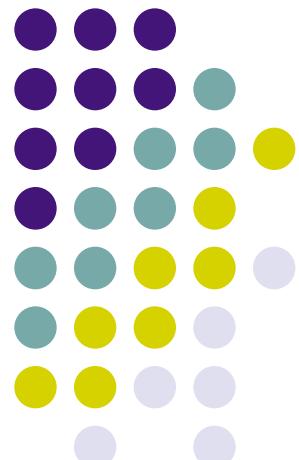


数字图像处理

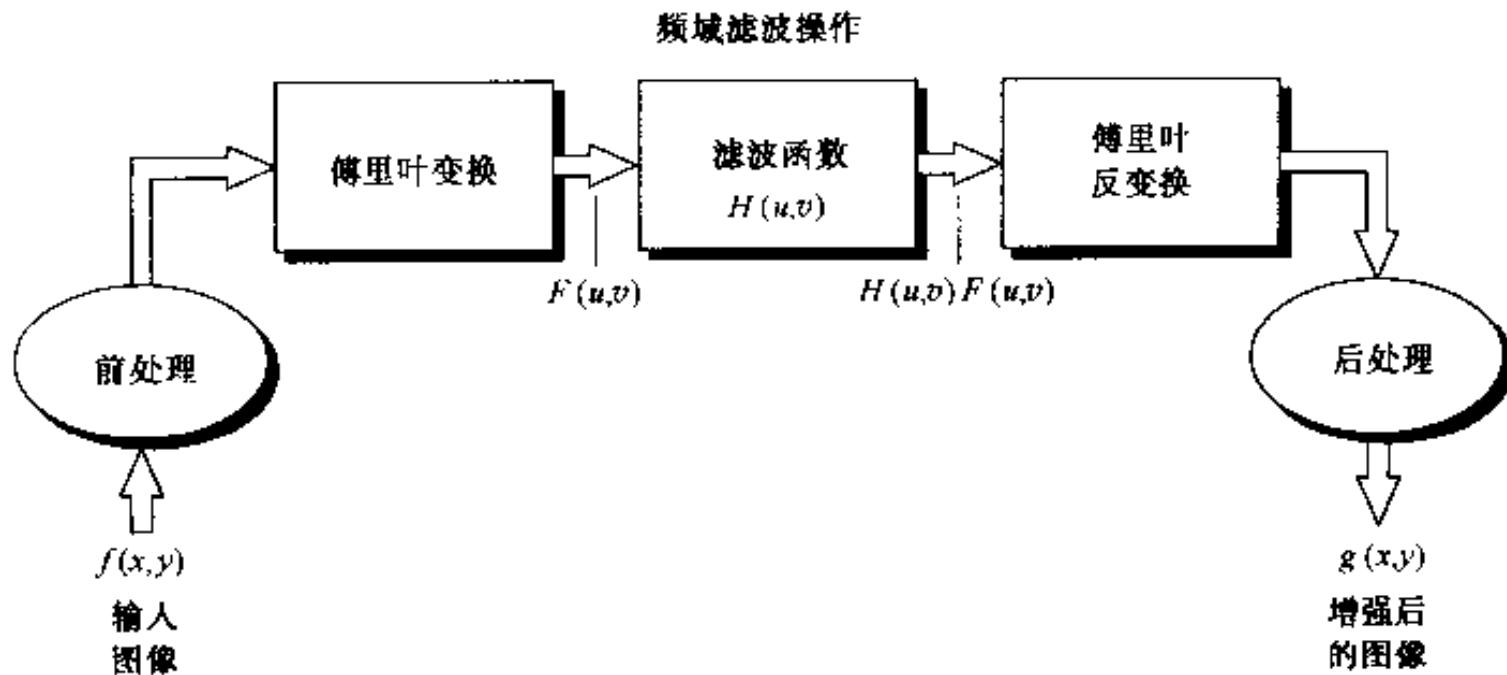
第六讲
频域图像增强 (Part III)
频域滤波器

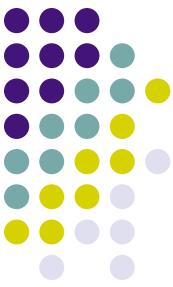




回顾频域滤波基本步骤

● 流程图





主要内容

- 頻域濾波
 - 低通濾波
 - 高通濾波
 - 同態濾波



频域滤波

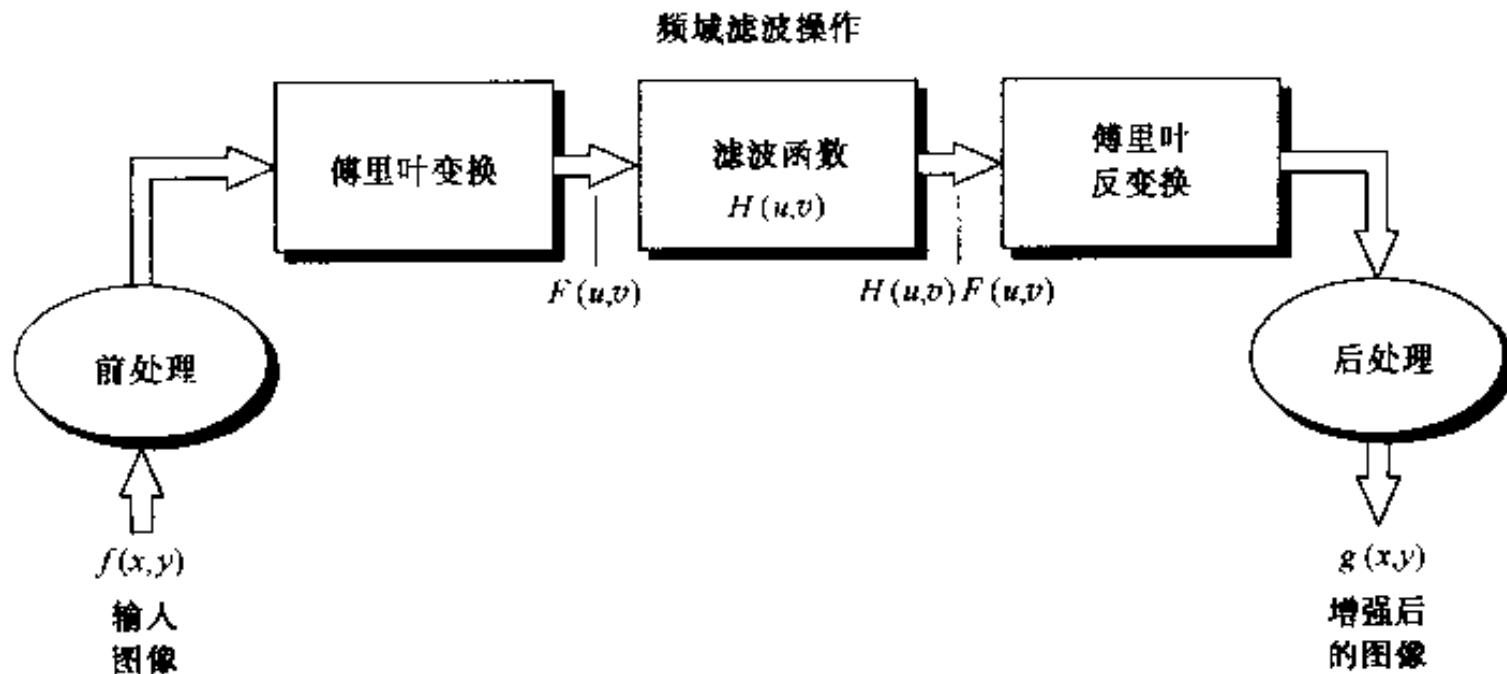
- 频域滤波：信号中特定波段频率滤除的操作
- 低通滤波：使**低频通过**而使高频衰减的滤波器
- 高通滤波：使**高频通过**而使低频衰减的滤波器

脚注：滤波分为经典滤波和现代滤波。本课程主要介绍经典滤波器的思想。对于现代滤波（主要是非线性滤波），理论较复杂，本课程不做介绍。



回顾频域滤波基本步骤

● 流程图





频域滤波与空间域滤波的关系

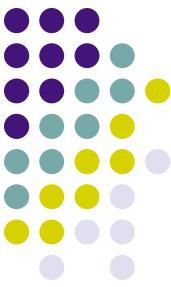
空间域滤波与频域滤波之间的对应关系：

空间域的卷积滤波器对应于一个频域滤波器

原理：卷积定理

在空间域采用卷积滤波器 $h(x,y)$ 对图像进行处理，理论上对应于在频域上，采用滤波器 $H(u,v)$ 对图像进行处理

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$



思考

- 空间域滤波与频域滤波之间的优势分别是什么？



在滤波器模板规模较大时，频域内进行滤波计算更为有效（**为什么？**）；空间域的滤波器更适用于小规模模板

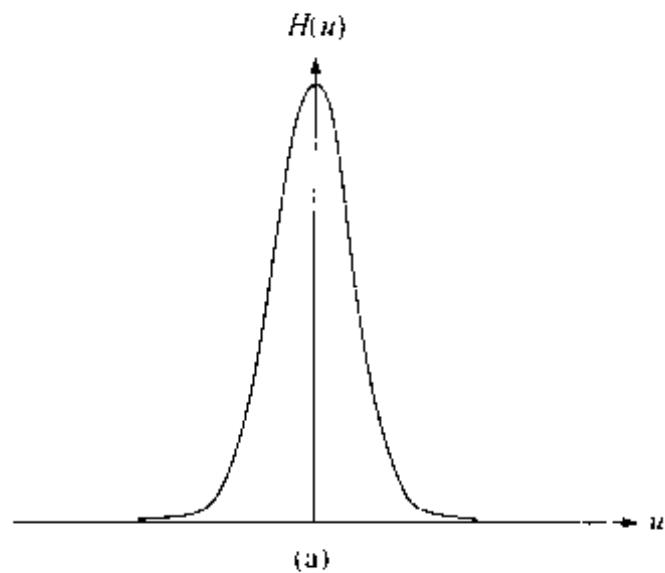
因为频域计算存在高效计算方法。如快速傅里叶变换将计算复杂度从 $O(N^2)$ 下降到了 $O(N \log N)$



频域滤波器与空间域滤波器

- 例如： 频域高斯滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\lambda^2}$$

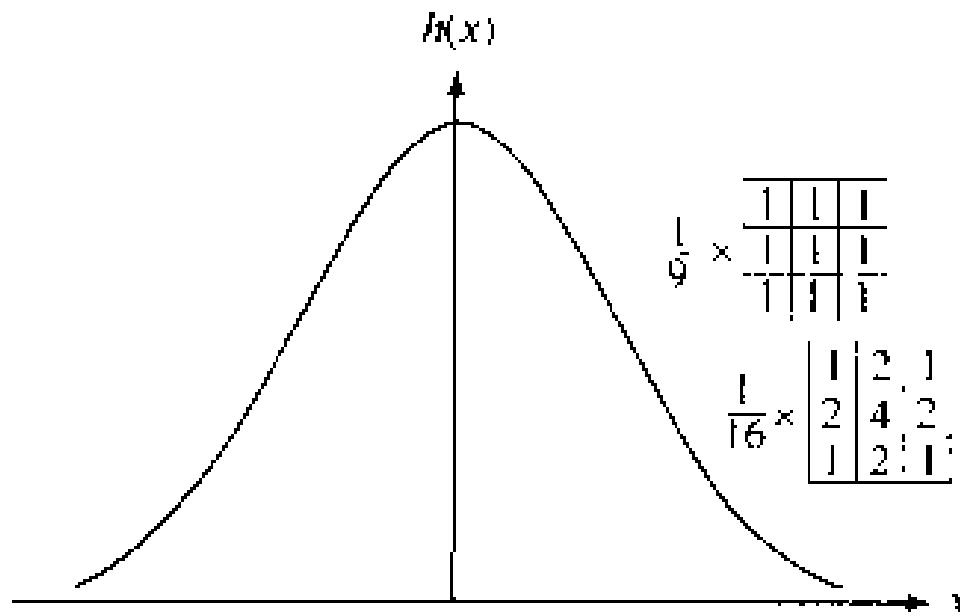


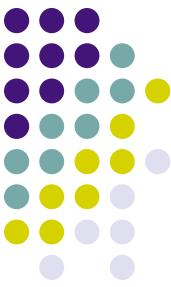


频域滤波器与空间域滤波器

- 所对应的空间域高斯滤波器

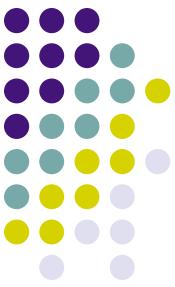
$$H(x) = \sqrt{2\pi} \lambda A e^{-2\pi^2 \lambda^2 x^2}$$





讨论

- $H(u)$ 和 $H(x)$ 构成傅里叶变换对，成分都是实高斯函数；
- $H(u)$ 和 $H(x)$ 有互相之间的作用关系；例如，
 - 当 λ 很大时， $H(u)$ 变宽， $H(x)$ 变窄；
 - 当 λ 趋于无穷时， $H(u)$ 趋于常数函数，而 $H(x)$ 则趋于一个冲激函数。
 - 空间域冲激函数的卷积运算等于原函数

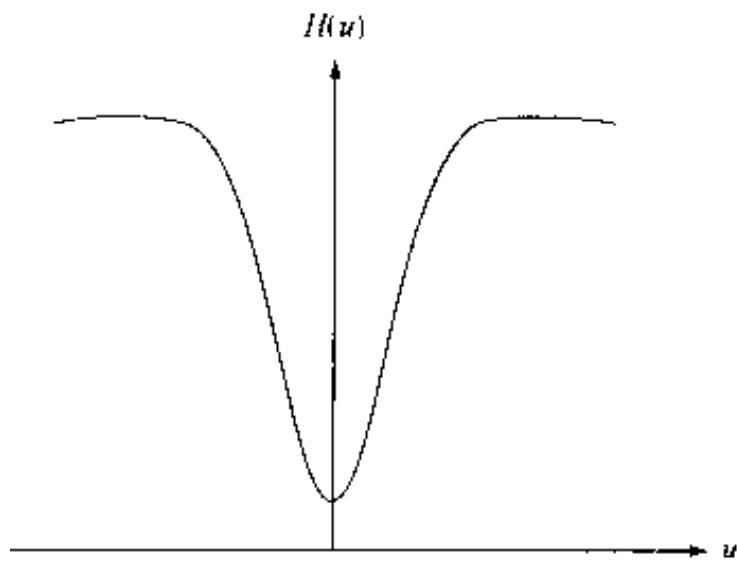


更复杂一点的例子

- 复杂频域滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\lambda_1^2} - Be^{-u^2/2\lambda_2^2}$$

$$A > B, \quad \lambda_1 > \lambda_2$$

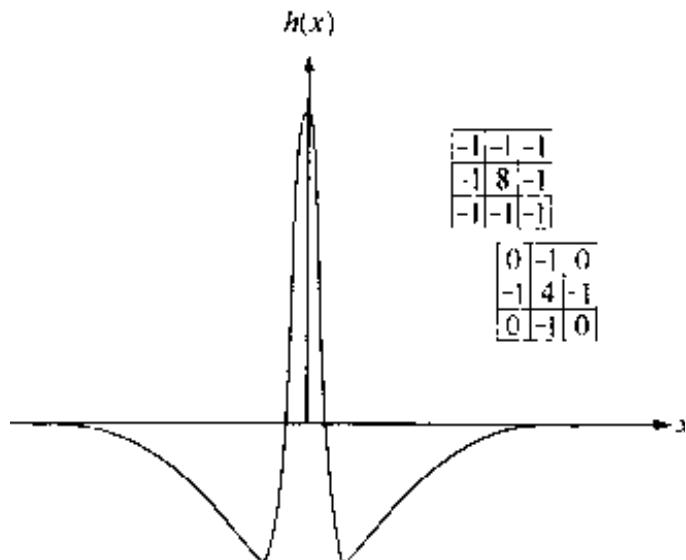




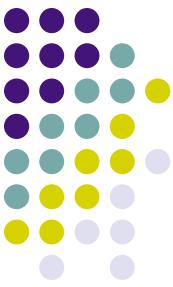
所对应的空间域滤波器

- 对应的空间域滤波器

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\lambda_1 A e^{-2\pi^2 \lambda_1^2 x^2} - \sqrt{2\pi}\lambda_2 B e^{-2\pi^2 \lambda_2^2 x^2}$$

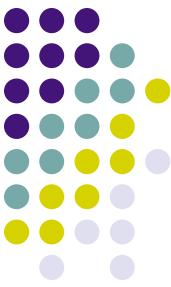


边缘检测滤波器



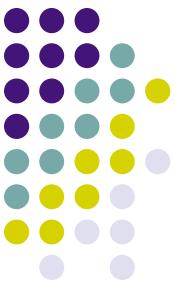
主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
 - 低通滤波
 - 高通滤波
 - 同态滤波



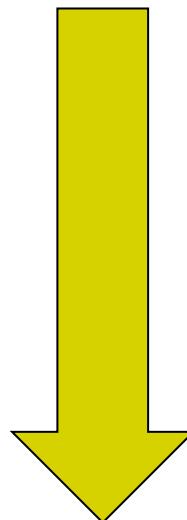
低通滤波器

- 图像的边缘和其他尖锐跳跃（如噪声）在图像的灰度级中主要处于傅里叶变换的高频部分。
- 目标：通过频域上一定范围高频分量进行衰减达到平滑化，来增强图像；
- 这种滤波器被称为低通滤波器。



三类低通滤波器

- 理想低通滤波器
- 巴特沃斯低通滤波器
- 高斯低通滤波器



越来越平滑



理想低通滤波器 (ILPF)

- 思想：截断傅里叶变换中所有高频成分
- 定义：以 D_0 为半径的圆内所有频率分量无损的通过，圆外的所有频率分量完全衰减

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$



理想低通滤波器

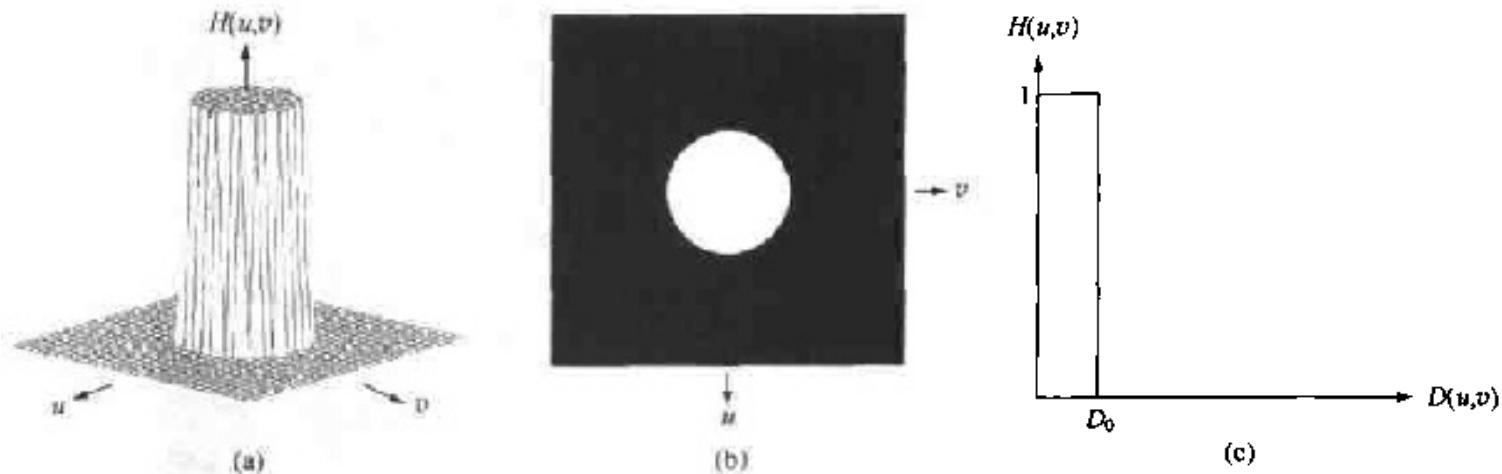
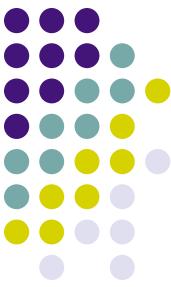


图 4.10 (a) 理想低通滤波器变换函数的透视图,(b)以图像显示的滤波器,(c)滤波器的径向横断面



理想低通滤波器

D₀如何确定？引入信号能量

- 信号能量 E_T ：将 $u, v=0, 1, N-1$ 的每一点 (u, v) 的能量相加起来得到傅立叶信号能量 E_T 。

$$E_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} E(u, v) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} [R^2(u, v) + I^2(u, v)]$$



理想低通滤波器

- 例如：有高斯噪声Lenna图像的傅立叶谱和不同半径下的谱图像的信号能量。



$$E_T = 1.5387 \times 10^{15}$$

$$E_5 = 1.3886 \times 10^{15}$$

$$E_5/E_T = 0.9025$$

$$E_{10} = 1.4191 \times 10^{15}$$

$$E_{10}/E_T = 0.9223$$

$$E_{20} = 1.4346 \times 10^{15}$$

$$E_{20}/E_T = 0.9323$$

$$E_{50} = 1.4483 \times 10^{15}$$

$$E_{50}/E_T = 0.9412$$



理想低通滤波器



有高斯噪声的Lenna图像



$D_0=5$



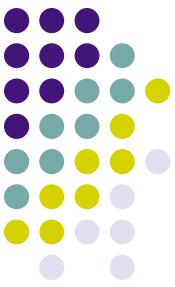
理想低通滤波器



$D_0=10$



$D_0=20$



理想低通滤波器



$D_o=50$



有高斯噪声的原Lenna图像



理想低通滤波器

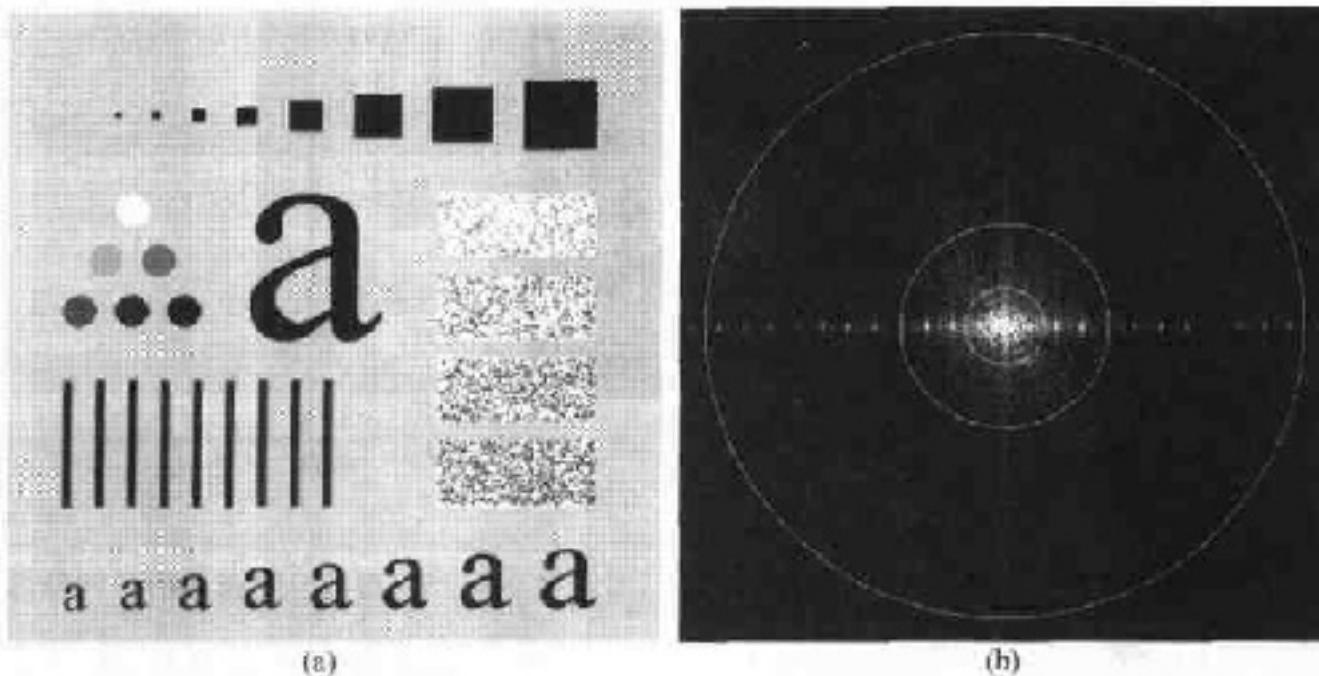
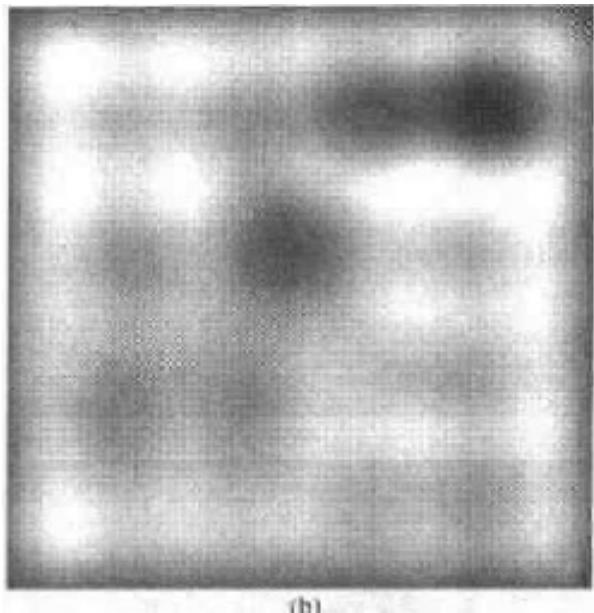


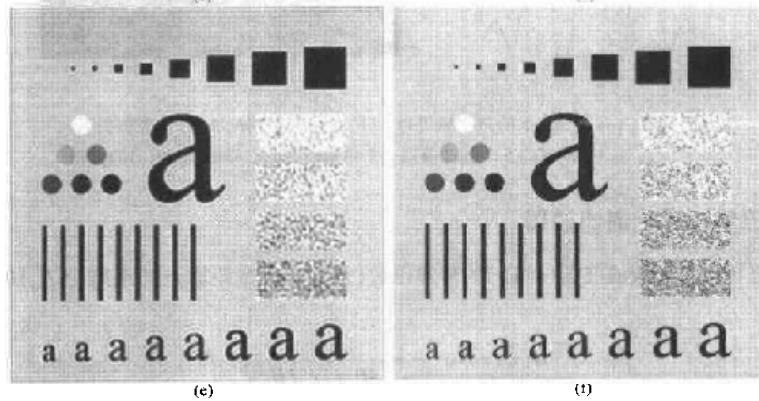
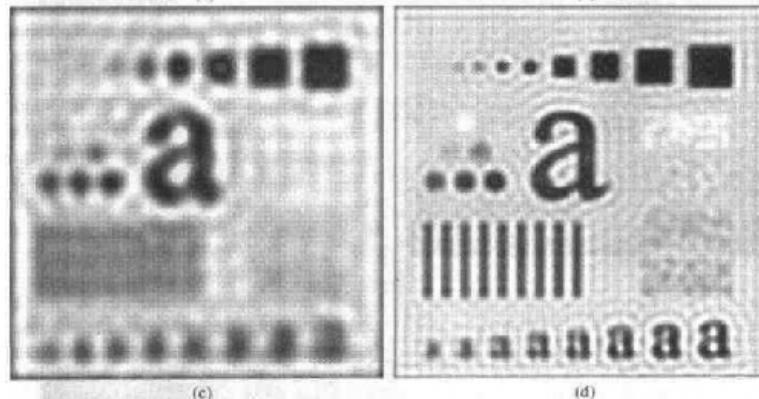
图 4.11 (a)尺寸为 500×500 像素的图像,(b)图像的傅里叶谱。叠加的圆环具有 5, 15, 30, 80 和 230 像素的半径, 它们分别包含了 92.0%, 94.6%, 96.4%, 98.0% 和 99.5% 的图像功率

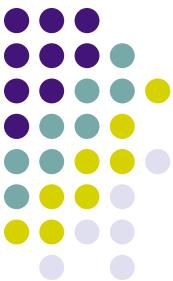


理想低通滤波器



半径小时，图像模糊



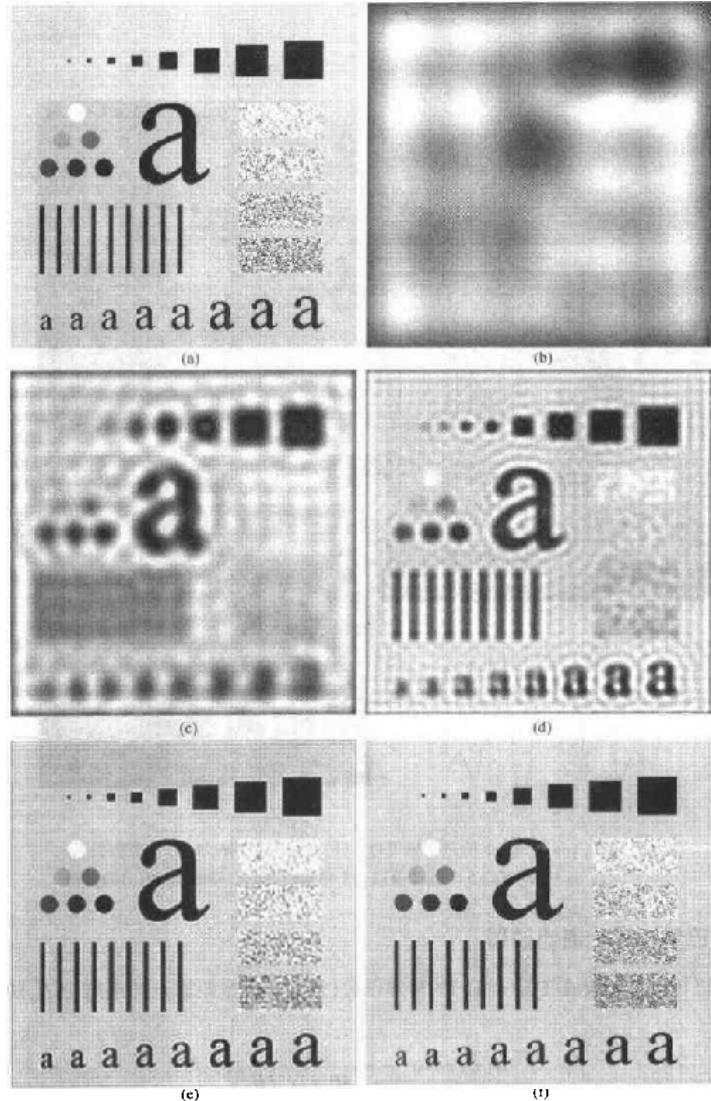


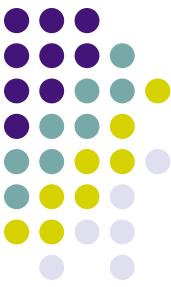
理想低通滤波器



有似水纹般的现象

振铃现象

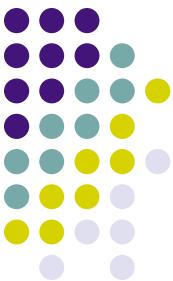




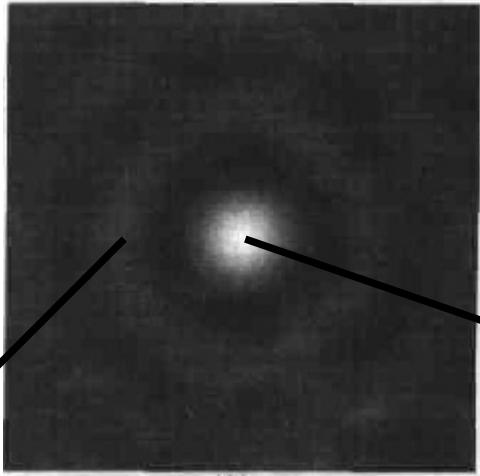
理想低通滤波器

- 理想低通滤波器的问题：
- (1) 模糊
 - 对于带高斯噪声的lenna图像，虽然半径为5时包含了90%的能量。但严重的模糊表明了图片的大部分边缘信息包含在滤波器滤去的10%能量之中。随着滤波器半径增加，模糊的程度相对减少。
- (2) 振铃

如何理解这些现象？从空域的卷积函数理解



理想低通滤波器的空间滤波图像



环形成分：决定了振铃现象；多个环相互干扰，导致振铃现象

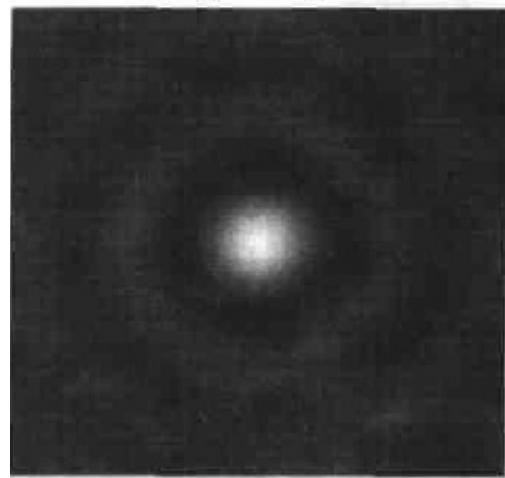
中心成分：决定了模糊；频域的滤波越窄，空域滤波越宽，因此模糊。反之则越清楚。



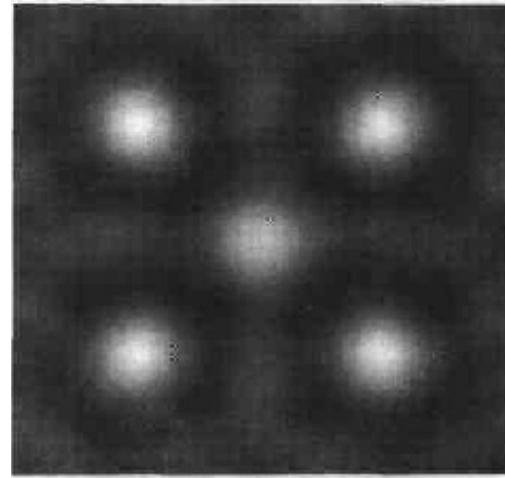
更明显的例子



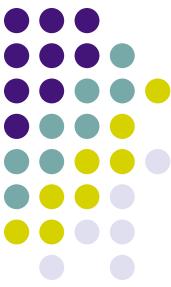
输入5个像素值
(模拟5个脉冲
信号)



空域滤波图像

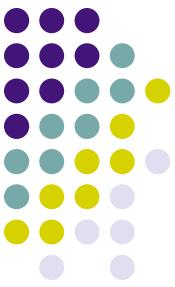


滤波后的图像结果；
注意模糊了，还有
明显振铃现象



理想低通滤波器点评

- 理想低通滤波器非常不实用
- 但对理想低通滤波器不足的认识，对研究有效滤波器的特性非常有用
- 也就是要尽量减少振铃或者没有振铃，以及减少模糊



巴特沃思低通滤波器BLPF

- 思想：平滑理想低通滤波器

n 阶巴特沃思 (Butterworth) 滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0} \right)^{2n}}$$

$n = 1$, 1阶巴特沃思滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{(u^2 + v^2)}{D_0^2}}$$



巴特沃思低通滤波器

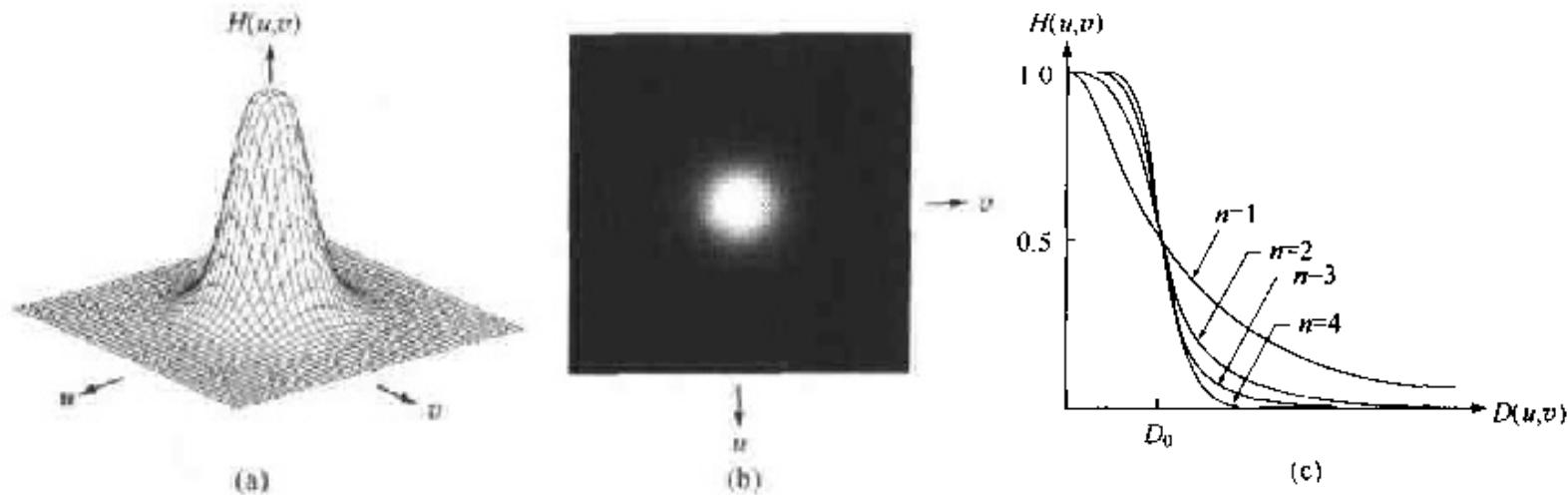


图 4.14 (a)巴特沃思低通滤波器函数的透视图,(b)以图像显示的滤波器,(c)阶数从 1 到 4 的滤波器横截面



巴特沃思低通滤波器



$D_0=10$



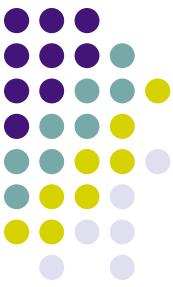
巴特沃思低通滤波器



D₀=20



D₀=50



巴特沃思低通滤波器

不同于ILPF，BLPF在通过的频率与被滤掉的频率之间没有明显的截断；当阶数为1时，没有振铃；



阶数为1时的空域滤波图像



巴特沃思低通滤波器

当阶数增高时，振铃成为一个重要因素。当阶数趋于无穷大时， $BLPF=ILPF$ 。

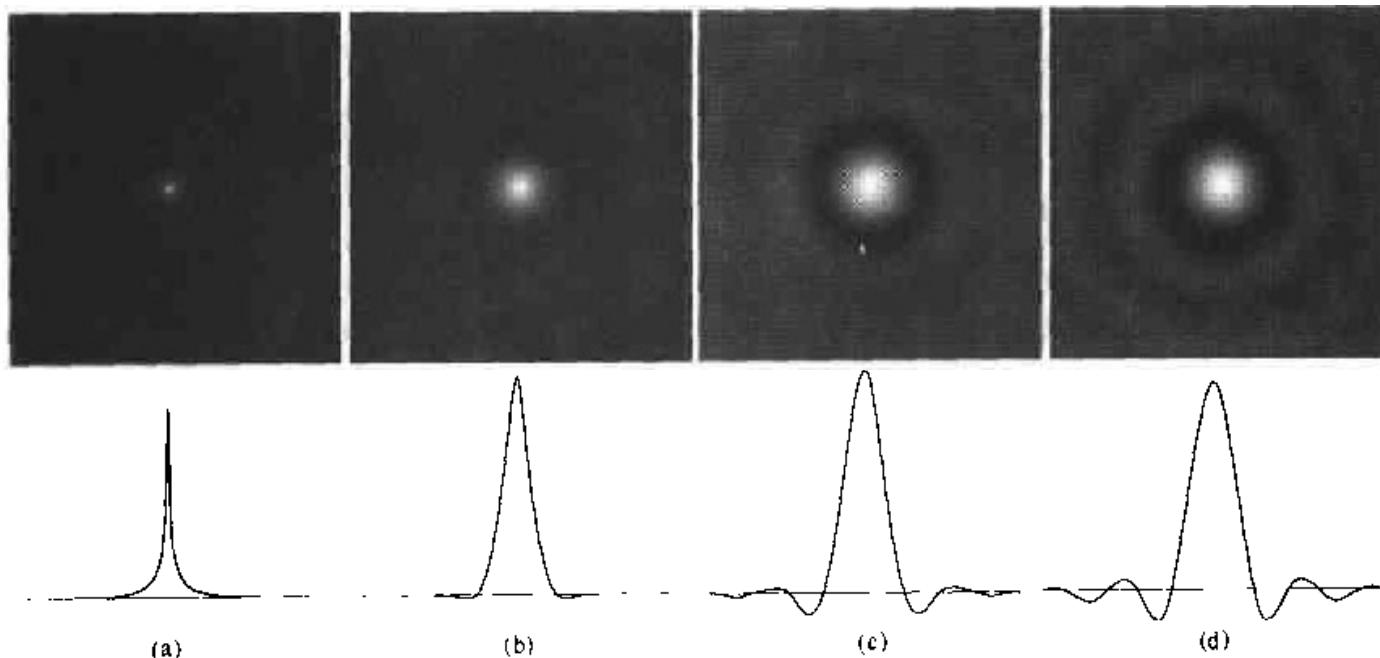
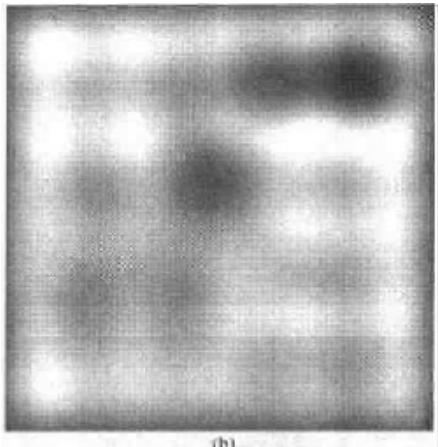


图 4.16 (a) ~ (d) 阶数为 1, 2, 5 和 20 的 BLPF 的空间表示及相应的通过滤波器中心的灰度级剖面图(所有的滤波器都有半径为 5 的截止频率)。注意振铃作为滤波器阶数的函数越发明显

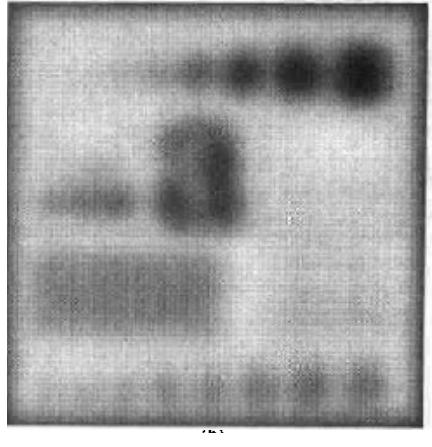


效果对比

- 二阶巴特沃思低通滤波器 (BLPF)



ILPF



BLPF

模糊明显减少

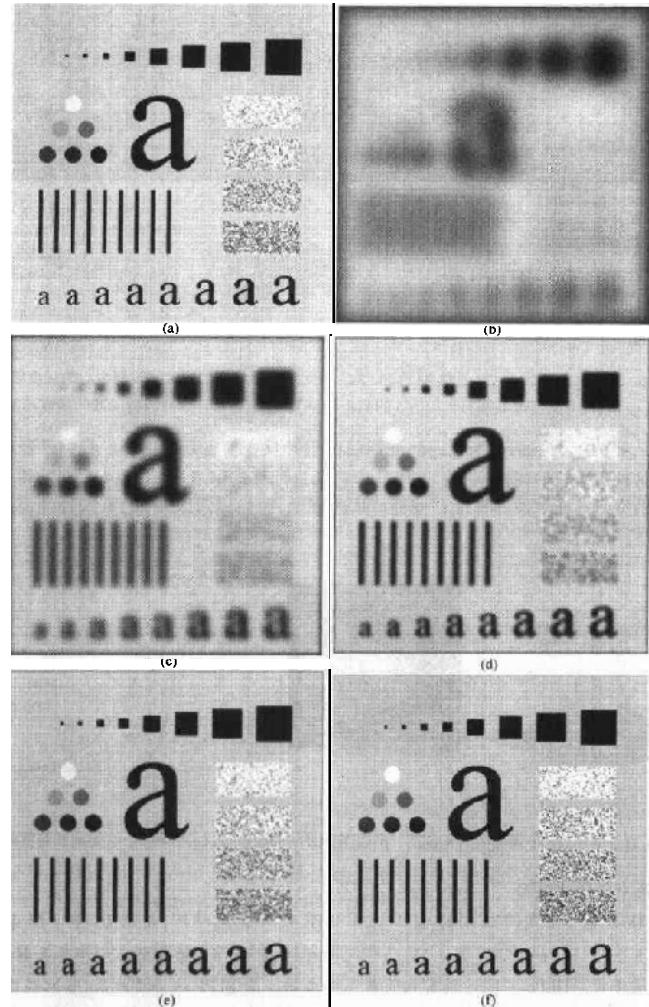
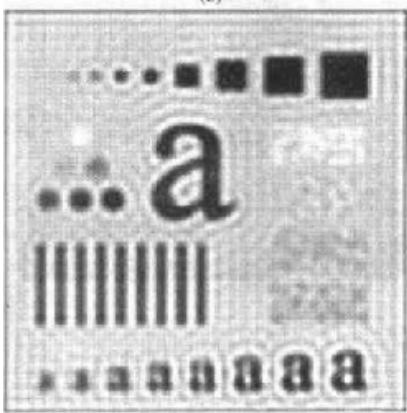


图 4.18 (a)原图像,(b)~(f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率如图 4.11(b)所示,一组半径值为 5, 15, 30, 80 和 230。可比较图 4.12 和图 4.15

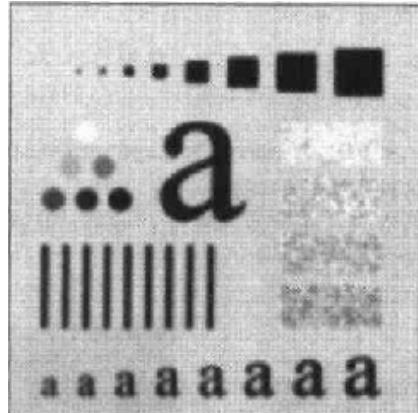


效果对比

- 二阶巴特沃思低通滤波器 (BLPF)



ILPF



BLPF

振铃显著减少

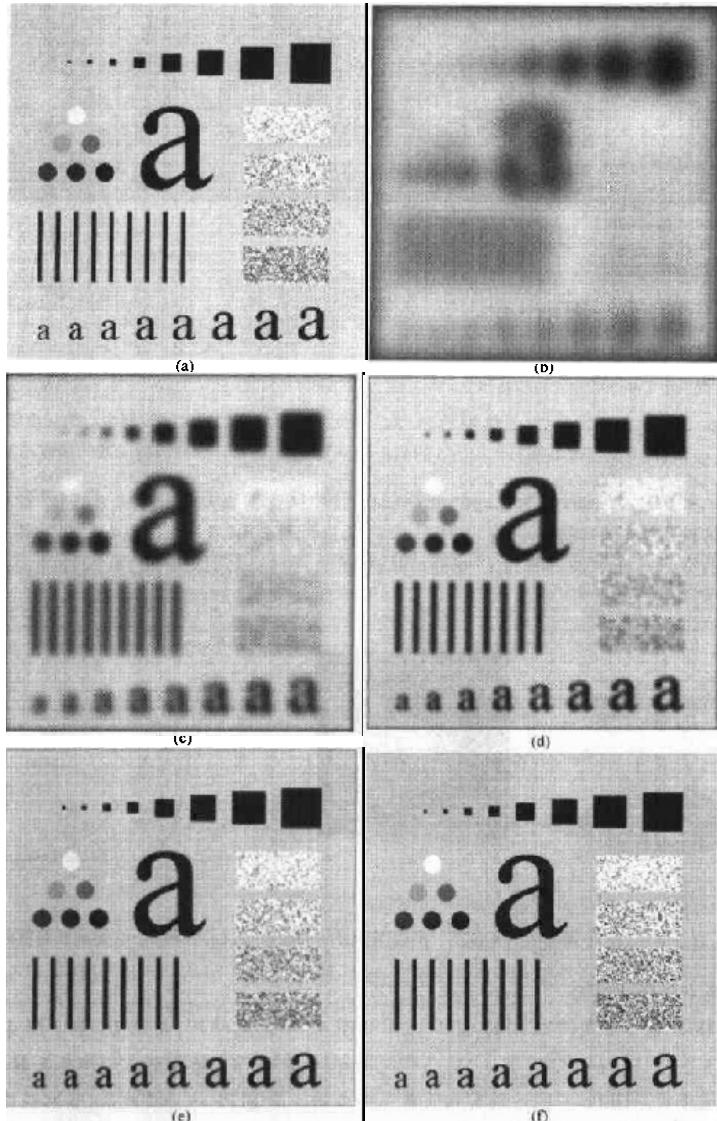
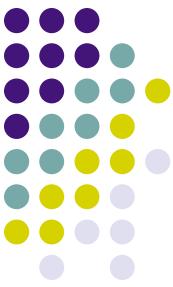
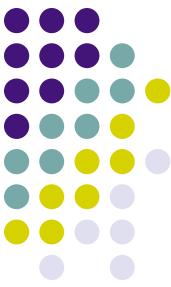


图 4.18 (a)原图像,(b)~(f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率如图 4.11(b)所示,一组半径值为 5, 15, 30, 80 和 230。可比较图 4.12 和图 4.15



巴特沃思低通滤波器的点评

- 是有效的低通滤波和可接受的振铃特性之间的折中
- 相较于理想低通滤波器
 - 模糊大大减少
 - 振铃现象显著缓解



高斯低通滤波器GLPF

- 思想：彻底没有振铃现象

指数低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0}\right]^{2n}}$$

$n = 1$ 的指数低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{u^2 + v^2}{{D_0}^2}\right]}$$



高斯低通滤波器GLPF

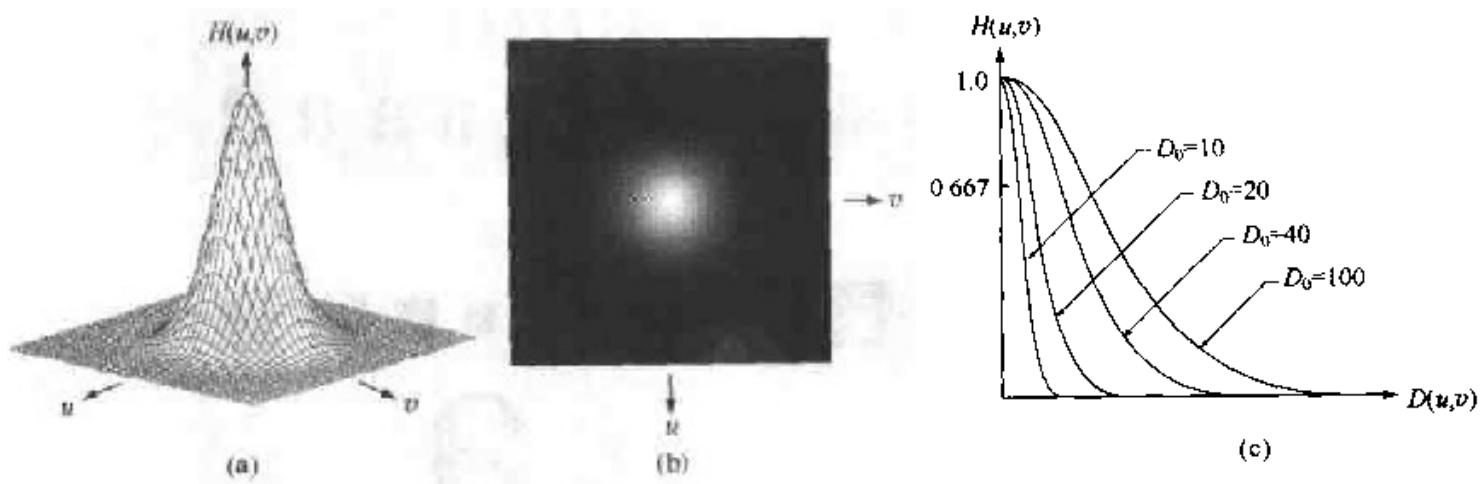


图 4.17 (a) GLPF 传递函数的透視圖,(b)以圖像顯示的濾波器,(c)各種 D_0 值的濾波器橫截面



高斯低通濾波器GLPF



$D_0=10$



高斯低通濾波器



$D_0=20$



$D_0=50$



高斯低通滤波器

- 彻底没有振铃现象

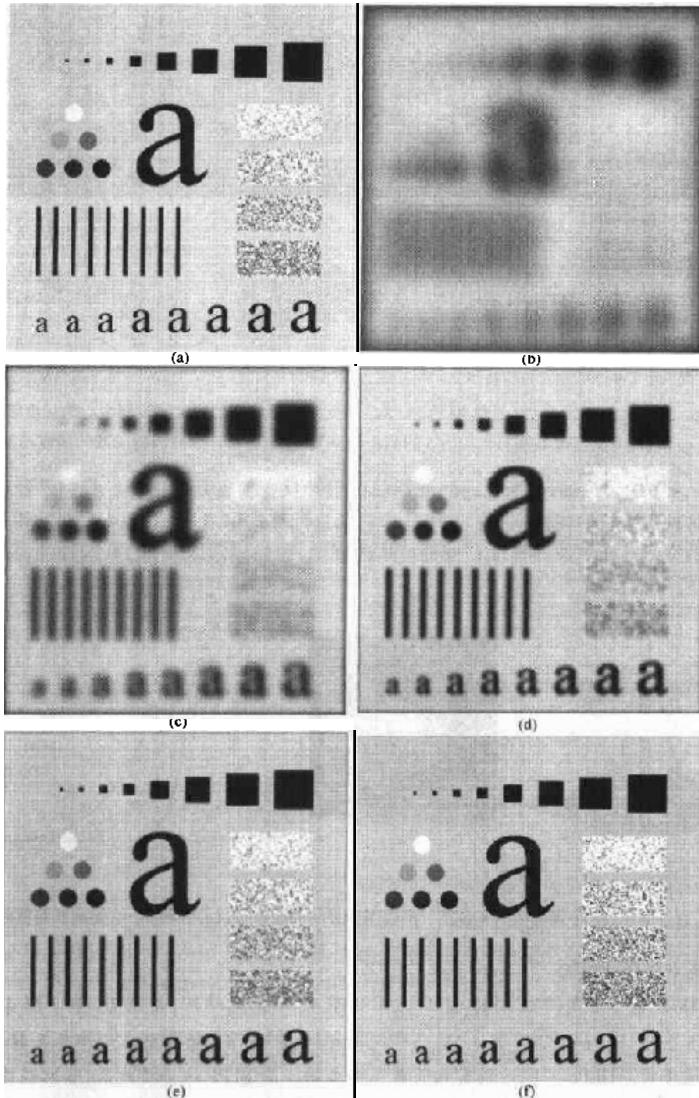


图 4.18 (a)原图像,(b)~(f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率如图 4.11(b)所示,一组半径值为 5, 15, 30, 80 和 230。可比较图 4.12 和图 4.15



低通滤波器的应用

● 低分辨率字符识别

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

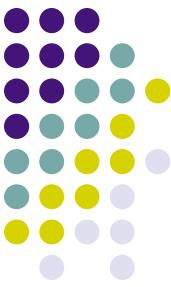


(a)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



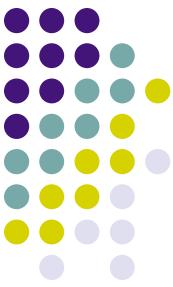
(b)



低通滤波器的应用

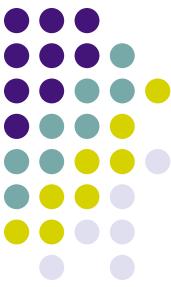
- 印刷和出版业的预处理功能
- “美容”处理——减少人脸皮肤细纹





主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
 - 低通滤波
 - 高通滤波
 - 同态滤波



高通滤波器

● 原理

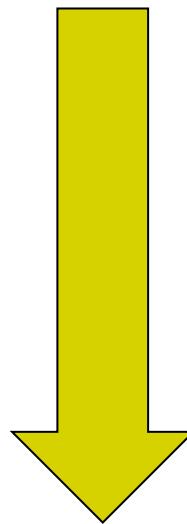
- 图像锐化处理的目的是使模糊图像变得清晰。
- 通常图像模糊是由于图像受到平均或积分运算，因此图像锐化采用微分运算。
- 在频域处理上，即采用高通滤波器法。

注意：高通滤波器所处理的图像需要有较高的信噪比，否则图像锐化后，图像信噪比会更低

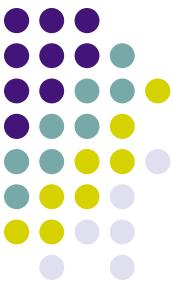


高通濾波器

- 理想高通濾波器
- 巴特沃思高通濾波器
- 高斯高通濾波器
- 高斯差分濾波器



越来越平滑

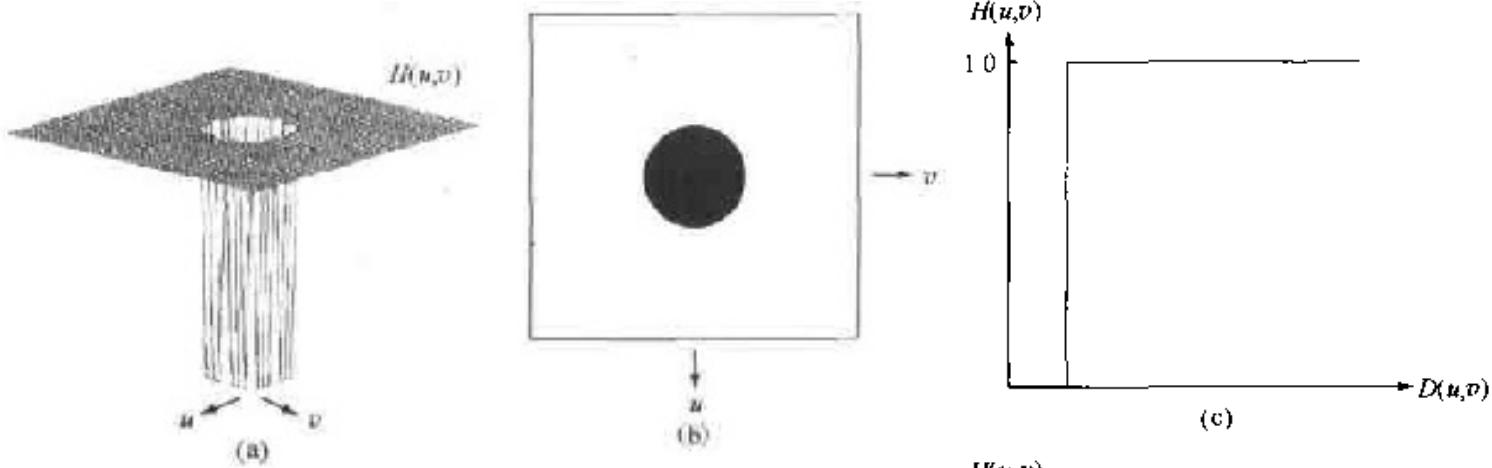


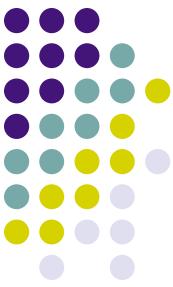
理想高通滤波器

- 思想：截断傅里叶变换中所有低频成分

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

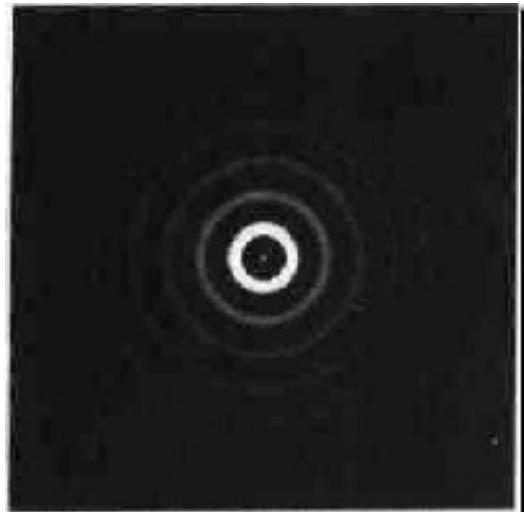
$$\text{其中 } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$



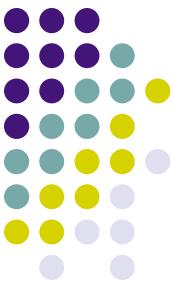


理想高通滤波器

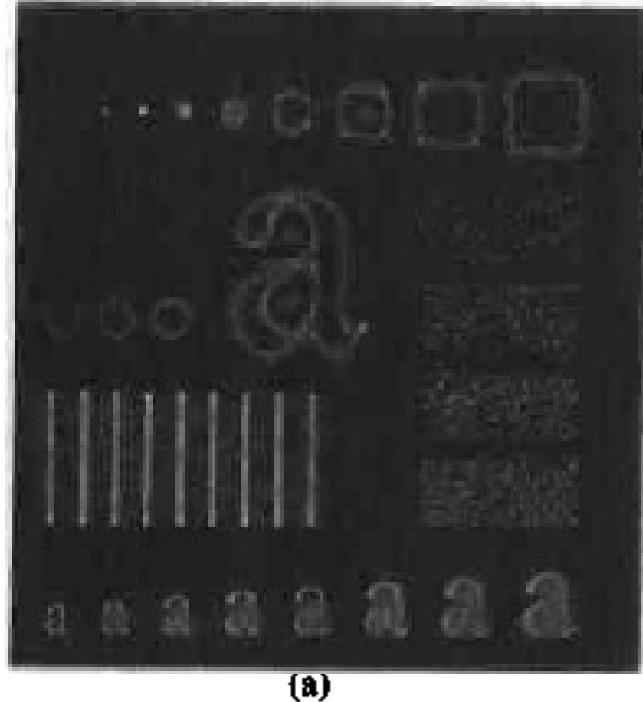
IHPF的空域滤波图像



可见，与ILPF类似的，IHPF的振铃现象严重

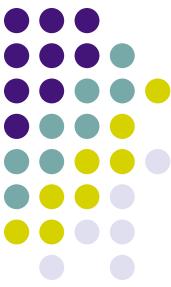


理想高通滤波器



(a)

IHPF在D0=15时的结果。不难发现，
IHPF的振铃现象严重



巴特沃思高通滤波器BHPF

- 思想：平滑理想高通滤波器

n 阶巴特沃思 (Butterworth) 高通滤波器

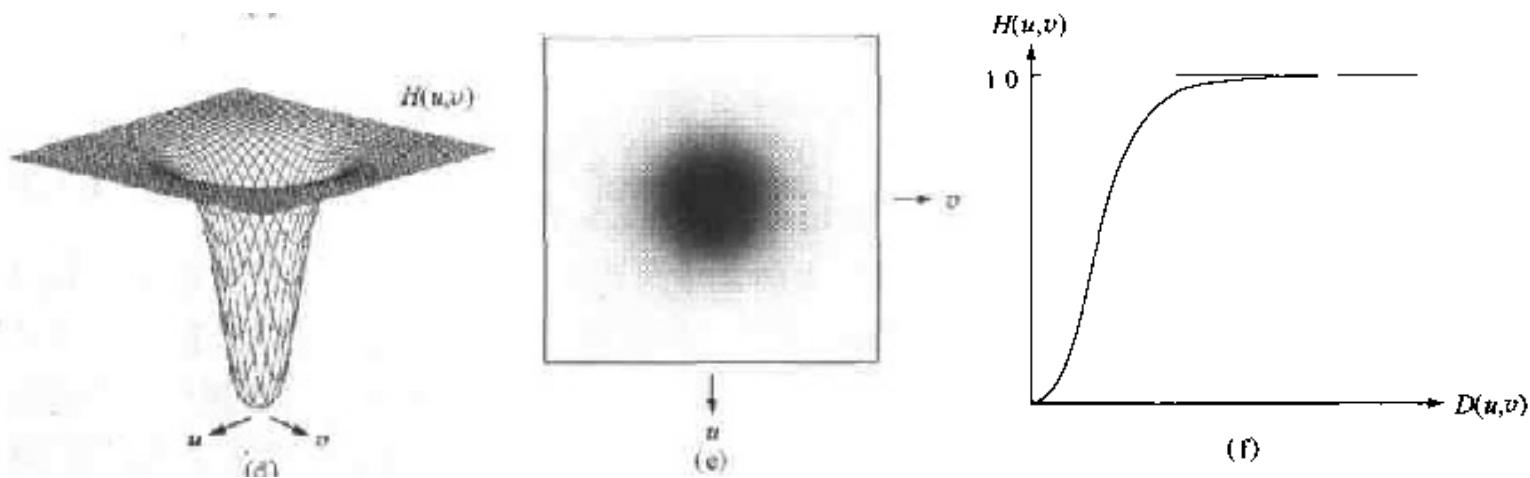
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^{2n}}$$

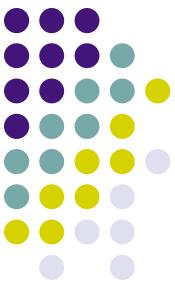
$n = 1$, 1阶巴特沃思高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{D_0^2}{(u^2 + v^2)}}$$



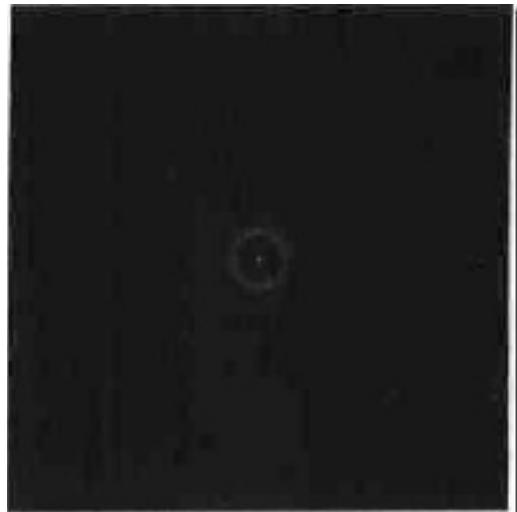
巴特沃思高通滤波器





巴特沃思高通滤波器

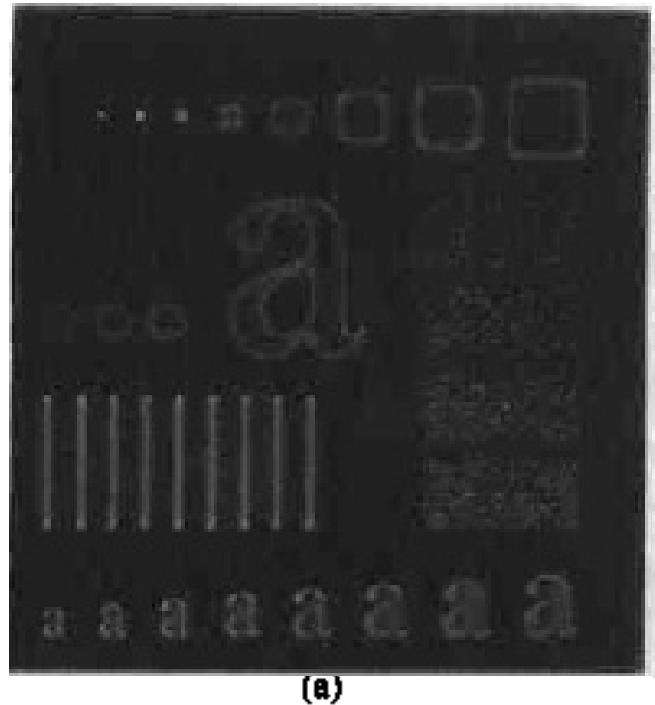
BHPF的空域滤波图像



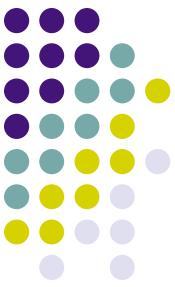
可见，与BLPF类似的，BHPF显著减少了IHPF的振铃现象



巴特沃思高通滤波器



BHPF在D0=15时的结果。BHPF显著减少了IHPF的振铃现象



高斯高通滤波器GHPF

- 思想：彻底消除振铃现象

指数高通滤波器

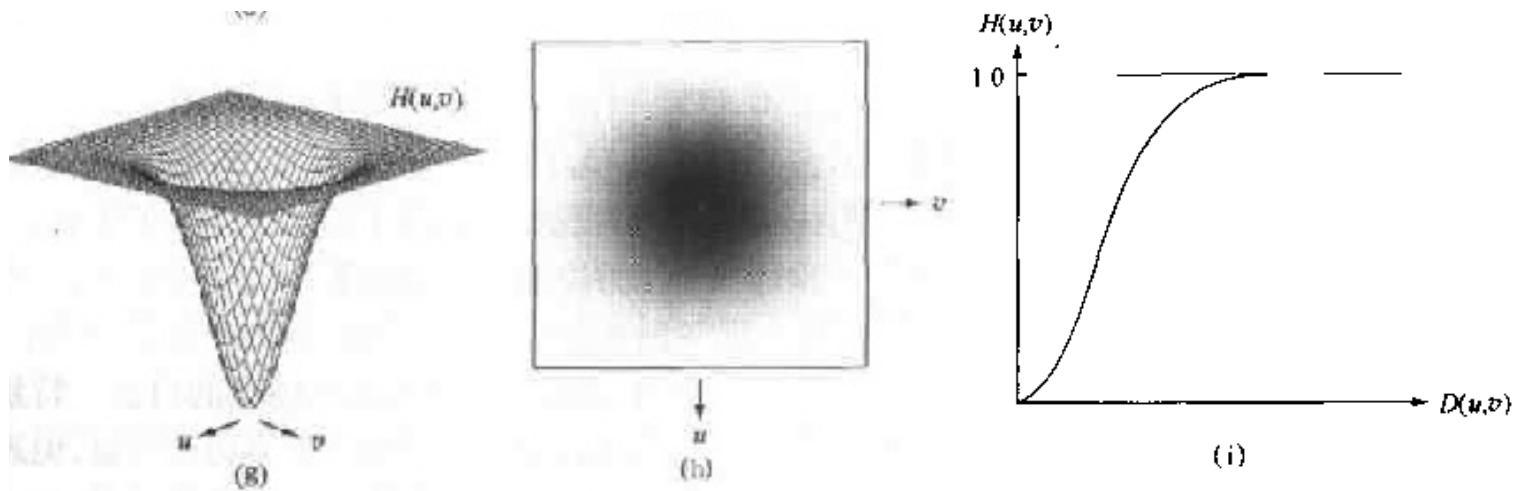
$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right]^2}$$

$n = 2$ 的指数高通滤波器

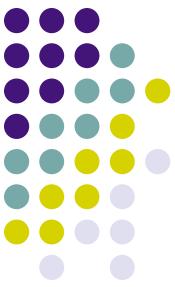
$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0^2}{u^2 + v^2}\right]}$$



高斯高通滤波器



与GLPF性质类似的，GHPF比BHPF要稍微模糊，但彻底没有振铃现象。



高斯高通濾波器



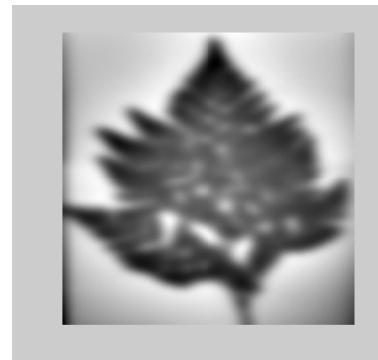
原图



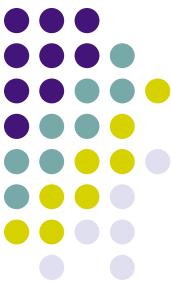
IHPF



BHPF



GHPF



高斯差分滤波器

(DoG, Difference of Gaussian)

- 思想：高斯滤波器的推广版。引入更多参数，用于解决更具体的实际问题

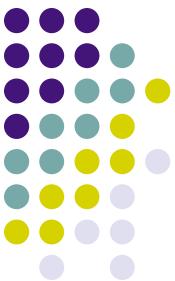
高斯差分滤波器的传递函数定义为：

两个不同宽度高斯函数之差。

$$G(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad A \geq B, \sigma_1 \geq \sigma_2$$

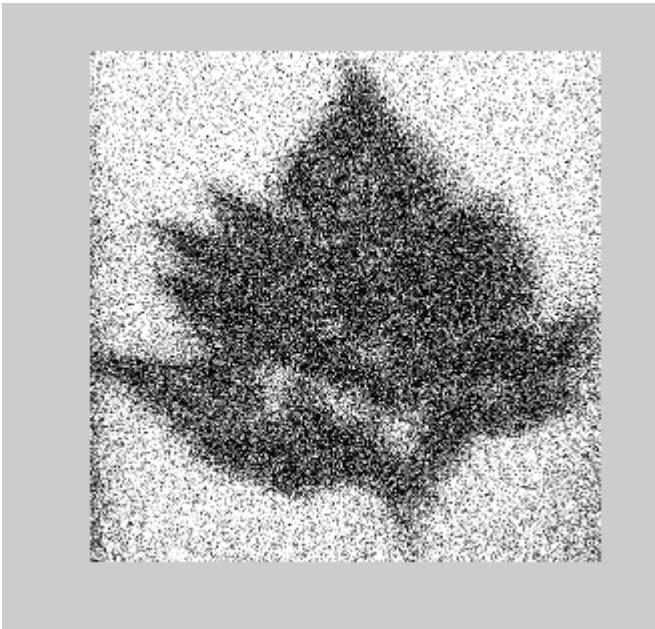
$$g(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-t^2/2\sigma_1^2} - \frac{B}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

- 高斯滤波器是DoG的一个特例

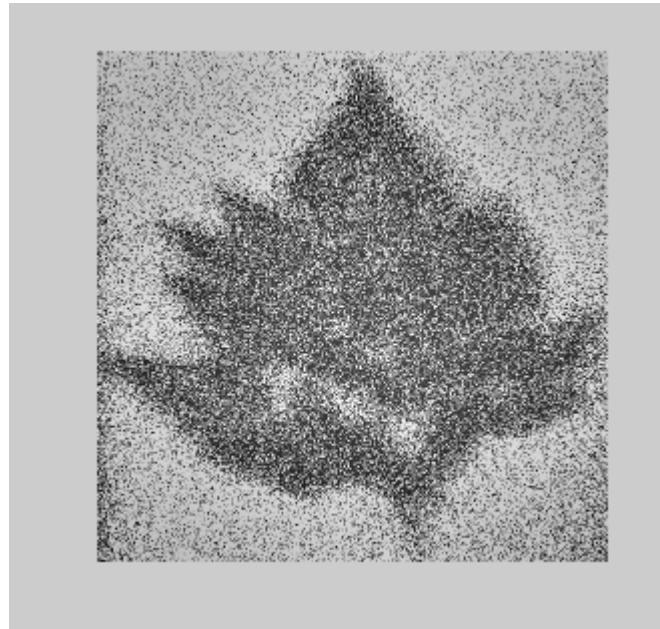


高通濾波器在有噪声图像的表现

高通濾波器在信噪比低的图像上效果不是很好



有噪声的图像

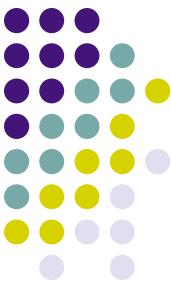


采用BHPF高通濾波后，
信噪比变小。



频域滤波小结

- 频域滤波基础
 - 熟悉频域滤波的基本步骤
 - 了解频域滤波与空间域滤波的关系
- 低通滤波
 - 基本思想
 - 理解理想低通滤波及其存在的模糊和振铃现象
 - 两种常用解决方案：巴特沃斯低通滤波以及高斯低通滤波
 - 巴特沃斯是理想与高斯滤波的折中
 - 高斯彻底解决振铃现象，但会比巴特沃斯模糊



频域滤波小结

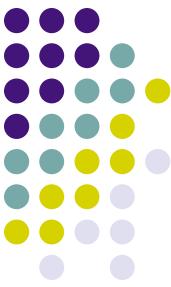
- 高通滤波

- 基本思想
- 理解理想高通滤波及其存在的模糊和振铃现象
- 两种常用解决方案：巴特沃斯高通滤波以及高斯高通滤波
- 巴特沃斯是理想与高斯滤波的折中
- 高斯彻底解决振铃现象，但会比巴特沃斯模糊
- 高斯高通的扩展版：高斯差分高通滤波



主要内容

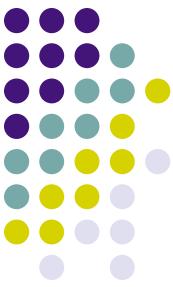
- 空间域滤波基础
- 频域滤波
 - 低通滤波
 - 高通滤波
 - 同态滤波



同态滤波

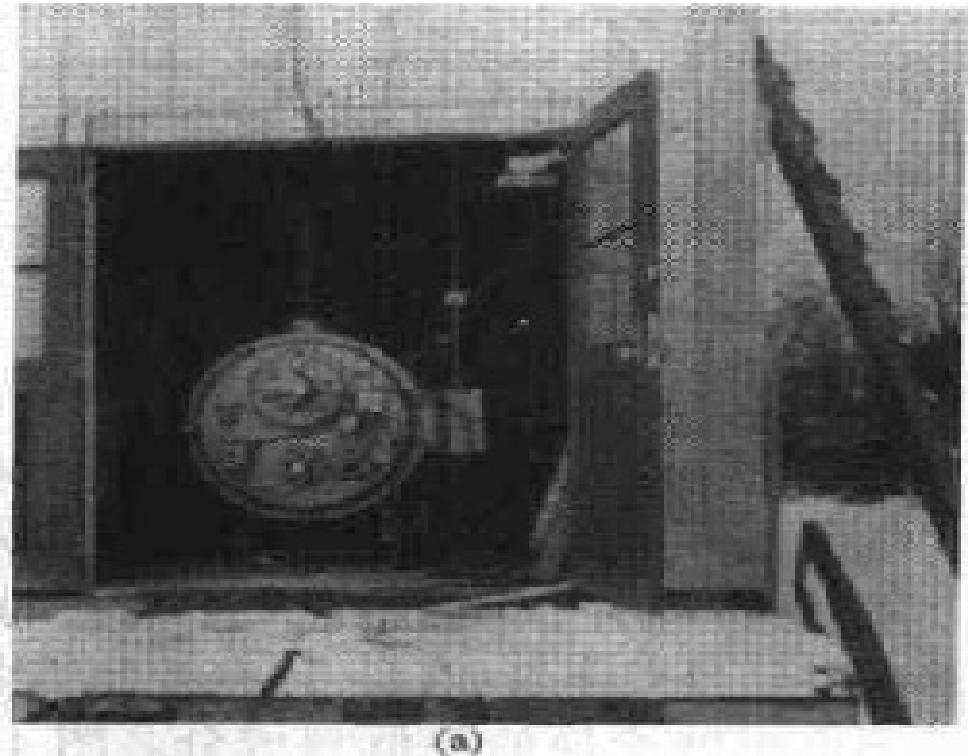
- 正常图象是在均匀光强度情况下获得的图象，实际上光照射是不均匀，或光强范围动态太大。
- 可用同态滤波用于解决光照不均匀的影响。
- 原理：光照下景物图象的模型
 - $f(x,y) = f_i(x,y)f_r(x,y)$
 - $f_i(x,y)$:随空间位置不同的光强分量
 - $f_r(x,y)$:景物反射到眼睛的图象
 - $f(x,y)$:最终获得的图象

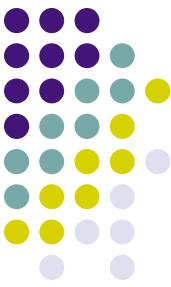
难点：关照影响不再是加法模型，而是乘法模型。如何设计合适的滤波器？



同态滤波

考虑右边图像，门
内的细节被墙外的
光所遮蔽



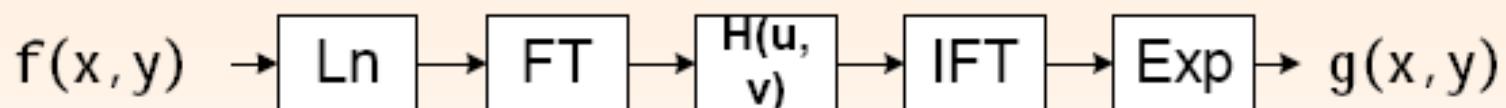


同态滤波

- 基本想法：通过对数变换将光照的影响转换为传统噪声模型进行处理

$$\ln f(x, y) = \ln f_i(x, y) + \ln f_r(x, y)$$

$$FFT[\ln f(x, y)] = FFT[\ln f_i(x, y)] + FFT[\ln f_r(x, y)]$$





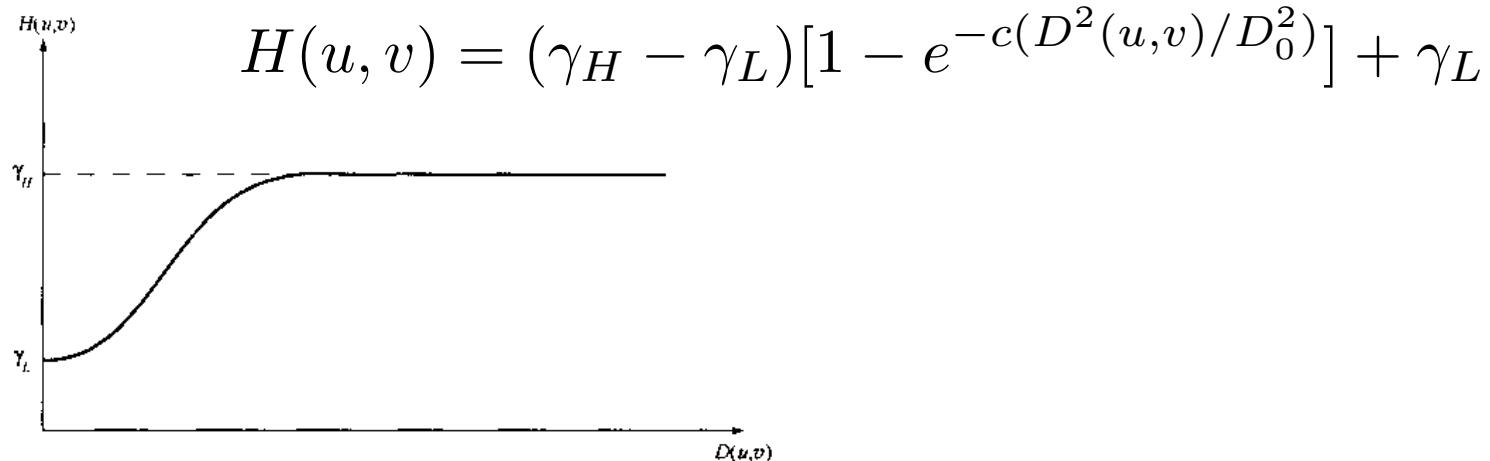
同态滤波

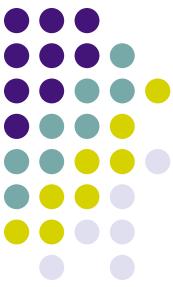
- 分析

- $f_i(x,y)$: 缓慢变化, 频率集中在低频部分
- $f_r(x,y)$: 包含景物各种信息, 高频分量丰富

- 处理

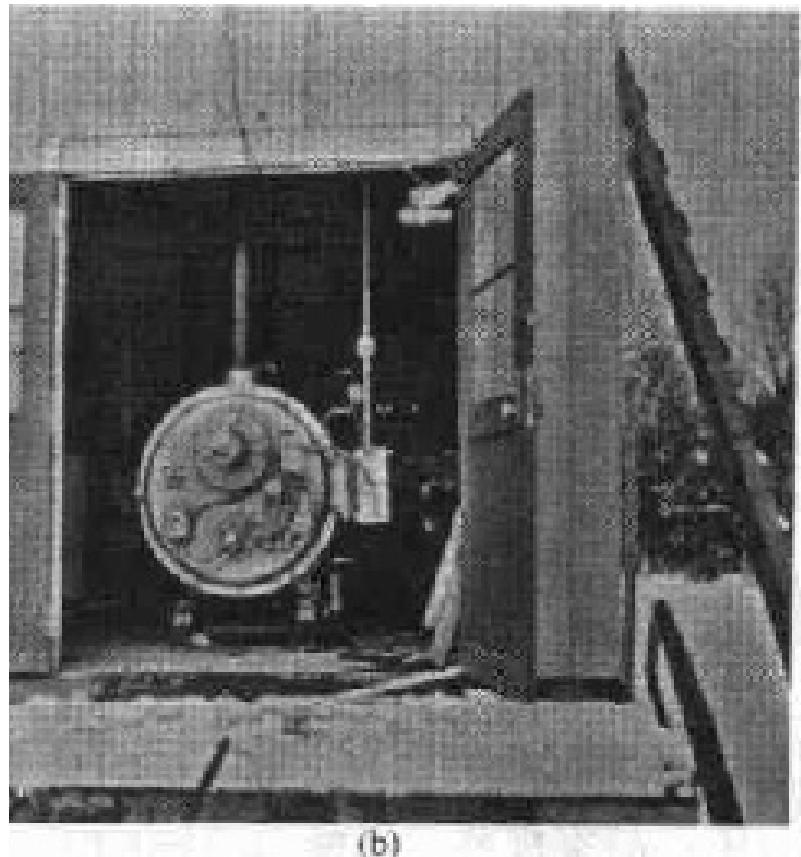
- 选择一滤波函数 $H(u,v)$: 增强高频的贡献; 减少低频的贡献;





同态滤波

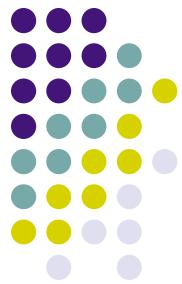
经过同态滤波处理后的图像，注意门内的细节



要点总结



- 濾波：过滤频段（从频域看）；相关或卷积等领域运算（从空间域看）
- 空间域滤波：熟悉相关和卷积运算、模板；
- 频域滤波：
 - 熟悉傅里叶变换的原理；
 - 熟悉基本的滤波：低通、高通滤波
 - 熟悉低通滤波常用的三种模型及其原理，步骤和应用；
 - 熟悉高通滤波常用的三种模型及其原理，步骤和应用；
 - 熟悉同态滤波



下一讲

