泛函分析手写讲义整理

姚增善

Contents

§1 距离空间

§1.1 距离空间基本概念

一、距离空间定义

1. Def. 设 X 是一个非空点集，若 $\forall x, y \in X$，都按照某法则对应一个非负实数 $d(x, y)$，满足下列公理化条件：

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall z \in X$

则定义了距离 d 的集合称为距离空间 (X, d)，简记 X。

2. Cauchy - Schwarz 不等式 (离散型)

设 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n), \vec{b} = (b_1, \cdots, b_n)$，则有：

(1) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$

(2) $\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}$

(3) $(\sum (a_i + b_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}$

证.
(3) 左边 $= \sum a_i^2 + 2 \sum a_i b_i + \sum b_i^2 \leq \sum a_i^2 + 2(\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}} + \sum b_i^2 = [(\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}]^2$.

二、距离空间举例

1. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是距离空间

设 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n), z = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 规定 $d(x, y) = \sqrt{\sum (\xi_i - \eta_i)^2}$，下面验证三角不等式成立：将 $a_i = \xi_i - \zeta_i, b_i = \zeta_i - \eta_i$ 代入上述不等式有 $(\sum (\xi_i - \eta_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum (\xi_i - \zeta_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum (\zeta_i - \eta_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ 即 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. 特别地，实数空间 $\mathbb{R}$ 中的距离 $d(x, y) = |x - y|$.

2. $C[a, b]$ 为距离空间

$C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有连续实函数的全体集合。且距离定义：$\forall x(t),y(t) \in C[a,b], d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$. 下证三角不等式成立：$\forall x,y,z \in C[a,b]$, 由于 $|x(t)-y(t)| \le |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$ $\max|x(t)-y(t)| \le \max|x(t)-z(t)|+\max|z(t)-y(t)|$ 即 $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$.

Rem. 同一个集合可以规定不同的距离。例如全体实数 $\mathbb{R}$ 上可定义：

$\forall x,y \in \mathbb{R}, d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. 下证三角不等式成立：首先 $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ 在 $t > -1$ 上单调增 ($\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$) $d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \le \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} = \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \le \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$ 即 $d_1(x,y) \le d_1(x,z)+d_1(z,y)$.

类似地，$C[a,b]$ 也可定义其他距离：$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt$，这里 $d_1(x,y)$ 显然满足距离定义。

3. 所有实数列所成空间 S

$\forall x = \{\xi_n\}, y = \{\eta_n\}$，规定距离 $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ 这里 $d(x,y)$ 显然满足距离条件。

4. 所有有限可测集上的可测函数所成空间 S

设 E 可测，$m(E) < +\infty, \forall x,y \in S$，规定距离 $d(x,y) = \int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt$ 这里 $d(x,y)$ 显然满足距离条件。

5. $L^p(E)$ 为距离空间

这里 $L^p(E)(p \ge 1)$ 表示由可测集 E 上所有 p 次幂可积的可测函数所成的集合。定义距离：$\forall x(t),y(t) \in L^p(E), d(x,y) = (\int_E |x(t)-y(t)|^p dt)^{1/p}$. 后面补证这里的 $d(x,y)$ 满足距离条件。

6. ℓ^p 为距离空间

这里 $\ell^p(p \ge 1)$ 是由满足下列条件的数列组成：$x = \{\xi_n\}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$ 收敛。其中 $\forall x = \{\xi_n\}, y = \{\eta_n\}, d(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n-\eta_n|^p)^{1/p}$. 后面说明 ℓ^p 是距离空间。

7. 离散空间 D

在任意非空点集 X 上定义距离：$\forall x,y \in X, d(x,y) = \begin{cases} 0, x=y \\ 1, x \ne y \end{cases}$。这里的 $d(x,y)$ 满足距离的公理化条件。这个距离下的空间统称为离散空间，记为 D。

§1.2 距离空间的点、集

下面将 $\mathbb{R}^n$ 中关于点、集的基本概念推广到距离空间中。

一、有关概念设 (X,d) 是一个距离空间，A 是 X 的一个非空子集。

1. 点 x_0 为中心的开球：在 X 中称子集 $S(x_0,r)=\{x:d(x,x_0)<r\}$ 为以 x_0 为中心，r 为半径的开球。

2. A 的内点：若 $x_0\in A$ 且存在以 x_0 为中心的某开球 $S(x_0,r_0)\subset A$，则称 x_0 为 A 的内点。

3. A 为开集：若 A 的每一个点均为其内点，则称 A 为 X 的一个开集。

4. A 的内部：A 的所有内点的集合称为 A 的内部，记作 A°。显然：(i) $A^\circ\subset A$; (ii) A° 是 A 的最大开子集。

5. 点 x_0 的邻域：X 中所有包含 x_0 的开集称为 x_0 的一个邻域。特别地，$S(x_0,r)$ 为 x_0 的开球邻域。

6. A 的孤立点：若 $x_0\in A$ 且存在 x_0 的开球内除 x_0 外不再有 A 中其它点，则 x_0 为 A 的一个孤立点。

7. A 的聚点：若 $x_0\in X$ 且 x_0 的任意以 x_0 为中心的开球内均含有无穷多个 A 中的点，则 x_0 为 A 的一个聚点。聚点也称为极限点。

8. A 为闭集：若 A 的所有聚点均含在 A 内，则称 A 为 X 的一个闭集。

9. A 的接触点：若 $x\in X$ 且 x 的任意以 x 为中心的开球内均含有 A 中的点，则称 x 为 A 的接触点。

Rem. x_0 为 A 的接触点 $\Rightarrow x_0\in A$ 或 x_0 是 A 的一个聚点。

10. A 的闭包：由 A 的所有接触点所成的集合称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$。

显然 $A\subset\bar{A}$，且 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。A 为闭集 $\Leftrightarrow A=\bar{A}$.

11. A 为有界点集：若 $\exists x_0\in X, r>0$ 使 $A\subset S(x_0,r)$，则 A 为有界点集。

例. 任意 $x\in X$ 闭集。离散空间 D 中任一点均为内点，任意子集均为闭集，又为开集。

二、开、闭集的性质

1. 全空间 X 和空集 $\emptyset$ 既开又闭。2. 任意个（可以无穷多个）开集的并集还是开集；有限个开集的交集还是开集。3. 任意个闭集的交集还是闭集；有限个闭集的并集还是闭集。4. 若 A 为闭集，则 A^c 为开集；若 A 为开集，则 A^c 为闭集。

三、可分的距离空间

1. 定义 Def 1. 点集 B 在 A 中稠密：A 中任一点均为 B 的接触点，则称 B 在 A 中稠密。

例如，在 $\mathbb{R}$ 中，有理点集 $\mathbb{Q}$ 在无理点集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 中稠密，在 $\mathbb{R}$ 中也稠密。

Def 2. 若距离空间 X 存在一个稠密可数子集，则称 X 是可分的。

2. 常见的可分的距离空间 (1) $\mathbb{R}^n$ 是可分的距离空间。在 $\mathbb{R}^n$ 中，坐标均为有理数点的全体所成集合是可数集，它是 $\mathbb{R}^n$ 中稠密的集合。(2) $C[a,b]$ 是可分的距离空间。根据 Weierstrass 定理，任一连续函数均可用多项式函数任意逼近，表明所有多项式函数集合在 $C[a,b]$ 上稠密，又所有有理系数的多项式函数集合可数且在所有多项式函数集合中稠密。故 $C[a,b]$ 可分。

3. 不可分距离空间举例记 ℓ^∞ 是由所有有界实数列所成集合，规定距离：$\forall x,y\in\ell^\infty, x=\{\xi_n\}, y=\{\eta_n\}, d(x,y)=\sup|\xi_n-\eta_n|$ (这里 $d(x,y)$ 显然为距离) 下证 ℓ^∞ 不可分：先考虑其子集 A：坐标为 0 或 1 的数列全体的集合，其基数为 $2^{\aleph_0}$. A 中两元素距离 $d(x,y)=1$. 若 ℓ^∞ 中存在可数集 B 在 ℓ^∞ 中稠密，$\forall x\in B$ 作小开球 $S(x,\frac{1}{3})$ 可数个。由 B 在 ℓ^∞ 中稠密，$\cup_{x\in B}S(x,\frac{1}{3})=X$，即 $\cup_{x\in B}S(x,\frac{1}{3})\supset A$，至少 $\exists x_1,x_2\in A$，落在同一个球内，这时 $d(x_1,x_2)\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$，矛盾。

§1.3 距离空间的完备性

一、有关定义

Def 1. 设 (X,d) 是距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中一个点列，若 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N, m>N$ 时有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中一个 Cauchy 基本列。

Def 2. 若距离空间中任一 Cauchy 基本列均为收敛点列，则称该空间是完备的。例如，$\mathbb{R}^n$ 是完备的，$X=(0,1)$ 不是完备的，$X=\{1\}$ 是完备的。

Rem. (1) 距离空间中收敛点列一定是 Cauchy 基本列，反之不一定。

(2) 距离空间完备 $\Leftrightarrow$ Cauchy 基本列也是收敛点列。

(3) 完备空间的闭子集是完备子空间。

二、完备空间举例

1. $\mathbb{R}^n$ **是完备的 (Cauchy 收敛准则)**

2. $C[a,b]$ **是完备的**

这里 $\forall x(t), y(t) \in C[a,b], d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$。 **证.**

任取 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 基本列 $\{x_n(t)\}$：
$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n, m > N$ 时 $d(x_n, x_m) = \max |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$
即当 $m > N, n > N$ 时，$\forall t \in [a,b]$，都有 $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$
令 $m \to \infty$，有 $n > N$ 时 $\forall t \in [a,b], |x_n(t) - x_0(t)| \le \varepsilon.$
从而 $x_n(t)$ 一致收敛至 $x_0(t)$，因此 $C[a,b]$ 中有 $x_0(t)$, $d(x_n, x_0) \to 0.$
即 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的收敛点列。

3. ℓ^∞ 是完备的

这里 ℓ^∞ 由所有有界数列所成集合。$\forall x = \{\xi_i\}, y = \{\eta_i\}, d(x,y) = \sup |\xi_i - \eta_i|.$ **证.**

给定 ℓ^∞ 中一个 Cauchy 基本列 $\{x^{(n)}\}$，这里 $x^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}\}.$
且 $|\xi_i^{(n)}| \le K_n, i = 1, 2, \cdots.$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $m > N, n > N$ 时 $d(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon.$
即当 $m > N, n > N$ 时都有 $|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon, \forall i.$
固定 i 可知 $\{\xi_i^{(n)}\}$ 是 Cauchy 基本列，故收敛，记 $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$，于是有 $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\}.$
而 $|\xi_i^{(0)}| \le |\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(N+1)}| + |\xi_i^{(N+1)}| \le \varepsilon + K_{N+1} = K_0$，表明 $x_0 \in \ell^\infty.$
上式令 $m \to \infty$，$\forall i$ 有 $|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \le \varepsilon$，即 $\sup |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \le \varepsilon, d(x_n, x_0) \le \varepsilon.$

4. 离散空间 D 是完备的

$\forall x, y \in D, d(x,y) = \begin{cases} 1, x \ne y \\ 0, x = y \end{cases}$. 因为 D 中任意 Cauchy 列从某项开始恒为常数列，故为收敛点列。

5. 设 $X = \{x(t) | x(t) \in C[0,1]\}$, 定义距离：$\forall x(t), y(t) \in X : d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$. 则 X 不完备。

证.
(1) 构造一个 Cauchy 基本列 $\{x_n(t)\}$ 使其不是 X 中的收敛点列：$x_n(t) = \begin{cases} 0, t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{线性函数}, t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1, t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ 设 $x_0(t) = \begin{cases} 0, t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2} \\ 1, t > \frac{1}{2} \end{cases}$，在 $[0,1]$ 上只有一个跳跃间断点。显然 $\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt \le \frac{1}{n}, d(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt \le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0.$ 故 $\{x_n(t)\}$ 是一个 Cauchy 基本列。(2) 下证 $\{x_n(t)\}$ 不是 X 中的收敛点列：若存

在 $x^*(t) \in X$ 使 $d(x_n, x^*) = \int_0^1 |x_n(t) - x^*(t)|dt \to 0$. 于是 $\int_0^1 |x_0(t) - x^*(t)|dt \leq \int_0^1 |x_0(t) - x_n(t)|dt + \int_0^1 |x_n(t) - x^*(t)|dt \to 0$. 即 $\int_0^1 |x_0(t) - x^*(t)|dt = 0$，在 $t \neq \frac{1}{2}$ 时 $x_0(t) \equiv x^*(t)$. 则 $\lim_{t\to\frac{1}{2}^-} x_0(t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}^-} x^*(t), \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} x_0(t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} x^*(t)$. 但 $\lim_{t\to\frac{1}{2}^-} x_0(t) \neq \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} x_0(t)$, $\lim_{t\to\frac{1}{2}^-} x^*(t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} x^*(t)$ (连续). 以上矛盾表明 $x^*(t)$ 不存在，即 $\{x_n\}$ 不是 X 中收敛点列。

三、完备距离空间的等价定义

在 $\mathbb{R}^n$ 空间中，Cauchy 收敛准则 $\Leftrightarrow$ 闭球套定理。在一般完备距离空间中也成立。**Thm 1.** 设 (X, d) 是完备的距离空间，$\overline{S_n} = S_n(x_n, r_n)$ 是 X 中一个闭球套 (列)，满足条件：(1) $\overline{S_n} \supset \overline{S_{n+1}}$ (2) $r_n \to 0$ 则 $\exists! x_0 \in X$, 使 $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{S_n} = \{x_0\}$.

证.
先证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 基本列 (收敛)：$\forall \varepsilon > 0$, 由 $r_n \to 0, \exists N > 0, n > N$ 时 $r_n < \varepsilon$. 当 $m > n > N$ 时，$d(x_m, x_n) \leq r_n < \varepsilon (\overline{S_n} \supset \overline{S_m})$. 所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 基本列，又因为 X 完备，$\{x_n\}$ 收敛。设 $x_n \to x_0 \in X$，下证 $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}$. 由 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$，令 $m \to \infty$ 有 $d(x_n, x_0) \leq \varepsilon < r_n < \varepsilon$. (此处笔记似有笔误，意为极限在闭球内) 当 $n > N$ 时 $x_0 \in \overline{S_n}$，即 $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}$. 最后证明唯一性：用反证法显然。

Thm 2. 设 X 是距离空间，若 X 中任意满足 Thm 1 的闭球套的交集是 X 中唯一的一点，则 X 完备。

证.
略。

Rem. Cauchy 收敛准则 $\Leftrightarrow$ 闭球套定理。

§1.4 压缩映射原理及应用

一、压缩映射原理

Thm 1. (Banach)

设 (X, d) 是完备的距离空间，T 是 X 到自身的一个压缩映射，满足条件：$\exists \alpha (0 \leq \alpha < 1)$ s.t. $\forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$. 则 $\exists! x^* \in X$ s.t. $Tx^* = x^*$.

证.
(1) 先构造一个 Cauchy 基本列：任意取定 $x_0 \in X$，定义：$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} =$

$Tx_n, \cdots$ 下证 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 基本列：$d(x_2,x_1)=d(Tx_1,Tx_0)\le \alpha d(x_1,x_0)$ $d(x_3,x_2)=d(Tx_2,Tx_1)\le\alpha^2 d(x_1,x_0)\cdots$ $d(x_{n+1},x_n)\le\alpha^n d(x_1,x_0)$ $\forall p\in\mathbb{N}, d(x_{n+p},x_n)\le d(x_{n+p},x_{n+p-1})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)\le(\alpha^{n+p-1}+\cdots+\alpha^n)d(x_1,x_0)=\frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\to 0(n\to\infty)$ 故 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 基本列。$x_n\to x^*\in X$. (2) 下证 $Tx^*=x^*$：显然，压缩映射是一个连续映射，由 $x_{n+1}=Tx_n$ 得，$x^*=Tx^*$。x^* 即为所求。(3) 最后证唯一性：若还存在 $y^*\in X$ s.t. $Ty^*=y^*$，则有：$d(x^*,y^*)=d(Tx^*,Ty^*)\le\alpha d(x^*,y^*)$，只能有 $d=0$，于是 $x^*=y^*$.

二、应用举例 1. 证明微分方程 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ 在}(x_0,y_0) \text{ 的某邻域上有唯一解} \\ y(x_0)=y_0\end{cases}$. 这里 $f(x,y)$ 在 $D:\begin{cases}|x-x_0|\le h\\ |y-y_0|\le b\end{cases}$ 上连续且满足 Lipschitz 条件：$\forall y,\bar{y}\in[y_0-h,y_0+h],\forall t\in[x_0-k,x_0+k]$, 都有 $|f(x,y)-f(y,t)|\le L|y-y_0|$. (笔记此处可能有误，应为对 y 的 Lipschitz)

证.

构造一个 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上到自身的压缩映射，这里 $\delta<\min\{k,\frac{1}{L}\}$. $\forall y=y(t)\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$，定义 $Ty=\int_{x_0}^t f(y(\tau),\tau)d\tau+y_0$. $\forall y(t),\bar{y}(t)\in C[x_0-\delta,x_0+\delta], d(Ty,T\bar{y})=\max_{|t-x_0|\le\delta}|\int_{x_0}^t[f(y(\tau),\tau)-f(\bar{y}(\tau),\tau)]d\tau|\le L\cdot\delta\cdot\max_{|t-x_0|\le\delta}|y(\tau)-\bar{y}(\tau)|$ $=\alpha\cdot d(y,\bar{y})$.$(0\le\alpha<1)$ 故 T 是 X 上的一个压缩映射，故 $\exists! y^*(t)$ 使 $Ty^*=y^*$，即 $y^*(t)=\int_{x_0}^t f(y^*(\tau),\tau)d\tau+y_0\Rightarrow\frac{dy^*}{dt}=f(y^*,t)$.

2. 证明积分方程 $y(t)=\varphi(t)+\lambda\int_a^b f(t,\tau,y(\tau))d\tau$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解。这里 $\varphi(t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，$f(t,\tau,y)$ 是 $D:\begin{cases}a\le t\le b\\ a\le\tau\le b\end{cases}$ 上连续函数，λ 是常数。

证.

定义 $C[a,b]$ 上到自身的映射：$\forall y\in C[a,b], Ty=\varphi(t)+\lambda\int_a^b f(t,\tau,y(\tau))d\tau$. $\forall y,\bar{y}\in C[a,b]$，由 $|f(t,\tau,y)-f(t,\tau,\bar{y})|\le M|y-\bar{y}|$ (注：笔记假设 Lipschitz 条件) 有：$d(Ty,T\bar{y})=|\lambda|\cdot M\int_a^b d(y,\bar{y})d\tau=|\lambda|M(b-a)d(y,\bar{y})=\alpha\cdot d(y,\bar{y})$. 当 $|\lambda|$ 很小时 $0\le\alpha<1$，T 是压缩映射。由压缩映射原理，$\exists! y^*(t)\in C[a,b]$ 使 $y^*(t)$ 满足 $Ty^*=y^*$。因此 $y^*(t)$ 是原方程的唯一解 ($|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ 时)。

三、压缩映射原理的推广

Def. 设 T 是空间 X 到自身的一个映射，$\forall x\in X, T^n x=T(T^{n-1}x)=T^{n-1}(Tx)$。称 T^n 为映射 T 的幂映射。

Thm 2. 设 X 是完备距离空间，T 是 X 到自身的映射。若存在正整数 n_0，使 T^{n_0} 是 X 到自身的压缩映射，则存在唯一的 $x^* \in X$ 使 $Tx^* = x^*$.

Rem. 若 T 是 X 到自身的映射，存在 $x^* \in X$ 使 $Tx^* = x^*$，则称 x^* 为 T 的一个不动点。上述压缩映射原理也称为不动点原理。

例 1. 证明积分方程 $y(t) = \varphi(t) + \lambda \int_a^t f(t, \tau, y(\tau))d\tau$ 存在唯一解。这里 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f(t, \tau)$ 在 $D : \begin{cases} a \le t \le b \\ a \le \tau \le b \end{cases}$ 上连续。

证.
先构造映射：$\forall y \in C[a, b], Ty = \varphi(t) + \lambda \int_a^t f(t, \tau, y(\tau))d\tau$. $\forall y(t), \bar{y}(t) \in C[a, b], |Ty - T\bar{y}| = |\lambda| |\int_a^t [f(\dots) - f(\dots)]d\tau| \le |\lambda| M(t-a)d(y, \bar{y})$ $|T^2y - T^2\bar{y}| = |\lambda| |\int_a^t f(t, \tau)(Ty - T\bar{y})d\tau| \le |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} d(y, \bar{y})$ $\dots$ $|T^n y - T^n \bar{y}| \le |\lambda|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} d(y, \bar{y}) \le |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(y, \bar{y}) = \alpha d(y, \bar{y})$. 即 $d(T^n y, T^n \bar{y}) \le \alpha d(y, \bar{y}), \exists n_0$ s.t. $\alpha = \frac{|\lambda|^{n_0} M^{n_0} (b-a)^{n_0}}{n_0!} < 1$. 即 T^{n_0} 是压缩映射，$\exists! x^* \in X$ s.t. $T^{n_0} x^* = x^*$. 再考虑 $Tx^* = T(T^{n_0} x^*) = T^{n_0}(Tx^*)$，$Tx^*$ 也是 T^{n_0} 的不动点。由唯一性，$Tx^* = x^*$. 若 y^* 也是 T 的不动点，则 $Ty^* = y^*$，于是 y^* 也是 T^{n_0} 的不动点。

§2 拓扑空间

将距离空间中的基本概念推广到抽象点集上，并讨论其内部的结构性质。

§2.1 拓扑空间基本概念

一、拓扑空间有关定义

1. 拓扑空间

Def. 设 X 是一个非空点集，τ 是 X 的一个子集族，满足条件：

(1) X 和 $\emptyset$ 属于 τ (2) τ 中任意元素的并仍属于 τ (3) τ 中任意有限元素的交仍属于 τ 这时称 τ 为 X 的一个拓扑。定义了拓扑的点集 X 称为拓扑空间，记 $(X,\tau)=X$.

2. 拓扑空间的开集与闭集

Def. 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，τ 中的元素称其为 X 的开集。开集的余集为闭集。

例如，$X=\{1,2\},\tau_1=\{X,\emptyset,\{1\}\}$ 是一个拓扑，$\tau_2=\{X,\emptyset,\{1\},\{2\}\}$ 是一个拓扑。$\tau_3=\{X,\emptyset\}$ 是一个拓扑。$X=\{1,2,3\},\tau=\{X,\emptyset,\{1\},\{2\}\}$ 不是一个拓扑。**Rem.** (1) 对每一点集 X, 规定 $\tau=\{X,\emptyset\}$, 称 (X,τ) 为平凡拓扑空间。

(2) 由点集 X 的所有子集所成的子集族 τ 是拓扑，它对应的拓扑 $\tau=2^X$. 对应的拓扑空间中每个子集既开又闭。

一般的拓扑空间 X 中，全集 X 既开又闭。

3. 拓扑子空间

Def. 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，A 是 X 的任一个非空子集 $(A\subset X)$。记 $\tau_A=\{A\cap G: G\in\tau\}$，称 (A,τ_A) 是一个拓扑空间，称其为 X 诱导出来的子拓扑子空间。

Rem. 同一点集上可以定义不同的拓扑：(X,τ_1) 与 (X,τ_2)，若 $\tau_1\neq\tau_2$，则 (X,τ_1) 和 (X,τ_2) 算作两个不同的拓扑空间。

4. 强弱拓扑

Def. 设点集 X 上的两个拓扑 τ_1,τ_2 满足 $\tau_1\subset\tau_2$，则称 τ_2 比 τ_1 强 (也称 τ_1 比 τ_2 弱)。

二、拓扑空间中关于点、集的基本概念

设 A 是拓扑空间 (X,τ) 的一个非空点集。

1. 点的邻域：$\forall x_0\in X$，包含 x_0 的每个开集统称为 x_0 的邻域。

Rem. x_0 的邻域一定存在，X 是关于每个点的邻域。

2. A **的内点**：若 $x_0 \in A$ 且存在 x_0 的某邻域 V_0 含在 A 内，则称 x_0 为 A 的一个内点。

Rem. A 为开集 $\Leftrightarrow$ A 中的点均为内点。

3. A **的接触点**：若 $x \in X$ 且 x 的任意邻域内均含有 A 中点，则称 x 为 A 的一个接触点。若 x 的任意邻域内均含有不同于 x 的 A 中点，则称 x 为 A 的一个极限点。

Rem. x 是 A 的接触点，则 x 属于 A 或是 A 的极限点。

4. A **的闭包**：A 的所有接触点构成的集合为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$.

Rem.

(1) $\overline{A} \supset A$ 且 $\overline{A}$ 是 X 中闭集

(2) A 是闭集 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(3) $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

5. A **的内部**：含在 A 内所有开集的并集称为 A 的内部，记为 A°.

Rem. A° 是 X 的一个开集且是含在 A 内的最大开集。

三、拓扑空间之间的映射

1. 连续映射

Def. 设 f 是拓扑空间 X 到 Y 的一个映射，$\forall x_0 \in X, y_0 = f(x_0) \in Y$，若 Y 中任意 y_0 的邻域 U_{y_0} 都存在 X 中 x_0 的邻域 V_{x_0} 使其像 $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$，则称 f 在 x_0 连续，若 f 在 X 上每点都连续，则称 f 是 $X \to Y$ 的连续映射。

2. 同胚映射

Def. 若拓扑空间 $X \to Y$ 的映射 f 是主要一一的，且 f 与 f^{-1} 均连续，则称 f 是 $X \to Y$ 的一个同胚映射。

3. 连续映射的性质

Prop 1. 若 f 是拓扑空间 $X \to Y$ 的一个映射，则 f 连续 $\Leftrightarrow$ Y 中开集的原像也是开集。

证.
$\Rightarrow$: 若 f 是 $X \to Y$ 的连续映射，U 是 Y 的任一个开集，其原像 $f^{-1}(U)$。下证 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集：$\forall x \in f^{-1}(U)$，记 $y = f(x) \in U$ 且 U 是 y 的一个邻域，f 在 x 连续，$\exists x$ 的邻域 V_x 使 $f(V_x) \subset U$，即 $V_x \subset f^{-1}(U)$. 因此 x 是 $f^{-1}(U)$ 的内点。$\Leftarrow$: $\forall x \in X$，记

$y = f(x)$，任取 y 的邻域 U_y，其原像 $f^{-1}(U_y)$ 是 X 中的一个开集，显然 $x \in f^{-1}(U_y)$，即 $f^{-1}(U_y)$ 是 x 的邻域，f 在 x 连续。

Cor 1. 连续映射 $\Leftrightarrow$ 闭集的原像也是闭集。

Rem. 连续映射下，开集的像不一定是开集，闭集的像也不一定是闭集。例如 $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, A = (-1,2), f(A) = [0,4)$. **Cor 2.** 同胚映射下开集的像是开集，闭集的像是闭集。

若 (X, τ_1) 和 (Y, τ_2) 同胚，则 τ_1 和 τ_2 一一对应，故同胚映射下两个拓扑空间的拓扑结构相同，可看成一个拓扑空间。

Def. 若拓扑空间 $X \to Y$ 的映射将开集映射为开集，则称这种映射为开映射。显然，同胚映射是开映射。

四、Hausdorff 空间

1. 定义

Def. 若拓扑空间 X 满足 $\forall x, y \in X, x \neq y$，都存在各自邻域 V_x 与 V_y 使 $V_x \cap V_y = \emptyset$，则称 X 是一个 Hausdorff 空间。(可分距离空间) 例如，距离空间是 Hausdorff 空间，平凡拓扑空间 $(\tau = \{X, \emptyset\})$ 一定不是 Hausdorff 空间。$X = \{1,2\}, \tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$，则 X 不是 Hausdorff 空间。定义 $(X,\tau), \tau = 2^X$，则 X 是 Hausdorff 空间。**2. 性质**

Prop. Hausdorff 空间中的单点集是闭集。

例. 记 $X = [0,1]$，τ 是由空集及 X 去掉至多可列点集后余集的全集所成子集族。则 (X,τ) 不是 Hausdorff 空间。

证.
若 (X,τ) 是 Hausdorff 空间，取 $x, y \in X, \exists x$ 和 y 的邻域 V_x, V_y 使 $V_x \cap V_y = \emptyset$，同时有 $m(X) = 1, m(V_x) = m(V_y) = 1$. $m(V_x \cup V_y) = 2$ (由测度运算知)，但应有 $m(X) = 1 > m(V_x \cup V_y)$，故矛盾表明 (X,τ) 不是 Hausdorff 空间。

§2.2 拓扑空间中的紧集与紧空间

一、拓扑空间中的紧集与紧空间

1. 定义 Def. 设 X 是一个拓扑空间，A 是 X 的一个子集，若 X 的一个开集族 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ (简记 $\{G_\alpha\}$)，若 $\{G_\alpha\}$ 覆盖了 A: $\cup_\alpha G_\alpha \supset A$，则称 $\{G_\alpha\}$ 是 A 的一个开覆盖。若 A 的每个开覆盖均存在有限子覆盖，即 $\exists\{G_{\alpha_i}\}$ 使得 $\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \supset A$，则称 A 是

X 的一个紧集。特别地，若 X 本身是紧集，则称拓扑空间 X 是紧的。例如，$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集是紧集。

2. 等价定义

Def. 设 A 是拓扑空间 X 中的一个子集，$\{F_\alpha\}$ 是 X 的一个闭集族。若对集族 $A\cap(\cap F_\alpha)$ 的任意有限交非空，则其所有交也非空，称 $\{F_\alpha \cap A\}$ 在 A 中具有" 有限交性质"，若对所有闭集 $\{F_\alpha\}$ 对应集 $\{F_\alpha \cap A\}$ 均具有" 有限交性质"，则称 A 具有" 有限交性质"。

3. 等价性的证明参见教材

二、紧集的性质

1. 紧空间的闭子集是紧集

证.
设 X 是紧的，A 是 X 的一个闭子集，下证 A 是紧集。设 $\{G_\alpha\}$ 是 X 的一个开集族，则 $\{G_\alpha \cap A\}$ 也是 X 的开集族 (由 A 是闭集，A^c 是开集，$\{G_\alpha, A^c\}$ 构成 X 的开覆盖)。由于 X 是紧的，$\{G_\alpha, A^c\}$ 在 X 中有" 有限交性质"，因此在 A 中也有" 有限交性质"。例如，非紧空间上的闭集不一定是紧集，如 $A = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$，但 A 不是紧集。

2. Hausdorff 空间上的紧子集是闭集

证.
设 X 是 Hausdorff 空间，A 是 X 上的紧集，下证 A^c 是开集。$\forall y \in A^c, x \in A, x \neq y$，由 Hausdorff 性质，$\exists x$ 和 y 的各自邻域 V_x 和 V_y，使 $V_x \cap V_y = \emptyset$。这时 $\{V_x\}$ 是 A 的一个开覆盖，由于 A 是紧集，$\exists$ 有限覆盖使 $\cup_{i=1}^n V_{x_i} \supset A$。取 $V_y = \cap_{i=1}^n V_{y_i}$，则 $V_y \cap (\cup_{i=1}^n V_{x_i}) = \emptyset, V_y \cap A = \emptyset, y \in A^c$，因此 A^c 是开的。

Cor. 紧集的闭子集还是紧集。

3. $\mathbb{R}^n$ 中紧集 $\Leftrightarrow$ 有界闭集

证.
$\Leftarrow$: 有界闭集满足有限覆盖定理。$\Rightarrow$: 紧集是有界集 (证略)。$\mathbb{R}^n$ 是 Hausdorff 空间，因此紧集是闭集。

4. 连续映射下，紧集的像仍是紧集

证.

由连续映射和紧集定义可证。

5. Hausdorff 空间上连续函数在紧集上有最值

§3 赋范线性空间

§3.1 线性空间

1. 定义 Def. 设 X 是非空点集，$\mathbb{K}$ 是一个数域 (例如实数集 $\mathbb{R}$，有理数集 $\mathbb{Q}$ 等)，若 $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$，都有 $\alpha x + \beta y \in X$，则称 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间。**Rem.** 线性空间含零元和负元。

2. 线性子空间 Def. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一线性空间，$X_1 \subset X$ 也是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，则称 X_1 是 X 的线性子空间。

3. 生成空间 Def. 设 A 是线性空间 X 的子集，由 A 的任意有限个元素关于数域 K 的所有线性组合的全体成为 X 的一个子空间，称其为由 A 生成的空间。例如，$\mathbb{R}^2$ 中 $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), A = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$，$A$ 的生成空间为 $\mathbb{R}^2$.

§3.2 赋范线性空间

1. 赋范线性空间 Def. 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间，在 X 上定义实函数 $\|\cdot\|$, 满足条件：(1) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ (2) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (3) $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数，定义了范数的线性空间称为赋范空间，记为 $(X, \|\cdot\|)$。简称为赋范空间。例如，在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义范数：$\forall x \in \mathbb{R}, \|x\| = |x|$.

2. 赋范空间中的收敛点列

Def. 设 X 是赋范空间，$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$，若 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$，则称点列 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x_0，记作 $\lim x_n = x_0$。简记 $x_n \to x_0$.

3. 赋范空间中的级数

Def. 设 X 是赋范空间，$\{x_n\} \subset X$，记 $S_n = x_1 + \cdots + x_n$，若点列 $\{S_n\}$ 收敛于 $S \in X$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛于 S，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$. 否则称 $\sum x_n$ 发散。

4. 赋范空间中的 Cauchy 基本列

Def. 若 $\{x_n\}$ 是赋范空间中的一个点列，满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, m > N, n > N$ 时 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 是 X 的柯西基本列。

5. Banach 空间： 赋范空间 X 中，若任一柯西基本列均为收敛点列，则 X 是完备的，完备的赋范空间为 Banach 空间。

Rem. 任意赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中 $\|\cdot\|$ 对应一个距离，由范数诱导出的距离 $\forall x, y \in X, \|x-y\| = d(x,y)$. 因此，赋范空间中点列收敛、Cauchy 基本列、完备是范数对应距离意义下的距离空间中相关意义。赋范空间对应距离空间，也对应成距离空间。

三、有关性质

1. 赋范空间基本不等式：$\forall x, y \in X, |\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$

证.

由 $x = x-y+y, \|x\| \le \|x-y\| + \|y\|$，即 $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$

同理 $\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|$，因此有 $|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$

2. 赋范空间中范数 $\|\cdot\|$ 可看成 X 的非负实函数，则该函数在收敛点处连续，即若 $x_n \to x_0$，则 $\|x_n\| \to \|x_0\|$

证.

由于 $|\|x_n\| - \|x_0\|| \le \|x_n - x_0\|$，由夹逼定理可得。

Cor. 若赋范空间 X 中，$x_n \in X, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (X 相关的数域)，当 $x_n \to x_0, \alpha_n \to \alpha$，则 $\alpha_n x_n \to \alpha x_0$.

3. 设 X 是赋范空间，则 X 是 Banach 空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 中任意 $\sum \|x_n\|$ 收敛的级数都有 $\sum x_n$ 收敛

证.

$\Rightarrow$: 记 $S_n = x_1 + \cdots + x_n, \forall p \in \mathbb{N}, \|S_{n+p} - S_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \le \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|$.

由 $\sum \|x_n\|$ 收敛，$\{S_n\}$ 是 Cauchy 基本列。

又 X 是 Banach 空间，故 $S_n \to S \in X$.

$\Leftarrow$: 略。

四、Banach 空间

由距离空间处完备性的结论，$\mathbb{R}^n$ 空间，$C[a,b]$, ℓ^∞ 在其范数下定义之距离对应，故均为 Banach 空间。

1. $\mathbb{R}^n$ 空间：$\forall x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$ $\|x-y\| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2} = d(x,y)$

2. $C[a,b]$：$\forall x(t), y(t) \in C[a,b], \|x(t)\| = \max |x(t)|$ $\|x-y\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| = d(x,y)$.

3. ℓ^∞ **空间**：$\forall x \in \ell^\infty, x = (\xi_1, \xi_2, \dots), |\xi_i| \leq K_1, \|x\| = \sup|\xi_i|$ $\forall y \in \ell^\infty, y = (\eta_1, \eta_2, \dots), |\eta_i| \leq K_2$ $\|x-y\| = \sup_{i\geq 1}|\xi_i - \eta_i| = d(x,y)$

Rem. (1) 在同一个集合上定义不同的范数，可能其结构有明显差别。例如，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义范数：$\forall x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = \max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|$ $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 还是 Banach 空间 ($\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价) 在 $C[a,b]$ 上定义范数：$\forall x = x(t) \in C[a,b], \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$ 根据距离空间的完备性，$\|\cdot\|_1$ 不完备，$(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不是 Banach 空间 (2) $\mathbb{R}^n$ 和 $C[a,b]$ 为可分的，ℓ^∞ 为不可分的，其证明也同于距离空间。

§3.2 $L^p(E)$ 空间的完备性

一、预备知识

1. Young 不等式：设 $a>0, b>0, p>1, q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, a\cdot b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

证.
记 $\varphi(x) = \frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}-x, \varphi'(x) = x^{p-1}-1, \varphi''(x) = (p-1)x^{p-2} > 0$. 由 $\varphi'(x)=0$ 有 $x_0=1$ 为极小值点 $(\varphi(1)=0)$ 当 $x>0$ 时 $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = 0$，从而 $\varphi(ba^{-\frac{1}{p-1}}) \geq 0$, 原不等式成立。(此处笔记利用代换 $x = ba^{-\frac{1}{p-1}}$)

2. Holder 不等式：设 E 是 $\mathbb{R}$ 上可测集，$x(t)$ 与 $y(t)$ 是 E 上的可测函数，若 $x(t) \in L^p, y(t) \in L^q$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $x(t)\cdot y(t) \in L^1$，且 $\int_E |x(t)y(t)|dt \leq [\int_E |x(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}[\int_E |y(t)|^q dt]^{\frac{1}{q}}$

证.
不妨设不等式右边为正，$\varphi(t) = \frac{|x(t)|}{[\int_E |x(t)|^p dt]^{1/p}}, \psi(t) = \frac{|y(t)|}{[\int_E |y(t)|^q dt]^{1/q}}$ 由 Young 不等式，$\varphi(t)\cdot\psi(t) \leq \frac{\varphi^p(t)}{p}+\frac{\psi^q(t)}{q}$ 两边积分：$\frac{\int_E |x(t)y(t)|dt}{[\int |x|^p]^{1/p}[\int |y|^q]^{1/q}} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

3. Minkowski 不等式：设 E 是 $\mathbb{R}$ 上可测集，$p>1, x(t) \in L^p, y(t) \in L^p$，则 $x(t)+y(t) \in L^p$，且 $[\int_E |x(t)+y(t)|^p dt]^{1/p} \leq [\int_E |x(t)|^p dt]^{1/p} + [\int_E |y(t)|^p dt]^{1/p}$

证.
(1) 先证 $x(t), y(t) \in L^p$ 时有 $x(t)+y(t) \in L^p$

由于 $f(x) = x^p$ 是凸函数，$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

于是 $[\frac{|x(t)+y(t)|}{2}]^p \leq \frac{|x(t)|^p+|y(t)|^p}{2}, [|x(t)+|y(t)|]^p \leq 2^{p-1}[|x(t)|^p+|y(t)|^p]$

因此 $x(t)+y(t) \in L^p$

(2) 对 $\int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}dt$ 和 $\int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}dt$ 分别用 Holder 不等式，其中 p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(q>1)$.

于是有：

$$\int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p/q}dt \leq [\int_E |x(t)|^p dt]^{1/p} \cdot [\int_E |x(t)+y(t)|^p dt]^{1/q}$$

$$\int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p/q}dt \leq [\int_E |y(t)|^p dt]^{1/p} \cdot [\int_E |x(t)+y(t)|^p dt]^{1/q}$$

两式相加有：

$$\int_E (|x(t)|+|y(t)|)|x(t)+y(t)|^{p/q}dt \leq ([\int |x|^p]^{1/p} + [\int |y|^p]^{1/p}) \cdot [\int |x+y|^p]^{1/q}$$

即

$$\frac{\int_E |x(t)+y(t)|^p dt}{[\int_E |x(t)+y(t)|^p dt]^{1/q}} \leq [\int_E |x(t)|^p dt]^{1/p} + [\int_E |y(t)|^p dt]^{1/p}$$

事实上由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，知 ... (笔记推导完毕)

4. Fatou 引理：设 E 是可测集，$\{f_n(t)\}$ 是 E 上一列可测函数且 L 可积，且存在 E 上可积函数 $\varphi(t)$ 使 $f_n(t) \geq \varphi(t)$，则 $\int_E \underline{\lim} f_n(t)dt \leq \underline{\lim} \int_E f_n(t)dt$. 特别地，设 E 是可测集，$\{f_n(t)\}$ 是 E 上一列非负可积函数列，对几乎所有 $t \in E, \{f_n(t)\}$ 关于 t 单增，则 $\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt \leq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(t)dt < \infty$.

Rem. (1) Holder 不等式中 $p=q=2$ 时变为 Cauchy 不等式 (2) Minkowski 不等式的证明用到了 $p>1$ (存在 q 使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) 当 $p=1$ 时显然成立。(3) Holder 不等式与 Minkowski 不等式有如下离散形式：$|\sum \xi_i\eta_i| \leq \sum |\xi_i\eta_i| \leq (\sum |\xi_i|^p)^{1/p}(\sum |\eta_i|^q)^{1/q}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $[\sum |\xi_i+\eta_i|^p]^{1/p} \leq [\sum |\xi_i|^p]^{1/p} + [\sum |\eta_i|^p]^{1/p}$.

二、$L^p(E)$ 是 Banach 空间

Def. $L^p(E)$ 是可测集 E 上所有 p 次幂可积的可测函数 ($p \geq 1$) 的全体所成的集合，其中几乎处处相等的函数看作同一个函数。定义范数：$\forall x = x(t) \in L^p(E), \|x\| = [\int_E |x(t)|^p dt]^{1/p}$ 由 Minkowski 不等式知，$\|\cdot\|$ 满足三角不等式，且 $L^p(E)$ 在该范数下是赋范空间 (线性空间的条件也成立)。

Thm 1. $L^p(E)$ 是 Banach 空间。

证.

设 $\{x_n\}$ 是 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 基本列，下证：$\exists x(t) \in L^p(E)$ 使 $\|x_n - x\| \to 0$. (1) 先证 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 根据 Cauchy 基本列的分析定义，取 $\varepsilon = \frac{1}{2^k}, k=1,2,3,\ldots$

得到一子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}$. 取可测集 $E_k\subset E$ 使 $m(E_k)$ 有限，取 q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ($p=1$ 对应 $q=+\infty$). 根据 Holder 不等式 $\int_{E_1}|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|dt\le[\int_{E_1}1^q dt]^{1/q}[\int|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}|^p dt]^{1/p}\le[m(E_1)]^{1/q}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\le[m(E_1)]^{1/q}\cdot\frac{1}{2^k}$ 由 Fatou 引理，$\int_{E_1}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^k|x_{n_{i+1}}(t)-x_{n_i}(t)|dt\le\lim_{k\to\infty}\int_{E_1}\sum|x_{n_{i+1}}(t)-x_{n_i}(t)|dt\le[m(E_1)]^{1/q}\cdot\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^i}=[m(E_1)]^{1/q}$ 因此 $\sum_{i=1}^\infty|x_{n_{i+1}}(t)-x_{n_i}(t)|$ 收敛于几乎处处有限的函数 $\Rightarrow\sum_{i=1}^\infty(x_{n_{i+1}}(t)-x_{n_i}(t))$ 也收敛 $\Leftrightarrow$ 存在可测函数 $x(t)$ 使 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)=x(t)$ a.e. on E_1. 由 E 可表示为可列个有限可测集的并，从而 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)=x(t)$ a.e. on E. (2) 下证 $\|x_n-x\|\to 0$, 且 $x(t)\in L^p(E)$ 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 基本列，$\forall\varepsilon>0,\exists N,n,m>N$ 时有 $\|x_n-x_m\|=[\int_E|x_n(t)-x_m(t)|^p dt]^{1/p}<\varepsilon$ 当 $n>N$ 时 $\int_E|x_n(t)-x_m(t)|^p dt<\varepsilon^p$ 再由 Fatou 引理，$\int_E\lim_{m\to\infty}|x_n(t)-x_m(t)|^p dt\le\lim_{m\to\infty}\int_E|x_n(t)-x_m(t)|^p dt\le\varepsilon^p$ (此时 n 取定) 当 $n>N$ 时，$\int_E|x_n(t)-x(t)|^p dt<\varepsilon^p$ 即 $\|x_n-x\|<\varepsilon, x_n(t)-x(t)\in L^p(E)$，因此 $x(t)=x(t)-x_n(t)+x_n(t)\in L^p(E)$. 表明 $\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)\in L^p(E)$.

Rem. (1) $L^p(E)$ 是可分的：由 Lusin 知，E 上连续函数集在 $L^p(E)$ 中稠密，而有理系数多项式在连续函数中稠密。(2) $L^p[a,b]$ 是 $E=[a,b]$ 的特例。

三、ℓ^p 是 Banach 空间

Def. ℓ^p 是由收敛实数列级数 $\sum|\xi_i|^p$ 对应的数列 $\{\xi_i\}$ 的全体所成的集合，范数定义为：$\forall x=\{\xi_i\},\|x\|=(\sum_{i=1}^\infty|\xi_i|^p)^{1/p}$. 根据 Minkowski 不等式，这里的 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式，且 ℓ^p 是赋范空间。**Thm 2.** ℓ^p 是 Banach 空间。

证.
ℓ^p 是 $L^p(E)$ 的特例：取 $E=\mathbb{N},x(i)=\xi_i$. $\mathbb{N}$ 上规定测度：若 $B\subset\mathbb{N}$，规定 $m(B)$ 为 B 中元素的个数。取 $N_n=\{1,\dots,n\}$，则 $[\int_N|x(i)|^p dm]^{1/p}=\lim_{n\to\infty}[\int_{N_n}|x(i)|^p dm]^{1/p}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^p)^{1/p}=(\sum_{i=1}^\infty|\xi_i|^p)^{1/p}$. 表明 ℓ^p 是 $L^p(E)$ 的一种特殊情形。

四、空间 $L^\infty(E)$ 的说明

Def. 设 E 是可测集，$x(t)$ 是 E 上可测函数，若存在 E 上的零测子集 E_0 使 $\sup_{E-E_0}|x(t)|<+\infty$，则称 $x(t)$ 是 E 上的本质有界函数。$L^\infty(E)$ 是 E 上所有本质有界函数所成集合，范数定义：$\forall x(t)\in L^\infty(E),\|x\|=\inf_{m(E_0)=0}\sup_{E-E_0}|x(t)|$. 可以证明：(1) $\|\cdot\|$ 满足三角不等式；(2) $L^\infty(E)$ 是 Banach 空间；(3) $L^\infty(E)$ 是不可分的。**Rem.** $L^\infty(E)$ 与 ℓ^∞ 对应。

§3.3 范数的等价性与赋范空间的完备化

一、范数等价定义与性质

1. 定义 Def. 设点集 X 上分别定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$，若存在两个正数 M 与 m，使 $\forall x \in X$，都成立 $m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$，则称 X 上这两个范数等价，记为 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

2. 范数等价的性质 (1) 等价范数满足以下性质：自反性、对称性、传递性。(2) 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 是两个赋范线性空间，若 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$，则 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间 $\Leftrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间。

证.
由 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2, \exists m, M > 0$ s.t. $\forall x \in X$ 都有 $m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$. 若 $\{x_n\}$ 是 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中的任意 Cauchy 基本列，由上面关系得 $m\|x_n - x_m\|_1 \le \|x_n - x_m\|_2 \le M\|x_n - x_m\|_1$，则 $\{x_n\}$ 也是 $(X, \|\cdot\|_2)$ 中的 Cauchy 基本列。反之也成立。故 $(X, \|\cdot\|_1)$ 完备 $\Leftrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ 完备。

例 1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义两个范数：$\forall x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \|x\|_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}, \|x\|_2 = \max|\xi_i|$. 有：$\|x\|_2 \le \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \le \sqrt{n \cdot (\|x\|_2)^2} = \sqrt{n}\|x\|_2$. 因此 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$，由数学分析知，$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 是完备的，因此 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 也是完备的。

二、距离空间的完备化

1. 定义 Def. 设 X_0 是一个距离空间，X 是一个完备的距离空间，若 X 存在一个稠密子空间 X_1 ($\overline{X_1} = X$) 与 X_0 同构且等距，则称 X 是 X_0 的一个完备化空间。

2. Thm. 任意不完备的距离空间均存在唯一完备化空间。

证.
设 (X_0, d) 是一个已知的不完备的距离空间，构造一个新的完备距离空间 X，使其中一个子空间 X_1 与 X_0 同构等距：(1) X_0 中所有 Cauchy 基本列进行分类：若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均为 X_0 中 Cauchy 基本列，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$，则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 归为同一类，其中取出一个作为 X 中的元素，特别地，X_0 中从某一项开始为常点列 $x \in X$ 的 Cauchy 基本列在 X 中记为 $\tilde{x} = (x, \ldots, x)$. (2) 记 X 元素为 $\tilde{x}$，取 X 的子集 $X_1 = \{\tilde{x} : \tilde{x} = (x, \ldots, x), x \in X_0\}$. 显然 X_1 与 X_0 同构。(3) 下面定义 X 的距离 d_1，$\forall \tilde{x} = \{x_n\} \in X, \tilde{y} = \{y_n\} \in X, d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. 下证 $\lim d(x_n, y_n)$ 存在：$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$ 同理 $d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \le d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$ 当 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是 Cauchy 基本列时 $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$，也是 Cauchy 基本列，故极限存在。(4) 易证 d_1 满足距离的三条性质。(5) 最后证明 X_1 与 X_0 等距：$\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in X_1, \tilde{x} = (x, \ldots, x), \tilde{y} = (y, \ldots, y)$. $d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim d(x, y) = d(x, y)$. (6) 可以证明：$X$ 是完备的且 X_1 在 X 中稠密。

三、赋范线性空间的完备化

1. 定义 Def. 设 X 是一个赋范空间，X_1 是 X 的线性子空间，X_1 在原空间距离下对应的赋范空间称为 X 的赋范子空间。**2. 赋范空间列完备化 Thm.** 任意赋范空间都可以扩充为 Banach 空间。

证.
设 X_0 是赋范线性空间。(1) 先把范数诱导出距离空间完备化得到完备化距离空间 X. 下面定义 X 的范数：$\forall \tilde{x} \in X, \tilde{x} = \{x_n\}$ 是 X_0 中的 Cauchy 基本列。$\|\tilde{x}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1$，可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是范数，且 $\tilde{x} \in X_1$ 时 $\|\tilde{x}\|_1 = \|x\|_1$. 于是 X 是 Banach 空间。(2) 当 $\tilde{x} \in X_1$ 时，$\|\tilde{x}\|_1 = \|x\|_1$. 当 $\tilde{x} \notin X_1$ 时，$\|\tilde{x}\|_1 = \lim \|x_n\|_1$，补充类似 X_0 中的点 x^*，使 $\|\tilde{x}^*\|_1 = \|\tilde{x}\|_1$. 这样得到 X_0 后的 Banach 空间。

四、常见的完备化赋范空间举例

1. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在正常范数 $\|x\| = |x|$ 下不完备，其完备化空间是 $\mathbb{R}$. 2. $[a,b]$ 上全体多项式集合 $P[a,b]$ 在范数 $\|p(t)\| = \max_{t\in[a,b]} |p(t)|$ 下不完备，其完备化空间是 $C[a,b]$. 3. $[a,b]$ 上所有连续函数 $C[a,b]$ 在范数 $\|x(t)\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$ 下不完备，其完备化空间 $L^1[a,b]$.

§3.4 有限维赋范线性空间的性质

一、有关概念

1. 赋范线性空间的 Hamel 基 Def. 设 X 是一个赋范空间，若 X 的一个子集 $\{e_\alpha\} = \{e_\alpha : e_\alpha \in X, \alpha \in I\}$，满足条件：(1) $\{e_\alpha\}$ 中任意有限个元素均线性无关；(2) $\{e_\alpha\}$ 的生成空间为 X；则称 $\{e_\alpha\}$ 是 X 的一个 Hamel 基。**Rem.** (1) 一个赋范线性空间的 Hamel 基不唯一。**例 1.** 赋范空间 $\mathbb{R}^n$ 中任意 n 个无关元素组都是其 Hamel 基。**例 2.** X 是由仅仅有有限个非零项的数列的全体所成集合，定义范数：$\forall x \in X, x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots), \|x\| = \max_{i\geq 1} |\xi_i|$ 这里 X 是赋范线性空间，Hamel 基 $\{e_n\}$ 可定义如下：$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ $\{e_n\}$ 中包含了可列个元素，验证 $\{e_n\}$ 为 Hamel 基：$\forall x \in X$，不妨设 $x = (\xi_1, 0, \xi_3, \xi_4, 0, \ldots)$，则 $x = \xi_1 e_1 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$. **Rem.** 例 2 中 X 是 ℓ^∞ 的赋范子空间。**Thm.** 任何非平凡赋范线性空间都存在 Hamel 基。**Def.** 若赋范空间 X 的 Hamel 基仅含有有限个元素，则称该空间为有限维空间，Hamel 基中的元素个数称为空间维数；若 X 的 Hamel 基含无穷个元素，则称该空间为无限维空间。例如，$L^\infty(E), \ell^\infty$ 等都是无限维空间。

2. 赋范线性空间的 (代数) 同构 Def. 设 X 与 Y 是同一个赋范线性空间 (数域 K 上的)，若存在 $X \to Y$ 的双射 T，满足：$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X, T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$. 则称 T 是 $X \to Y$ 的同构映射。

二、有限维赋范线性空间的性质

Prop 1. 任意有限维赋范空间中定义所有不同范数都等价。**Prop 2.** 任意 n 维赋范空间与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 同构且同胚。

证.
记 X 中元素为范数 $\|\cdot\|_1$，$\mathbb{R}^n$ 中元素范数 $\|\cdot\|$. 取定 X 的一个 Hamel 基 $e_1,\dots,e_n$，$\forall x\in X,\exists!$数组$(\xi_1,\dots,\xi_n)$ s.t. $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n$. 定义 $\mathbb{R}^n\to X$ 的映射 T: 在确定基下，$(\xi_1,\dots,\xi_n)\to x$. 显然 T 是 $\mathbb{R}^n\to X$ 的一一映射且同构。(1) 下证 T 与 T^{-1} 连续 (T 同胚)：$\forall\tilde{x}\in\mathbb{R}^n,\tilde{x}=(\xi_1,\dots,\xi_n)$，其像 $T\tilde{x}=x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n$ $\|T\tilde{x}\|_1=\|\sum\xi_ie_i\|_1\le\sum|\xi_i|\|e_i\|_1\le(\sum|\xi_i|^2)^{1/2}\cdot(\sum\|e_i\|_1^2)^{1/2}=\alpha\cdot\|\tilde{x}\|$ $\forall\tilde{x},\tilde{y}\in\mathbb{R}^n$ 有 $\|T\tilde{x}-T\tilde{y}\|_1\le\alpha\|\tilde{x}-\tilde{y}\|$, 表明 T 是 Holder 连续，故连续。取 $\mathbb{R}^n$ 中一个闭子集 $S_0=\{\tilde{x}:\|\tilde{x}\|=1\}$ 也是紧集，S_0 在映射下的像也是紧集，由 X 是 Hausdorff 空间，也是闭集。记 $\inf_{\tilde{x}\in S_0}\|T\tilde{x}\|_1=\inf_{\tilde{x}\in S_0}\|x\|_1=\beta>0$ $\forall x\in X,x\neq0,\frac{x}{\|x\|_1}\in S_0,T\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\in V_0,\|T\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\|_1\ge\beta$ 即 $\|T\tilde{x}\|_1\le\beta\|\tilde{x}\|$, 即 T^{-1} 也是 Holder 连续的。综上，T 是 $\mathbb{R}^n\to X$ 的同构且同胚映射。

Cor 1. 对任意 n 维赋范空间 X，$\forall\varepsilon>0,\exists\mathbb{R}^n\to X$ 的同构映射满足 $\forall\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$，都有 $\|T\tilde{x}\|_1\le\alpha\|\tilde{x}\|$，其中 $\|\cdot\|_1$ 为 X 的范数，$\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的范数。**Cor 2.** 设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(Y,\|\cdot\|_2)$ 是两个同数域上的 n 维赋范空间，则 $\exists\alpha,\beta>0,X\to Y$ 的同构且同胚映射 T, 使 $\forall x\in X,y\in Y$ 有：$\|Tx\|_2\le\alpha\|x\|_1,\|T^{-1}y\|_1\le\beta\|y\|_2$. **Cor 3.** 任意 n 维赋范线性空间 X 都是 Banach 空间 (与 $\mathbb{R}^n$ 结构相同)。**Prop 3.** X 是有限维赋范线性空间 $\Leftrightarrow X$ 中任意有界闭集都是列紧集。**Prop 4.** X 是无限维赋范线性空间 $\Leftrightarrow X$ 中存在有界闭集不是列紧集。

§4 线性算子与线性泛函

§4.2 有界线性算子空间

一、有界线性算子空间

Def. 设 X 与 X_1 是数域 K 上的两个赋范线性空间，记 $X \to X_1$ 上所有有界线性算子所成集 $B(X \to X_1)$。$\forall T_1, T_2 \in B, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X$ 有 $(\alpha T_1 + \beta T_2)x = \alpha T_1 x + \beta T_2 x$，则称 $B(X \to X_1)$ 为线性空间；若 B 上赋范数 $\forall T \in B, \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_1$，则称 $B(X \to X_1)$ 是赋范有界线性算子空间，简称为算子空间。**Rem.** 算子范数显然满足范数的三条性质，这里不再证明。

二、有界线性算子空间的完备性

Thm 1. 设 $B(X \to X_1)$ 是一个有界算子空间，若 X_1 是 Banach 空间，则 B 是 Banach 空间。

证.
对 B 中任一 Cauchy 基本列 $\{T_n\} \subset B$，即：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n, m > N$ 时 $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$. 因此 $\forall x \in X$，都有 $\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$. 由 X_1 是 Banach 空间，$\{T_n x\}$ 收敛，记 $T_n x \to y_0 \in X_1$，即 $\|T_n x - y_0\| \to 0$. 定义 $X \to X_1$ 的有界线性算子 T: $\forall x \in X, Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x = y_0$. 且 $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$, 显然 T 是线性算子，下证：(1) T 是有界的；(2) $T_n \to T$. 当 $n, m > N$ 时 $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\| < \varepsilon$, $\{\|T_n\|\}$ 收敛。因此 $\{\|T_n\|\}$ 有界，$\|T_n\| \leq M$. $\forall x \in X, \|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$, 表明 T 是有界的，$T \in B(X \to X_1)$. 由 $\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|$，令 $m \to \infty$ 有 $\|(T_n - T)x\| \leq \varepsilon \|x\|$. 即 $\|T_n - T\| \leq \varepsilon, T_n \to T$.

Cor 1. 设 X_1 是 Banach 空间，则 $B(X \to X)$ 也是 Banach 空间。**Cor 2.** 设 X 是赋范空间，则 $B(X \to \mathbb{R})$ 也是 Banach 空间。**Def.** 设 X 是赋范空间，称线性泛函空间 $B(X \to \mathbb{R})$ 为 X 的共轭空间。

§4.3 算子序列的收敛性

一、赋范空间中的点列的强、弱收敛

Def 1. 设 X 是赋范线性空间，若 $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, $n > N$ 时 $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 依范数收敛至 x_0，也称 $\{x_n\}$ 在 X 中强收敛至 x_0，记作 $\lim x_n = x_0$. **Def 2.** 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$，若 $\forall f \in B(X \to \mathbb{R})$，

都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$，则称 $\{x_n\}$ 在 X 中弱收敛至 x_0.

Prop. (1) 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛若 $x_n \to x_0, \|x_n - x_0\| \to 0, \forall f \in B(X \to \mathbb{R}), |f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\|\|x_n - x_0\| \to 0$. $\lim |f(x_n) - f(x_0)| = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = f(x_0)$. (2) 有限维赋范空间中强收敛 $\Leftrightarrow$ 弱收敛。

证.
只证弱收敛 $\Rightarrow$ 强收敛：设 X 是 n 维赋范线性空间，$\{x_n\} \in X, x_0 \in X, \forall f \in B(X \to \mathbb{R})$ 都有 $f(x_n) \to f(x_0)$，下证 $x_n \to x_0$. 取 X 中的一个 Hamel 基 $e_1, \dots, e_m$，不妨设 $\|e_i\| = 1$. 则 $x_n = \xi_1^{(n)} e_1 + \dots + \xi_m^{(n)} e_m, x_0 = \xi_1^{(0)} e_1 + \dots + \xi_m^{(0)} e_m$. 于是 $f(x_n) = \sum_{i=1}^m \xi_i^{(n)} f(e_i), f(x_0) = \sum_{i=1}^m \xi_i^{(0)} f(e_i), |f(x_n) - f(x_0)| = |\sum (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}) f(e_i)|$. 取 $f \in B(X \to \mathbb{R})$ s.t. $f(e_i) = 1(\|e_i\|), f(e_j) = 0, j = 2, \dots, m$. 这里 f 是有界线性泛函，$|f(x_n) - f(x_0)| = |\xi_1^{(n)} - \xi_1^{(0)}| \cdot |f(e_1)| \to 0$. 即 $\xi_1^{(n)} \to \xi_1^{(0)}$，类似可得 $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}, i = 2, \dots, m$. 于是 $\|x_n - x_0\| = \|\sum (\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}) e_i\| \le \sum |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \|e_i\| = \sum |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \to 0$.

二、算子序列的强、弱收敛

Def 3. 设 $B(X \to X_1)$ 是一算子空间，对 $\{T_n\} \subset B, T \in B$，若 $\forall x \in X$，都有 $\|T_n x - Tx\| \to 0$，则称 $\{T_n\}$ 在 B 中点点收敛至 T，也称 $\{T_n\}$ 强收敛至 T. **Def 4.** 设 $B(X \to X_1)$ 是有界算子空间，对 $\{T_n\} \subset B, T \in B$，若 $\forall x \in X, \forall f \in B(X_1 \to \mathbb{R})$ 都有 $f(T_n x) \to f(Tx)$，则称 $\{T_n\}$ 在 X 上弱收敛至 T. **Prop.** 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 **Def 5.** 设 $B(X \to X_1), A \subset X$，若 B 中算子序列 $\{T_n\}, T \in B$ 满足：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时 $\forall x \in A$，都有 $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$，则称 $\{T_n\}$ 在 A 上一致收敛至 T.

Prop. 若 $\{T_n\} \subset B(X \to X_1)$，且 $\{T_n\}$ 在 X 上一致收敛至 T，则 $\{T_n\}$ 在 X 上强收敛至 T.

证.
根据强收敛、一致收敛的定义可知。

Prop. 设 $B(X \to X_1), \{T_n\} \subset B, T \in B$，则 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛至 $T \Leftrightarrow \{T_n\}$ 在 X 的任意有界子集上一致收敛。

证.
$\Rightarrow$: $\{T_n\}$ 在 B 中依算子收敛至 $T, \|T_n - T\| \to 0$. 对 X 中有界子集 A，设 $\|x\| \le M, \forall x \in A$. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时 $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{M}$. 于是 $n > N$ 时 $\forall x \in A, \|T_n x - Tx\| \le \|T_n - T\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. 即 $\{T_n\}$ 在 A 上一致收敛至 T. $\Leftarrow$: 若 $\{T_n\}$ 在 A 的任意有界子集上一致收敛至 T，下证 $\|T_n - T\| \to 0$. 取 $S_0 = \{x : x \in X, \|x\| = 1\}$，则 S_0

是 X 中的一个有界集，且 $\{T_n\}$ 在 S_0 上一致收敛至 T. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时 $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon, \forall x \in S_0$. 因此 $\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| < \varepsilon$，即 $\{T_n\}$ 依范数收敛至 T.

Cor. (1) 设 $B(X \to X_1), \{T_n\} \subset B, T \in B$，则 $\{T_n\}$ 依范数收敛至 $T \Leftrightarrow \{T_n\}$ 在 S_0 上一致收敛至 T. (2) 设 $B(X \to X_1), \{T_n\} \subset B, T \in B$，若 $\{T_n\}$ 在 X 上一致收敛至 T，则 $\{T_n\}$ 依范数收敛至 T. **Rem.** 当 $\{T_n\}$ 强收敛至 T 时，$\{T_n\}$ 不一定依范数收敛至 T. 反例：取 ℓ^p 空间上的算子序列 $\{T_n\}$：$\forall x \in \ell^p, x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \|x\| = (\sum |\xi_i|^p)^{1/p}$. $T_1 = (\xi_1, \xi_2, \dots) = x$ $T_2 = (\xi_2, \xi_3, \dots)$ $\dots$ $T_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ 显然 $\|T_n x\| \leq \|x\|, T_n$ 有界。(1) $\forall x \in \ell^p, \|T_n x\| = (\sum_{i=n}^{\infty} |\xi_i|^p)^{1/p} \to 0, T_n$ 强收敛至 $T_0 = 0$. (2) 取 $x_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$，其中仅有第 n 项为 1，则 $\|x_n\| = 1$. 于是 $\|T_n x_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \geq \sup \|T_n x_n\| = 1$，此时不依范数收敛。

§4.4 Banach 空间上算子的进一步性质

一、几个基本定理

Thm 1. (逆算子定理) 设 X 和 X_1 都是 Banach 空间，且 $T \in B(X \to X_1)$，若 T 是 $X \to X_1$ 的一一映射算子，则 T^{-1} 是 $X_1 \to X$ 的有界线性算子。**Rem.** T 不是 Banach 空间上的有界一一线性算子，则 T^{-1} 不一定是有界算子。反例：$C[0, 2\pi]$ 上定义范数：$\forall x = x(t) \in C[0, 2\pi], \|x\|_1 = \max_{t \in [0, 2\pi]} |x(t)|$，则 $C[0, 2\pi]$ 是 Banach 空间。取 X 为 $[0, 2\pi]$ 上所有有连续导数的函数 $y(t)$，按 $C[0, 2\pi]$ 上范数仍构成赋范空间，但可以证明 X 不是 Banach 空间。定义 $C[0, 2\pi] \to X$ 的有界线性算子 T: $\forall x = x(t) \in [0, 2\pi]$，$Tx = \int_0^t x(s) ds \in X, \|Tx\|_1 = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\int_0^t x(s) ds| \leq \|x\|_1 \cdot 2\pi$. 表明 T 是有界算子。逆算子 T^{-1}: $\forall y(t) \in X, T^{-1} y = y'(t) \in C[0, 2\pi]$. 取 $y_n(t) = \sin nt, y_n'(t) = n \cos nt, \|T^{-1} y_n\|_1 = \sup \|T^{-1} y_n\| \geq n \|y_n\|_1$.

二、Banach 共鸣定理

1. 定义 Def. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都是线性空间 X 的范数，若 $\exists M > 0, \forall x \in X$ 都有 $\|x\|_1 \leq M \|x\|_2$，则称 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$. 等价定义：设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都是赋范空间 X 的范数，则 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset X$ 且 $\|x_n\|_2 \to 0$ 都有 $\|x_n\|_1 \to 0$.

2. 引理 Lem. 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间，且 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$，则 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

证.
$\exists M > 0, \forall x \in X$ 都有 $\|x\|_1 \leq M \|x\|_2$. 定义 $(X, \|\cdot\|_2)$ 到 $(X, \|\cdot\|_1)$ 的线性算子 $T_0 : x \to x$. 则 $\|T_0 x\|_1 = \|x\|_1 \leq M \|x\|_2$，即 T_0 是有界线性算子。由 Thm 1, T_0^{-1} 也是有界线性算

子，即 $\exists M>0,\|T_0^{-1}y\|_2\le M\|y\|_1$. 因此 $\|x\|_2\le M\|x\|_1$，即 $\|\cdot\|_1\sim\|\cdot\|_2$.

3. Banach 共鸣定理 Thm 2. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$(X_1,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，若对 $B(X\to X_1)$ 中一个子集族 $\{T_\alpha\}=\{T_\alpha\in B:\alpha\in I\}$ 满足 $\forall x\in X$，都有 $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|<\infty$，则 $\{T_\alpha\}$ 是一致有界的：$\exists M>0,\forall\alpha\in I,\|T_\alpha\|\le M$.

证.
定义 X 上另一个范数 $\|\cdot\|_1$: $\forall x\in X,\|x\|_1=\|x\|+\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|$. 显然 $\|\cdot\|_1$ 是范数，下证 $(X,\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间：$\forall\{x_n\}\subset(X,\|\cdot\|_1)$ 且 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 基本列，$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n,m>N$ 时 $\|x_n-x_m\|_1=\|x_n-x_m\|+\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x_n-T_\alpha x_m\|<\varepsilon$, 故 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$. 又如 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，故 $\{x_n\}$ 收敛，记 $x_n\to x_0$. 由 T_α 是连续算子，$T_\alpha x_n\to T_\alpha x_0$. 令 $m\to\infty$，有 $\|x_n-x_0\|\to 0$，且 $\forall\alpha\in I,\|T_\alpha x_n-T_\alpha x_0\|\le\varepsilon$. 于是有 $x_n\to x_0$，即 $\{x_n\}$ 是收敛数列，$(X,\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间。由 Lem, $\|\cdot\|_1\sim\|\cdot\|$, 因此 $\exists M>0,\forall x\in X,\|x\|_1\le M\|x\|$. 由 $\|\cdot\|_1$ 定义知，$\forall x\in X,\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|\le M\|x\|$. $\forall\alpha\in I,\forall x\in X,\|T_\alpha x\|\le M\|x\|$, 故 $\|T_\alpha\|\le M$.

Cor. 设 X 和 X_1 都是 Banach 空间，$\{T_n\}\subset B(X\to X_1)$，若 $\forall x\in X,\{T_nx\}$ 收敛，则存在 $T_0\in B(X\to X_1)$ s.t. $\lim_{n\to\infty}T_n=T_0$.

证.
$\{T_nx\}$ 收敛，则存在 $y_0\in X_1$ 使 $\lim_{n\to\infty}T_nx=y_0$. 构造 T_0: $\forall x\in X,\lim_{n\to\infty}T_nx=T_0x$, 下证 T_0 有界：由共鸣定理，$\|T_nx\|$ 收敛，$\sup\|T_nx\|<+\infty,\exists M>0$ s.t. $\|T_n\|\le M$. 于是 $\|T_nx\|\le M\|x\|,\|T_0x\|\le M\|x\|$，即 T_0 有界。

4. 开映射定理 Thm 3. 设 X 和 X_1 都是 Banach 空间，$T\in B(X\to X_1)$，若 T 是满射，则 T 是一个开映射。

证.
略。

例 1. (共鸣定理的应用) 设 X 是由收敛数列全体所成集合，按数列坐标的加减和数乘运算成线性空间，定义范数：$\forall x=\{\xi_i\}\in X,\|x\|=\max|\xi_i|$. 若数列 $\{\alpha_i\}$ 满足 $\forall x=\{\xi_i\}\in X$, 都有 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$ 也绝对收敛。(1) $\forall x=\{\xi_i\}\in X,f(x)=\sum\alpha_i\xi_i,f$ 是有界线性泛函且 $\|f\|=\sum|\alpha_i|$.

证.
(1) 定义 X 上有界泛函 $\{f_n\}$: $\forall x=\{\xi_i\},f_1(x)=\alpha_1\xi_1,f_2(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\dots,f_n(x)=$

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i$, 显然 $\{f_n\}$ 是线性的。由于 $|f_n(x)| \le \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\cdot\|x\|, \{f_n\}$ 是 X 上的有界线性泛函，且 $\|f_n\| \le \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$. 取 $x_n = (s_1,\dots,s_n,0,\dots,0), \alpha_i > 0$ 时 $s_i = 1, \alpha_i < 0$ 时 $s_i = -1, \|x_n\| = 1$. 于是 $\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1}|f_n(x)| \ge |f_n(x_n)| = |\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i||$, 因此 $\|f_n\| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$. 由于 $f_n(x) \to \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i, \forall x \in X$, 即 $\sup|f_n(x)| < \infty$. 由共鸣定理，$\|f_n\|$ 一致有界：$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \le M$. 即 $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \le M, \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ 绝对收敛。(2) 定义 X 上泛函：$\forall x = \{\xi_i\} \in X, f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$. 由于 $|f(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\cdot\|x\|, \|f\| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$. 取上面定义的 x_n, 则 $\|f\| = \sup_{\|x\|=1}|f(x)| \ge |f(x_n)| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \to \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$. 因此 $\|f\| = \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$.

Rem. (1) 例 1 中的 X 是一个 Banach 空间，是 ℓ^∞ 的一个线性子空间。(2) 若将 X 换为 ℓ^∞，结论显然成立。

§4.5 延拓定理及某些线性泛函的表示

一、Hahn - Banach 延拓定理

Thm 1. 设 X 是赋范空间，X_1 是 Banach 空间，G 是 X 的一个稠密线性子空间，若 $T_0 \in B(G \to X_1)$，则 T_0 可延拓为 $X \to X_1$ 上的有界线性算子 T，满足：(1) $\forall x \in G, Tx = T_0x$ (2) $\|T\|_X = \|T_0\|_G$ (3) 延拓是唯一的。

证.
(1) 根据稠密定义，$\forall x \in X, \exists x_n \in G, x_n \to x$. 由 $\|T_0x_n - T_0x_m\| \le \|T_0\|\|x_n - x_m\|$ 知，$\{T_0x_n\}$ 也是 Cauchy 基本列。记 $T_0x_n \to y_x \in X_1$, 定义 $X \to X_1$ 的线性算子 T: $\forall x \in X, Tx = y_x = \lim_{n\to\infty}T_0x_n$. 由于 $\|Tx\| = \lim\|T_0x_n\| \le \|T_0\|_G\cdot\|x\| \to \|T_0\|_G\cdot\|x\|$ (不能取等?). 因此 T 是 $X \to X_1$ 上的有界线性算子，且 $x \in G$ 时 $Tx = T_0x$. (2) 由 (1) 知，$\|T\|_X \le \|T_0\|_G$. 又根据定义，$\|T\|_X = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \ge \sup_{x\in G}\|Tx\| = \|T_0\|_G$. 即 $\|T\|_X = \|T_0\|_G$. (3) 若存在 $T_1 \in B(X \to X_1), x \in G$ 时 $T_1x = Tx$. 当 $x \in X$ 且 $x \notin G, \exists x_n \in G, x_n \to x, T_1x_n \to T_1x, T_1x_n \to Tx$. 此时 $Tx_n = T_1x_n$, 即 $Tx = T_1x$.

Thm 2. 设 X 是一个赋范线性空间，G 是 X 的一个线性子空间，$\forall T_0 \in B(G \to \mathbb{R})$，$G$ 上任一个有界线性泛函可延拓为 X 上任一个有界线性泛函 F，满足：(1) $\forall x \in G, F(x) = f(x)$. (2) $\|F\|_X = \|f\|_G$.

证.
略。

Rem. (1) 当 G 在 X 中稠密时，延拓得 F 是唯一的，否则不一定。反例：在 $\mathbb{R}^2$ 上定

义范数：$\forall x=(\xi_1,\xi_2),\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$. 取 $\mathbb{R}^2$ 的线性子空间：$G=\{(\xi_1,0):(\xi_1,0)\in\mathbb{R}^2\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中不稠密。定义 G 上的有界线性泛函 f: $\forall x=(\xi_1,0)\in G, f(x)=\xi_1$. 显然 f 有界：$|f(x)|=|\xi_1|=\|x\|\le\|x\|$. 又取 $x_0=(1,0)$，则 $\|f\|=\sup|f(x)|\ge|f(x_0)|=1$，因此 $\|f\|=1$. 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的线性泛函 F_α: $\forall x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2, F_\alpha(x)=\xi_1+\alpha\xi_2$. 其中 $0<\alpha<1$，此时 $|F_\alpha(x)|\le|\xi_1|+|\alpha||\xi_2|=\|x\|\le\|x\|$. 于是 $\|F_\alpha\|\le 1$，取 $x_0=(1,0)$，同样有 $\|F_\alpha\|=\sup|F_\alpha(x)|\ge|F_\alpha(x_0)|=1$. 容易验证 $x\in G$ 时 $F_\alpha(x)=f(x),\forall\alpha$ 满足 $0<\alpha<1$. 因此有无穷多个延拓，表明延拓不唯一。

二、Banach 空间上有界线性算子举例

1. $L^p[a,b]$ 上的有界线性算子表示形式 ($p>1$) Thm 3. 设 f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函，存在唯一 $y(t)\in L^q[a,b]$, 使 $\forall x\in L^p[a,b], f(x)=\int_a^b y(t)x(t)dt$，且 $\|f\|=\|y\|_q$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证.
略。

Rem. $L^p[a,b]$ 的共轭空间与 $L^q[a,b]$ 建立了保范数的同构映射。这种保范同构的赋范空间看作同一个空间。**Cor.** $L^p[a,b]^*=L^q[a,b]$.

2. ℓ^p 上有界线性泛函表示形式 Thm 4. 设 f 是 ℓ^p 上的有界线性泛函，则存在唯一 $y=\{\eta_i\}\in\ell^q$, 使 $\forall x=\{\xi_i\}\in\ell^p, f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\xi_i$, 且 $\|f\|=\|y\|_q$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 且 $(\ell^p)^*=\ell^q$. **Rem.** (1) $L^1[a,b]^*=L^\infty[a,b]$. (2) $(\ell^1)^*=\ell^\infty$.

3. ℓ^1 上有界线性泛函表示形式 Thm 5. 设 f 是 ℓ^1 上的有界线性泛函，则存在唯一 $y=\{\eta_i\}\in\ell^\infty$, 使 $\forall x=\{\xi_i\}\in\ell^1, f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\xi_i$, 且 $\|f\|=\|y\|_1$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. **Cor.** $(\ell^1)^*=\ell^\infty\Leftrightarrow(\ell^\infty)^*=\ell^1$.

4. $C[a,b]$ 上有界线性泛函表示形式 Thm 6. 设 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函,则存在唯一 $y\in V[a,b]$, 使 $\forall x=x(t)\in C[a,b], f(x)=\int_a^b x(t)dy(t)$, 且 $\|f\|=\|y\|_1$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (注：此处笔记公式可能有笔误，应为 Stieltjes 积分) **Rem.** 这里 $V[a,b]$ 是 $[a,b]$ 的所有有界变差函数所成线性空间，其范数定义为：$\forall y=y(t)\in V[a,b],\|y\|=|y(a)|+\bigvee_a^b(y)$.

例 2. 设 $\alpha(t)$ 是 $[a,b]$ 的可测函数，若 $\forall x=x(t)\in L^p[a,b],\int_a^b\alpha(t)x(t)dt$ 存在，则 $\alpha(t)\in L^q[a,b]$，且 $f(x)=\int_a^b\alpha(t)x(t)dt$ 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函。

证.
记 $\alpha_n(t)=\begin{cases}\alpha(t),|\alpha(t)|=n\\0,\alpha(t)>n\end{cases}$ $,\alpha_n(t)\to\alpha(t)$. $\forall x(t)\in L^p[a,b],\alpha_n(t)x(t)\to\alpha(t)x(t)$, 记 $F_n(x)=\int_a^b\alpha_n(t)x(t)dt$ 有界。由控制收敛定理，$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\int_a^b\lim\alpha_n(t)x(t)dt=$

$\int_a^b \alpha(t)x(t)dt$. 由共鸣定理，$\exists$ 有界线性算子 $f \in L^p[a,b]^*, \forall x \in L^p[a,b]$，都有 $f(x) = \int_a^b \alpha(t)x(t)dt$. 由 Thm 3 知，$\alpha(t) \in L^q[a,b]$.

§5 Hilbert 空间

§5.1 内积空间与 Hilbert 空间的基本性质

一、内积空间的定义与基本性质

1. 内积空间的定义 Def. 设 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一线性空间，在 H 上定义二元函数 $(x,y)\in\mathbb{K}$, 满足条件：(1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (2) $(x,x)\geq 0,(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0\in H$ (3) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)$ (4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ 则称 (x,y) 是 H 上的内积，定义了内积的线性空间称为内积空间。例如，$\mathbb{R}^n$ 中定义内积：$x=\{\xi_i\},y=\{\eta_i\},i=1,\ldots,n$ 定义 $(x,y)=\sum_{i=1}^n\xi_i\eta_i$. 显然，$(x,y)$ 是内积。

2. 内积空间的基本性质设 H 是内积空间，则 $\forall x,y\in H$，有：(这里记 $\|x\|^2=(x,x)$) (1) $(x,0)=(0,x)=0$ (2) $|(x,y)|^2\leq(x,x)\cdot(y,y)$ (Cauchy - Schwarz 不等式) (3) (平行四边形法则) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (4) (极化恒等式) 实数域上的情形：$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$. 特别地，$(x,x)=\frac{1}{4}(2x,2x)$.

二、Hilbert 空间

1. 定义 Def. 设 H 是一个内积线性空间,其内积 (x,y) 可导出一个范数:$\forall x\in H,(x,x)=\|x\|^2$，则该内积空间变成赋范线性空间。**Rem.** 内积空间也看成赋范空间。

2. 性质： (1) 上面内积空间中成立的极化恒等式中 $\|\cdot\|$ 确实为范数。(2) 任意内积空间的内积是连续的：$\forall\{x_n\}\in H,\{y_n\}\in H,x_n\to x_0,y_n\to y_0$，则 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$.

证.
$|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|=|(x_n,y_n-y_0)+(x_n-x_0,y_0)|\leq\|x_n\|\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\|y_0\|$ $\leq|(x_n,y_n)-(x_0,y_n)|+|(x_0,y_n-y_0)|\leq\|x_n-x_0\|\|y_n\|+\|x_0\|\|y_n-y_0\|$ 由 $\{\|y_n\|\}$ 有界，令 $n\to\infty$ 有 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$.

2. Hilbert 空间 Def. 若内积空间 H 诱导成的赋范空间是完备的，则称 H 是 Hilbert 空间。**Thm.** 设 H 是赋范线性空间，则 H 上的范数能诱导内积使 $(x,x)=\|x\|^2\Leftrightarrow\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

证.
$\Leftarrow$: 构造内积函数 $(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$. 证明 (x,y) 满足内积的四条性质。$\Rightarrow$: 显然。

例 1. 赋范空间 $C[a,b]$ 上不能诱导内积 (使 $(x,x)=\|x\|^2=(\max_{t\in[a,b]}|x(t)|)^2$).

证.
取 $[a,b]=[0,\frac{\pi}{2}], x(t)=\sin t, y(t)=\cos t$. 则 $\|x\|=1, \|y\|=1, \|x+y\|=\max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}|\sin t+\cos t|=\max|\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})|=\sqrt{2}$. $\|x-y\|=\max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}|\sin t-\cos t|=\max|\sqrt{2}\sin(t-\frac{\pi}{4})|=1$. 这里显然 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. 即 $C[0,\frac{\pi}{2}]$ 不能诱导成内积空间。

三、Hilbert 空间举例

1. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 可诱导内积，为 Hilbert 空间。$\forall x=\{\xi_i\}\in\mathbb{R}^n, y=\{\eta_i\}\in\mathbb{R}^n, (x,y)=\sum_{i=1}^n \xi_i\eta_i$. 2. $L^2[a,b]$ 可诱导内积为 Hilbert 空间。$\forall x,y\in L^2[a,b], (x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$. 3. ℓ^2 可诱导内积为 Hilbert 空间。$\forall x=\{\xi_i\}\in\ell^2, y=\{\eta_i\}\in\ell^2, (x,y)=\sum_{i=1}^\infty \xi_i\eta_i$.

Rem. 当 $p\neq 2$ 时 $L^p[a,b]$ 不能诱导内积成为内积空间。取 $x(t)=\begin{cases}1, t\in[a,\frac{a+b}{2}]\\ 0, t\in(\frac{a+b}{2},b]\end{cases}, y(t)=\begin{cases}0, t\in[a,\frac{a+b}{2}]\\ 1, t\in(\frac{a+b}{2},b]\end{cases}$. $\|x\|=[\int_a^b|x(t)|^p dt]^{1/p}=(\frac{b-a}{2})^{1/p}, \|y\|=[\int_a^b|y(t)|^p dt]^{1/p}=(\frac{b-a}{2})^{1/p}$. $\|x+y\|=(b-a)^{1/p}, \|x-y\|=(b-a)^{1/p}$. 易知 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

§5.2 内积空间的正交分解定理和 Riesz 表示定理

一、内积空间中正交的基本概念与性质

1. 正交 Def. 设 H 是一个内积空间。(1) 若 $x,y\in H, (x,y)=0$，则称 x 与 y 正交，记为 $x\perp y$. (2) 设 $M\subset H, x_0\in H$，若 x_0 与 M 中每个元素都正交，则 x_0 与 M 正交，记为 $x_0\perp M$. (3) 设 $M\subset H, N\subset H$，若 M 中每个元素与 N 中每个元素都正交，则 M 与 N 正交，记为 $M\perp N$. (4) 设 $M\subset H, H$ 中与 M 正交的所有元素的集合为正交补，记为 $M^\perp$. **Rem.** (1) $x_0\perp H\Leftrightarrow x_0=0$. (2) $M\perp M^\perp=\emptyset$ 或 $\{0\}$. (3) M 与 $M^\perp$ 中至少一共包含 0.

2. 有关性质 (1) 勾股定理：设 $x,y,z\in H$ 且 $y\perp z, x=y+z$，则 $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$. (2) 设 M 是 H 的一个稠密子集，且 $x_0\in H, x_0\perp M$，则 $x_0\perp H$，即 $x_0=0$.

证.
$\forall x\in H, \exists\{x_n\}\subset M, x_n\to x$，由 $x_0\perp M$ 知 $x_0\perp x_n$. 因此 $(x_0,x_n)=0\Rightarrow(x_0,x)=0, x_0\perp x$, 即 $x_0\perp H, x_0=0$.

(3) 设 $M\subset H$，则 $M^\perp$ 是闭线性子空间。

证.

(1) $\forall x, y \in M^{\perp}, y \in M^{\perp}$, 取非零元 x_0 s.t. $x_0 \perp x, x_0 \perp y$. 则 $(x+y, x_0) = (x, x_0) + (y, x_0) = 0$, 即 $x+y \perp x_0, x+y \in M^{\perp}$. $\forall x \in M^{\perp}, \alpha \in K, \forall x_0 \in M, x_0 \perp x$ 有：$(\alpha x, x_0) = 0$. 此时 $(\alpha x, x_0) = \alpha(x, x_0) = 0$, 即 $\alpha x \in M^{\perp}$. 综上 $M^{\perp}$ 是线性空间。(2) $\forall \{x_n\} \subset M^{\perp}, x_n \to x_0$ 有：$\forall x \in M, (x, x_n) = 0$. 由内积连续性，$(x, x_0) = 0$, 即 $x_0 \in M^{\perp}$.

二、正交分解定理与 Riesz 表示定理

Def. 设 H 是内积空间，$M \subset H, N \subset H$ 且 $M \perp N$，则称 $\{x+y : x \in M, y \in N\}$ 为 M 与 N 的直和，记为 $M \oplus N$. **Thm 1.** 设 H 是内积空间，$M \subset H$，若 M 是 Hilbert 空间，则 $\forall x \in H, \exists! x_0 \in M$ 且 $x_1 \in M^{\perp}$ 使 $x = x_0 + x_1$. **Cor 1.** 设 H 是内积空间，$M \subset H$ 是 Hilbert 空间，则 $H = M \oplus M^{\perp}$. **Cor 2.** 设 H 是 Hilbert 空间，M 是 H 的闭子集，则 $H = M \oplus M^{\perp}$ 且 H 中元素表示唯一。**Rem.** Thm 1 中分解 $x = x_0 + x_1, x_0 \in M, x_1 \in M^{\perp}$，可以称 x_0 是 x 的投影。因此正交分解定理也称为投影定理。

Thm 2. 设 H 是 Hilbert 空间，f 是 H 上的一个有界线性泛函，则存在唯一 $x_f \in H$ s.t. $f(x) = (x, x_f)$，且 $\|f\| = \|x_f\|$.

§5.3 内积空间的正交系与正交基

一、内积空间的正交系与正交基

1. 定义 Def. 设 H 为内积空间，$\{e_\alpha\} = \{e_\alpha : e_\alpha \in H, \alpha \in I\} \subset H$，若 $\{e_\alpha\}$ 中任意两个元素 x 与 y 都正交，则称 $\{e_\alpha\}$ 是 H 的一个正交系。若正交系 $\{e_\alpha\}$ 中任意元素 x 满足 $\|x\| = 1$，则称 $\{e_\alpha\}$ 为标准正交系。**Def.** 若 $\{e_\alpha\}$ 是内积空间 H 的一个标准正交系，满足 $\{e_\alpha\}$ 的生成空间在 H 中稠密，则称 $\{e_\alpha\}$ 是 H 的标准正交基。

2. 例子 (1) 在 $\mathbb{R}^n$ 中 $e_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}, e_2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, e_n = \{0, \ldots, 0, 1\}$,$\{e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基。(2) 在 ℓ^2 中，$e_1 = \{1, 0, \ldots\}, \ldots, e_n = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}, \ldots, \{e_n\}$ 是 ℓ^2 的一个标准正交基。

证.

$\forall x \in \ell^2, x = \{\xi_i\}$，取 $x_n = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$. $x_n - x = \{0, \ldots, 0, -\xi_{n+1}, -\xi_{n+2}, \ldots\}$，于是 $\|x_n - x\| = (\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0 (n \to \infty)$.

(3) 在 $L^2[0, 2\pi]$ (或 $L^2[-\pi, \pi]$) 中有标准正交系 (已证其正交性)：$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}$，这里 $[0, 2\pi]$ 中的内积定义为：$\forall x(t), y(t) \in$

$L^2[0,2\pi], (x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$, 此时也是标准正交基。

二、可数的标准正交系的性质

Rem. 标准正交系 $\{e_\alpha\}$ 中有限个元素或可数个元素统称为 $\{e_\alpha\}$ 可数。**Thm 1.** 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 H 的一个可数标准正交系，则 $\forall x \in H$，都有 Bessel 不等式：$\sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2$.

证.
$0 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|^2 = (x - \sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i, x - \sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2$
$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2$，由正项级数收敛性，$\sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2$.

Thm 2. (Bessel 不等式的等号成立条件) 设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 H 的一个标准正交系，则 Bessel 等式成立与下列条件的等价：(1) $x \in E$, E 是 $\{e_n\}$ 的闭包；(2) $\sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2 = \|x\|^2$; (3) $x = \sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$.

证.
略。

Thm 3. (Schmidt 正交化方法) 设 H 是内积空间，A 是 H 的可数子集且 A 中含非零元，则存在一个可数正交系 $\{e_n\}$ s.t. $\overline{\{e_n\}} = \overline{A}$.

Cor 1. 任意非平凡内积空间存在标准正交系。**Cor 2.** 可分的内积空间一定存在可数的标准正交基。

三、$L^2[0,2\pi]$ 上的 Bessel 等式

Lem 1. $C[0,2\pi]$ 在 $L^2[0,2\pi]$ 上稠密。**Lem 2.** 有理系数的三角多项式函数在 $C[0,2\pi]$ 上稠密。**Cor.** (三角函数系 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \cos t, \sin t, \ldots\}$ 在 $L^2[0,2\pi]$ 上稠密)。

Thm 4. 三角函数系 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \cos t, \sin t, \ldots\}$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 上的一个标准正交基，因此 $\forall x \in L^2[0,2\pi], x = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_i)e_i = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos it + b_i \sin it$. 事实上是 Fourier 级数，$a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos itdt, b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin itdt$. **Rem.** 这里的收敛是依范数收敛，同时也是几乎处处收敛的 (Lusin)。