k = 1$ 时, 从 $h \sim H^2$ 改进到 $h \sim H^{3-\epsilon}$. 第三步是回到粗网格上做的, 并且还是一个线性问题, 所以相对来说计算量非常小, 因此第三步还是非常重要的一步, 不能少. 利用粗网格进行校正提高粗细网格之间的比例, 最早是由许进超教授在 [65] 提出的.

这是一个很不错的算法, 自然而然我们马上会想到, 我们能不能不用 Oseen 法进行线性化, 而采用我们最熟悉的牛顿法对 Navier-Stokes 进行线性化 [33, 38]. 因为牛顿迭代的收敛速度是最快的. W.Layton 在 [42] 中也进行了这个尝试, 设计了如下算法:

算法 3.2. 两套网格算法, 细网格牛顿迭代更新及粗网格校正

1. 在粗网格上求解非线性问题: 求 $(u^H, p^H) \in (X^H, Q^H)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^H, Q^H)$ 满足

$$a(u^H, v) + b(u^H, u^H, v) - (p, \nabla \cdot u^H) + (q, \nabla \cdot v) = (f, v).$$

2. 在细网格上进行一次牛顿迭代: 求 $(u^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^h, Q^h)$ 满足

$$\begin{aligned} a(u^h, v) + b(u^h, u^H, v) + b(u^H, u^h, v) - (p^h, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u^h) \\ = (f, v) + b(u^H, u^H, v). \end{aligned}$$

表 3.1: L^2 范数 h, H 之间的比例关系

	$\ u - u^h\ _0$	$\ u - u^*\ _0$
$k = 1$	$h = H^{3/2}$	$h = H^{7/4}$
$k = 2$	$h = H^{5/3}$	$h = H^{15/8}$
\dots	\dots	\dots
k	$h = H^{2-\frac{1}{k+1}}$	$h = H^{2-\frac{1}{2(k+1)}}$

3. 回到粗网格上校正牛顿迭代的误差: $(e^H, \epsilon^H) \in (X^H, Q^H)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^H, Q^H)$

$$\begin{aligned} a(e^H, v) + b(u^H, e^H, v) + b(e^H, u^H, v) - (\epsilon^H, \nabla \cdot v) \\ + (q, \nabla \cdot e^H) = b(u^H - u^h, u^H, v). \end{aligned}$$

且令 $u^* = u^h + e^H, p^* = p^h + \epsilon^H$.

但结果却不尽如人意。在算法3.1中表现出色的第三步在这个算法里基本没有体现优势, 能量范数没有任何改进, 停留在 $h^k \sim H^{2k+1-s}$, 其中 k, s 如定理3.2所示。 L^2 范数也只提高了一点点 (如表3.1所示)。想要以很小的代价 (粗网格校正) 来换取结果的改进, 这个想法是行不通了。那么我们考虑是否可以在细网格进行修正, 当然前提是不需要太大的计算量, 否则就没有意义了。因此我们设计如下算法:

算法 3.3. 两套网格算法, 细网格牛顿迭代更新及细网格修正

1. 在粗网格上求解非线性问题: 求 $(u^H, p^H) \in (X^H, Q^H)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^H, Q^H)$ 满足

$$a(u^H, v) + b(u^H, u^H, v) - (p, \nabla \cdot u^H) + (q, \nabla \cdot v) = (f, v).$$

2. 在细网格上进行一次牛顿迭代: 求 $(u^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$, 使得对任意的 $(v, q) \in (X^h, Q^h)$ 满足

$$\begin{aligned} a(u^h, v) + b(u^h, u^H, v) + b(u^H, u^h, v) - (p^h, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u^h) \\ = (f, v) + b(u^H, u^H, v). \end{aligned}$$

3. 细网格上更新: 求 $(u^h, p^h) \in (X^h, Q^h)$ 使得对任意的 $(v, q) \in (X^h, Q^h)$ 满足

$$\begin{aligned} a(u^h, v) + b(u^h, u^H, v) + b(u^H, u^h, v) - (p^h, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u^h) \\ = (f, v) + b(u^H, u_h^*, v) + b(u_h^*, u^H - u_h^*, v). \end{aligned}$$

取一个合适的网格长度 H , 这个算法最后得出的 (u^h, p^h) 和直接在细网格上求解非线性问题得到的离散解 (u_h, p_h) 具有相同的精度。在这个算法当中, 第三步相比粗网格校正发挥了它的作用, 能很有效的改进结果 (详细分析请看下一节), 和在细网格上再进行一次牛顿迭代达到差不多的精度, 但是其计算量是大大减少的。这是怎么回事呢? 通过仔细观察算法3.3, 我们会发现在细网格上求解的第二步和第三步, 它们的刚度矩阵是一样的, 仅仅是右端项不一样, 这就为我们节省了很多计算量。

3.2.2 算法分析

在这一小节我们主要分析一下算法3.3, 分别给出能量范数和 L^2 范数的误差估计。在分析之前, 我们先做一些准备工作。首先介绍一下三线性形式 $b(u, v, w) = \int_{\Omega} u \cdot \nabla w \cdot v dx$ 的性质。它的连续性得到的一些不等于性质, 为算法第二步, 第三步的线性问题唯一可解性提供了保证, 并且这些性质在误差分析的时候也经常被用到。对于 $\mu = H, h$, V 和 V^μ 表示为 X 和 X^μ 的子空间, 分别为散度为零空间和离散散度为零空间,

$$\begin{aligned} V &= \{v \in X : (q, \nabla \cdot v) = 0, \forall q \in Q\}, \\ V^\mu &= \{v \in X^\mu : (q, \nabla \cdot v) = 0, \forall q \in Q^\mu\}. \end{aligned}$$

因为有 $\nabla \cdot u = 0$, 所以我们马上得到:

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= -b(u, w, v), \quad \forall u, v \in V, \quad w \in X \\ b(u, v, v) &= 0, \quad \forall u \in V, \quad v \in X \end{aligned}$$

接下来的引理将给出一些三线性形式 $b(u, v, w)$ 的上下界, 这些对于后面的分析至关重要。这个引理的证明需要用到Sobolev嵌入定理[72]。

引理 3.3. [42] 假设区域 Ω 的边界满足 Adams[72] 中要求的强 Lipschitz 条件, 则有下列各式成立:

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq C|u|_1|v|_1|w|_1, \quad \forall u, v, w \in X; \\ |b(u, v, w)| &\leq C\|u\|_0^{1-s}|u|_1^s|v|_1|w|_1, \quad \forall u, v, w \in X; \\ |b(u, v, w)| &\leq C\|u\|_0|v|_1\|w\|_2, \quad \forall u, v \in X, w \in H^2(\Omega); \\ |b(u, v, w)| &\leq C|u|_1\|v\|_0\|w\|_2, \quad \forall u, v \in X, w \in H^2(\Omega), \end{aligned}$$

这里当 $d = 2$ 时, $s = \epsilon > 0$ 为任意小的正数, $d = 3$ 时, $s = \frac{1}{2}$.

证明 以下涉及的符号均为标准的 Sobolev 空间符号。由 Hölder's 不等式可以得到

$$|(u \cdot v, w)| \leq \|u\|_{0,p} \|\nabla v\|_{0,q} \|w\|_{0,r}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

令 $p = 6, q = 2, r = 6$, 然后应用 Sobolev 嵌入定理, $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, 就可以得到第一个不等式,

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{0,6} \|\nabla v\|_{0,2} \|w\|_{0,6} \leq C|u|_1|v|_1|w|_1.$$

对于第二式, 我们需要分数阶的 Sobolev 空间知识。在 Hölder's 不等式中令 $q = 2$ 得:

$$|(u \cdot v, w)| \leq \|u\|_{0,p} |v|_1 \|w\|_{0,r}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

先考虑 $d = 2$ 的情况, 对于任意小的 $\epsilon > 0$, 有嵌入定理 $W^{\epsilon,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p = \frac{2}{1-\epsilon}$. 因此

$$\|u\|_{0,p} \leq C(\epsilon) \|u\|_{\epsilon}, \quad \forall u \in (W^{\epsilon,2}(\Omega))^2.$$

因为 $r = \frac{1}{\epsilon}$, 对于任意的 $r \in [2, \infty)$ 有嵌入定理 $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, 所以有

$$\|w\|_{0,r} \leq C(\epsilon) |w|_1, \quad \forall w \in X.$$

对于三维情况 $d = 3$ 时, 有 $s = \frac{1}{2}$. 由嵌入定理 $W^{\frac{1}{2},2}(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ 和 $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, 得

$$|(u \cdot v, w)| \leq C \|u\|_{\frac{1}{2}} |v|_1 |w|_1.$$

由此第二式证毕。对于第三，四式我们可按如下计算得到：

$$\begin{aligned}
 |(u \cdot v, w)| &\leq C \|u\|_0 \|v\|_1 \|w\|_{0,\infty} \leq C \|u\|_0 \|v\|_1 \|w\|_2, \\
 |(u \cdot v, w)| &\leq |(\cdot u, v \cdot w)| + |(u \cdot w, v)| \\
 &\leq C \|u\|_1 \|v\|_0 \|w\|_{0,\infty} + C \|u\|_{0,6} \|w\|_{1,3} \|v\|_0 \\
 &\leq C \|u\|_1 \|v\|_0 \|w\|_2. \quad \square
 \end{aligned}$$

注 5. 有关 $b(u, v, w)$ 的连续性的不等式，远不止这些。这里只是列了我们分析算法得到收敛性结果需要用到的几个，基本上有关于 Navier-Stokes 方程的文献都会不同程度的提到有关 $b(u, v, w)$ 的性质，如 [84, 42, 56, 57, 58, 32] 等都有。

为使分析起来比较简单，我们引进一个连续的双线性形式 $B^H : Y \times Y \longrightarrow R$ ，按以下定义

$$\begin{aligned}
 B^H[(u, p); (v, q)] &:= a(u, v) + b(u^H, u, v) + b(u, u^H, v) \\
 &\quad - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u), \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

这样的话我们就可以把算法 3.3 的第二，三步重新写成

$$2. B^H[(u_h^*, p_h^*); (v, q)] = (f, v) + b(u^H, u^H, v), \quad (3.9)$$

$$3. B^H[(u^h, p^h); (v, q)] = (f, v) + b(u^H, u_h^*, v) + b(u_h^*, u^H - u_h^*, v). \quad (3.10)$$

从上面的定义我们可以看出，双线性形式 $B^H[\cdot, \cdot]$ 在内积空间 $Y \times Y$ 连续性依赖于一个有关于 $|u^H|_1$ 的常数。所以如果 $|u^H|_1$ 关于 H 是一致有界的，那么双线性形式 $B^H[\cdot, \cdot]$ 在 $Y \times Y$ 上也就关于 H 一致有界。 $|u^H|_1$ 关于 H 的一致有界主要依赖于假设 H 是足够小，使得 u^H 是非常接近精确解 u 的，

$$|u^H|_1 \leq |u^H - u|_1 + |u|_1 \leq H(|u|_2 + |p|_1) \leq C(u, p)$$

因此， $B^H[\cdot, \cdot]$ 在空间上 $Y \times Y$ 关于 H 是连续的。

我们知道，为了保证第二步，第三步方程的可解性，我们需要有以下不等式成立：

$$\inf_{(u,p) \in Y^H} \sup_{(v,q) \in Y^H} \frac{B^H[(u,p); (v,q)]}{|||(u,p)||| |||(v,q)|||} \geq \gamma > 0, \quad (3.11)$$

我们列出以下引理[76], 这个引理是针对一般化的Stokes方程提出的,

$$c(u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u) = \langle f, v \rangle + \langle g, q \rangle.$$

对于离散的情况也同样成立。

引理 3.4. 假设有下式成立:

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in X} \frac{(q, \nabla \cdot v)}{\|q\|_0 \|v\|_1} \geq \beta > 0,$$

双线性形式 $c(\cdot, \cdot)$ 满足

$$\inf_{u \in X} \sup_{v \in X} \frac{c(u, v)}{|u|_1 |v|_1} \geq \alpha_0 > 0, \quad (3.12)$$

$$\inf_{v \in X} \sup_{u \in X} \frac{c(u, v)}{|u|_1 |v|_1} \geq \alpha_0 > 0. \quad (3.13)$$

那么连续双线性形式 $F: Y \times Y \rightarrow R$

$$F[(u, p); (v, q)] := c(u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u)$$

在内积空间 $Y \times Y$ 上满足所谓的 *inf-sup* 条件, 即存在个常数 $\gamma = \gamma(\alpha_0, \beta, \|c\|) > 0$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned} \inf_{(u,p) \in Y} \sup_{(v,q) \in Y} \frac{F[(u,p); (v,q)]}{\| (u,p) \| \| (v,q) \|} &\geq \gamma, \\ \inf_{(v,q) \in Y} \sup_{(u,p) \in Y} \frac{F[(u,p); (v,q)]}{\| (u,p) \| \| (v,q) \|} &\geq \gamma. \end{aligned}$$

将这个引理应用到我们的问题, 可知(3.11)式是可以成立。令

$$c(u, v) := a(u, v) + b(u^H, u, v) + b(u, u^H, v)$$

条件(3.12), (3.13)成立可以由以下两点得到, 一是假设Navier-Stokes方程的解 u 是非奇异的, 二是 u^H 非常接近真解 u 。更详细一点的话可以这么来考虑, 如果 u 是方程(3.3)的解, 那么由[82, 83]知存在一个常数 $\gamma^* = \gamma^*(u)$ 使得下式成立

$$\inf_{v \in X} \sup_{w \in X} \frac{a(v, w) + b(u, v, w) + b(v, u, w)}{|v|_1 |w|_1} \geq \gamma^* > 0. \quad (3.14)$$

从(3.14)很容易就可以得到:

$$\inf_{v \in X} \sup_{w \in X} \frac{a(v, w) + b(u^H, v, w) + b(v, u^H, w)}{|v|_1 |w|_1} \geq \gamma^* > 0.$$

因为 $u - u^H$ 是足够小。这个是针对连续情况, 下面我们考虑离散情况 Y^H 和 Y^h , 为了保证条件(3.12), (3.13)成立, 我们需要在空间 Y^H 和 Y^h 得到一个类似(3.14)式的 $\inf - \sup$ 条件。那么由[82, 83, 31]知, 这个条件可以从(3.14)得到是一个很基本的事实。因此有

$$\begin{aligned} \inf_{(u,p) \in Y^H} \sup_{(v,q) \in Y^H} \frac{B^H[(u,p); (v,q)]}{|||(u,p)||| |||(v,q)|||} &\geq \gamma > 0, \\ \inf_{(u,p) \in Y^h} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B^H[(u,p); (v,q)]}{|||(u,p)||| |||(v,q)|||} &\geq \gamma > 0. \end{aligned}$$

有了第一式, 我们就可以保证算法的第二步, 第三步的唯一可解性。

有了这些充足的准备之后, 我们现在就给出能量范数的误差估计。

定理 3.5. 假设 $X^H \subset X^h \subset X, Q^H \subset Q^h \subset Q$, 每一对空间 $(X^H, Q^H), (X^h, Q^h)$ 都满足LBB条件(3.3)和逼近性质(3.6)。令 $(u, p) \in (H^{k+1}(\Omega))^d \times H^k(\Omega)$ 为Navier-Stokes方程(3.4)的非零解且足够光滑, (u^h, p^h) 为算法3.3的非零解。设方程(3.3)的线性化对偶问题具有 H^2 的正则性, 且 $0 < h < H$, H 足够小。当 $d = 3$ 时, $s = \frac{1}{2}$, 当 $d = 2$ 时, $s = \epsilon > 0$ 。有了以上这些假设后, 那么存在一个只依赖于 s, Re, u, p 的常数 C , 使得有下列式子成立:

$$|||(u - u^h, p - p^h)||| \leq C(h^k + H^{3k+1-s}).$$

证明 首先, 我们考虑算法第二步的误差。误差 $(u - u_h^*, p - p_h^*)$ 对任意的 $(v, q) \in Y^h$ 满足Galerkin正交性:

$$B^H[(u - u_h^*, p - p_h^*); (v, q)] = b(u - u^H, u^H - u, v), \quad (3.15)$$

令 $(I^h u, J^h p) \in Y^h$ 为 (u, p) 在 Y^h 的相应插值, 由双线性形式 B^H 的连续性, 我们

可以得到,

$$\begin{aligned}
 & |||(u - u_h^*, p - p_h^*)||| \\
 & \leq |||(u - I^h u, p - J^h p)||| + |||(I^h u - u_h^*, J^h p - p_h^*)||| \\
 & \leq Ch^k(|u|_{k+1} + |p|_k) + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B^H[(I^h u - u_h^*, J^h p - p_h^*); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\
 & \leq Ch^k(|u|_{k+1} + |p|_k) + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B^H[(u - u_h^*, p - p_h^*); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\
 & \leq Ch^k(|u|_{k+1} + |p|_k) + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{|b(u - u^H, u^H - u, v)|}{|||(v, q)|||}.
 \end{aligned}$$

这里像引理3.3所描述的那样, s 是一个跟维数相关的参数。当 $d = 2$, $s = \varepsilon > 0$, 当 $d = 3$, $s = \frac{1}{2}$ 。然后应用引理3.3中所列的估计式, 可得:

$$\begin{aligned}
 b(u - u^H, u^H - u, v) & \leq C \|u - u^H\|_0^{1-s} |u - u^H|_1^{1+s} |v|_1 \\
 & \leq CH^{2k+1-s} |||(v, q)|||.
 \end{aligned}$$

这样我们就得到算法第二步的误差 ([41]也有相同的结论),

$$|||(u - u_h^*, p - p_h^*)||| \leq C(h^k + H^{2k+1-s}). \quad (3.16)$$

接下来, 我们给出误差 $(u - u^h, p - p^h)$ 对任意的 $(v, q) \in Y^h$ 都满足的关系式:

$$\begin{aligned}
 B^H[(u - u^h, p - p^h); (v, q)] & = b(u - u^H, u_h^* - u, v) + b(u - u_h^*, u^H - u, v) \\
 & \quad + b(u_h^* - u, u_h^* - u, v).
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

现在, 定理3.5的剩下部分证明主要依赖于LBB条件(3.11)。事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
 & |||(u - u^h, p - p^h)||| \\
 & \leq |||(u - I^h u, p - J^h p)||| + |||(I^h u - u^h, J^h p - p^h)||| \\
 & \leq Ch^k(|u|_{k+1} + |p|_k) + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B^H[(u - u^h, p - p^h); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\
 & \leq Ch^k(|u|_{k+1} + |p|_k) \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{b(u - u^H, u_h^* - u, v) + b(u - u_h^*, u^H - u, v) + b(u_h^* - u, u_h^* - u, v)}{|||(v, q)|||}.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

然后, 对后一项分子中的每一项分别应用引理3.3中的估计式和(3.16)式,

$$\begin{aligned} b(u - u^H, u_h^* - u, v) &\leq C \|u - u^H\|_0^{1-s} |u - u^H|_1^s |u - u_h^*|_1 |v|_1 \\ &\leq CH^{k+1-s} (h^k + H^{2k+1-s}) |||(v, q)|||, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(u - u_h^*, u^H - u, v) &\leq C |u - u_h^*|_1 |u^H - u|_1 |v|_1 \\ &\leq C (h^k H^k + H^{3k+1-s}) |||(v, q)|||, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(u_h^* - u, u_h^* - u, v) &\leq C |u - u_h^*|_1^2 |v|_1 \\ &\leq C (h^k + H^{2k+1-s})^2 |||(v, q)|||. \end{aligned}$$

将上述格式代回到(3.18)式就产生

$$|||(u - u^h, p - p^h)||| \leq C (h^k + H^{3k+1-s}),$$

这就是我们所要的结果。 \square

从定理的证明过程可以看出, 相比粗网格校正[65, 66]应用于Navier-Stokes方程基本没有改进, 我们的第三步对结果有了很大的改进。比如当 $k=1$ 时, 从 $h \sim H^{3-s}$ 改进到 $h \sim H^{4-s}$ 。显然, 这个结果比Oseen法线性化要好。而且第二步和第三步有相同的刚度矩阵, 仅仅右端项不同。所以其求解难度也就比在细网格上解一个线性方程多一点点。因此这是一个解Navier-Stokes方程的高效算法。

在接下来的部分, 我们主要给出算法3.3的 L^2 -误差估计。 L^2 -误差估计主要基于两个假设, 一是需要我们刚才得到的 H_1 误差估计, 二是下面的这个线性对偶问题有 $H^2(\Omega)$ 正则性。

求 $(\phi, \lambda) \in Y$ 使得对任意的 $(w, r) \in Y$ 都满足下式,

$$a(w, \phi) + b(u, w, \phi) + b(w, u, \phi) - (r, \nabla \cdot \phi) + (\lambda, \nabla \cdot w) = (g, w). \quad (3.19)$$

因为 u 是一个非零解, 所以 (ϕ, λ) 是能唯一确定的。这个假设, 线性对偶问题(3.19)具有 $H^2(\Omega)$ 正则性的意思是, 对任意的 $g \in (L^2(\Omega))^d$, 存在一个属于 $Y \cap (H^{k+1}(\Omega)^d \times H^k(\Omega))$ 的解 (ϕ, λ) 和下面这个不等式

$$\|\phi\|_2 + \|\lambda\|_1 \leq C \|g\|_0 \quad (3.20)$$

成立。其实, 这个 $H^2(\Omega)$ -正则性假设在前面已有暗示了, 即要求粗网格逼近具有 L^2 -最优。

定理 3.6. 假设方程(3.19)的解满足(3.20)式。在定理3.5的假设条件下, 我们有如下的 L^2 范数误差估计,

$$\|u - u^h\|_0 \leq C(h^{k+1} + h^k H^{k+1} + H^{3k+2-s}).$$

证明 首先, 对任意的 $(w, r) \in Y$, 有方程(3.19)的解 (ϕ, λ) 满足下式

$$B^H[w, r]; (\phi, \lambda) = (g, w) + b(w, u^H - u, \phi) + b(u^H - u, w, \phi).$$

令 $g =: u - u^h \in (L^2(\Omega))^d$ 和 $(w, r) := (u - u^h, p - p^h)$, 代入得

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_0^2 &= B^H[(u - u^h, p - p^h); (\phi, \lambda)] \\ &\quad - b(u - u^h, u^H - u, \phi) - b(u^H - u, u - u^h, \phi), \end{aligned}$$

然后考虑到误差方程(3.17), 我们有

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_0^2 &= B^H[(u - u^h, p - p^h); (\phi - \phi^h, \lambda - \lambda^h)] - b(u - u^h, u^H - u, \phi) \\ &\quad - b(u^H - u, u - u^h, \phi) + b(u - u^H, u_h^* - u, \phi^h) \\ &\quad + b(u - u_h^*, u^H - u, \phi^h) + b(u_h^* - u, u_h^* - u, \phi^h). \end{aligned} \quad (3.21)$$

接着我们一项一项来考虑上式的右端项,

$$\begin{aligned} B^H[(u - u^h, p - p^h); (\phi - \phi^h, \lambda - \lambda^h)] &\leq |||(u - u^h, p - p^h)||| |||(\phi - \phi^h, \lambda - \lambda^h)||| \\ &\leq C(h^k + H^{3k+1-s})h(\|\phi\|_2 + \|\lambda\|_1) \\ &\leq C(h^{k+1} + hH^{3k+1-s})\|u - u^h\|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b(u - u^h, u^H - u, \phi)| &\leq |u - u^h|_1 \|u^H - u\|_0 \|\phi\|_2 \\ &\leq C(h^k H^{k+1} + H^{4k+2-s})\|u - u^h\|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b(u^H - u, u - u^h, \phi)| &\leq \|u^H - u\|_0 |u - u^h|_1 \|\phi\|_2 \\ &\leq C(h^k H^{k+1} + H^{4k+2-s})\|u - u^h\|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b(u - u^H, u_h^* - u, \phi^h)| &\leq |b(u - u^H, u_h^* - u, \phi - \phi^h)| + |b(u - u^H, u_h^* - u, \phi)| \\
&\leq |u - u^H|_1 |u_h^* - u|_1 |\phi - \phi^h|_1 + \|u - u^H\|_0 |u_h^* - u|_1 \|\phi\|_2 \\
&\leq C \left(H^k (h^k + H^{2k+1-s}) h \|\phi\|_2 + H^{k+1} (h^k + H^{2k+1-s}) \|\phi\|_2 \right) \\
&\leq C (h^k H^{k+1} + H^{3k+2-s}) \|u - u^h\|_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b(u - u_h^*, u^H - u, \phi^h)| &\leq |b(u - u_h^*, u^H - u, \phi - \phi^h)| + |b(u - u_h^*, u^H - u, \phi)| \\
&\leq |u_h^* - u|_1 |u - u^H|_1 |\phi - \phi^h|_1 + |u_h^* - u|_1 \|u - u^H\|_0 \|\phi\|_2 \\
&\leq C (h^k H^{k+1} + H^{3k+2-s}) \|u - u^h\|_0.
\end{aligned}$$

为了估计最后一项 $|b(u_h^* - u, u_h^* - u, \phi^h)|$ ，我们需要用到第二步的 L^2 -误差估计。我们在下面列出这个结果[41, 42]:

$$\|u - u_h^*\|_0 \leq C(h^{k+1} + H^{2k+1}).$$

利用上面这个不等式我们就可以得到

$$\begin{aligned}
|b(u_h^* - u, u_h^* - u, \phi^h)| &\leq |b(u_h^* - u, u_h^* - u, \phi - \phi^h)| + |b(u_h^* - u, u_h^* - u, \phi)| \\
&\leq |u_h^* - u|_1 |u_h^* - u|_1 |\phi - \phi^h|_1 + \|u_h^* - u\|_0 |u_h^* - u|_1 \|\phi\|_2 \\
&\leq C \left((h^k + H^{2k+1-s})^2 h \|\phi\|_2 \right. \\
&\quad \left. + (h^{k+1} + H^{2k+1})(h^k + H^{2k+1-s}) \|\phi\|_2 \right).
\end{aligned}$$

将上面所有的这些不等式代入(3.21)，可得

$$\|u - u^h\|_0 \leq C(h^{k+1} + h^k H^{k+1} + H^{3k+2-s}). \quad \square$$

3.2.3 数值例子

在这一节，我们给出一个简单的例子来说明我们这个算法是很高效的。为了简单起见，我们就令粘性系数 $\nu = 1$ 。粘性系数太小的话，前面也提到过计算比较复杂，这个不是我们讨论的重点。选择一个正方形区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \in \mathcal{R}^2$ ，右端项 f 由下列精确解 $u = (u_1, u_2)$ 和 p 给出：

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sin^2 3\pi x \sin 6\pi y, & u_2 &= -\sin^2 3\pi y \sin 6\pi x \\
p &= x^2 - y^2
\end{aligned}$$

表 3.2: L^2 范数误差估计和 H^1 范数误差估计. ($h = H^3$)

	L^2 -范数	H^1 -范数
$u - u_H$	0.20253219780145	1.56882205667490
$u - u_h^*$	0.00544348997331	0.11952243058943
$u - u^h$	0.00253641648520	0.06261507086234
$u - u_h$	0.00479364303574	0.11275305679031

我们在区域 Ω 上作两个四边形剖分 \mathcal{T}_H 和 \mathcal{T}_h , 并且 \mathcal{T}_h 是由 \mathcal{T}_H 细分而来。分别在两个剖分 \mathcal{T}_H 和 \mathcal{T}_h 上建立有限元空间 Y_H 和 Y_h , $Y_H \subset Y_h$, 为 $Q_1 - P_0$ 元, 即 u 由分片双线性多项式逼近, p 由常数逼近。为了能和直接在细网格上求解非线性问题得到的解具有相同的精度, 我们需要在 $L^2(\Omega)$ 范数的时候取 $H = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$, 在 $H^1(\Omega)$ 范数的时候取 $H = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{4-s}})$ 。数值实验的时候, 我们取了一个中间值 $h = H^3$, 且 $H = \frac{1}{4}$ 。

在粗网格的时候, 我们采用多次牛顿迭代求解非线性问题。牛顿迭代比较依赖于初始值的选取, 所以我们以相应的Stokes问题的解为初始迭代的值。因为其规模很小, 所以相比细网格上大型的线性系统求解, 这花费很少的时间。细网格上的线性问题是非对称, 非正定的, 所以我们采用最小残差法进行求解。数值结果如表3.2所示, 从当中的数据我们可以看出结果还是非常符合我们的理论分析。其中 $u - u_h$ 项是直接在细网格上用多次牛顿迭代求解非线性问题所得的结果。那么对于这个特殊的例子来说, 直接在细网格上进行牛顿迭代, 以相应的Stokes方程的解为初始解, 大概需要迭代8次, 而我们的算法只要一次多一点。由此也验证了这是一个很高效的算法。

第四章 Navier-Stokes方程的分裂算法

上一章我们讨论了稳态(stationary)的Navier-Stokes方程的两重网格算法。这一章我们将要讨论的对象则是非稳态(unsteady)的Navier-Stokes方程,即增加了一个时间项。 (u, p) 不再仅仅只跟空间有关,跟时间也有关系了。其求解难度又增加了,我们一般采用分裂算法来降低其计算难度。这就是我们这章要讨论的非稳定的Navier-Stokes方程的分裂算法。在第一节中我们简要回顾一下已有的分裂算法的几种形式,并讨论了其优缺点。在第二节针对已有的格式,我们提出了一个关于时间两阶的分裂算法,并给出了误差的分析证明过程。

4.1 分裂算法综述

令 $\Omega \in R^d$ (维数 $d=2$ 或 3)是一个开区域,我们考虑的问题是原始变量形式的非稳态不可压缩Navier-Stokes方程:

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{在 } \Omega \times [0, T] \text{ 内,} \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{在 } \Omega \times [0, T] \text{ 内, } u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

这里要求解的是速度矢量 u 和压力 p 。方程(4.1)要完整的话还需要 u 的边界条件,为简单起见,我们选择Dirichlet边界条件,即对任意的 $t \in [0, T]$ 都满足 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 。如果直接解这个问题的话,那至少存在两个循环,内循环和外循环。外循环主要是时间层,对于时间项我们一般采用欧拉公式或者Crank-Nicolson公式进行离散。在每一个时间层,我们需要解一个非线性问题,而且是两个未知数 u, p 耦合, u 的散度为零。那我们知道这是一个鞍点问题,求解不容易。这是相当复杂的过程,所以我们考虑分裂算法,就是将这些难度分开在不同的方程分别计算,如将粘性项和不可压缩项分开如[26, 56, 27, 40, 3]等,也可以将非线性项和不可压缩分开[5, 6]等等以此降低总体难度。

分裂算法主要是在时间进度上分成若干步,那么一般情况下我们分成2步来做[6, 56, 57, 58, 27]等。当然也有不是在时间上分的[49, 20, 28]。这样就可以使得不同的算子出现在不同的方程中,难度分散。分裂算法以其高效和简单而被大量广泛应用[40, 3, 6, 23, 10, 37]等,但是其理论误差分析却是直到最近才出现如[55, 56, 57, 58, 53, 5, 39],主要是讨论格式对时间产生的阶。

最近Guermond, Mineev 和Shen 在[26]从理论分析和数值例子两个方面对投影法(projection methods)做了综述。投影算法是一种比较流行的二步分裂算法,最早是由Chorin [16]和Temam [60]提出的。投影算法最吸引人的一个地方是,在每一个时间层,只需要解几个 u, p 耦合的椭圆型方程即可,这对大型数值模拟来说是一件很高效的事情。

我们主要采用半离散的形式,即空间不离散,只时间离散。这样看起来或许会简单一点。投影算法在第二步实际上就是将中间速度投影到一个散度为零的空间上,也因此而得名。投影算法主要是将粘性项和不可压缩项(散度为零)分开。根据具体格式的不一样投影法又可以大致分成3种类型:压力修正(pressure-correction)格式,速度修正(velocity-correction)格式和调和分裂(consistent splitting)格式。为了研究格式对时间产生的阶,我们引进有关于时间的范数[5, 56, 58]: 给定一个Banach 空间 X , 其范数表示为 $\|\cdot\|_X$, 一个连续的函数 $u: [0, T] \rightarrow X$ 和两个实数 $p > 0, \alpha > 0$, 对于时间步长 $k > 0$, 令 $t_n = nk$, 其中 $n = 0, 1, \dots, M = [T/k]$ 。如果存在一个常数 C , 使得对所有的 k 都有下式成立

$$(k \sum_{n=1}^M \|u(t_n) - u^n\|_X^p)^{1/p} \leq Ck^\alpha$$

那么我们说有限序列 $u^n_{n=1, \dots, M}$ 是在 $l^p(X)$ 中 α 阶逼近 u 的。特别的, 当 $u^n_{n=1, \dots, M}$ 在 $l^\infty(X)$ 中 α 阶逼近 u 是满足:

$$\|u(t_n) - u^n\|_X \leq Ck^\alpha \quad \forall n = 1, \dots, M$$

再次说明一下, 这里和下面所有的 C 是很广泛的常数, 不同地方的值是不一样的, 可能会依赖于数据 f, u_0, T 和粘性系数 ν 以及区域 Ω 和连续解 u , 但跟时间步长 k 和空间步长 h 没有关系。

接着我们看一下具体的格式及其对时间的阶。首先压力修正格式, 压力在第一步是给定的, 或者干脆不要。前者是两阶形式, 后者是一阶形式。然后在第二步将得到的中间速度投影到散度为零的空间。其具体格式为: 令 $u^0 = u_0$

$$\frac{1}{k}(\tilde{u}^{n+1} - u^n) - \nu \Delta \tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^{n+1} \cdot \nabla \tilde{u}^{n+1} = f(t^{n+1}), \quad \tilde{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) + \nabla p^{n+1} = 0, \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0, \quad u^{n+1} \cdot n = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

第一步主要是粘性项起作用, 第二步主要是不可压缩性。第二步也可以直接写成 $u^{n+1} = P_H \tilde{u}^{n+1}$ 。 P_H 是在 H 上的正交投影算子, $H = \{u \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$ 。其时间误差为:

定理 4.1. 假设 (u, p) 为问题(4.1)的解, 且足够光滑, (u^n, p^n) 为方程(4.2), (4.3)的解, 对所有的 $n = 0, 1, \dots, M = [T/k]$, 有以下误差估计式成立;

$$\|u(t_n) - u^n\|_0 + \|u(t_n) - \tilde{u}^n\|_0 \leq Ck.$$

$$\|p(t_n) - p^n\|_0 + \|u(t_n) - u^n\|_1 \leq Ck^{\frac{1}{2}}.$$

其实从方程(4.3)我们可以看出, 其中 $\nabla p^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ 这个条件是额外加上去的, 本身并没有这个要求。所以这个人工Neumann边界条件带进了一个数值边界层[61, 52], 使得速度 u 在 H_1 范数和 p 在 L^2 范数都达不到一阶[55]。对于这个格式有一个固有的分裂误差 k , 所以对于算子 $\partial_t - \nu\Delta$ 采用高阶的分裂格式起不到任何的改进作用。也注意到在第一步里面压力项梯度是完全没有, 所以Goda在[23]提出增加一个旧的压力项梯度 ∇p^k , 这样就可以提高精度。其格式为:

$$\frac{1}{2k}(3\tilde{u}^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}) - \nu\Delta\tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^{n+1} \cdot \nabla\tilde{u}^{n+1} + \nabla p^n = f(t^{n+1}), \quad \tilde{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2k}(3u^{n+1} - 3\tilde{u}^{n+1}) + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0, \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0, \quad u^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

第二步还是一个投影, 因为 $u^{n+1} = P_H \tilde{u}^{n+1}$ 。这个格式对于初值 (\tilde{u}^1, u^1, p^1) 的选取有要求, 必需满足:

$$\begin{cases} \|u(t_1) - \tilde{u}^1\|_0 \leq Ck^2, \\ \|u(t_1) - \tilde{u}^1\|_1 \leq Ck^{\frac{3}{2}}, \\ \|p(t_1) - p^1\|_1 \leq Ck. \end{cases} \quad (4.6)$$

这个条件还是比较容易满足的, 其具体选取的例子可参见[29]。对于这个格式我们得到时间2阶的误差估计,

定理 4.2. 假设(4.6)式成立, 设 (u, p) 为问题(4.1)的解, 且足够光滑, (u^n, p^n) 为方程(4.4), (4.5)的解, 有以下误差估计式成立;

$$\begin{aligned} k \sum_{n=1}^M \|u(t_n) - u^n\|_0^2 + k \sum_{n=1}^M \|u(t_n) - \tilde{u}^n\|_0^2 &\leq Ck^4, \\ \|p(t_n) - p^n\|_0 + \|u(t_n) - u^n\|_1 &\leq Ck. \end{aligned}$$

有关这个定理的证明可以参见[57, 19]等。虽然速度在 L^2 范数下达到了2阶, 但是我们也可以看出速度在 H^1 范数下和压力 p 在 L^2 范数下都没有达到完全的2阶, 其原因也是因为这个人工数值边界层。由(4.5)式知, 有 $\nabla(p^{n+1} - p^n) \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, 这就意味着

$$\nabla p^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = \nabla p^n \cdot n|_{\partial\Omega} = \cdots = \nabla p^0 \cdot n|_{\partial\Omega}. \quad (4.7)$$

这个条件就限制了其精度。Shen在[58]中做了一个假设, 令 $\frac{\partial p(\cdot, t)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g(\cdot)|_{\partial\Omega}$, 这样的话(4.7)式就自动满足了, 最后使得全部误差都能达到2阶。这个定理对于所有的A稳定时间2阶算法都是成立的, 比如对Crank-Nicolson公式离散时间也是成立的。对于这个格式也有一个固有的分裂误差 k^2 , 所以对于算子 $\partial_t - \nu\Delta$ 就没有必要采用高阶的形式, 因为提高不了精度。

这里经常会有一个问题, 到底哪个才是我们所要的速度, u^{n+1} 或者 \tilde{u}^{n+1} 。一般我们认为最后(end-of-step)的速度 u^{n+1} 是我们想要的速度, 这是基于 u^{n+1} 是散度为零, 但是它不满足边界条件。而 \tilde{u}^{n+1} 是满足Dirichlet边界条件, 但散度不为零。从定理4.1和4.2看出 u^{n+1} 和 \tilde{u}^{n+1} 实际具有相同的误差估计, 所以从精度来看选哪个都无所谓的。从算法实现上来看[30], 比较倾向于选择 \tilde{u}^{n+1} 。因为用有限元离散求解的时候, u^{n+1} 在单元的边界上是不连续的, 而且在经过简单的代数分析之后, 是可以避免计算 u^{n+1} 。

速度修正格式, 主要就是在压力修正格式中对换一下速度和压力的作用, 即粘性项在第一步显式表示或者直接忽略, 然后在第二步进行速度修正: 令 $\tilde{u}^0 = u_0$

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(u^{n+1} - \tilde{u}^n) + u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}), \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0, \quad u^{k+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{k}(\tilde{u}^{n+1} - u^{n+1}) - \nu\Delta\tilde{u}^{n+1} = 0, \quad \tilde{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.9)$$

很显然, 这个算法的缺点来自于Chorin-Temam算法(4.2), (4.3)的对偶问题。即这个算法要求强制满足 $\partial_n p^{n+1}|_{\partial\Omega} = f(t^{n+1}) \cdot n$ 和 $\Delta\tilde{u}^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, 而Chorin-Temam格式则要求满足的是 $\nu\Delta\tilde{u}^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = f(t^{n+1}) \cdot n$ 和 $\partial_n p^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0$ 。从达到的精度来看, 这两种算法是一样的:

定理 4.3. 假设 (u, p) 为问题(4.1)的解, 且足够光滑, (u^n, p^n) 为方程(4.8), (4.9)的

解, 对所有的 $n = 0, 1, \dots, M = [T/k]$, 有以下误差估计式成立:

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u^n\|_0 + \|u(t_n) - \tilde{u}^n\|_0 &\leq Ck. \\ \|p(t_n) - p^n\|_0 + \|u(t_n) - u^n\|_1 &\leq Ck^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

和压力修正类似, 我们在第一步增加一项旧的速度 $\nu \Delta u^n$, 然后在第二步进行修正. 这样可以提高精度, 具体格式为:

$$\begin{cases} \frac{1}{2k}(3u^{n+1} - 4\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n+1}) - \nu \Delta \tilde{u}^n + u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f(t^{n+1}), \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0, \quad u^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2k}(3\tilde{u}^{n+1} - 3u^{n+1}) - \nu \Delta (\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n) = 0, \quad \tilde{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.11)$$

对于这个格式, 也和前面一样, 初始值选取也有一定的要求:

$$\begin{cases} \|u(t_1) - \tilde{u}^1\|_0 \leq Ck^2, \\ \|u(t_1) - \tilde{u}^1\|_1 \leq Ck^{\frac{3}{2}}, \\ \|u(t_1) - \tilde{u}^1\|_2 \leq Ck. \end{cases} \quad (4.12)$$

于是, 对于格式(4.10), (4.11)我们有如下的误差估计:

定理 4.4. [27] 假设初始值满足条件(4.12), 设 (u, p) 为问题(4.1)的解, 且足够光滑, (u^n, p^n) 为方程(4.10), (4.11)的解, 有以下误差估计式成立:

$$\begin{aligned} k \sum_{n=1}^M \|u(t_n) - u^n\|_0^2 + k \sum_{n=1}^M \|u(t_n) - \tilde{u}^n\|_0^2 &\leq Ck^4, \\ \|u(t_n) - u^n\|_0 + \|u(t_n) - \tilde{u}^n\|_0 &\leq Ck^{\frac{3}{2}} \\ \|p(t_n) - p^n\|_0 + \|u(t_n) - u^n\|_1 &\leq Ck. \end{aligned}$$

从格式(4.11)可以知道, 需要满足 $\Delta(\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n) \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, 这就意味着:

$$\Delta \tilde{u}^{n+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = \Delta \tilde{u}^n \cdot n|_{\partial\Omega} = \dots = \Delta \tilde{u}^0 \cdot n|_{\partial\Omega}.$$

这就导致了

$$\partial_n p^{n+1}|_{\partial\Omega} = (f(t^{n+1}) + \nu \Delta \tilde{u}^0) \cdot n|_{\partial\Omega}$$

这很显然也是给压力 p 增加了一个人工Neumann边界条件, 也就是这个人工边界层限制了格式的精度的提高, 和压力修正格式情况一样。

对于调和分裂格式[28], 我们首先将方程(4.1)的动量方程和 ∇q 作一个 L^2 内积, 消去 u_t 项, 因为 $(u_t, \nabla p) = -(\nabla \cdot u_t, p) = 0$, 得到

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q = \int_{\Omega} (f + \nu \Delta u - u \cdot \nabla u) \cdot \nabla q, \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (4.13)$$

在这个式子中, 如果我们已经知道速度 u , 那么(4.13)就是一个简单的关于压力 p 的Poisson问题了。调和分裂格式就是第一步由压力值计算速度值, 第二步用(4.13)式来更新压力值。其一阶标准分裂格式为: 令 $u^0 = u_0$ 和 $p^0 = p_0$ (这个可以由(4.13)式在 $t=0$ 时计算得到)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n) - \nu \Delta u^{n+1} + u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} + \nabla p^n &= f(t^{n+1}), \quad u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \\ (\nabla p^{n+1}, \nabla q) &= (f(t^{n+1}) + \nu \Delta u^{n+1} - u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1}, \nabla q), \quad \forall q \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

注意到在第二步我们要计算 Δu^{n+1} , 这在有限元离散时候可能会出现不适定的情况。所以变换成另外一个适合于有限元离散的格式, 为此将第一式和 ∇q 做内积, 然后和第二式相减, 这样我们就得到等价的下式,

$$\frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n) - \nu \Delta u^{n+1} + u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} + \nabla p^n = f(t^{n+1}), \quad u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.14)$$

$$(\nabla(p^{n+1} - p^n), \nabla q) = \left(\frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n), \nabla q\right) \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (4.15)$$

和压力修正格式一样, 要求满足 $\partial_n(p^{n+1} - p^n)|_{\partial\Omega} = 0$, 这同样也引进了一个人工Neumann边界条件, 造成了精度的损失。对于误差估计有下列定理,

定理 4.5. 设 (u, p) 为问题(4.1)的解, 且足够光滑, (u^n, p^n) 为方程(4.14), (4.15)的解, 有以下误差估计式成立:

$$\begin{aligned} k \sum_{n=0}^M \|u(t_n) - u^n\|_0^2 &\leq Ck^4, \\ \|u(t_n) - u^n\|_1 + \|p(t_n) - p^n\|_0 &\leq Ck. \end{aligned}$$

Gauge-Uzawa算法严格意义上讲也是一种投影算法[54, 49]。主要结合了gauge方法[20]和Uzawa算法的优点, 使得可以避免边界导数的计算。令 ϕ 为一个辅助参数, 称为gause变量, a 为未知向量使得 $u = a + \nabla \phi$, 如果我们选择 ϕ 和 p 使得其满足 $\phi_t - \nu \Delta \phi = -p$ 那么方程(4.1)就变形为

$$\begin{cases} a_t - \nu \Delta a + (u \cdot \nabla)u = f & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ -\Delta \phi = \nabla \cdot a & \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{cases}$$

对于一个方程来说, 我们还需要有边界条件才行。为了保证在边界上 $u = 0$, 由[50, 20, 64]知道, 选用Neumann型边界比较好:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad a \cdot n = 0, \quad a \cdot \tau = -\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$$

gauge算法格式为: 令 $\phi^0 = 0$ 和 $a^0 = u_0$

1.

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(a^{n+1} - a^n) + (u^n \cdot \nabla)(a^{n+1} + \nabla \phi^n) - \nu \Delta a^{n+1} = f(t^{n+1}) & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ a^{n+1} \cdot n = 0, \quad a^{n+1} \cdot \tau = -\frac{\partial \phi^n}{\partial \tau} & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -\Delta \phi^{n+1} = \nabla \cdot a^{n+1} & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

3.

$$u^{n+1} = a^{n+1} + \nabla \phi^{n+1}.$$

这个算法也是将粘性项和不可压缩项分开。相比前面的那些分裂算法而言, gauge算法不需要人工边界条件, 对 p 的初值选择也没有要求, 也没有特殊的不切实际的正则化要求等等优点。但也有其一些缺点, 边界项 $\frac{\partial \phi^n}{\partial \tau}$ 不可变分, 所以用有限元离散很难实现。 $p^{n+1} = \nu \Delta \phi^{n+1} - \frac{1}{k}(\phi^{n+1} - \phi^n)$ 这项也是不稳定的, 会导致精度的损失[64, 50]。数值试验也显示在有限元逼近时 ϕ 的多项式次数需要比 p 高。这样就不太划算了, 毕竟 ϕ 只是引进的一个参数。所以就有了gause-Uzawa算法[49], 主要引进 $\hat{u}^{n+1} = a^{n+1} + \nabla \phi^n$, 令 $s^0 = 0$ 和 $u^0 = u_0$

1.

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(\hat{u}^{n+1} - u^n) + (u^n \cdot \nabla)\hat{u}^{n+1} - \nu \Delta \hat{u}^{n+1} + \nu \nabla s^n = f(t^{n+1}) & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \hat{u}^{n+1} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

2.

$$\Delta \rho^{n+1} = \nabla \cdot \hat{u}^{n+1}.$$

3.

$$s^{n+1} = s^n - \nabla \cdot \hat{u}^{n+1}.$$

4.

$$u^{n+1} = \hat{u}^{n+1} + \nabla \rho^{n+1}$$

这是一个完全的一阶格式, 给出误差估计

定理 4.6. 设 (u, p) 为问题(4.1)的解, 且足够光滑. (u^n, p^n) 为上述 *gauss-Uzawa* 算法所得的解. 有以下误差估计成立:

$$\begin{aligned} k \sum_{n=0}^M \|u(t_{n+1} - u^{n+1})\|_0^2 + k \sum_{n=0}^M \|u(t_{n+1} - \hat{u}^{n+1})\|_0^2 &\leq Ck^2, \\ k \sum_{n=0}^M \|u(t_{n+1} - \hat{u}^{n+1})\|_1^2 + k \sum_{n=0}^M \|p(t_{n+1} - p^{n+1})\|_0^2 &\leq Ck. \end{aligned}$$

接下来我们来看, 将非线性项和不可压缩项分开的分裂算法. 对于这类算法不用引进参数, 不用增加人工边界条件, 而且不论是中间速度还是最后速度, 都满足原始边界条件. 其一阶格式为[5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(\tilde{u}^{n+1} - u^n) - \nu \Delta \tilde{u}^{n+1} + (u^n \cdot \nabla) \tilde{u}^{n+1} &= f(t^{n+1}), \quad \tilde{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \\ \begin{cases} \frac{1}{k}(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) - \nu \Delta(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) + \nabla p^{n+1} = 0, \\ \nabla \cdot u^n = 1, \quad u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

这个算法可以用来理论解释一类应用广泛的预估-多步校正算法(详见[6]). 这个算法第一步是一个线性的椭圆型问题, 第二步是一个一般化的Stokes问题, 离散之后得到一个对称线性问题. 从数值试验来看[6], 这个算法得到了非常好的收敛性, 从计算的角度来说是非常可行的. 在[5]也得到了其理论误差估计. 有一点不好的地方是离散之后的空间, 类似很多标准的投影方法, 需要满足离散的LBB条件.

在下一节我们具体讨论将非线性项和不可压缩项分离的这类算法的一个两阶形式, 并给出其误差分析全过程, 从中也可以知道分裂算法误差是如何进行的.

4.2 一个两阶的分裂算法

4.2.1 算法描述

分裂算法误差估计较为复杂, 所以只采用半离散形式. 在实际计算时候, 空间离散是采用有限元离散做的. 在分析算法之前, 我们做一些准备工作. 为此我们先定义两个空间

$$\begin{aligned} H &= \{u \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ V &= \{u \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0\}. \end{aligned}$$

为了处理方程(4.1)中的对流项,像前一章一样以下的三线性形式是经常被用到的,

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v \cdot w dx, \quad \forall u \in H^1(\Omega)^d, v \in H^1(\Omega)^d, w \in H_0^1(\Omega)^d.$$

我们再定义 $\tilde{b}(\cdot, \cdot, \cdot)$,

$$\tilde{b}(u, v, w) = (\tilde{B}(u, v), w), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)^d, w \in H_0^1(\Omega)^d.$$

这里 $\tilde{B}(u, v) = (u \cdot \nabla) v + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u) v$ 。另外加的这一项 $\frac{1}{2}(\nabla \cdot u) v$ 由[62]知道,是用来防止色散性的。方程要求速度的散度为零,但是在离散时候是不可能每时每刻都做到的,所以会出现色散的情况,这对计算来说是不利,因此在实际计算时候经常采用上式来阻止色散性。通过简单的计算可知

$$\begin{aligned} \tilde{b}(u, v, v) &= 0, \quad \forall u \in H^1(\Omega)^d, v \in H_0^1(\Omega)^d, \\ \tilde{b}(u, v, w) &= \frac{1}{2}(b(u, v, w) - b(u, w, v)), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)^d, w \in H_0^1(\Omega)^d. \end{aligned} \quad (4.16)$$

下面这些不等式在证明过程中经常被用到,其证明过程跟前一章提到的相类似,这里就不再累述了,可参见[58, 49, 84]等,

$$b(u, v, w) \leq C \begin{cases} \|u\|_2 \|v\| \|w\|_1, \\ \|u\| \|v\|_2 \|w\|_1, \\ \|u\| \|v\|_1 \|w\|_2, \\ \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1, \\ \|u\|_2 \|v\|_1 \|w\|. \end{cases} \quad (4.17)$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数,其他范数形式均为标准的Sobolev空间符号。

下面介绍一个算子 A^{-1} ,在后面的证明过程经常要用到,它可以看做是Stokes算子的逆算子,即 $A = -P_H \Delta$,其中 P_H 为空间H的投影算子。给定 $u \in H$,由A的定义,那么 $v = A^{-1}u$ 就是下式的解:

$$\begin{aligned} -\Delta v + \nabla r &= u && \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot v &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ v &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{aligned}$$

对于这个算子,有以下几点性质[56]:

$$\exists c_1, c_2 > 0, \text{使得 } \forall u \in H : \begin{cases} \|A^{-1}u\|_s \leq c_1 \|u\|_{s-2}, & \text{for } s = 1, 2; \\ c_2 \|u\|_{-1}^2 \leq (A^{-1}u, u) \leq c_1^2 \|u\|_{-1}^2. \end{cases} \quad (4.18)$$

由此,我们可以用 $(A^{-1}u, u)^{\frac{1}{2}}$ 来代替 $H^{-1}(\Omega)^d$ 的范数,因为它们等价。

现在我们对于已知的数据,以及方程(4.1)的解做一些假设。假设初值 u_0 和右端项 f 满足

$$(A1) \quad u_0 \in H^2(\Omega)^d \cap V, \quad f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^d)$$

在三维时候,我们更进一步假设存在一个全局的强解,即:

$$(A2) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_1 \leq C$$

在(A1), (A2)的假设下,我们可以证明(见[32]):

$$\sup_{t \in [0, T]} \{\|u\|_2 + \|u_t(t)\| + \|\nabla p\|\} \leq C \quad (4.19)$$

上面这个不等式对于二维情况自动满足。此外,我们假设方程(4.1)的解 $\{u, p\}$ 满足下列正则性条件:

$$(A3) \quad \int_0^T \{\|u_{ttt}(s)\|_{-1}^2 + \|u_{tt}(s)\|_1^2 + \|p_{tt}(s)\|^2\} ds \leq C$$

最后,我们给出一个引理,这个引理将在后面的证明过程被多次应用,可以说是我们证明的基础(其引理本省的证明可参见[33]):

引理 4.7. (离散Gronwall引理). 令 y^n, h^n, g^n, f^n 为非负序列满足

$$y^m + k \sum_{n=0}^m h^n \leq B + k \sum_{n=0}^m (g^n y^n + f^n), \quad \text{其中 } k \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{T}{k} \rfloor} g^n \leq M, \quad \forall 0 \leq m \leq \lfloor \frac{T}{k} \rfloor.$$

假设 $kg^n < 1$, 令 $\sigma = \max_{0 \leq n \leq \lfloor \frac{T}{k} \rfloor} (1 - kg^n)^{-1}$, 那么有下式成立

$$y^m + k \sum_{n=0}^m h^n \leq \exp(\sigma M) (B + k \sum_{n=0}^m f^n), \quad \forall m \leq \lfloor \frac{T}{k} \rfloor.$$

我们这一节研究讨论的算子分裂格式是针对[5, 6]格式的一个深入研究。为此给定 $u^n \in V$, 我们主要求解的是在 $t = t_n$ 时刻 u 的近似值。将时间从 $t = t_n$ 到 t_{n+1} 分成两步,

1.

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{k} - \frac{\nu}{2} \Delta(u^n + \tilde{u}^{n+1}) + \tilde{B}\left(\frac{u^n + \tilde{u}^{n+1}}{2}, \frac{u^n + \tilde{u}^{n+1}}{2}\right) + \frac{1}{2} \nabla(p^n + p^{n-1}) = f(t_{n+\frac{1}{2}}), \\ \tilde{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

2.

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{k} - \frac{\nu}{2} \Delta(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) + \frac{1}{2} \nabla(p^{n+1} - p^{n-1}) = 0, \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0, \\ u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

注 6. 在这个格式中, 当我们在求解 $\{u^{n+1}, p^{n+1}\}$ 时, 我们需要用到前面的两层时间 $t_{n-1} = (n-1)k$ 和 $t_n = nk$ 上的数据。所以对于初始时间层我们需要重新考虑, 一种办法是事先得到 $\{u, p\}$ 在 $t_1 = k$ 上的值, 如可以用标准格式等。第二种办法就是令 $p^{-1} \equiv p^0$, 我们讨论的主要是这种办法。

方程(4.20)跟稳态的Navier-Stokes方程很类似, 为关于 \tilde{u}^{n+1} 的非线性方程, 所以其解的存在性可严格按照稳态的Navier-Stokes方程用Galerkin过程证明(见[84])。而方程(4.21)和Stokes方程具有相同的结构, 所以 $\{u^{n+1}, p^{n+1}\}$ 的存在唯一性和Stokes方程类似很容易得到。就像在[5]中所说的, 我们这个格式和标准的投影方法相比较, 最大的区别是在不可压缩步引进了一个粘性项, 也就是这个粘性项使得每个时间层的最后速度 u^{n+1} 满足原始的边界条件。和[5]一阶格式相比较, 在这里时间上我们用Crank-Nicolson公式进行离散, 并且我们在计算的时候不仅用到 t_n 的速度和压力值, 而且还用到了 t_{n-1} 的压力值, 这两个特点使得我们这个格式具有二阶的精度。在[6]中, 作者也提到了只是用Crank-Nicolson公式离散时间项的格式, 那么在数值试验中得出, 仅仅这样是得不到二阶格式的。为此, 我们设计了以上的格式, 从理论证明和数值试验两个方面都证实是具有两阶精度的。

为方便书写, 我们做一些符号记号。对于任意的函数 $w(t)$ 和任意的序

列 $\{a^n\}$ 和 $\{\tilde{a}^n\}$, 我们做如下的定义:

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}(w(t_{n+1}) + w(t_n)), \\ a^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(a^{n+1} + a^n), \quad \tilde{a}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\tilde{a}^{n+1} + a^n).\end{aligned}$$

对于半离散误差, 我们也定义一下,

$$e^{n+1} = u(t_{n+1}) - u^{n+1}, \quad \tilde{e}^{n+1} = u(t_{n+1}) - \tilde{u}^{n+1}, \quad q^{n+1} = p(t_{n+1}) - p^{n+1}.$$

我们的主要结论是这个:

定理 4.8. 假设 $\|\tilde{e}^0\| \leq \mathcal{O}(k^{3/2})$, $\|q^0\| \leq \mathcal{O}(k)$ 和 $\int_0^T \|\nabla p_t\|^2 ds \leq C$. 那么有以下不等式成立:

$$k \sum_{n=0}^{M-1} \{\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \|q^{n+\frac{1}{2}}\|^2\} \leq C_\varepsilon k^{4-\varepsilon}. \quad (4.22)$$

这个定理说明格式(4.20)-(4.21)在 $H_0^1(\Omega)$ 范数和 $L^2(\Omega)$ 范数意义下对速度都有两阶的弱收敛 (对任意小的 $\varepsilon > 0$), 对 $L^2(\Omega)$ 范数意义下的中间速度和压力也同样有两阶弱收敛。

4.2.2 定理4.8的证明

在给出定理4.8的证明之前, 我们需要证明一系列的引理。首先我们给出一个关于截断误差的引理。定义截断误差为

$$\begin{aligned}R^n &= \frac{1}{k}(u(t_{n+1}) - u(t_n)) - \nu \Delta \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + (\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) \cdot \nabla) \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) + \nabla \tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}}) - f(t_{n+\frac{1}{2}}),\end{aligned} \quad (4.23)$$

引理 4.9.

$$k \sum_{n=0}^{M-1} \|R^n\|_{-1}^2 \leq ck^4 \int_0^T (\|u_{ttt}(s)\|_{-1}^2 + \|u_{tt}(s)\|_1^2 + \|p_{tt}(s)\|^2) ds \leq Ck^4.$$

证明. 将(4.23) 式和方程(4.1)在 $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ 时的两式相加可得:

$$\begin{aligned}R^n &= \left(\frac{1}{k}(u(t_{n+1}) - u(t_n)) - u'(t_{n+\frac{1}{2}}) \right) - (\nu \Delta \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \nu \Delta u(t_{n+\frac{1}{2}})) \\ &\quad + ((\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) \cdot \nabla) \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) - (u(t_{n+\frac{1}{2}}) \cdot \nabla) u(t_{n+\frac{1}{2}})) \\ &\quad + (\nabla(\tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}}) - p(t_{n+\frac{1}{2}}))) \\ &= A_1^n - A_2^n + A_3^n + A_4^n\end{aligned}$$

对于这四项我们做如下处理。分别对 $u(t_n)$ 和 $u(t_{n+1})$ 进行带积分余项的Taylor展开, 我们可得:

$$A_1^n = \frac{1}{2k} \left(\int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^2 u_{ttt}(s) ds + \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (s - t_n)^2 u_{ttt}(s) ds \right).$$

再将Schwarz不等式应用于上式, 可得

$$\begin{aligned} \|A_1^n\|_{-1}^2 &\leq \frac{1}{k^2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^4 ds \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} \|u_{ttt}(s)\|_{-1}^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{k^2} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (s - t_n)^4 ds \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \|u_{ttt}(s)\|_{-1}^2 ds \\ &\leq Ck^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{ttt}(s)\|_{-1}^2 ds \end{aligned}$$

所以

$$k \sum_{n=0}^{M-1} \|A_1^n\|_{-1}^2 \leq Ck^4 \int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_{-1}^2 ds \quad (4.24)$$

令

$$E_u^n = \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) - u(t_{n+\frac{1}{2}}), \quad E_p^n = \tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}}) - p(t_{n+\frac{1}{2}}).$$

再次利用带积分余项的Taylor展开式, 可得

$$\begin{aligned} E_u^n &= \frac{1}{4} \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (s - t_n) u''(s) ds + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) u''(s) ds \right), \\ E_p^n &= \frac{1}{4} \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (s - t_n) p''(s) ds + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) p''(s) ds \right) \end{aligned}$$

像上面一样, 我们可以利用Schwarz不等式,

$$\begin{aligned} \|E_u^n\|^2 &\leq Ck^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(s)\|^2 ds, \\ \|E_p^n\|^2 &\leq Ck^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} |p''(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

因此,

$$k \sum_{n=0}^{M-1} \|A_2^n\|_{-1}^2 \leq C\nu k \sum_{n=0}^{M-1} \|E_u^n\|^2 \leq Ck^4 \int_0^T \|u''(s)\|^2 ds, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
k \sum_{n=0}^{M-1} \|A_4^n\|_{-1}^2 &\leq Ck \sum_{n=0}^{M-1} \max_{v \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{(\langle \nabla E_p^n, v \rangle)^2}{\|v\|^2} \\
&\leq Ck \sum_{n=0}^{M-1} |E_p^n|^2 \leq Ck^4 \int_0^T |p''(s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

接下来, 我们重新改写一下 A_3^n ,

$$A_3^n = (E_u^n \cdot \nabla) \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) + (\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) \cdot \nabla) E_u^n.$$

因为有 $\|\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}})\| \leq M$, 考虑到不等式(4.17), 我们有

$$\begin{aligned}
\langle A_3^n, v \rangle &= b(E_u^n, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), v) + b(\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), E_u^n, v) \\
&\leq C \|E_u^n\| \|v\| \|\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}})\| \leq M \|E_u^n\| \|v\|.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
k \sum_{n=0}^{M-1} \|A_3^n\|_{-1}^2 &\leq Ck \sum_{n=0}^{M-1} \max_{v \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{(\langle \nabla A_3^n, v \rangle)^2}{\|v\|^2} \\
&\leq Mk \sum_{n=0}^{M-1} \|E_u^n\|^2 \leq Mk^4.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

综合(4.24), (4.25), (4.26)和(4.27), 然后再有解的正则性条件 (A3), 我们就完成了引理的证明。□

引理 4.10.

$$\begin{aligned}
\|e^{N+1}\|^2 + k\nu \sum_{n=0}^N |e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 &\leq Ck \sum_{n=0}^N (\|R^n\|_{-1}^2 + \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4), \\
\forall 0 \leq N \leq M-1.
\end{aligned}$$

证明. 将格式的第一步(4.20) 和第二步(4.21)相加, 得到:

$$\frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n) - \nu \Delta u^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{B}(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}) + \nabla p^{n+\frac{1}{2}} = f(t_{n+\frac{1}{2}}) \tag{4.28}$$

然后由(4.23)式减去(4.28)式, 我们可以得到

$$\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n) - \nu \Delta e^{n+\frac{1}{2}} + \nabla q^{n+\frac{1}{2}} = NLT + R^n, \tag{4.29}$$

这里NLT表示非线性部分,

$$\begin{aligned}
 NLT &= \tilde{B}(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}) - (\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) \cdot \nabla) \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) \\
 &= -\tilde{B}(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}) - \tilde{B}(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}})) \\
 &= \tilde{B}(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}) - \tilde{B}(\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}) - \tilde{B}(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}})).
 \end{aligned}$$

将(4.29)式与 $2ke^{n+\frac{1}{2}}$ 做内积, 应用代数关系式 $(a-b, a) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 + |b-a|^2)$ 和 $(a-b, b) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 - |b-a|^2)$, 可得:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n) - \nu \Delta e^{n+\frac{1}{2}}, 2ke^{n+\frac{1}{2}}\right) &= \|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + 2k\nu|e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2, \\
 (NLT, 2ke^{n+\frac{1}{2}}) &= B_1 + B_2 + B_3,
 \end{aligned}$$

应用(4.16)式, 我们有

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 2k\tilde{b}(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}) \\
 &= kb(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}) - kb(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}), \\
 B_2 &= -2k\tilde{b}(\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}) \\
 &= -kb(\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}) + kb(\tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), e^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}), \\
 B_3 &= -2k\tilde{b}(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), e^{n+\frac{1}{2}}) \\
 &= -kb(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), e^{n+\frac{1}{2}}) + kb(\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}})),
 \end{aligned}$$

在(4.17)中选择适当的不等式应用于上面这些式子, 并根据(4.19)式, 我们得到:

$$\begin{aligned}
 (NLT, 2ke^{n+\frac{1}{2}}) &\leq Ck\|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\| |e^{n+\frac{1}{2}}|_1 + Ck|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 |e^{n+\frac{1}{2}}|_1 \\
 &\leq \frac{k\nu}{2}|e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + Ck(\|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4)
 \end{aligned}$$

对于截断误差项, 我们有

$$(R^n, 2ke^{n+\frac{1}{2}}) \leq Ck\|R^n\|_{-1} |e^{n+\frac{1}{2}}|_1 \leq Ck\|R^n\|_{-1}^2 + \frac{k\nu}{2}|e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2.$$

综合上面所有的这些不等式, 考虑到 $(\nabla p, v) = 0, \forall p \in H^1, v \in V$, 最终可得

$$\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + k\nu|e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 \leq Ck(\|R^n\|_{-1}^2 + \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4). \quad (4.30)$$

将(4.30)式对 n 从 0 到 N 求和 ($\forall 0 \leq N \leq M-1$), 我们得到

$$\|e^{N+1}\|^2 + k\nu \sum_{n=0}^N |e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 \leq Ck \sum_{n=0}^N (\|R^n\|_{-1}^2 + \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4), \quad (4.31)$$

这样就完成了引理4.10的证明。□

为了获得压力的误差估计, 我们需要引进下列引理:

引理 4.11.

$$\sum_{n=0}^{M-1} \|e^{n+1} - e^n\|_{-1}^2 \leq Ck^2 \sum_{n=0}^{M-1} \{ |e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|R^n\|_{-1}^2 \}.$$

证明. 将(4.29)式和 $kA^{-1}(e^{n+1} - e^n)$ 做内积, 由算子 A^{-1} 满足的性质(4.18)可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{n+1} - e^n}{k}, kA^{-1}(e^{n+1} - e^n) \right) &= \|e^{n+1} - e^n\|_{-1}^2, \\ -k\nu(\Delta e^{n+\frac{1}{2}}, A^{-1}(e^{n+1} - e^n)) &= k\nu(\nabla e^{n+\frac{1}{2}}, \nabla A^{-1}(e^{n+1} - e^n)) \\ &\leq \frac{1}{6} \|e^{n+1} - e^n\|_{-1}^2 + Ck^2 |e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2, \\ (\nabla q^{n+\frac{1}{2}}, kA^{-1}(e^{n+1} - e^n)) &= 0, \\ (R^n, kA^{-1}(e^{n+1} - e^n)) &\leq \frac{1}{6} \|e^{n+1} - e^n\|_{-1}^2 + Ck^2 \|R^n\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

对于非线性项, 我们可以用类似前面的处理得到下列不等式

$$\begin{aligned} (NLT, kA^{-1}(e^{n+1} - e^n)) &\leq Ck \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\| \|e^{n+1} - e^n\|_{-1} + Ck |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 \|e^{n+1} - e^n\|_{-1} \\ &\leq Ck^2 (\|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4) + \frac{1}{6} \|e^{n+1} - e^n\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

因此, 联合上面所有的不等式, 我们有

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{M-1} \|e^{n+1} - e^n\|_{-1}^2 \leq Ck^2 \sum_{n=0}^N \{ \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|R^n\|_{-1}^2 + |e^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4 \}. \quad \square$$

现在, 我们可以得到压力项误差的估计了。

引理 4.12.

$$k \sum_{n=0}^{M-1} \|q^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq Ck \sum_{n=0}^{M-1} \{\|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|R^n\|_{-1}^2 + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4\}.$$

证明. 我们先(4.29)式改写成如下形式,

$$-\nabla q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n) - \nu \Delta e^{n+\frac{1}{2}} - NLT - R^n,$$

利用inf-sup 条件, 我们有

$$\|q^{n+\frac{1}{2}}\| \leq C \sup_{v \in H_0^1} \frac{(\nabla q^{n+\frac{1}{2}}, v)}{|v|_1}, \quad (4.32)$$

我们在对(4.32)式的右端项的内积进行估计的时候, 需要用到 $H_0^1(\Omega)$ 空间中任意元素 v , 于是我们有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n) - \nu \Delta e^{n+\frac{1}{2}} - R^n, v\right) &\leq C\left(\frac{1}{k}\|e^{n+1} - e^n\|_{-1} + \|R^n\|_{-1} + \nu|e^{n+\frac{1}{2}}|_1\right)|v|_1, \\ (NLT, v) &\leq C\|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\||v|_1 + C|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2|v|_1. \end{aligned}$$

由这些不等式, 我们马上可以得到

$$\|q^{n+\frac{1}{2}}\| \leq C\left(\frac{1}{k}\|e^{n+1} - e^n\|_{-1} + \|R^n\|_{-1} + \nu|e^{n+\frac{1}{2}}|_1 + \|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}\| + |\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2\right).$$

由此, 我们这个引理就是引理4.10和引理4.11的一个直接结果. \square

接下来这个引理非常重要, 特别地, 它也表明我们这个方法对速度而言在 $H_0^1(\Omega)$ 空间是一致稳定的.

引理 4.13. 在定理4.8的假设下, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \|e^{N+1}\|^2 + \|\tilde{e}^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \{\|e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}\|^2 + k\nu|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + k\nu|e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}|_1^2\} \\ \leq C_\varepsilon k^{3-\varepsilon}, \quad \forall 0 \leq N \leq M-1. \end{aligned}$$

证明. 在我们得到这个引理的证明以前, 我们需要先证明一个对速度的弱一点的误差估计,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \{\|e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}\| + k\nu|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + k\nu|e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}|_1^2\} \\ + \|e^{N+1}\|^2 + \|\tilde{e}^{N+1}\|^2 \leq Ck^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

为了得到这个不等式, 我们将(4.23)式和(4.20)式相减, 得到下列式子:

$$\frac{\bar{e}^{n+1} - e^n}{k} - \nu \Delta \bar{e}^{n+\frac{1}{2}} = NLT + R^n + \nabla(p^{n-\frac{1}{2}} - \tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}})). \quad (4.34)$$

将(4.34)式与 $2k\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}$ 做内积, 每项做如下处理,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{e}^{n+1} - e^n}{k} - \nu \Delta \bar{e}^{n+\frac{1}{2}}, 2k\bar{e}^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \|\bar{e}^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + 2k|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2, \\ (NLT, 2k\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}) &= -2k\bar{b}(\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}(t_{n+\frac{1}{2}}), \bar{e}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\leq Ck\|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{k\nu}{2}|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2, \\ (R^n, 2k\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}) &\leq Ck\|R^n\|_{-1}^2 + \frac{k\nu}{2}|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2. \end{aligned}$$

所以, 可得

$$\begin{aligned} \|\bar{e}^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + k|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 \\ \leq Ck(\|R^n\|_{-1}^2 + \|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2) + (\nabla(p^{n-\frac{1}{2}} - \tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}})), k\bar{e}^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

另一方面, 我们将(4.21)式改写成下式

$$\frac{1}{k}(e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}) - \frac{\nu}{2}\Delta(e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}) = \frac{1}{2}\nabla(p^{n+1} - p^{n-1}). \quad (4.36)$$

然后将(4.36)式和 $k(e^{n+1} - \bar{e}^{n+1})$ 做内积, 我们得到

$$\|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 + \frac{k\nu}{2}|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}|_1^2 = \left(\frac{1}{2}\nabla(p^{n-1} - p^{n+1}), k\bar{e}^{n+1} \right). \quad (4.37)$$

将(4.35)式和(4.37)式相加, 我们就可以得到

$$\begin{aligned} \|\bar{e}^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 + k|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + \frac{k\nu}{2}|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}|_1^2 \\ \leq Ck(\|R^n\|_{-1}^2 + \|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2) \\ + \left(\frac{1}{2}\nabla(2p^{n-1} + p^n - p^{n+1}) - \nabla\tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}}), k\bar{e}^{n+1} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

对前面三项, 我们有下式成立

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + \|\bar{e}^{n+1}\|^2 - \|\bar{e}^n\|^2 + \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 - \|e^n - \bar{e}^n\|^2) \\ \leq \|\bar{e}^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

对于右端的压力项可以这么来处理,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \nabla(2p^{n-1} + p^n - p^{n+1}) - \nabla \tilde{p}(t_{n+\frac{1}{2}}), k\tilde{e}^{n+1} \right) = (\nabla(q^{n+\frac{1}{2}} - 2q^{n-\frac{1}{2}}), 2k\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}) \\ & + (\nabla(p(t_{n-1}) - p(t_{n+1})), k(\tilde{e}^{n+1} - e^{n+1})) = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

分别对 I_1, I_2 进行估计,

$$\begin{aligned} I_1 & \leq Ck(\|q^{n+\frac{1}{2}}\| + \|q^{n-\frac{1}{2}}\|)|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1 \\ & \leq Ck\|q^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + Ck\|q^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{k}{2}|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2, \\ I_2 & \leq Ck\|\tilde{e}^{n+1} - e^{n+1}\| \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\nabla p_t(s)\| ds \\ & \leq k\|\tilde{e}^{n+1} - e^{n+1}\|^2 + Ck^2 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\nabla p_t(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

将(4.38)式对 $n = 0, \dots, N$ 进行求和, 考虑到不等式(4.39) 和上面两个不等式, 再由三角不等式 $\|\tilde{e}^{n+1} + e^n\|^2 \leq \|\tilde{e}^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2$, 可得

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|^2 + \|\tilde{e}^{N+1}\|^2 + \|e^{N+1} - \tilde{e}^{N+1}\|^2 + k\nu \sum_{n=0}^N (|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + |e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}|_1^2) \\ & \leq Ck \sum_{n=0}^N (\|e^n\|^2 + \|\tilde{e}^{n+1}\|^2 + \|e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}\|^2) + Ck \sum_{n=0}^N \|R^n\|_{-1}^2 \\ & + Ck^2 \int_0^T \|\nabla p_t\|^2 ds + 2\|\tilde{e}^0\|^2 + 2k\|q^0\|^2, \end{aligned}$$

这里我们应用了引理4.12, 而且省略了高阶项. 对上述不等式应用离散的Gronwall引理, 再有引理的假设和 $\int_0^T \|\nabla p_t\|^2 ds \leq C$, 有结论

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|^2 + \|\tilde{e}^{N+1}\|^2 + \|e^{N+1} - \tilde{e}^{N+1}\|^2 \\ & + k\nu \sum_{n=0}^N (|\tilde{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + |e^{n+1} - \tilde{e}^{n+1}|_1^2) \leq Ck^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

接下来我们重新考虑(4.37)式, 对它的右端项重新处理如下

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \nabla(p^{n-1} - p^{n+1}), k\tilde{e}^{n+1} \right) = \left(\frac{1}{2} \nabla(p(t_{n-1}) - p(t_{n+1})), k(\tilde{e}^{n+1} - e^{n+1}) \right) \\ & + (\nabla(q^{n+\frac{1}{2}} - q^{n-\frac{1}{2}}), k(\tilde{e}^{n+1} - e^{n+1})) = I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (4.41)$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq Ck \|\bar{e}^{n+1} - e^{n+1}\| \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\nabla p_t(s)\| ds \\
 &\leq Ck^3 \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|\nabla p_t(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \|\bar{e}^{n+1} - e^{n+1}\|^2, \\
 I_4 &\leq Ck \|q^{n+\frac{1}{2}}\| \|\bar{e}^{n+1} - e^{n+1}\|_1 \\
 &\leq Ck (\|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|R^n\|_{-1}^2 + |\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4) + \frac{k\nu}{4} |\bar{e}^{n+1} - e^{n+1}|_1^2.
 \end{aligned}$$

所以, 将(4.41)式代入(4.37)式, 然后对n 从0 到N进行求和, 有

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 + k\nu \sum_{n=0}^N |e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}|_1^2 \\
 &\leq Ck^3 + Ck \sum_{n=0}^N (\|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|R^n\|_{-1}^2 + |\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4) \\
 &\leq Ck^2.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

最后这个不等式是可由(4.40)式直接得到, 这样我们就得到了(4.33)。接下来, 我们证明如果对于 $\forall 0 \leq \beta \leq 1$ 有

$$\sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 \leq Ck^{2+\beta}, \tag{4.43}$$

那么就能得到下列不等式成立:

$$\begin{aligned}
 &\|e^{N+1}\|^2 + \|\bar{e}^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \{\|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\| \\
 &\quad + k\nu |\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + k\nu |e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}|_1^2\} \leq Ck^{2+\frac{1+\beta}{2}}.
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

特别地, (4.42)式就是(4.43)式 $\beta = 0$ 的情况。事实上我们可以用另外一种方法来处理上面的 I_2 , 应用Schwarz不等式可得:

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq Ck \|\bar{e}^{n+1} - e^{n+1}\| \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\nabla p_t(s)| ds \\
 &\leq k^{\frac{1-\beta}{2}} \|\bar{e}^{n+1} - e^{n+1}\|^2 + Ck^{2+\frac{1+\beta}{2}} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\nabla p_t(s)|^2 ds.
 \end{aligned}$$

然后其它过程都按(4.33)的证明, 我们就可以得到不等式(4.44)。

因为在(4.44)中也有 $\sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2$, 所以我们循环应用(4.43)和(4.44), 首先取 $\beta = 0$, 然后取 $\beta = \beta_m = \sum_{i=1}^m 1/2^i$, $m = 1, 2, \dots$, 当 m 足够大就可以使得 $\beta_m \geq 1 - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ 。这样引理4.13的证明就完成了。

有了这个引理, 我们现在就可以很容易的证明我们的定理4.8。

定理4.8的证明. 将(4.29)式与 $2kA^{-1}e^{n+\frac{1}{2}}$ 做内积, 我们有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n) - \nu \Delta e^{n+\frac{1}{2}}, 2kA^{-1}e^{n+\frac{1}{2}}\right) &= \|e^{n+1}\|_{-1}^2 - \|e^n\|_{-1}^2 + 2k\nu \|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2, \\ (NLT, 2kA^{-1}e^{n+\frac{1}{2}}) &\leq Ck \|\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\| \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{-1} + Ck |\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{-1} \\ &\leq Ck (\|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{-1}^2 + |\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4) \\ &\quad + k\nu \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 + k\nu \|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2, \\ (R^n, 2kA^{-1}e^{n+\frac{1}{2}}) &\leq Ck \|R^n\|_{-1}^2 + k \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

联合这些不等式, 并对 n 从 0 到 N 进行求和, 可得下式,

$$\begin{aligned} &\|e^{N+1}\|_{-1}^2 + k\nu \sum_{n=0}^N \|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq Ck \sum_{n=0}^N \{\|R^n\|_{-1}^2 + \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2 + \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{-1}^2 + |\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}|_1^4\} \\ &\leq Ck^{4-\varepsilon}. \end{aligned}$$

这里我们应用了离散的Gronwall引理和引理4.13。因为有

$$\|2\bar{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \|2e^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|e^{n+1} - \bar{e}^{n+1}\|^2,$$

这就证明了(4.22)的第二项。(4.22)第三项和第四项的证明直接应用引理4.10, 4.12 就可以得到。□

4.2.3 数值例子

在这一节中, 我们给出应用格式(4.20)-(4.21)解非稳态Navier-Stokes方程的一些数值结果。因为在误差中起决定作用的是线性算子的逼近误差, 所以为了计算方便一点, 我们省略掉非线性项, 只考虑依赖于时间的Stokes 方程。

表 4.1: 不同时间步长时速度和压力的误差, $h=1/60$

k	$err_u(1, k)$	$r_u(1, k)$	$err_p(1, k)$	$r_p(1, k)$
0.2	8.04×10^{-3}	4.00	2.11×10^{-3}	3.93
0.1	2.01×10^{-3}	4.01	5.37×10^{-4}	3.23
0.05	5.01×10^{-4}	4.01	1.66×10^{-4}	2.41
0.025	1.25×10^{-4}		6.89×10^{-5}	

令 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\nu = 1$, 依赖于时间的Stokes方程精确解 (u, p) 为

$$u(x, y, t) = \pi \sin t (\sin 2\pi y \sin^2 \pi x, -\sin 2\pi x \sin^2 \pi y),$$

$$p(x, y, t) = \sin t \cos \pi x \sin \pi y$$

那么其右端项 f 可按 $f = u_t - \Delta u + \nabla p$ 计算得到。我们的计算从初始时间 $t_0 = 0$ 开始。对于空间离散, 我们采用一致三角形网格剖分上的Taylor-Hood (P_2, P_1) 有限元, 网格长度为 $h = \frac{1}{60}$ 。我们知道 (P_2, P_1) 是满足离散LBB条件的稳定元。我们主要是考察时间引起的误差, 所以我们尽量将空间长度取的小, 这样使得空间引起的误差比时间引起的误差小很多, 可以忽略不计, 这样的话就可以来观察时间的阶了。当然, 网格长度也不能取的太小, 那样计算量会增加很多, 造成不必要的浪费。对于我们这个例子, 取网格步长为 $h = \frac{1}{60}$, 至少对速度来说是可以保证空间误差足够小, 另外也不至于程序运行时间太长。

定义

$$err_u(t, k) = \|u(x, y, t) - u^k(x, y)\|, \quad err_p(t, k) = \|p(x, y, t) - p^k(x, y)\|.$$

为了验证时间的收敛阶, 我们令

$$r_u(t, k) = \frac{err_u(t, k)}{err_u(t, k/2)}, \quad r_p(t, k) = \frac{err_p(t, k)}{err_p(t, k/2)}.$$

在表4.1我们列出了在时间 $t=1$ 时, 取不同的时间步长, 用格式(4.20)-(4.21)解方程时, 速度和压力的误差。这个结果很明显的说明了对速度来说两阶是成立的, 对压力项至少有一阶。

参考文献

- [1] Ayuso B, Archilla B G, Novo J. The postprocessed mixed finite-element method for the Navier-Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2005), 1091-1111.
- [2] Babuška I. Error-bounds for finite element method. *Numer. Math.*, 16(1971), 322-333.
- [3] Bell J, Colella P, HGlaz. A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, 85(1989), 257-283.
- [4] Bercovier M, Pironneau O A. Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables, *Numer. Math.*, 33(1977), 211-224.
- [5] Blasco J, Codina R. Error estimates for an operator-splitting method for incompressible flows, *Appl. Numer. Math.* 51(2004), 1-17.
- [6] Blasco J, Codina R, Huerta A. A fractional-step method for the incompressible Navier-Stokes equations related to a predictor-multicorrector algorithm, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 28(1997), 1391-1419.
- [7] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Anal. Numer.*, 8(1974), 129-151.
- [8] Boland J M, Nicolaides R A. On the stability of bilinear-constant velocity-pressure finite elements, *Numer. Math.*, 44(1984), 219-222.
- [9] Bramble J H, Pasciak J E, Vassilev A T. Uzawa type-algorithms for nonsymmetric saddle point problems, *Math. Comp.*, 69(1999), 667-689.
- [10] Brown D L, Cortez R, Minionz M L. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier - Stokes Equations, *J. Comput. Phys.*, 168(2001), 464 - 499.

- [11] Carey G F, Krishnan R. Penalty approximation of Stokes flow, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 35(1982), 169-206.
- [12] Cheng X L, Huang H C, Zou J. Quadrilateral finite element for the planar linear elasticity problem with large Lamé constant, *J. Comput. Math.*, 16(1998), 357-366.
- [13] Cheng X L, Han W M, Huang H C. Analysis of some mixed elements for the Stokes problem, *J. Comput. and Appl. Math.*, 85(1997), 19-35.
- [14] Cheng X L, Shaikh A W. Analysis of the iterative penalty method for the Stokes equations, *Applied Mathematics Letters*, 19(2006), 1024-1028.
- [15] Cheng X L, On the nonlinear inexact Uzawa algorithm for saddle point problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(2000), 1930-1934.
- [16] Chorin A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, 22(1968), 745-762.
- [17] Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bull Am Math Soc*, 49(1943), 1-23.
- [18] Elman H C, Golub G. Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(1994), 1645-1661.
- [19] E W, Liu J C. Projection method I: Convergence and numerical boundary layers, *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(1995), 1017-1057.
- [20] E W, Liu J G. Gauge method for viscous incompressible flows, *Commun. Math. Sci.*, 1(2003), 317-332.
- [21] Fairag F. Numerical computations of viscous, incompressible flow problems using a two-level finite element method, *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2003), 1919-1929.
- [22] Fairag F. Two-level finite element method for the stream function formulation of the Navier-Stokes equations, *Comput. Math. Appl.*, 36(1998), 117-127.

-
- [23] Goda K. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flow, *J. Comput. Phys.*, 30(1979), 76-95.
- [24] Gresho P M. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduce a nearly consistent mass matrix, Part I: Theory, *Intern. J. Numer. Methods in Fluids*, 11(1990), 587-620.
- [25] Gresho P M, Sani R L. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations, *Intern. J. Numer. Methods in Fluids*, 7(1987), 1111-1145.
- [26] Guermod J L, Mineev P, Shen J. An overview of projection methods for incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195(2006), 6011-6045.
- [27] Guermod J L, Shen J. Velocity-correction projection methods for incompressible flows, *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1)(2003), 112-134.
- [28] Guermod J L, Shen J. A new class of truly consistent splitting for incompressible flows, *J. Comput. Phys.*, 192(2003), 262 - 276
- [29] Guermod J L, Shen J. On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods, *Math. Comput.*, 73(248)(2004), 1719-1737.
- [30] Guermod J L, Some practical implementation of projection methods for Navier-Stokes, *Model. Math. Anal. Num.*, 30(1996), 637-667.
- [31] Gunzburger M, Peterson J, On conforming finite element methods for the inhomogeneous stationary Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, 42(1983), 173-194.
- [32] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I. Regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(1982), 275-311.

- [33] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem.IV.Error analysis for second-order time discretization, SIAM J. Numer. Anal., 27(1990), 353-384
- [34] Jiang J S, Cheng X L. On the stability of biquadratic-bilinear velocity-pressure finite element, J. Comput. Math., 10(1992), 167-170.
- [35] Jin J C, Shu S, Xu J C. A two-grid discretization method for decoupling systems of partial differential equation, Math. Comp., 75(2006), 1617-1626.
- [36] Johnson C, Pitkaranta J. Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration, Math. Comput., 38(1982), 375-400.
- [37] Kan J V. A second-order accurate pressure-correction schemes for viscous incompressible flow, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7(1986), 870-891.
- [38] Karakashian O A. On a galerkin-lagrange multiplier method for the stationary Navier-Stokes equations, SIAM J. Numer. Anal., 19(1982), 909-923.
- [39] Karniadakis G E, Israeli M, Orszag S A. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 97(1991), 414-443.
- [40] Kim J, Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 58(1985), 308-323.
- [41] Layton W, Lenferink H W J. A multilevel mesh independence principle for the Navier-Stokes equations, SIAM J. Numer. Anal., 33(1996), 17-30.
- [42] Layton W, Tobiska L. A two-level method with backtracking for the Navier-Stokes equations, SIAM J. Numer. Anal., 35(1998), 2035-2054.
- [43] Layton W. A two level discretization method for the Navier-Stokes equations, Comput. Math. Appl., 26(1993), 33-38.
- [44] Layton W, Lenferink W. Two-level Picard and modified Picard methods for the Navier-Stokes equation, Appl. Math. Comput., 69(1995), 263-274.

- [45] Li K L, Hou Y R. An AIM and one-step Newton method for the Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Engrg.*, 190(2001), 6141-6155.
- [46] Lin S Y, Chin Y S, Wu T M, A modified penalty method for Stokes equation and its application to Navier-Stokes equation, *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(1995), 1-19.
- [47] Maubach J. Local bisection refinement for N-simplicial grids generated by reflection, *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(1995), 210-227.
- [48] Marion M, Xu J C. Error estimates on a new nonlinear Galerkin method based on two-grid finite element, *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(1995), 1170-1184.
- [49] Nochetto R H, Pyo J H. The gauge-uzawa finite element method. Part I: the Navier-Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2005), 1043-1068.
- [50] Nochetto R H, Pyo J H. Error estimates for semi-discrete Gauge methods for the Navier-Stokes equation, *Math. Comp.*, 74(2005), 521-542.
- [51] Oden J T, Kikuchi N, Song Y J. Penalty finite element methods for the analysis of stokesian flows, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 31(1982), 297-329.
- [52] Orzag S A, Israeli M, Deville M O. Boundary conditions for the incompressible flows, *J. Sci. Comput.*, 1(1)(1986), 75-111.
- [53] Prohl A. Projection and quasi-compressibility methods for solving the incompressible Navier-Stokes equations, *Adv.Numer.Math.*, B.G.Teubner, Stuttgart, 1997.
- [54] Pyo J H, Shen J. Gauge - Uzawa methods for incompressible flows with variable density, *J. Comput. Phys.*, 221(2007), 181 - 197
- [55] Rannacher R. On Chorin's projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *The Navier-Stokes Equations II, Theory and Numerical Methods*, Lecture Notes in Mathematics, 1530(1991), 167-183.
- [56] Shen J. On error estimates of the projection methods for the Navier-Stokes equations: first-order schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1992), 57-77.

- [57] Shen J. On error estimates of the projection methods for the Navier-Stokes equations: second-order schemes, *Math. Comput.*, 65(215)(1996), 1039-1065.
- [58] Shen J. On error estimates of some higher order projection and penalty-projection methods for Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, 62(1992), 49-73.
- [59] Stenberg R. Error analysis of some finite element methods for the Stokes problem, *Math. Comput.*, 54(1990), 495-508.
- [60] Temam R. Sur l'approximations de la solution des equation de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires ii, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 33(1969), 377-385.
- [61] Temam R. Remark on the pressure boundary condition for the projection method, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 3(1991), 181-184.
- [62] Temam R. Une méthode d'approximation de la solution des equation e Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France*, 96(1968), 115-152.
- [63] Wang C, Huang Z P, Li L K. Two-grid nonconforming finite element method for second order elliptic problems, *Applied Math. Comp.*, 177(2006), 211-219.
- [64] Wang C, Liu J G. Convergence of guage method for incompressible flow, *Math. Comp.*, 232(2000), 1385-1407.
- [65] Xu J C. A novel two-grid method for semilinear elliptic equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(1994), 231-237.
- [66] Xu J C. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1996), 1759-1778.
- [67] Xu J C. A new class of iterative methods for nonselfadjoint or indefinite problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1992), 303-319.
- [68] Xu J C. Iterative methods by SPD and small subspace solvers for nonsymmetric or indefinite problems, *Proceedings of the Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 1992.

- [69] Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithm based on two-grid discretizations for nonlinear problems, *Adv.Comput.Math.*, 14(2001), 293-327.
- [70] Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithm for eigenvalue problems, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 18(2002), 185-200.
- [71] Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithm based on two-grid discretizations, *Math. Comp.*, 69(200), 881-909.
- [72] Adams R A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York. 1975.
- [73] Acheson D. *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [74] Batchelor G. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [75] Brenner S C, Scott L R, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [76] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, New York, 1991.
- [77] Carey G F, Oden J T. *Finite elements: A Second Course-volume II*, Prentic-Hall, Englewood Cliffs,NJ, 1983.
- [78] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [79] Elman H C, Silvester D J, Wathen A J. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [80] Ern A, Guermond H L. *Theory and Practice of Finite Elements*, Applied Mathematical Sciences, vol 159, Springer Verlag, 2004.
- [81] Gallagher R H, Carey G F, Oden J T, Zienkiewicz O C. *Finite Elements in Fluids-Volume 6*, A Wiley-Interscience,Britain, 1985

- [82] Girault V, Raviart P A. Finite element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture notes in Mathematics 749, Springer-Verlag, 1979.
- [83] Girault V, Raviart P A. Finite element Methods for Navier-Stokes Equation, Theory and Algorithm, Springer-Verlag, 1986.
- [84] Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [85] 李炜, 黏性流体的混合有限分析解法, 科学出版社, 2000。
- [86] 刘儒勋, 舒其望, 计算流体力学的若干新方法, 科学出版社, 2004。
- [87] 王烈衡, 许学军, 有限元方法的数学基础, 科学出版社, 2004。
- [88] 吴望一, 流体力学, 北京大学出版社, 2000。

简 历

基本情况

戴晓霞，女，浙江大学数学系在读博士研究生。

教育状况

2000 年 9 月至 2004 年 6 月，浙江大学数学系，本科，专业：信息与计算科学。

2004 年 9 月至 2009 年 6 月，浙江大学数学系，读研究生，专业：计算数学。

工作经历

无。

研究兴趣

偏微分方程数值解，有限元方法。

联系方式

E-mail: xxiadai@163.com

发表文章目录

- [1] X.X.Dai, Finite element approximation of the pure Neumann problem using the iterative penalty method, *Applied Mathematics and Computation* 186(2007) 1367-1373.
- [2] X.X.Dai and X.L.Cheng, The iterative penalty method for Stokes equations using Q1-P0 element, *Applied Mathematics and Computation* 201(2008)805-810.
- [3] X.X.Dai and X.L.Cheng, A two-grid method based on Newton iteration for the Navier-Stokes equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 220(2008)566-573
- [4] X.X.Dai and X.L.Cheng, Error estimates for an operator-splitting method for Navier-Stokes equations: second-order schemes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, to appear.

求解Navier-Stokes方程的几类数值方法

作者：[戴晓霞](#)
学位授予单位：[浙江大学理学院](#)
被引用次数：2次

引证文献(2条)

1. [李英明, 杨明东, 付永刚](#) [U型工作面上隅角埋管瓦斯抽采数值模拟研究](#)[期刊论文]-[中国安全生产科学技术](#) 2013(12)
2. [王鹏, 马兴华, 韩文忠, 姜镇荣, 赵明优, 马艳丽](#) [黑果腺肋花楸果酒澄清处理及稳定性研究](#)[期刊论文]-[北华大学学报（自然科学版）](#) 2014(01)

引用本文格式：[戴晓霞](#) [求解Navier-Stokes方程的几类数值方法](#)[学位论文]博士 2009